中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

探究精神獎

050406

醉後生還者——醉漢走路問題的二維延伸探討

學校名稱：桃園市立武陵高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 謝沅瓏 高二 羅緯修 高二 朱誼學	陳依鴻

關鍵詞：卡特蘭數、無窮級數、生成函數

摘要

本文主要是在探討二維醉漢走路問題的各種情形。 參考一維醉漢走路的原始問題「一醉漢從距離懸崖一步的位置出發，另一端則是無窮延伸的道路，醉漢在道路上每步以一固定機率不停的前後隨機移動，直到落下懸崖則停止移動，試求醉漢落下懸崖機率為何？」我們將其拓展至二維平面上，利用一路領先問題的概念以及無窮級數的生成函數，探討二維一邊懸崖、兩邊懸崖以及三邊懸崖的情況下，不同移動機率組合，醉漢落下懸崖的機率，並發現 Catalan Series 是研究二維醉漢走路問題很有力的工具。

壹、 研究動機

「有一個醉漢在直線上不停地前後移動。假設他站在距離山崖一步的位置，後退一步就會落下懸崖。並且設他後退一步(即往懸崖方向移動一步)之機率為P，則前進一步之機率為$1-P$。求出該醉漢落下懸崖之機率為何?」在高一的數學課堂上，老師提出上述問題作為我們專題研究的參考題材，我們對此深感興趣，除了找出此問題的解外，也嘗試把一維的懸崖推廣成有四個移動方向的二維的平面，並希望能推得在二維平面掉下懸崖的機率的一般化結論。

貳、 研究目的

一、 將一維的醉漢走路問題延伸成二維，並探討二維平面上有一個懸崖的情況，醉漢落下懸崖的機率。

二、 探討二維平面上有二個懸崖的情況，醉漢落下懸崖的機率。

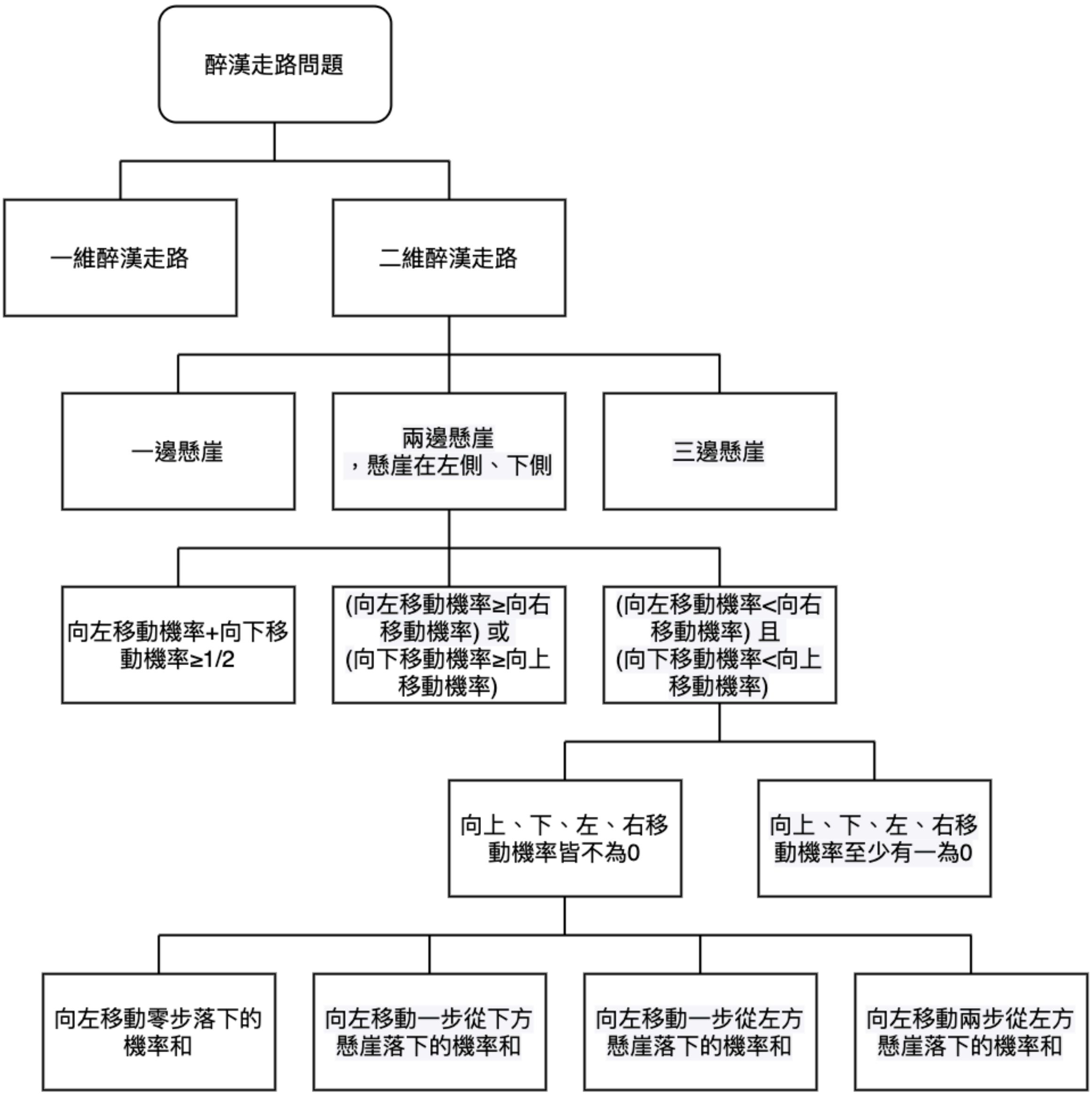
三、 探討二維平面上有三個懸崖的情況，醉漢落下懸崖的機率。

參、 研究設備其器材

紙、筆、筆記型電腦、Python 程式、excel

肆、 研究過程或方法

一、 研究架構圖



二、　名詞定義

（一）醉漢：

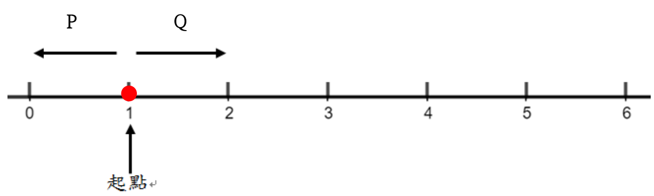
座標上的一動點

（二）走路：

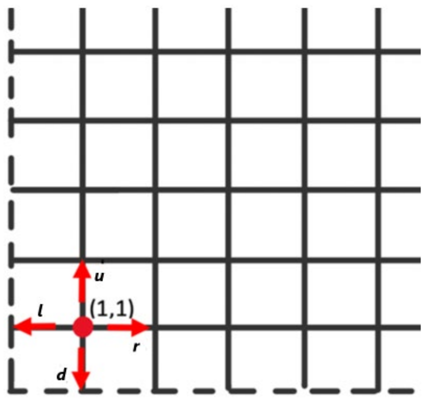
在一維狀況，醉漢在實數線上從$x=1$出發開始移動，每次移動 1 單位，若醉漢當前在$x=m$，$m\geq 1$，則每一次有P的機率移動到$x=m-1$，有Q的機率移動到$x=m+1$，其中$P+Q=1$。

在二維狀況，醉漢從點$(1,1)$出發開始移動，若醉漢當前在點(m,n)，$m,n\geq 1$，則每一次有l的機率移動到點$(m-1,n)$，有d的機率移動到點$(m,n-1)$，有r的機率移動到點$(m+1,n)$，有u的機率移動到點$(m,n+1)$。其中$l+d+r+u=1$。

一維醉漢走路方式



二維醉漢走路方式



（三）懸崖 ：

1. 在一維狀況，醉漢僅在x軸上走路，懸崖為一個點，定義點$x=0$為懸崖，醉漢一接觸到懸崖就會落下懸崖死亡(即停止走路)。
2. 在二維狀況，醉漢在xy平面上走路，一個懸崖為一條水平或鉛直線，不同情況有不同的懸崖。醉漢一接觸到懸崖就會落下懸崖死亡(即停止走路)。

三、　引理

（一）引理 1：m, n一路領先(不曾落後)公式

假設有m個向右箭頭，n個向左箭頭排成一列，且從第一個依序任意取k個箭頭$(m, n, k \in N$且$k \le m+n)$，其中向右箭頭之總數必大於或等於向左箭頭之總數，則所有可能的排列數共有。

$$C_m^{m+n} - C_{m+1}^{m+n} \text{ 種}$$

引用自[1]

（二）引理 2：卡特蘭數生成函數

卡特蘭數列$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$，$< C_n >$的遞迴關係式為：

$$C_0 = 1, \text{，} C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i} \text{，} for\ n \ge 0$$

卡特蘭數的生成函數為$c(x)$，$for\ x \ne 0$

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

令$c(x) \times c(x) = (C_0C_0) + (C_0C_1 + C_1C_0)x + (C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0)x^2 + \cdots$

$$= C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \cdots$$

$$= \frac{(C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots)}{x}$$

$$= \frac{(1 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots - 1)}{x}$$

$$\Rightarrow c(x) \times c(x) = \frac{(c(x) - 1)}{x}$$

$$\Rightarrow xc(x)^2 - c(x) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow c(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

因卡特蘭數滿足$\lim_{x \to 0^+} c(x) = C_0 = 1$，$c(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$不合

故卡特蘭數之生成函數為

$$c(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

根據比值審斂法求$c(x)$的收斂半徑：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}x^{n+1}}{C_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{(n+1)+1}\times C_{n+1}^{2(n+1)}\times x^{n+1}\right|}{\left|\frac{1}{n+1}\times C_n^{2n}\times x^n\right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{1}{n+2}\times\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}\right|}{\left|\frac{1}{n+1}\times\frac{(2n)!}{n!\,n!}\right|}\times|x|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|(2n+2)!\,n!|}{|(n+2)!\,(2n)!|}\times|x|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|(2n+1)(2n+2)|}{|(n+1)(n+2)|}\times|x|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|4n^2+6n+2|}{|n^2+3n+2|}\times|x| = |4x|$$

故在$|4x|<1$時收斂，此時$\frac{-1}{4}<x<\frac{1}{4}$，$R=\frac{1}{4}$

（三）引理 3：無窮級數$L(x,z)$的生成函數（參考[3]）

當

$$\frac{-1}{4}<\frac{x}{(1-z)^2}<\frac{1}{4}$$

時，可得以下算式

$$L(x,z)=\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{2m+q}{q}x^m\right)z^q=\frac{(1-z)-\sqrt{(1-z)^2-4x}}{2x}$$

（四）引理 4：若a_n是等比數列，公比為r，$-1<r<1$ 則

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{a_1}{1-r}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n\times a_n=\frac{a_1}{(1-r)^2}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2\times a_n=\frac{2a_1}{(1-r)^3}-\frac{a_1}{(1-r)^2}$

證明：

證明 2 式

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \times a_n = 1a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r \times n \times a_n = 1a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 + \cdots$$

兩式相減 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-r) \times n \times a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \ldots = \frac{a_1}{1-r}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n \times a_n = \frac{a_1}{(1-r)^2}$ 得證 ∎

證明 3 式

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \times a_n = 1a_1 + 4a_2 + 9a_3 + 16a_4 + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r \times n^2 \times a_n = 1a_2 + 4a_3 + 9a_4 + 16a_5 + \cdots$$

兩式相減 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-r) \times n^2 \times a_n = 1a_1 + 3a_2 + 5a_3 + 7a_4 + \cdots = \frac{2a_1}{(1-r)^2} - \frac{a_1}{1-r}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \times a_n = \frac{2a_1}{(1-r)^3} - \frac{a_1}{(1-r)^2}$ ∎

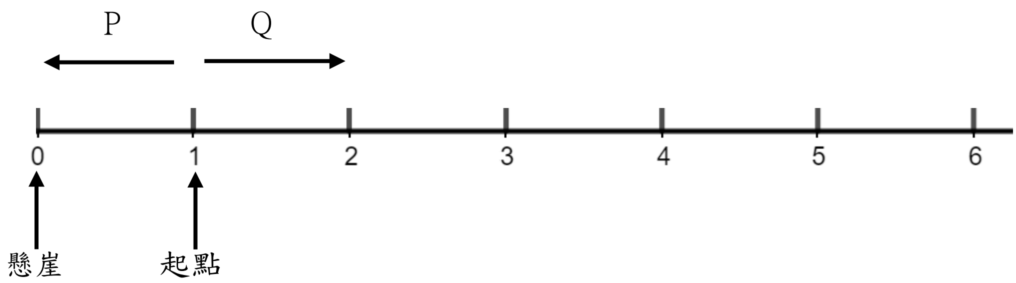
四、 一維醉漢走路問題

「有一醉漢，從距離懸崖邊一步的位置出發，另一端則是無窮延伸的道路，醉漢在道路上每步以一固定機率不停的前後隨機移動，他往懸崖走一步的機率為P，後退一步的機率為$1-P$，則醉漢最終落下懸崖的機率何？」此為歷史上經典的醉漢走路問題。而此問題有許多解法，然而網路上的解法均無法順利推廣至二維情況[5]。因此，此處我們使用卡特蘭數列的生成函數來解決一維醉漢走路問題，以推廣至二維情況。

（一）定理 1：

有一個醉漢在x軸上從$x=1$出發開始不停的前後移動，若醉漢當前在點$x=m$，$m \geq 1$，則每一次有P的機率移動到$x=m-1$，有Q的機率移動到$x=m+1$，其中$P+Q=1$。定義懸崖為$x=0$，該醉漢最終落下懸崖之機率$f(P)$為

$$\begin{cases} \text{當}\frac{1}{2} \leq P \leq 1：f(P)=1 \\ \text{當 } 0 \leq P < \frac{1}{2}：f(P)=\frac{P}{Q} \end{cases}$$



[證明]：

如上圖所示假設山崖為0，其他位置依序令為1,2,3, …

從第k位置出發，最後跌落山崖的機率為P_k, $k=0,1,2,\dots, 0 \leq P_k \leq 1$

可推出遞迴關係式

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_k = P \times P_{k-1} + (1-P) \times P_{k+1} (k \geq 1) \end{cases}$$

1. 當 $P=\frac{1}{2}$

如上圖所示假設山崖為0，其他位置依序令為1,2,3, …

從第k位置出發，最後跌落山崖的機率為P_k,$k=0,1,2,\dots , 0 \leq P_k \leq 1$

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_k = \frac{1}{2}P_{k-1} + \frac{1}{2}P_{k+1} (k \geq 1) \end{cases}$$

可知P_k為等差數列，假設$P_1 < 1$，該數列為遞減數列，則可推測出k夠大時$P_k < 0$

取$k > \frac{1}{1-P_1}$， $P_k = 1 + k(P_1 - 1) < 1 + \frac{1}{1-P_1}(P_1 - 1) = 0$

與$P_k \geq 0$矛盾，故$P_1 = 1 \;\Rightarrow\; f(P) = 1$

2. 當 $\frac{1}{2} \leq P \leq 1$

明顯地當$P > P'$時，$f(P) \geq f(P')$

因此$f(P)=1$，$for \frac{1}{2} \leq P \leq 1$

3. 當$0 < P < \frac{1}{2}$

醉漢落下懸崖必為奇數步數，令走了$2k+1$步跌落山崖的情形，可以發現恰好有C_k種($C_0, C_1, C_2, \dots C_n$即為卡特蘭數)

$$C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 2, \dots C_k = C_k^{2k} - C_{k+1}^{2k} = \frac{1}{k+1} C_k^{2k} \text{ ，} (k = 1,2, \dots)$$

故

$$f(P) = P + P^2(1-P) + 2P^3(1-P)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} C_k P^{k+1}(1-P)^k$$

根據引理 2，可用卡特蘭數之生成函數$c(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

令$P(1-P) = t, t \in \mathbb{R}$

則$f(P) = P + P^2(1-P) + 2P^3(1-P)^2 + 5P^4(1-P)^3 + \cdots$

$$= P\sum_{k=0}^{\infty} C_k P^k (1-P)^k = P\sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k = P \times \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$$

$$= P \times \frac{1-\sqrt{1-4P(1-P)}}{2P(1-P)} = \frac{1-\sqrt{1-4P(1-P)}}{2(1-P)}$$

$$= \frac{1-(1-2P)}{2(1-P)} = \frac{P}{1-P}$$

故 $f(P) = \frac{P}{Q}$

結論：

$$\begin{cases} \text{當} \frac{1}{2} \leq P \leq 1 \text{：} f(P) = 1 \\ \text{當} 0 \leq P < \frac{1}{2} \text{：} f(P) = \frac{P}{Q} \end{cases} \quad \blacksquare$$

五、 二維醉漢走路問題 —— 一邊懸崖

（一）定理 2：

二維平面上，有一醉漢從(1,1)的位置出發，每次只往左、下、右、上其中一個方向移動一單位長，若各點向左、下、右、上移動的機率分別為l, d, r, u，且只有一邊懸崖，當醉漢走到y軸視為落下懸崖，則醉漢落下懸崖的機率僅與l, r有關：

$$\begin{cases} \text{當} \frac{1}{2} \leq \frac{l}{l+r} \leq 1 \text{：落下懸崖機率為 } 1 \\ \text{當} 0 \leq \frac{l}{l+r} < \frac{1}{2} \text{：落下懸崖機率為} \frac{l}{r} \end{cases}$$

可視為一維的狀況討論。

[證明]：

設x,y平面上一點(m,n)，則該點出發，最後落下懸崖機率為$P(m,n)$，則

$P(m,n) = lP(m-1,n) + dP(m,n-1) + rP(m+1,n) + uP(m,n+1)$

明顯的可知 $P(m,n) = P(m,n+1) = P(m,n-1)$

$(1-d-u)P(m,n) = lP(m-1,n) + rP(m+1,n)$

$\because 1-d-u = l+r$

$\therefore P(m,n) = \dfrac{lP(m-1,n)}{(1-d-u)} + \dfrac{rP(m+1,n)}{(1-d-u)} = \dfrac{lP(m-1,n) + rP(m+1,n)}{l+r}$

數列$P(1,n), P(2,n), P(3,n)\ldots$的遞迴關係式與一維醉漢走路問題遞迴關係式相同，可知落下懸崖機率只與l,r大小有關。可得：

$$\begin{cases} \text{當}\frac{1}{2} \le \frac{l}{l+r} \le 1\text{：落下懸崖機率為 } 1 \\ \text{當 } 0 \le \frac{l}{l+r} < \frac{1}{2}\text{：落下懸崖機率為}\frac{l}{r} \end{cases} \quad \blacksquare$$

六、 二維醉漢走路問題 —— 二邊懸崖且 $ldru = 0$

二維平面上，有一醉漢從(1,1)的位置出發，每次只往左、下、右、上其中一個方向移動一單位長，各點向左、下、右、上移動的機率分別為l,d,r,u，定義x軸和y軸為懸崖。若$ldru = 0$，即l,d,r,u中至少有一為0時，討論醉漢落下懸崖的機率。

（一）若l,d,r,u中恰有一項為0

1. $l = 0$(或 $d = 0$)

根據定理 2，可視為一維醉漢走路問題，醉漢向懸崖移動的機率為$\frac{d}{d+u}\left(\text{或}\frac{l}{l+r}\right)$

再用定理 1 可推出落下懸崖機率

$$\begin{cases} \text{當}\dfrac{1}{2} \le \dfrac{d}{d+u}\left(\text{或}\dfrac{l}{l+r}\right) \le 1\text{：落下懸崖機率為 } 1 \\ \text{當 } 0 \le \dfrac{d}{d+u}\left(\text{或}\dfrac{l}{l+r}\right) < \dfrac{1}{2}\text{：落下懸崖機率為}\dfrac{d}{u}\left(\text{或}\dfrac{l}{r}\right) \end{cases}$$

2. $r = 0$(或 $u = 0$)

明顯可推出，醉漢落下懸崖機率為1

（二）若l,d,r,u中恰有兩項為0

1. $l = 0$ 且$r = 0$(或($d = 0$ 且$u = 0$))

可視為一維醉漢走路，醉漢向懸崖移動的機率為

$\frac{d}{d+u}$ (或$\frac{l}{l+r}$) 再用定理 1 可推出落下懸崖機率

$$\begin{cases}當\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{d}{d+u}\left(或\dfrac{l}{l+r}\right) \leq 1：落下懸崖機率為 1 \\ 當 0 \leq \dfrac{d}{d+u}\left(或\dfrac{l}{l+r}\right) < \dfrac{1}{2}：落下懸崖機率為\dfrac{d}{u}\left(或\dfrac{l}{r}\right)\end{cases}$$

2. $l = 0$ 且$u = 0$(或($d = 0$ 且$r = 0$))

明顯可推出，醉漢落下懸崖機率為1

3. $l = 0$ 且$d = 0$

明顯可推出，醉漢落下懸崖機率為0

4. $r = 0$ 且$u = 0$

明顯可推出，醉漢落下懸崖機率為1

（三）若l, d, r, u中恰有三項為0

1. $l = 0$ 且$d = 0$ 且$r = 0$(或($l = 0$ 且$d = 0$ 且$u = 0$))

醉漢落下懸崖機率為0

2. $d = 0$ 且$r = 0$ 且$u = 0$(或($l = 0$ 且$r = 0$ 且$u = 0$))

醉漢落下懸崖機率為1

七、 二維醉漢走路問題 —— 二邊懸崖 $\boldsymbol{l + d \geq \frac{1}{2}}$ 或$\boldsymbol{l \geq r}$ 或$\boldsymbol{d \geq u}$

（一）定理 3：

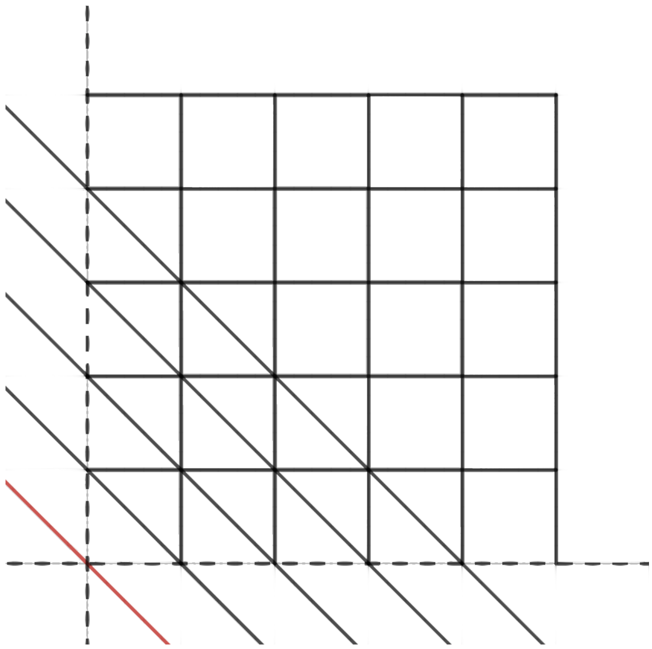
二維平面上，有一醉漢從(1,1)的位置出發，每次只往左、下、右、上其中一個方向移動一單位長，若各點向左、下、右、上移動的機率分別為l, d, r, u，定義x軸和y軸為懸崖，則當$l + d \geq \frac{1}{2}$，醉漢落下懸崖機率為1。

[證明]：

令路徑W為一個無窮點列，為該點從(1,1)出發，在二維平面中走路的過程，每次為向左下右上其中一個方向移動1單位，例如：

$$W = ((1,1), (1,0), (2,0), (2,1), (2,2)\ldots)$$

若在路徑W中第n步走到直線$x + y = k$，則下一步有$l + d$的機率走到直線$x + y = k - 1$，$r + u$的機率走到直線$x + y = k + 1$。可視為以k為變數的一維醉漢走路問題，從$k = 1$出發，每一步走到$k - 1$的機率為$l + d$，走到$k + 1$的機率為$r + u$。根據一維醉漢走路(定理 1)，當$l + d \geq r + u$時，則W路徑曾經經過直線$x + y = 0$的機率為1。



令$P_{xy軸}$為路徑W曾走到x軸或y軸的機率，$P_{x+y=0}$為路徑W曾走到直線$x+y=0$的機率。因路徑W曾走到x軸或y軸的情況包含路徑W曾走到直線$x+y=0$的情況。因此$P_{xy軸} \geq P_{x+y=0} = 1$，且$P_{xy軸} \leq 1$，可得$P_{xy軸} = 1$。 ∎

（二）**定理** 4：

二維平面上，有一醉漢從(1,1)的位置出發，每次只往左、下、右、上其中一個方向移動一單位長，若各點向左、下、右、上移動的機率分別為l, d, r, u，令x軸和y軸為懸崖，則當$l \geq r$(或$d \geq u$)時，醉漢落下懸崖的機率為1。

[證明]：

以下僅證明$l \geq r$的狀況，$d \geq u$的狀況同理可證

令路徑W為一個無窮點列，為該點從(1,1)出發，在二維平面中走路的過程，每次為向上下左右其中一個方向移動1單位。例如：

$$W = ((1,1),(1,0),(2,0),(2,1),(2,2)\ldots)$$

若W路徑第一次走到$x=0$(y軸)為第n項，則W路徑由(1,1)到第n項這$n-1$次走路的過程有n_l次向左、 n_d次向下、n_r次向右 、n_u次向上。

定義 $P_w = l^{n_l} \times d^{n_d} \times r^{n_r} \times u^{n_u}$

令$S_x = \{W為一路徑|\ W中有一項經過直線x=0\}$

令

$$P(S_x) = \sum_{W \in S_x} P_w$$

考慮路徑W中第n項走到$x=k$的情況，則下一步有l的機率走到直線$x=k-1$，有$d+$

u的機率走到直線$x=k$，有r的機率走到直線$x=k+1$。

根據定理 2，可知此路徑不受d、u機率影響，則當$l \geq r$時，路徑曾經過直線$x=0$的機率為1。故$P(S_x)=1$。路徑W曾走到x軸或 y軸的情況多於走到直線$x=0$的情況，因此醉漢落下懸崖的機率為1。 ∎

八、 二維醉漢走路問題 —— 二邊懸崖$l<r$且$d<u$，$ldru \neq 0$

在二維平面上，定義x軸和y軸為懸崖。有一醉漢從點(1,1)的位置出發，每次只往左、下、右、上其中一個方向移動一單位長，從各點向左、下、右、上移動的機率分別為l,d,r,u，若走到懸崖為第n步，移動的過程有n_l次向左、 n_d次向下、n_r次向右 、n_u次向上。因為醉漢從x軸或y軸落下，路徑最後一步必為向下或向左移動，只需考慮前幾步移動過程的排列。以$k(n_l,n_d,n_r,n_u)$表示在一次路徑中，直到最後一步之前，向右移動的步數恆大於或等於向左移動的步數，向上移動的步數恆大於或等於向上移動的步數(即前面步數不落下懸崖)的方法數。根據引理 1，$k(n_l,n_d,n_r,n_u)$的值如下

case1.路徑最後從x軸懸崖落下 $n_d=n_u+1$且$n_r \geq n_l$

$$k(n_l,n_d,n_r,n_u)=\begin{cases} C_{n_l+n_r}^{n_l+n_d-1+n_r+n_u}\left(C_{n_r}^{n_l+n_r}-C_{n_r+1}^{n_l+n_r}\right)\left(C_{n_u}^{(n_d-1)+n_u}-C_{n_u+1}^{(n_d-1)+n_u}\right) & ,若n_l \geq 1 且 n_d \geq 2 \\ C_{n_r}^{n_r+n_d-1+n_u}\left(C_{n_u}^{(n_d-1)+n_u}-C_{n_u+1}^{(n_d-1)+n_u}\right) & ,若n_l = 0 且 n_d \geq 2 \\ C_{n_r}^{n_l+n_r}-C_{n_r+1}^{n_l+n_r} & ,若n_l \geq 1 且 n_d = 1 \\ 1 & ,若n_l = 0 且 n_d = 1 \end{cases}$$

表：1

case2.路徑最後從y軸懸崖落下,可由圖形對稱性得知$k(n_l,n_d,n_r,n_u)=k(n_d,n_l,n_u,n_r)$

又以函數$P_n(n_l,n_d,n_r,n_u)$表示直到第n步，$n = n_l+n_d+n_r+n_u$ 才落下懸崖的所有情形機率總和。可得：

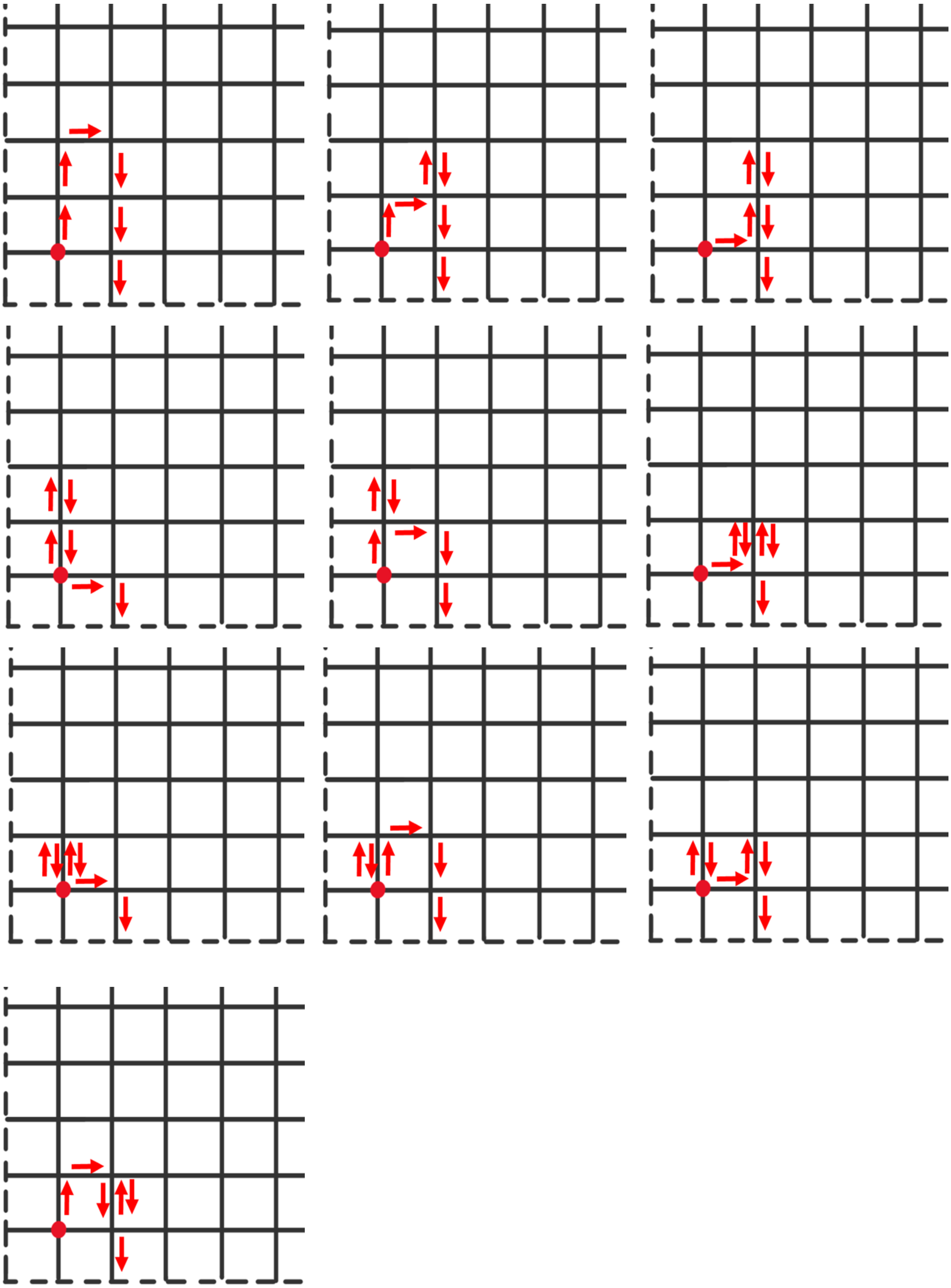
$$P_n(n_l,n_d,n_r,n_u)=k(n_l,n_d,n_r,n_u)\times l^{n_l}\times d^{n_d}\times r^{n_r}\times u^{n_u}$$

$$\begin{cases} 若\ n_d=n_u+1 \Rightarrow 則醉漢從x軸落下 \\ 若\ n_l=n_r+1 \Rightarrow 則醉漢從y軸落下 \end{cases}$$

以$P_6(0,3,1,2)$為例，移動過程0次向左、 3次向下、1次向右 、2次向上，醉漢從x軸落下，移動過程共有$\left[\binom{4}{2}-\binom{4}{3}\right]\binom{5}{1}$可能，這些情況的機率總和為

$$P_6(0,3,1,2) = \left[\binom{4}{2} - \binom{4}{3}\right]\binom{5}{1}(ud)^2rd = 10(ud)^2rd$$

10 種移動過程，如下所示



利用$P(n_l,n_d,n_r,n_u)=k(n_l,n_d,n_r,n_u)\times l^{n_l}d^{n_d}r^{n_r}u^{n_u}$欲求得醉漢從$x$軸落下的機率和

令$n_l=n$，$n_r=q+n$，$n_u=n_d-1=m$，整理表 1 中的各式，

其中

$$(*)C_{n_r}^{n_l+n_r}-C_{n_r+1}^{n_l+n_r}$$

$$=\frac{(q+2n)!}{(q+n)!\,n!}-\frac{(q+2n)!}{(q+n+1)!\,(n-1)!}=\frac{(q+2n)!}{(q+n)!\,n!}\left[1-\frac{n}{(q+n+1)}\right]=\frac{q+1}{q+n+1}\binom{q+2n}{n}$$

$$(**)C_{n_u}^{(n_d-1)+n_u}-C_{n_u+1}^{(n_d-1)+n_u}=\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}$$

即為卡特蘭數列

$$(***)\ C_{n_l+n_r}^{n_l+(n_d-1)+n_r+n_u}=\binom{2m+q+2n}{2m}$$

綜合三式，從x軸落下的機率和可整理成：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q+1}{(m+1)(q+n+1)}\binom{2m}{m}\binom{q+2n}{n}\binom{2m+q+2n}{2m}(ud)^m r^q (rl)^n\, d\right)\right)$$

利用$P(n_l,n_d,n_r,n_u)=k(n_l,n_d,n_r,n_u)\times l^{n_l}d^{n_d}r^{n_r}u^{n_u}$得出醉漢從$y$軸落下的機率和

令$n_d=n$，$n_u=n+q$，$n_r=n_l-1=m$，整理表 2 中的各式，

$(i)C_{n_r}^{(n_l-1)+n_r}-C_{n_r+1}^{(n_l-1)+n_r}=\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}$即為卡特蘭數列

$$(ii)C_{n_u}^{n_d+n_u}-C_{n_u+1}^{n_d+n_u}$$

$$=\frac{(q+2n)!}{(q+n)!\,n!}-\frac{(q+2n)!}{(q+n+1)!\,(n-1)!}=\frac{(q+2n)!}{(q+n)!\,n!}\left[1-\frac{n}{(q+n+1)}\right]=\frac{q+1}{q+n+1}\binom{q+2n}{n}$$

$$(iii)C_{(n_l-1)+n_r}^{(n_l-1)+n_d+n_r+n_u}=\binom{2m+q+2n}{2m}$$

綜合三式，從y軸落下的機率和可整理成：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q+1}{(m+1)(n+q+1)}\binom{2m}{m}\binom{2n+q}{n}\binom{2m+q+2n}{2m}(ud)^n u^q (rl)^m\, l\right)\right)$$

故醉漢落下懸崖的總機率和即為

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q+1}{(m+1)(n+q+1)}\binom{2m}{m}\binom{2n+q}{n}\binom{2m+q+2n}{2m}\left((ud)^m r^q (rl)^n d+(ud)^n u^q (rl)^m l\right)\right)\right)$$

由於此式的計算將使用生成函數的技巧，為了方便起見可以令

$$J(x,z,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q+1}{(m+1)(n+q+1)}\binom{2m}{m}\binom{2n+q}{n}\binom{2m+q+2n}{2m}x^m z^q y^n\right)\right)$$

而醉漢落下懸崖的總機率和即為$J(ud,r,rl)d+\ J(rl,u,ud)l$。

更進一步$J(x,z,y)$ 與另外兩個無窮級數$c(x)$ (引理 2)， $L(x,z)$ (引理 3)，有下面的關係

$J(x,z,y)$中，考慮$n=0$ 的級數和，此式即為引理 3 中的函數$L(x,z)$

$$\left(\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q+1}{(m+1)(n+q+1)}\binom{2m}{m}\binom{2n+q}{n}\binom{2m+q+2n}{2m}x^m z^q y^n\right)\right)$$
$$=\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{2m+q}{q}x^m\right)z^q=\frac{(1-z)-\sqrt{(1-z)^2-4x}}{2x}$$

$L(x,z)$中，考慮$q=0$ 的級數和，此式即為引理 2 中的函數$c(x)$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}x^m=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

為逼近總機率$J(ud,r,rl)d+\ J(rl,u,ud)l$之值，計算下列數個情況來討論：

（一）計算$n_l=0$時，從x軸落下懸崖的機率和

$n_l=0$落下懸崖之機率和為$J(ud,r,lr)d$ 級數和中$n=0$ 時，即：

$$\left(\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q+1}{(m+1)(q+1)}\binom{2m}{m}\binom{q}{0}\binom{2m+q}{2m}(ud)^m r^q\right)\right)d$$
$$=\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{2m+q}{q}r^q(ud)^m\times d\right)=L(x,z)\ \ (引理 3)$$

因此可得$n_l=0$落下懸崖之機率和為

$$\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{2m+q}{q}r(ud)^m\times d\right)=\frac{(1-r)-\sqrt{(1-r)^2-4ud}}{2ud}\times d$$

$$=\frac{1-r-\sqrt{(1-r)^2-4ud}}{2u}$$

（二）計算$n_l=1$時，從x軸落下懸崖的機率和

$n_l=1$時醉漢從x軸落下懸崖的機率和即為$J(ud,r,rl)d$ 級數和中$n=1$ 時，即：

$$\left(\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q+1}{(m+1)(q+2)}\binom{2m}{m}\binom{q+2}{1}\binom{2m+q+2}{2m}(ud)^m r^q (rl)^1\, d\right)\right)$$

$$=\sum_{q=2}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q-1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{2m+q}{q}(ud)^m\right)r^{q-2}\times(rl)d$$

與引理 3 的公式相似，先整理引理 3 的公式

$$L(x,z)=\frac{(1-z)-\sqrt{(1-z)^2-4x}}{2x}=\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{2m+q}{q}x^m\right)z^q$$

$$\frac{(1-z)-\sqrt{(1-z)^2-4x}}{2x}-\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}x^m\right)=\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{2m+q}{q}x^m\right)z^q$$

上式中的

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}x^m\right)$$

為卡特蘭數生成函數 (引理 2)，其值為 $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$

$$\frac{(1-z)-\sqrt{(1-z)^2-4x}}{2x}-\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{2m+q}{q}x^m\right)z^q$$

$$\frac{(1-z)-\sqrt{(1-z)^2-4x}-1+\sqrt{1-4x}}{2xz}=\sum_{q=1}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{2m+q}{q}x^m\right)z^{q-1}$$

上式兩側微分

$$\sum_{q=2}^{\infty}(q-1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{2m+q}{q}x^m\right)z^{q-2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{(1-z)-\sqrt{(1-z)^2-4x}-1+\sqrt{1-4x}}{2xz}\right)$$

$$\sum_{q=2}^{\infty}(q-1)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{2m+q}{q}x^m\right)z^{q-2}=\frac{-z-\sqrt{-4x-1}\sqrt{-4x+(1-z)^2}-4x+1}{2z^2x\sqrt{-4x+(1-z)^2}}$$

其中 $x = ud$, $z = r$代入，即可求得欲求機率和

$$0 \le \frac{ud}{(1-r)^2} = \frac{ud}{(l+d+u)^2} < \frac{ud}{(d+u)^2} = \frac{ud}{d^2+2ud+u^2} \le \frac{ud}{4ud} = \frac{1}{4}$$

因此$\frac{ud}{(1-r)^2}$符合$L(x,z)$的收斂條件，故$n_l = 1$從x軸落下懸崖的機率和即為

$$\sum_{q=2}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q-1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{2m+q}{q}(ud)^m\right)r^{q-2}\times(rl)d$$

$$=\frac{1-r-4ud-\sqrt{(1-r)^2-4ud}\sqrt{1-4ud}}{2r^2ud\sqrt{(1-r)^2-4ud}}\times(rl)d$$

$$=\frac{1-r-4ud-\sqrt{(1-r)^2-4ud}\sqrt{1-4ud}}{2ru\sqrt{(1-r)^2-4ud}}\times l$$

（三）**計算$n_l = 1$時，從y軸落下懸崖的機率和**

$n_l = 1$時醉漢從y軸落下懸崖的機率和即為$J(rl,u,ud)l$ 級數和中$m = 0$ 時，即：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{0}\frac{q+1}{(m+1)(n+q+1)}\binom{2m}{m}\binom{2n+q}{n}\binom{2m+q+2n}{2n}(ud)^n u^q (rl)^m\, l\right)\right)$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{q+1}{(n+q+1)}\binom{q+2n}{2n}(ud)^n u^q\, l\right)\right)$$

令$t = ud$，將其依照醉漢最終落下位置分類討論：

1. 醉漢從點(0,1)落下時

$$\sum_{n=0}^{\infty}k(n_l,n_d,n_r,n_u)(ud)^n u^0 l = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{0+1}{n+0+1}\binom{2n+0}{n}(ud)^n u^0 l$$

$$= [1+(ud)+2(ud)^2+5(ud)^3+14(ud)^4+42(ud)^5+\cdots]l \quad \text{(利用引理 2)}$$

$$= [t^0+t^1+2t^2+5t^3+14t^4+42t^5+\cdots]l = c(t)\times l = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}\times l$$

2. 醉漢從點(0,2)落下時

$$\sum_{n=0}^{\infty}k(n_l,n_d,n_r,n_u)(ud)^n u^1 l = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+1}{n+1+1}\binom{2n+1}{n}(ud)^n u^1 l$$

$$= [u+2u(ud)+5u(ud)^2+14u(ud)^3+42u(ud)^4+\cdots]l$$

$$= [u(t^0+2t^1+5t^2+14t^3+42t^4+\cdots]l = u\times c(t)^2\times l$$

3. 醉漢從點(0,3)落下時

$$\sum_{n=0}^{\infty} k(n_l,n_d,n_r,n_u)(ud)^n\,u^2 l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+1}{n+2+1}\binom{2n+2}{q}(ud)^n\,u^2 l$$

$$= [u^2 + 3d^2(ud) + 9u^2(ud)^2 + 28u^2(ud)^3 + 90u^2(ud)^4 + \cdots]l$$

$$= [u^2(t^0 + 3t^1 + 9t^2 + 28t^3 + 90t^4 + \cdots]l = u^2 \times c(t)^3 \times l$$

4 .醉漢從點(0,4)落下時

$$\sum_{n=0}^{\infty} k(n_l,n_d,n_r,n_u)(ud)^n\,u^3 l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+1}{n+3+1}\binom{2n+3}{n}(ud)^n\,u^3 l$$

$$= [u^3 + 4u^3(ud) + 14u^3(ud)^2 + 48u^3\mathrm{ud}^3 + 165u^3(ud)^4 + \cdots]l$$

$$= [u^3(t^0 + 4t^1 + 14t^2 + 48t^3 + 165t^4 + \cdots]l$$

$$= u^3 \times c(t)^4 \times l$$

根據[4]

$c(t)$的收斂半徑為$\frac{-1}{4} < t < \frac{1}{4}$

$$\sqrt{ud} \le \frac{u+d}{2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow ud \le \frac{1}{4}$$

$t = ud$在$c(t)$的收斂半徑內

因此，所求機率和即為前列所有算式之和

$$[c(t) + uc(t)^2 + u^2c(t)^3 + u^3c(t)^4 + u^4c(t)^5 + \cdots] \times l$$

$$= c(t) \times \lim_{n\to\infty} \frac{1 \times \{1 - [u \times c(t)]^n\}}{1 - u \times c(t)} \times l$$

$$= \frac{c(t)}{1 - u \times c(t)} \times l$$

$$= \frac{\frac{1-\sqrt{1-4ud}}{2ud}}{1 - u \times \frac{1-\sqrt{1-4ud}}{2ud}} \times l = \frac{1-\sqrt{1-4ud}}{2ud - u + u \times \sqrt{1-4ud}} \times l$$

（四）計算$\boldsymbol{n_l = 2}$時，從$\boldsymbol{y}$軸落下懸崖的機率和

$n_l = 2$時醉漢從y軸落下懸崖的機率和即為$J(rl,u,ud)l$ 級數和中$m = 1$ 時，即：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{q+1}{2(n+q+1)} \times 2\binom{2n+q}{n}\binom{2+q+2n}{2}(ud)^n u^q (rl)^1 l\right)$$

$$=\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q+1}{n+q+1}\binom{2n+q}{n}\binom{2n+q+2}{2}(ud)^n\right)u^q(rl^2)$$

欲求

$$\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q+1}{n+q+1}C_2^{2n+q+2}C_n^{2n+q}t^n\right)z^q$$

$q=0$時，括弧內為

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}C_2^{2n+2}C_n^{2n}t^n$$

其中

$$\frac{1}{n+1}C_n^{2n}$$

為卡特蘭數列，其級數和為$c(t)$(引理 2)

$$c(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}C_n^{2n}t^n=\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$$

令$t=y^2$

$$c(y^2)y^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}C_n^{2n}y^{2n+2}$$

將上式左右進行二次微分

$$\frac{1}{2}\times\frac{\partial^2}{\partial y^2}(c(y^2)y^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{2}\times\frac{1}{n+1}C_n^{2n}y^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}C_2^{2n+2}C_n^{2n}y^{2n}$$

$q=0$時所求

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}C_2^{2n+2}C_n^{2n}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}C_2^{2n+2}C_n^{2n}y^{2n}=\frac{1}{2}\times\frac{\partial^2}{\partial y^2}(c(y^2)y^2)$$

$q=1,2,3,\ldots$時，同理可用生成函數與微分求得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+q}{n+q+1}C_2^{2n+q+2}C_n^{2n+q}t^n=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{2y^q}\times\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\left(c(y^2)\right)^{q+1}y^{q+2}\right)$$

原式

$$\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q+1}{n+q+1}C_2^{2n+q+2}C_n^{2n+q}t^n\right)z^q=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{2y^q}\times\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\left(c(y^2)\right)^{q+1}y^{q+2}\right)\times z^q$$

令 $s = q + 1$

$$\sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2y^q} \times \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\left(c(y^2)\right)^{q+1} y^{q+2}\right) \times z^q = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2y^{s-1}} \times \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\left(c(y^2)\right)^{s} y^{s+1}\right) \times z^{s-1}$$

$$= \frac{y}{2z} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{z^s}{y^s} \times \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\left(c(y^2)\right)^{s} y^{s+1}\right)$$

令

$$f(y) = c(y^2)y = \frac{1 - \sqrt{1 - 4y^2}}{2y}$$

所求

$$= \frac{y}{2z} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{z^s}{y^s} \times \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\left(f(y)\right)^{s} y\right)$$

……(*)

根據引理 4

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{z^s}{y^s} \times \frac{\left(f(y)\right)^s y}{1} = \frac{\frac{z}{y} f(y) y}{1 - \frac{z}{y} f(y)} = \frac{z f(y) y}{y - z f(y)}$$

……(1)

$$\sum_{s=1}^{\infty} s \times \frac{z^s}{y^s} \times \frac{\left(f(y)\right)^s y}{1} = \frac{1}{1 - \frac{z}{y} f(y)} \times \frac{z f(y) y}{y - z f(y)} = \frac{z f(y) y^2}{(y - z f(y))^2}$$

……(2)

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^2 \times \frac{z^s}{y^s} \times \frac{\left(f(y)\right)^s y}{1} = \frac{2 z f(y) y^3}{(y - z f(y))^3} - \frac{z f(y) y^2}{(y - z f(y))^2}$$

……(3)

(1)式微分

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{z^s}{y^s} \times \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(f(y)\right)^s y\right) - \sum_{s=1}^{\infty} s \times \frac{z^s}{y^{s+1}} \times \frac{\left(f(y)\right)^s y}{1} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z f(y) y}{y - z f(y)}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^{\infty} \frac{z^s}{y^s} \times \frac{\partial}{\partial y}\left(\left(f(y)\right)^s y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z f(y) y}{y - z f(y)}\right) + \frac{z f(y) y}{(y - z f(y))^2}$$

……(4)

(2)式微分

$$\sum_{s=1}^{\infty} s\times\frac{z^s}{y^s}\times\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(f(y)\right)^s y\right)-\sum_{s=1}^{\infty} s^2\times\frac{z^s}{y^{s+1}}\times\frac{\left(f(y)\right)^s y}{1}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{zf(y)y^2}{\left(y-zf(y)\right)^2}\right)$$

$$\Rightarrow\sum_{s=1}^{\infty} s\times\frac{z^s}{y^s}\times\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(f(y)\right)^s y\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{zf(y)y^2}{\left(y-zf(y)\right)^2}\right)+\frac{2zf(y)y^2}{(y-zf(y))^3}-\frac{zf(y)y^1}{\left(y-zf(y)\right)^2}$$

……(5)

(4)式微分

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{z^s}{y^s}\times\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\left(f(y)\right)^s y\right)-\sum_{s=1}^{\infty} s\times\frac{z^s}{y^{s+1}}\times\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(f(y)\right)^s y\right)$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{zf(y)y}{y-zf(y)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{zf(y)y}{\left(y-zf(y)\right)^2}\right)$$

故

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{z^s}{y^s}\times\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\left(f(y)\right)^s y\right)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{zf(y)y}{y-zf(y)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{zf(y)y}{\left(y-zf(y)\right)^2}\right)$$

$$+\frac{1}{y}\times\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{zf(y)y^2}{\left(y-zf(y)\right)^2}\right)+\frac{2zf(y)y}{\left(y-zf(y)\right)^3}-\frac{zf(y)y}{\left(y-zf(y)\right)^2}$$

所求

$$\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q+1}{n+q+1}C_2^{2n+q+2}C_n^{2n+q}t^n\right)z^q=\frac{y}{2z}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{z^s}{y^s}\times\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\left(f(y)\right)^s y\right)$$

$$=\frac{y}{2z}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{zf(y)y}{y-zf(y)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{zf(y)y}{\left(y-zf(y)\right)^2}\right)+\frac{1}{y}\times\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{zf(y)y^2}{\left(y-zf(y)\right)^2}\right)+\frac{2zf(y)y}{\left(y-zf(y)\right)^3}-\frac{zf(y)y}{\left(y-zf(y)\right)^2}\right)$$

$$=\frac{y}{2z}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{zf(y)y}{y-zf(y)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2zf(y)y}{\left(y-zf(y)\right)^2}\right)+\frac{2zf(y)y}{\left(y-zf(y)\right)^3}\right)$$

其中$f(y)=c(y^2)y^2=\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y},y=\sqrt{t}=\sqrt{db}\,,z=d$

故，$n_l=2$時，從y軸落下懸崖的機率和為

$$P=rl^2\times\frac{y}{2z}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{zf(y)y}{y-zf(y)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2zf(y)y}{\left(y-zf(y)\right)^2}\right)+\frac{2zf(y)y}{\left(y-zf(y)\right)^3}\right)$$

微分完後y以$\sqrt{ud}$ 代入， z以u代入即為所求機率和

至此我們討論了$\boldsymbol{n_l = 0}$，$\boldsymbol{n_l = 1}$所有落下懸崖的情形，也算了$\boldsymbol{n_l = 2}$從y軸落下懸崖的情形，再進一步的討論級數和更加困難繁瑣。此四類的機率和(一)~(四)與真正的機率$J(ud, r, rl)d + J(rl, u, ud)l$仍有差距，在$l + d < \frac{1}{2}$，情況下(一)~(四)已算出了機率較大的幾類。為了瞭解與真正機率的誤差，我們將以程式模擬醉漢移動的過程並去估算落下懸崖的機率，放在本文後段討論。

九、　二維三邊懸崖

（一）**定理 5**：

二維平面上，有一醉漢從(1,1)的位置出發，每次只往左、下、右、上其中一個方向移動一單位長，若各點向左、下、右、上移動的機率分別為l, d, u, r，令三邊懸崖分別為x軸、y軸和直線$x = s$，則當$l > 0$ 且$r > 0$時，醉漢落下懸崖的機率為1。

[證明]：

1. 若$l \geq r$

根據定理 4，醉漢落下懸崖的機率為 1

2. 若$r \geq l$

根據定理 4，醉漢落下懸崖的機率為 1 $\blacksquare$

（二）**定理 6**：

二維平面上，有一醉漢從(1,1)的位置出發，每次只往左、下、右、上其中一個方向移動一單位長，若各點向左、下、右、上移動的機率分別為l, d, u, r，令三邊懸崖分別為x軸、y軸和直線$x = s$，則當$l = 0$且$r = 0$時，可視為一維的狀況討論：

$$\begin{cases} 當 \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{d}{d+u} \leq 1：落下懸崖機率為 1 \\ 當 0 \leq \dfrac{d}{d+u} < \dfrac{1}{2}：落下懸崖機率為 \dfrac{d}{u} \end{cases}$$

[證明]：

$l = 0$且$r = 0$時，此路徑不受l、r機率影響，路徑皆在$x = 1$上，故可視為一維的情況討論。$\blacksquare$

伍、討論

一、

將此問題推廣至三維，在三維座標空間中，醉漢從點(1,1,1)開始出發，欲求得醉漢離開第一卦限的機率。假設醉漢移動各個方向的機率：平行x軸正向(向前)移動的機率為f，平行x軸負向(向後)移動的機率為b，平行y軸正向(向右)移動的機率為r，平行y軸負向(向左)移動的機率為l，平行z軸正向(向上)移動的機率為u，平行z軸負向(向下)移動的機率為d，$u+d+l+r+f+b=1$。

當$d \geq u$或$l \geq r$或$b \geq f$時，醉漢最後從第一卦限離開的機率為1。

當$u > d$且$r > l$且$f > b$時，醉漢離開第一卦限的機率為：

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left(\sum_{\beta=0}^{\infty}\left(\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\sum_{\delta=0}^{\infty}\left(\sum_{\varepsilon=0}^{\infty}\frac{(\beta+1)(\varepsilon+1)}{(\beta+\varepsilon+1)(\gamma+\delta+1)(\alpha+1)}\left(\frac{(\beta+\gamma+2\delta+2\varepsilon+2\alpha)!}{(2\alpha)!\,(\gamma+2y)!\,(\beta+2\varepsilon)!}\right)\binom{2\alpha}{\alpha}\binom{\gamma+2\delta}{\delta}\binom{\beta+2\varepsilon}{\varepsilon}\left(u^{\beta}(ud)^{\varepsilon}f^{\gamma}(fb)^{\delta}(lr)^{\alpha}l + u^{\beta}(ud)^{\varepsilon}r^{\gamma}(lr)^{\delta}(fb)^{\alpha}b + f^{\beta}(fb)^{\varepsilon}r^{\gamma}(lr)^{\delta}(ud)^{\alpha}d\right)\right)\right)\right)\right)$$

為了方便起見可以令

$$K(v,w,x,y,z) = \sum_{\alpha=0}^{\infty}\left(\sum_{\beta=0}^{\infty}\left(\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\sum_{\delta=0}^{\infty}\left(\sum_{\varepsilon=0}^{\infty}\frac{(\beta+1)(\varepsilon+1)}{(\beta+\varepsilon+1)(\gamma+\delta+1)(\alpha+1)}\left(\frac{(\beta+\gamma+2\delta+2\varepsilon+2\alpha)!}{(2\alpha)!\,(\gamma+2y)!\,(\beta+2\varepsilon)!}\right)\binom{2\alpha}{\alpha}\binom{\gamma+2\delta}{\delta}\binom{\beta+2\varepsilon}{\varepsilon}\left(z^{\beta}x^{\varepsilon}v^{\gamma}y^{\delta}w^{\alpha}l\right)\right)\right)\right)\right)$$

則醉漢離開第一卦線的總機率即為$K(f,lr,ud,fb,u)l + K(r,fb,ud,lr,u)b + K(r,ud,fb,lr,f)d$

可以發現$K(v,w,x,y,z)$為$J(x,z,y)$的推廣，考慮($\beta = 0$ 且$\varepsilon = 0$ 時的級數和)或($\gamma = 0$ 且$\delta = 0$ 時的級數和)，此式即為函數$J(x,z,y)$。

二、

原本在一維的醉漢走路中所使用的方法，在利用其推廣到二維情況時都遇到了問題而無法使用，所以我們想要嘗試直接把所有的掉落情況做無窮級數和，在算出總和之前我們也利用 Python 程式輔助，估計在二維平面上，醉漢從(1,1)出發，最後落下懸崖的機率。結果如下圖所示：

l(向左移動機率)	d(向下移動機率)	r(向右移動機率)	u(向上移動機率)	每次最大移動步數	測試次數	落下懸崖次數	測試機率	猜測機率
0.1667	0.1667	0.3333	0.3333	100000	10000	7512	0.7512	0.7500
0.1250	0.1250	0.3750	0.3750	100000	10000	5543	0.5543	0.5556
0.1000	0.1000	0.4000	0.4000	100000	10000	4356	0.4356	0.4375
0.0833	0.0833	0.4167	0.4167	100000	10000	3673	0.3673	0.3600
0.0714	0.0714	0.4286	0.4286	100000	10000	2987	0.2987	0.3056
0.0625	0.0625	0.4375	0.4375	100000	10000	2581	0.2581	0.2653
0.0556	0.0556	0.4444	0.4444	100000	10000	2328	0.2328	0.2344
0.0500	0.0500	0.4500	0.4500	100000	10000	2122	0.2122	0.2099
0.0455	0.0455	0.4545	0.4545	100000	10000	1837	0.1837	0.1900
0.0417	0.0417	0.4583	0.4583	100000	10000	1703	0.1703	0.1736
0.0385	0.0385	0.4615	0.4615	100000	10000	1605	0.1605	0.1597
0.0000	0.2500	0.2500	0.5000	100000	10000	5005	0.5005	0.5000
0.0000	0.2000	0.4000	0.4000	100000	10000	4996	0.4996	0.5000
0.0000	0.1667	0.5000	0.3333	100000	10000	4862	0.4862	0.5000
0.0000	0.1429	0.5714	0.2857	100000	10000	5022	0.5022	0.5000
0.0000	0.1250	0.6250	0.2500	100000	10000	4995	0.4995	0.5000
0.0714	0.0714	0.7143	0.1429	100000	10000	5425	0.5425	0.5500
0.0667	0.0667	0.7333	0.1333	100000	10000	5486	0.5486	0.5455
0.0625	0.0625	0.7500	0.1250	100000	10000	5497	0.5497	0.5417
0.0588	0.0588	0.7647	0.1176	100000	10000	5336	0.5336	0.5385

此外，我們猜測當$l < r$且$d < u$且$ru \neq 0$時，醉漢最終落下懸崖的機率為：

$$\frac{l}{r} + \frac{d}{u} - \frac{ld}{ru}$$

可以發現與我們所算出的級數和相當逼近，也與電腦估計值大致吻合。

因為無窮級數和還有許多項，需要用到更複雜的數學技巧，因此本文中僅列舉機率較大的前幾項，未來希望可以整理出二維兩邊懸崖完整的算式，或者去尋找更佳的解法。

以下附上我們的程式碼：

```python
import random
import csv

#起始x座標
x = 1
#起始y座標
y = 1
#測試次數
test = 1000000
#最大移動步數
movecount = 100000
fall = 0
Falls = []
direct = None

#移動機率設定
#data = {'L': 1, 'R': 1, 'D': 1, 'U': 1}
p = 3 #不同機率設定
r = 100 #進度條長度


#依權重隨機選擇移動方向
def choice():
    global direct, value_sum
    value_sum = sum(data.values())
    t = random.uniform(0, value_sum)
    for direct, value in data.items():
        t -= value
        if t < 0:
            break

def walk():
    global x, y, fall, movecount, direct
    for i in range(0,movecount):
        choice()
        #print(direct)      #顯示移動方向
        if direct == 'L':
            x -= 1
        elif direct == 'R':
            x += 1
        elif direct == 'D':
            y -= 1
        elif direct == 'U':
            y += 1
        #print(str(x) + ',' + str(y))       #顯示座標
        if x * y == 0:
            fall += 1
            #print('Move : ' + str(i+1))       #顯示行走步數
            #print('Fall : ' + str(fall))      #顯示累積掉落次數
            break

for i in range(p,p+1):        #測試不同移動機率
    fall = 0
    data = {'L':2,'D':2,'R': i, 'U': i}
    for j in range(0,test):
        x = 1
        y = 1
        walk()

        #顯示進度條
        J = j+1
        k = int(test / r)
        q = int(test / k)
        if J % k == 0:
            print('Progress: {}% '.format(int(J/test*100)),'(' +str(J) +
'/' +str(test) +')' ,'█' * (J // k),end='')
            print('.' * (q - ( J // k )  ) )

    Falls.append(fall)

#輸出結果
for i in range(p,p+1):
    data = {'L':2,'D':2,'R': i, 'U': i}
    print()
    print(data)     #顯示機率設定
    print('Test time :' + str(test))
    print('Max Move :' + str(movecount))
    print('Fall : ' + str(Falls[i-p]))
    print('P = ' + str(Falls[i-p]/test))
    print('--------------------------------------------------')
```

陸、 研究結果與結論

一維直線上，有一個醉漢在x軸上從$x=1$出發開始不停的前後移動，定義懸崖為$x=0$，若醉漢每一步往懸崖方下移動的機率為P，遠離懸崖的機率為Q，其中$P+Q=1$。該醉漢最終落下懸崖之機率$f(P)$為$\begin{cases} 當\frac{1}{2}\le P\le 1：f(P)=1 \\ 當\ 0\le P<\frac{1}{2}：f(P)=\frac{P}{Q} \end{cases}$

二維平面上，有一醉漢從(1,1)的位置出發，每次只往左、下、右、上其中一個方向移動一單位長，若各點向左、下、右、上移動的機率分別為l,d,r,u。

一、　當只有一座懸崖$x=0$(或$y=0$)，則所有情況均可視為一維的狀況討論。

$$\begin{cases} 當\frac{1}{2}\le \frac{l}{l+r}\le 1：落下懸崖機率為\ 1 \\ 當\ 0\le \frac{l}{l+r}<\frac{1}{2}\ ：落下懸崖機率為\frac{l}{r} \end{cases}$$

二、　當有兩座懸崖$x=0$ 和$y=0$，則有以下的情況，醉漢落下懸崖機率為1。

（一）$l+d\ge 1/2$

（二）$l\ge r$

（三）$d\ge u$

（四）$u=0$ 且$l,d,r\ne 0$

（五）$c=0$ 且$l,d,u\ne 0$

三、　當有兩座懸崖$x=0$ 和$y=0$，則有以下的情況，可視為一維的狀況討論。

（一）$l=0$ 且$d,r,u\ne 0$

（二）$d=0$ 且$l,r,u\ne 0$

四、　當有兩座懸崖$x=0$ 和 $y=0$，若$l<r$且$d<u$且$l\mathrm{d}ru\ne 0$，令n_l為醉漢走路的路徑中總共向左移動的步數。則落下懸崖的機率為：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q+1}{(m+1)(n+q+1)}\binom{2m}{m}\binom{2n+q}{n}\binom{2m+q+2n}{2m}\left((ud)^m r^q (rl)^n d+(ud)^n u^q (rl)^m l\right)\right)\right)$$

（一）$n_l=0$，醉漢落下懸崖的機率和為

$$\frac{1-r-\sqrt{(1-r)^2-4ud}}{2u}$$

（二）$n_l=1$，醉漢從x軸落下懸崖的機率和為

$$\frac{1-r-4ud-\sqrt{(1-r)^2-4ud}\sqrt{1-4ud}}{2ru\sqrt{(1-r)^2-4ud}}\times l$$

（三）$n_l=1$，醉漢從y軸落下懸崖的機率和為

$$\frac{1-\sqrt{1-4ud}}{2ud-u+u\times\sqrt{1-4ud}}\times l$$

（四）$n_l=2$，醉漢從y軸落下懸崖的機率和為

$$P=rl^2\times\frac{y}{2z}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{zf(y)y}{y-zf(y)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2zf(y)y}{\left(y-zf(y)\right)^2}\right)+\frac{2zf(y)y}{\left(y-zf(y)\right)^3}\right)$$

偏微分完後y以$\sqrt{ud}$代入，z以u代入即為所求機率和

五、　當有三座懸崖($x=0$，$y=0$ 和$x=s$)，則有以下的情況，可視為一維的狀況討論。

$l=0$ 且 $r=0$

六、　當有三座懸崖($x=0$，$y=0$ 和$x=s$)，則有以下的情況，醉漢落下懸崖機率為1。

$l\neq0$ 或 $r\neq0$

柒、 參考資料及其他

[1] Tom Davis. ‘ *Catalan Numbers*’ (2016)

[2] Herbert S. Wilf . ‘*Generatingfunctionology’*(1989) P53 (2.5.7)

[3] G. E. Cossali . ‘*A Common Generating Function for Catalan Numbers and Other Integer Sequences’*. Journal of Integer Sequences, Vol. 6 (2003)

[4] Peter J. Larcombe and David R. French. ‘*The Catalan Number k-Fold Self-Convolution Identity: The Original Formulation’*

[5]許介彥‘跌跌撞撞的機率’ 科學教育月刊 255 期(91 年 12 月)

【評語】050406

題目的設定頗有意思 (多維醉漢而且只有若干邊為懸崖)， 有相當難度亦有學術價值， 作者以組合的方法得到一些結果， 研究精神可嘉. 但因為題目設定的條件太寬， 變量太多， 導致無法有一個夠簡潔的結果， 所得到的一般式反而難以分析， 是較為可惜之處. 在 2D 時的一些討論與條件是有意思的， 不過整體來說成果還是少了點。一般來說， 此類問題需要更高階的數學工具， 例如 Harmonic analysis 或機率理論等. 建議作者可以往這個方向繼續鑽研努力， 定能有所進展.

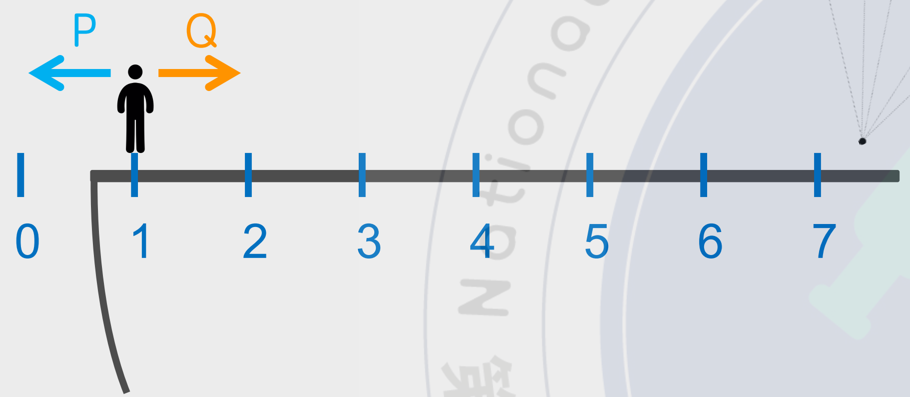
作品簡報

醉後生還者

——醉漢走路問題的二維延伸探討

組別：高中組　　科別：數學科

一維醉漢走路



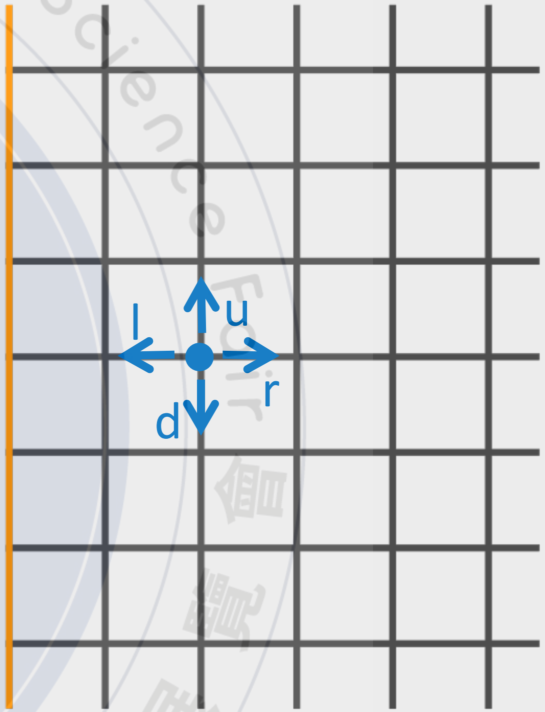
$$\frac{1}{2} \le P \le 1 : f(P) = 1$$

$$0 \le P < \frac{1}{2} : f(P) = P + P^2Q + 2P^3Q^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} C_k P^{k+1} Q^k = \frac{P}{Q}$$

走一步　走三步　走五步

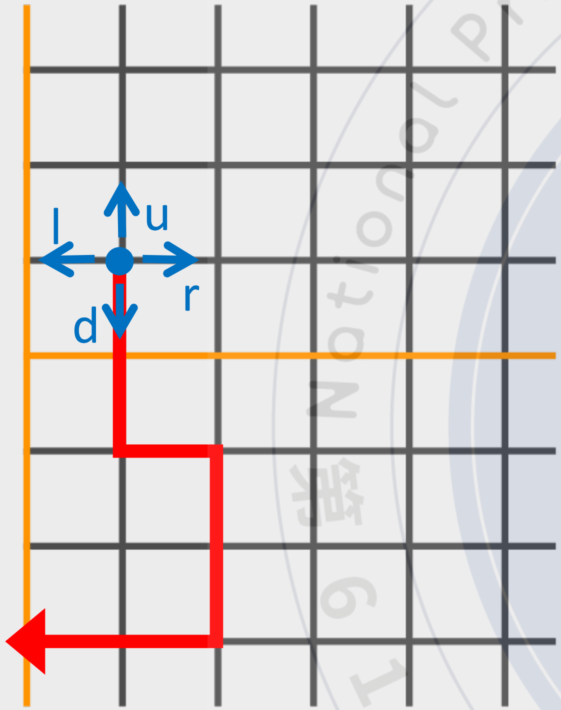
利用卡特蘭數生成函數

二維一邊懸崖



$$\begin{cases} 當\frac{1}{2} \le \frac{l}{l+r} \le 1: & 落下懸崖機率為1 \\ 當0 \le \frac{l}{l+r} < \frac{1}{2}: & 落下懸崖機率為\frac{l}{r} \end{cases}$$

兩邊懸崖：$l \geq r$(或$d \geq u$)



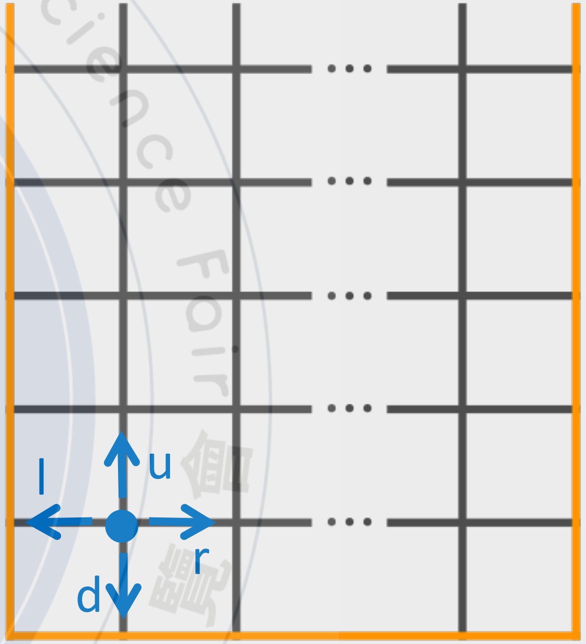
$l \geq r$(或$d \geq u$)

視為二維一邊懸崖的情況

$l \geq r$時經過y軸懸崖的機率為1

因此，醉漢落下懸崖的機率為1

二維三邊懸崖

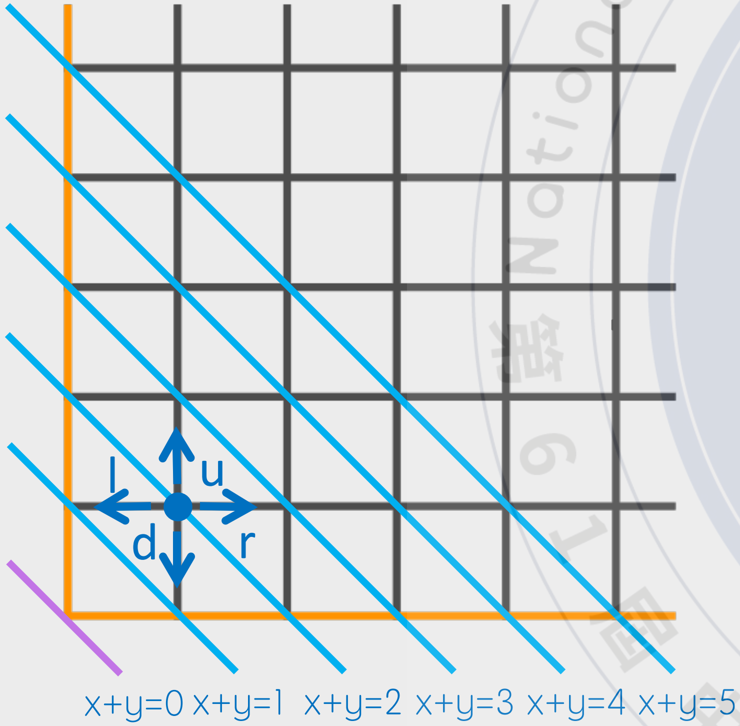


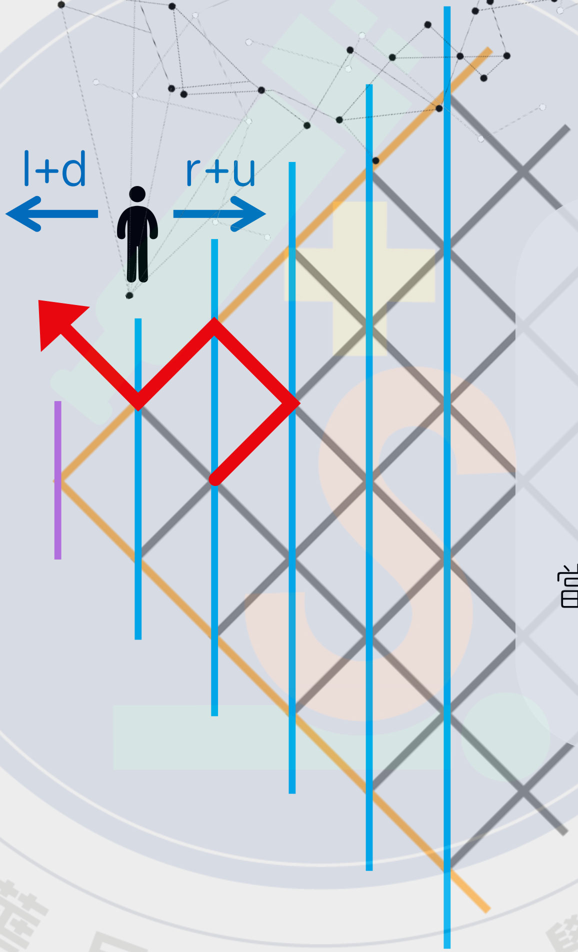
當$l \geq r$，醉漢落下懸崖的機率為1

當$r \geq l$，醉漢落下懸崖的機率為1

當$l = r = 0$，可視為一維醉漢走路問題

兩邊懸崖：$l+d \geq \frac{1}{2}$





可視為一維醉漢走路問題

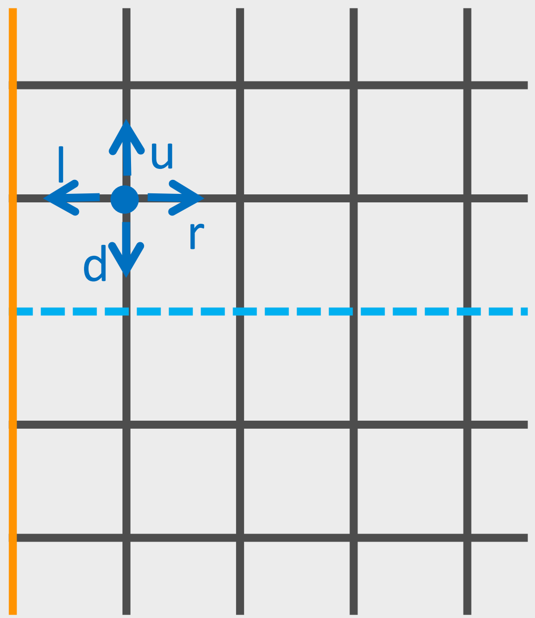
當 $\frac{1}{2} \leq a+b \leq 1$

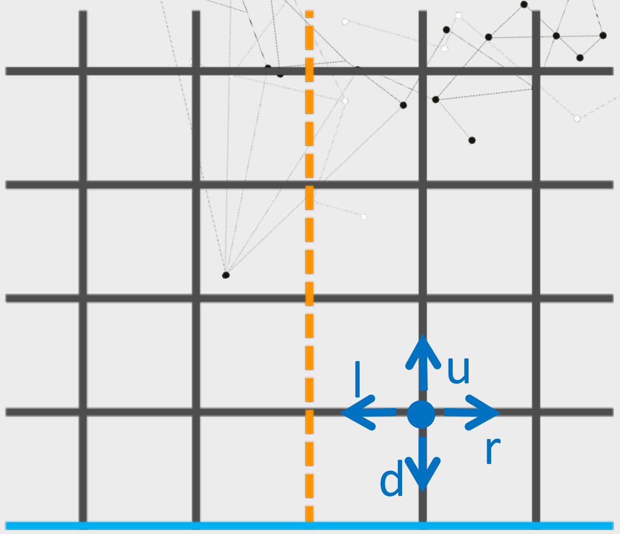
醉漢走到$x+y=0$直線的機率為1

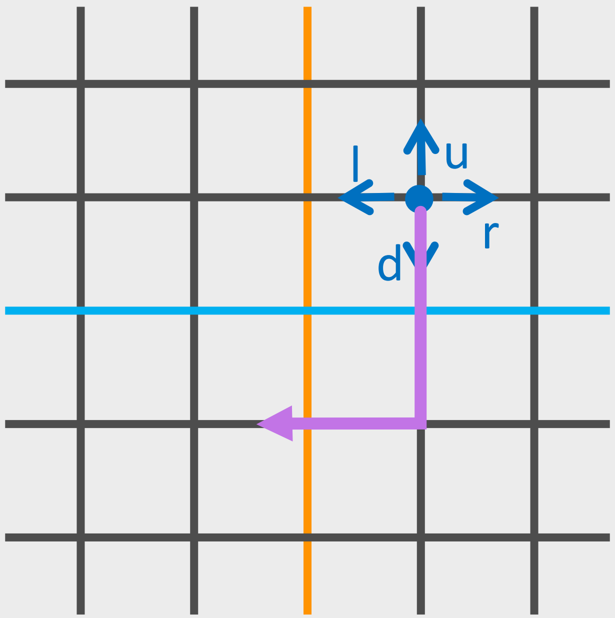
當醉漢走到$x+y=0$直線時必經過x軸或y軸

因此，醉漢落下懸崖的機率為1

兩邊懸崖：$l < r$ 且 $d < u$







通過橘線的所有路徑機率和 $\frac{l}{r}$

通過藍線的所有路徑機率和 $\frac{d}{u}$

通過橘線或藍線的所有路徑機率和

猜測：$\frac{l}{r} + \frac{d}{u} - \frac{ld}{ru}$

（扣除兩個懸崖皆經過的機率）

兩邊懸崖：$l < r$ 且 $d < u$ 一般解

$$J(x,z,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q+1}{(m+1)(n+q+1)}\binom{2m}{m}\binom{2n+q}{n}\binom{2m+q+2n}{2m}x^m y^n z^q\right)\right)$$

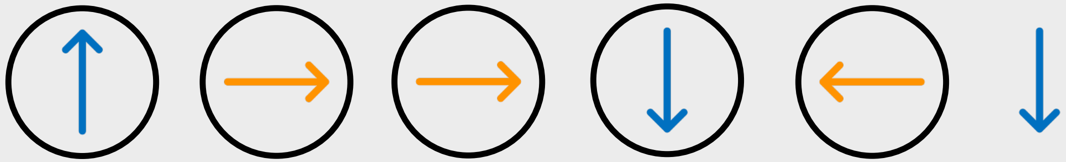
二維二邊懸崖的機率和: $J(ud,r,rl)d+J(rl,u,ud)l$

以$J(ud,r,rl)d$為例

$n_u=m$， $n_d=m+1$，因為向上領先向右，兩者的組合數為$\dfrac{1}{(m+1)}\dbinom{2m}{m}$

$n_l=n$， $n_r=n+q$，因為向右領先向左，兩者的組合數為$\dfrac{q+1}{(n+q+1)}\dbinom{2n+q}{n}$

把上下視為一類， 左右視為另一類，則這二類的組合數為$\dbinom{2m+q+2n}{2m}$



兩邊懸崖：分類討論級數和以逼近機率

$n_l = 0$，落下懸崖的機率和 $\dfrac{1-r-\sqrt{(1-r)^2-4ud}}{2u}$

$n_l = 1$，從x軸落下懸崖的機率和 $= \dfrac{1-r-4ud-\sqrt{(1-r)^2-4ud}\sqrt{1-4ud}}{2ru\sqrt{(1-r)^2-4ud}} \times l$

$n_l = 1$，從y軸落下懸崖的機率和 $= \dfrac{1-\sqrt{1-4ud}}{2ud-u+u\times\sqrt{1-4ud}} \times l$

$n_l = 2$，從y軸落下懸崖的機率和 $= rl^2 \times \dfrac{y}{2z}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\dfrac{zf(y)y}{y-zf(y)}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{2zf(y)y}{\left(y-zf(y)\right)^2}\right)+\dfrac{2zf(y)y}{\left(y-zf(y)\right)^3}\right)$

其中$f(y) = c(y^2)y^2 = \frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y}, y = \sqrt{t} = \sqrt{ud}, z = u$

兩邊懸崖：$l < r$且$d < u$的估計

向左0步，x軸落下
向左1步，x軸落下
向左1步，y軸落下
向左2步，y軸落下

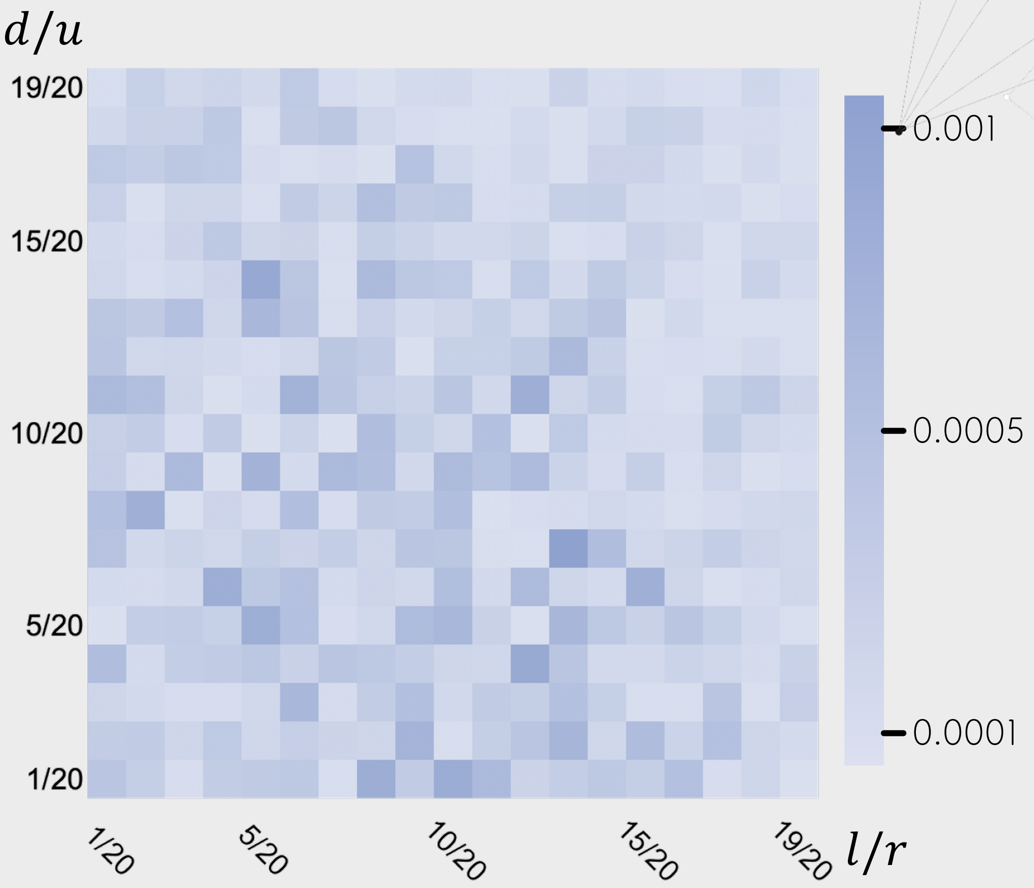
扣除重複項

向下0步，y軸落下
向下1步，y軸落下
向下1步，x軸落下
向下2步，x軸落下

誤差

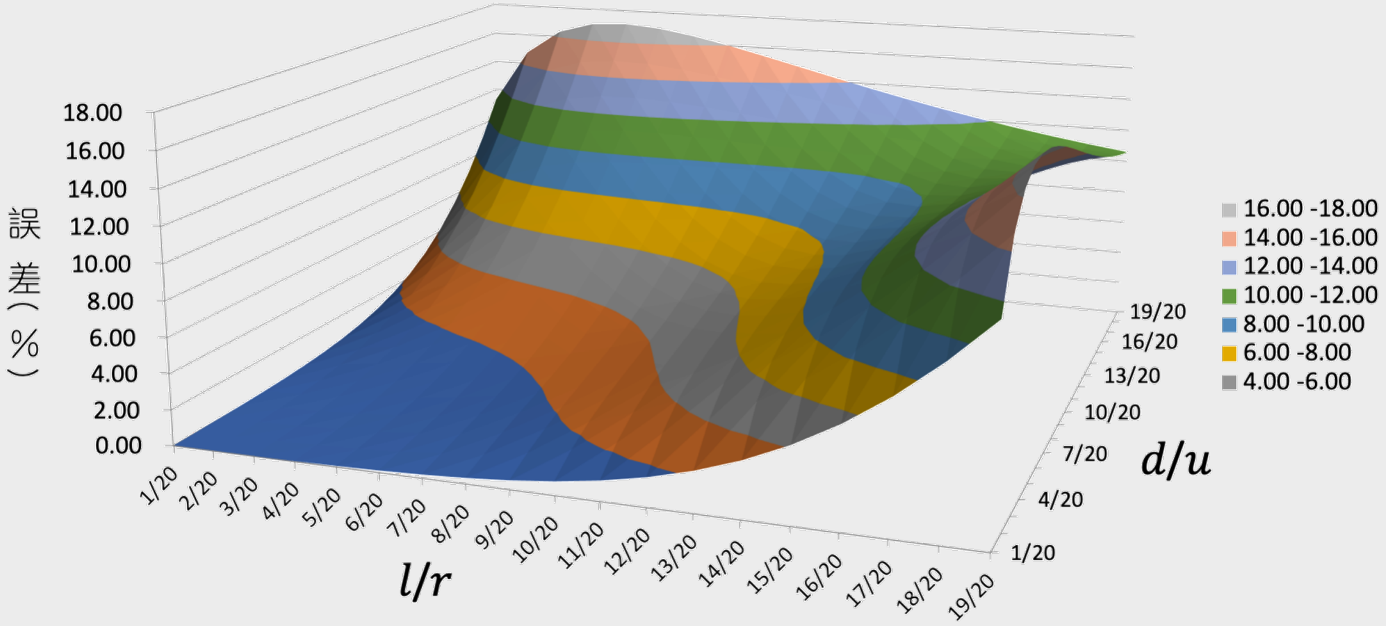
猜測函數 $\frac{l}{r}+\frac{d}{u}-\frac{ld}{ru}$

兩邊懸崖：猜測機率/電腦模擬/8項級數和比較



猜測機率與模擬機率誤差

猜測機率：$\frac{l}{r}+\frac{d}{u}-\frac{ld}{ru}$



前八項級數和與猜測機率誤差(%)

討論：卡特蘭數及其推廣數列

$$c(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}x^m=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

$n_l = 0$ 時落下的機率和

$L(ud, r)$

$$L(x,z)=\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}\binom{2m+q}{2m}x^m\right)z^q=\frac{(1-z)-\sqrt{(1-z)^2-4x}}{2x}$$

二維離開第一象限的機率和

$J(ud, r, rl)d + J(rl, u, ud)l$

$$J(x,z,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{q=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{q+1}{(m+1)(n+q+1)}\binom{2m}{m}\binom{2m+q+2n}{2m}\binom{2n+q}{n}x^m z^q y^n\right)\right)$$

三維離開第一卦限的機率和

$K(f, lr, ud, fb, u)l +$
$K(r, fb, ud, lr, u)b +$
$K(r, ud, fb, lr, f)d$

$$K(v,w,x,y,z)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\left(\sum_{\beta=0}^{\infty}\left(\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\sum_{\delta=0}^{\infty}\left(\sum_{\varepsilon=0}^{\infty}\frac{(\beta+1)(\varepsilon+1)}{(\beta+\varepsilon+1)(\gamma+\delta+1)(\alpha+1)}\left(\frac{(\beta+\gamma+2\delta+2\varepsilon+2\alpha)!}{(2\alpha)!\,(\gamma+2\delta)!\,(\beta+2\varepsilon)!}\right)\binom{2\alpha}{\alpha}\binom{\gamma+2\delta}{\delta}\binom{\beta+2\varepsilon}{\varepsilon}\left(z^\beta x^\varepsilon v^\gamma y^\delta w^\alpha\right)\right)\right)\right)\right)$$

參考資料

[1] Tom Davis. ‘ Catalan Numbers’(2016)

[2] Herbert S. Wilf . ‘Generatingfunctionology’(1989) P53 (2.5.7)

[3] G. E. Cossali . ‘A Common Generating Function for Catalan Numbers and Other Integer Sequences’. Journal of Integer Sequences, Vol. 6 (2003)

[4] Peter J. Larcombe and David R. French. ‘The Catalan Number k-Fold Self-Convolution Identity: The Original Formulation’

[5]許介彥‘跌跌撞撞的機率’科學教育月刊255期(91年12月)