

中華民國第 61 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 數學科

050405

「蟻」來「蟻」去的行徑軌跡之研究

學校名稱：新北市立北大高級中學

作者： 高二 徐尚煒 高二 黃麗蘋	指導老師： 黃冠閔 游鯉毓
-------------------------	---------------------

關鍵詞：仿射變換、矩陣對角化、對數螺旋

摘要

本文首先考慮一般高中生所學的平面向量坐標表示法來解決有關螞蟻行走路徑中的「有限行徑」坐標問題，接著再將此問題延伸至「無窮行徑」的情況下，我們分別應用幾何中的仿射變換與矩陣的對角化等兩種方法，解出收斂的點坐標之通式，並利用螞蟻行徑的終點來建構出對數螺旋曲線之通式，接著從平面坐標推廣至空間坐標，推導出空間中的仿射變換、飛蟻的收斂點坐標之通式與空間的對數螺旋曲線之通式，最後我們嘗試改變螞蟻行徑的規則，使得新的行徑終點可建構出阿基米德螺旋曲線。

壹、 研究動機

我們在數學課堂中解一題課本上的挑戰題，有關題螞蟻行走路徑中的「有限步數」坐標問題，其內容描述為「平面上一隻螞蟻由原點往 x 正方向爬，爬了 8 單位長後往左轉 $\frac{2\pi}{3}$ 弧度，再爬了 4 單位長後往左轉 $\frac{2\pi}{3}$ 弧度，再爬了兩單位長後左轉 $\frac{2\pi}{3}$ 弧度，再爬了 1 單位長，此時螞蟻已經筋疲力盡，試求螞蟻現在的所在的坐標為何?」，對此我們對這個問題很有興趣，並好奇如果螞蟻無窮地行徑下去的收斂點坐標與行徑的軌跡，因此決定深入探討與展開研究。

貳、 研究目的

- 一、探討平面上，在「無窮行徑」的條件下，找出螞蟻的收斂點坐標之通式。
- 二、探討平面上，在「無窮行徑」的條件下，找出螞蟻行徑的終點所形的對數螺旋之通式。
- 三、探討空間中，在「無窮飛行」的條件下，找出飛蟻的收斂點坐標之通式。
- 四、探討空間中，在「無窮飛行」的條件下，找出飛蟻行徑的終點所形的對數螺旋之通式。

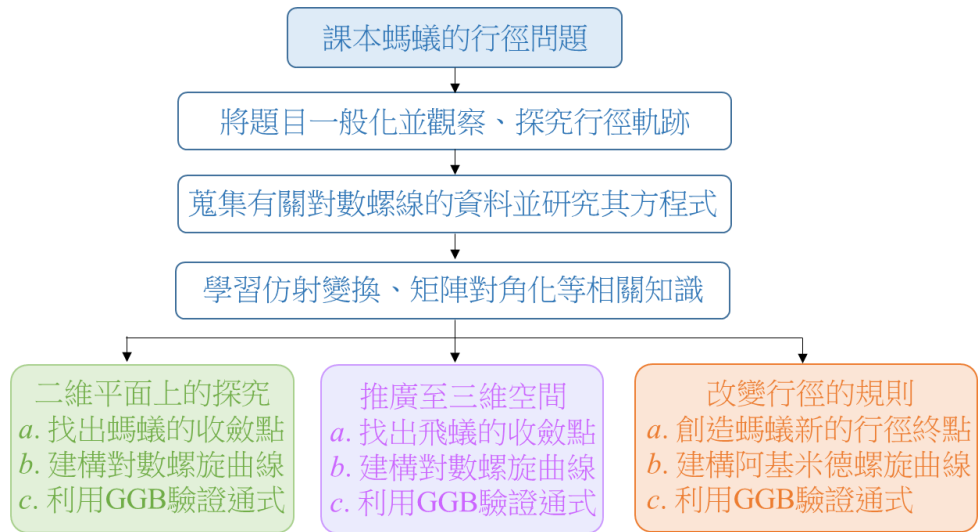
參、 研究設備與器材

硬體部分：紙、筆、黑板、筆記型電腦。

軟體部分：文書處理軟體 Word 2016、方程式編輯軟體 Mathtype 6.0、GGB 動態幾何軟體。

肆、研究過程或方法

一、研究流程圖



二、預備知識：

(一) 行向量：

一般來說，我們可將一個以坐標表示法的向量 $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 用 $m \times 1$ 階矩陣來表示，

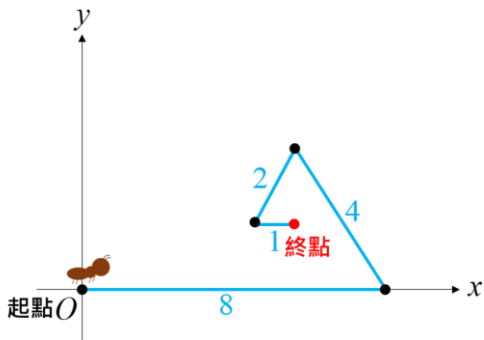
稱此矩陣為行向量，記為 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$ ，而此表示法將會運用於仿射變換之矩陣乘法的運算。

(二) 平面向量與尤拉公式的關係：

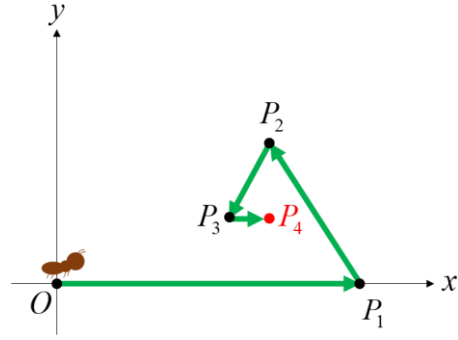
對於一個任意複數 $a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)，可用尤拉公式表達其極式為 $re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，其中 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ， $\theta = \text{Arg}(a+bi)$ ， $0 \leq \theta < 2\pi$ ，且根據複數平面的概念，複數 $a+bi$ 會一對一地對應到平面上的點 (a, b) ，因此當我們考慮一個平面上的向量 $\vec{u} = (a, b)$ 時，也可用尤拉公式表達此向量，即 $\vec{u} = re^{i\theta}$ ，而此表達的方式將會運用於建構螺旋曲線之推導過程，以便簡化計算式子的呈現。

三、螞蟻行徑的問題

在數學課本的挑戰題中，其螞蟻是從原點出發，沿著 x 軸方向開始行徑，每次行徑的距離皆以前一次距離的 $\frac{1}{2}$ 倍後轉 $\frac{2\pi}{3}$ 弧度，共轉了 3 次，求其終點的坐標，如圖一所示，



圖一：螞蟻行走的路徑。



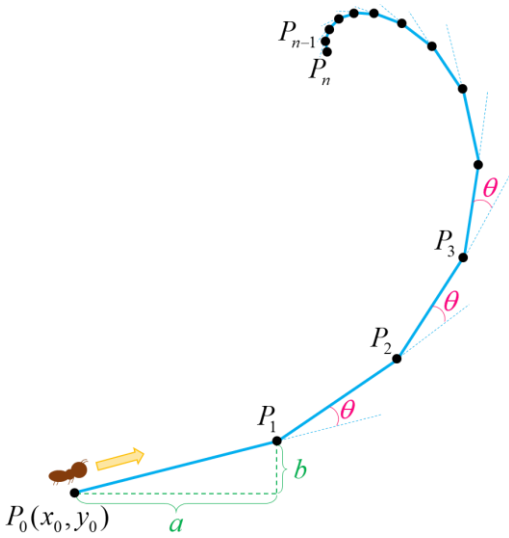
圖二：以向量呈現螞蟻行走路徑。

在「有限步數」的情況下，可以應用我們所學到的平面向量坐標表示法，將每兩個點之間考慮一個向量，如圖二所示，利用向量加法，計算 $\vec{OP_1} + \vec{P_1P_2} + \vec{P_2P_3} + \vec{P_3P_4}$ ，即可求出終點的坐標 P_4 為 $(6, \sqrt{3})$ 。接下來我們延伸題意，考慮在「無窮行徑」的情況下，應用仿射變換與矩陣對角化的方式來找出收斂的終點坐標。

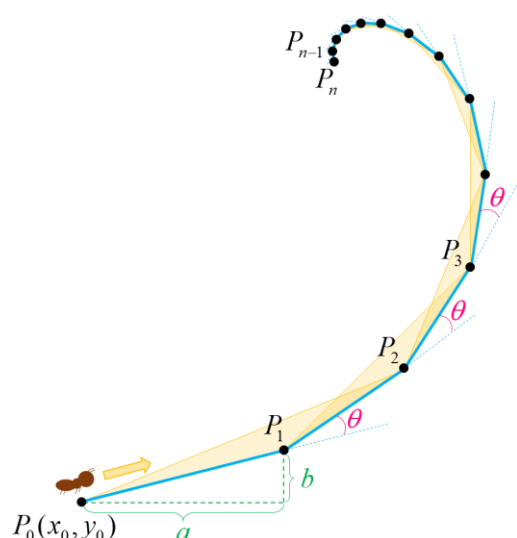
伍、 研究結果

一、探討平面上，在「無窮行徑」的條件下，找出螞蟻的收斂點坐標之通式

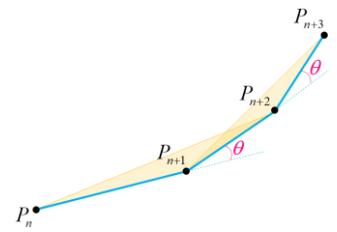
我們先將題目一般化，如圖三所示，題目描述改為「平面上一隻螞蟻從點 $P_0(x_0, y_0)$ 出發，沿著以 x 軸 a 單位與 y 軸 b 單位之對角線行徑至點 P_1 ，接下來每次行徑的距離皆以前一次距離的 r 倍後轉 θ 弧度，其中 $0 < r < 1$ ，當無窮多次的行徑下，求螞蟻收斂的終點之坐標 P 為何？」



圖三：一般化的螞蟻路徑。



在此我們先將原本的路徑坐標問題，轉成多個相似三角形的頂點坐標問題，如圖四所示，使其具有自我相似的性質，由圖四可觀察出這些三角形中皆具有伸縮、旋轉與位移的關係，我們取相鄰的兩個三角形為例，如右圖五所示。



圖五：相鄰兩個三角形。

根據題意，每次行徑的距離皆以前一次距離的 r 倍，其中 $0 < r < 1$ ，則每次的行徑距離會形成一個首項為 $\overline{P_0 P_1} = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，公比為 r 的等比數列，數列的相鄰三項可推得如下：

$$\overline{P_n P_{n+1}} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot r^n, \quad \overline{P_{n+1} P_{n+2}} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot r^{n+1}, \quad \overline{P_{n+2} P_{n+3}} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot r^{n+2} \quad (\text{式 1})$$

，其中 $n = 0, 1, 2, \dots$ ，上式的前兩項為三角形 $\Delta P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 的兩邊長，後兩項為三角形 $\Delta P_{n+1} P_{n+2} P_{n+3}$ 的兩邊長，則

$$\overline{P_n P_{n+1}} : \overline{P_{n+1} P_{n+2}} = \overline{P_{n+1} P_{n+2}} : \overline{P_{n+2} P_{n+3}} = 1 : r \quad (\text{式 2})$$

且

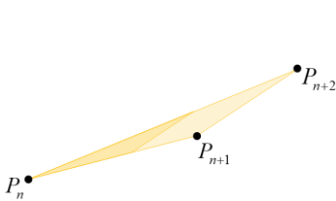
$$\angle P_n P_{n+1} P_{n+2} = \angle P_{n+1} P_{n+2} P_{n+3} = \pi - \theta \quad (\text{式 3})$$

結合 (式 2) 與 (式 3)，根據 SAS 相似，三角形 $\Delta P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 與三角形 $\Delta P_{n+1} P_{n+2} P_{n+3}$ 兩兩互為相似三角形，即兩個圖形具有伸縮關係，接著我們來討論兩個圖形的旋轉與位移的關係，從圖五中，我們可以將兩個三角形之間的變化過程分成三個步驟做解釋如下：

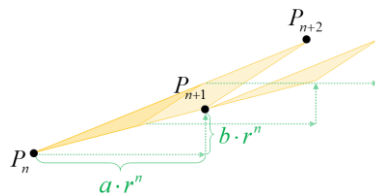
步驟 I：先將三角形 $\Delta P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 的三個邊長做等比例伸縮 r 倍，如圖六。

步驟 II：再將步驟一中的小三角形以沿著水平為 $a \cdot r^n$ 單位與鉛直為 $b \cdot r^n$ 單位做平移，如圖七。

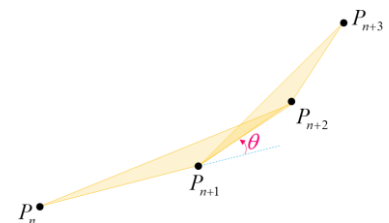
步驟 III：最後將位移後的小三角形旋轉 θ 弧度，並標註為第三個頂點 P_{n+3} ，如圖八。



圖六：將 $\Delta P_n P_{n+1} P_{n+2}$ 伸縮。



圖七：平移伸縮後的三角形。



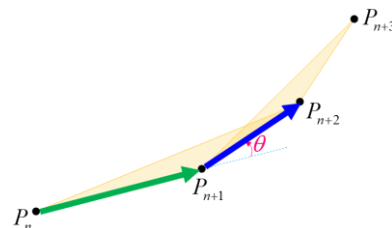
圖八：旋轉伸縮後的三角形。

綜合以上三個步驟，任意相鄰的兩三角形也循著這樣的規律繼續下去，我們可以依序用伸縮、平移與旋轉等關係來描述兩兩相鄰的三角形之變化，而這樣的變化就是幾何學中的仿射變換，我們的想法是如果可以設計一個仿射變換，再找尋這個仿射變換的固定點 (fixed point)，則此固定點將會是解出螞蟻收斂的終點坐標之關鍵；另外在建構仿射變換的過程中，

我們意外地發現也可使用大學線性代數之矩陣對角化的方式來解此收斂問題，因此我們將進行兩個方法的研究與介紹。

(一) 方法一：仿射變換

首先來說明如何建構一個仿射變換，當考慮兩向量 $\overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ 與 $\overrightarrow{P_{n+1} P_{n+2}}$ ，如圖九所示，可觀察出 $\overrightarrow{P_{n+1} P_{n+2}}$ 其實是由 $\overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ 先做伸縮 r 倍，再旋轉 θ 弧度而得，故兩向量之間存在一個仿射變換，



可以用矩陣表示如下：

圖九：兩個相鄰向量的關係。

$$A \overrightarrow{P_n P_{n+1}} = \overrightarrow{P_{n+1} P_{n+2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{式 4})$$

其中 $A = \begin{bmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$ 為 2×2 階的伸縮與旋轉矩陣。我們利用 (式 4)，根據向量的加法可

以推得 $\overrightarrow{P_0 P_2}$ ，計算如下：

$$\overrightarrow{P_0 P_2} = \overrightarrow{P_0 P_1} + \overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{P_0 P_1} + A \overrightarrow{P_0 P_1}$$

接著以同樣的方式， $\overrightarrow{P_2 P_3}$ 可由 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 先做伸縮 r 倍，再旋轉 θ 弧度而得，即 $A \overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{P_2 P_3}$ ，故可

推得 $\overrightarrow{P_0 P_3}$ ，計算如下：

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0 P_3} &= \overrightarrow{P_0 P_1} + \overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 P_3} = \overrightarrow{P_0 P_1} + A \overrightarrow{P_0 P_1} + A \overrightarrow{P_1 P_2} \\ &= \overrightarrow{P_0 P_1} + A \overrightarrow{P_0 P_1} + A (A \overrightarrow{P_0 P_1}) \\ &= \overrightarrow{P_0 P_1} + A \overrightarrow{P_0 P_1} + A^2 \overrightarrow{P_0 P_1} \end{aligned}$$

以這種方式繼續下去，可得到

$$\overrightarrow{P_0 P_n} = \overrightarrow{P_0 P_1} + A \overrightarrow{P_0 P_1} + A^2 \overrightarrow{P_0 P_1} + \dots + A^{n-1} \overrightarrow{P_0 P_1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{式 5})$$

我們發現 (式 5) 也可以化簡成 $\overrightarrow{P_0 P_{n-1}}$ 與 $\overrightarrow{P_0 P_n}$ 的遞迴關係，為了方便理解遞迴的架構，先以 A 的次方作降冪，整理式子如下：

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0 P_n} &= A^{n-1} \overrightarrow{P_0 P_1} + A^{n-2} \overrightarrow{P_0 P_1} + \dots + A \overrightarrow{P_0 P_1} + \overrightarrow{P_0 P_1} \\ &= A (A^{n-2} \overrightarrow{P_0 P_1} + A^{n-3} \overrightarrow{P_0 P_1} + \dots + A \overrightarrow{P_0 P_1} + \overrightarrow{P_0 P_1}) + \overrightarrow{P_0 P_1} \\ &= A (\overrightarrow{P_0 P_{n-1}}) + \overrightarrow{P_0 P_1} \end{aligned} \quad (\text{式 6})$$

因此我們可以發現 (式 6) 中的遞迴關係式，剛好就是我們熟悉的以 $A = \begin{bmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$ 為

線性變換中的伸縮與旋轉，加上一個位移向量 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 的仿射變換。

但為了要建立一個同時具有伸縮、平移與旋轉等的仿射變換，我們利用線性代數領域中的齊次坐標 (homogeneous coordinates) 之概念與技巧，將以上三個變換整合在同一個矩陣，

先將 $\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 改寫成一個增廣向量為 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$ (也稱為齊次坐標)，再把矩陣 A 與增廣向量 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$

合併寫成一個增廣變換矩陣 T ，則新的仿射變換如下：

$$T \overrightarrow{P_0P_n} = \overrightarrow{P_0P_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{式 7})$$

，其中 T 為 $\begin{bmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta & a \\ r \sin \theta & r \cos \theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 為 3×3 階的矩陣。接下來我們要研究如何找到此仿射變換的

的固定點，當只考慮向量之間的變化時，如圖十所示，每個相鄰的向量，兩兩皆存在相同的仿射變換。

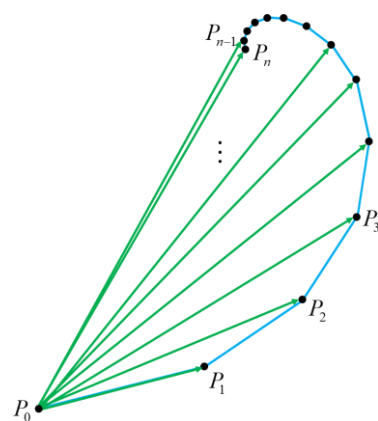
接著我們必須考慮當 n 趨近於無窮大時，向量變化的情況，由圖十可觀察出當 n 趨近於無窮大時，向量的方向與大小會趨近

於相同，這也表示向量也會跟著收斂至某個向量 $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，即

$\lim_{n \rightarrow \infty} \overrightarrow{P_0P_n} = \overrightarrow{v}$ ，利用 (式 7) 並推導過程如下：

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \overrightarrow{P_0P_n} = \overrightarrow{v} &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(T \overrightarrow{P_0P_{n-1}} \right) = \overrightarrow{v} \\ &\Rightarrow T \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \overrightarrow{P_0P_{n-1}} \right) = \overrightarrow{v} \\ &\Rightarrow T \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \end{aligned} \quad (\text{式 8})$$

故當 (式 8) 有解，則向量 \overrightarrow{v} 會是仿射變換的固定點，也就是收斂的向量，計算過程如下：



圖十：經過仿射變換後的所有向量之關係示意圖。

$$T \vec{v} = \vec{v} \Rightarrow \begin{bmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta & a \\ r \sin \theta & r \cos \theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} r \cos \theta - 1 & -r \sin \theta & a \\ r \sin \theta & r \cos \theta - 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (r \cos \theta - 1) \cdot v_1 - r \sin \theta \cdot v_2 + a = 0 \\ r \sin \theta \cdot v_1 + (r \cos \theta - 1) \cdot v_2 + b = 0 \end{cases}$$

針對上面的最後一個聯立式，我們利用克拉瑪公式來解 (v_1, v_2) ，計算三個行列式 Δ 、 Δ_{v_1} 與 Δ_{v_2}

如下：

$$\Delta = \begin{vmatrix} r \cos \theta - 1 & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta - 1 \end{vmatrix} = 1 - 2r \cos \theta + r^2$$

$$\Delta_{v_1} = \begin{vmatrix} -a & -r \sin \theta \\ -b & r \cos \theta - 1 \end{vmatrix} = a - r(a \cos \theta + b \sin \theta)$$

$$\Delta_{v_2} = \begin{vmatrix} r \cos \theta - 1 & -a \\ r \sin \theta & -b \end{vmatrix} = b + r(a \sin \theta - b \cos \theta)$$

則根據克拉瑪公式可解出 $(v_1, v_2) = \left(\frac{\Delta_{v_1}}{\Delta}, \frac{\Delta_{v_2}}{\Delta}\right)$ 為

$$\left(\frac{a - r(a \cos \theta + b \sin \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, \frac{b + r(a \sin \theta - b \cos \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2}\right) \quad (\text{式 9})$$

故(式 9)為收斂的向量，再將其加上 $P_0(x_0, y_0)$ ，即螞蟻收斂的終點之坐標 P 為

$$\left(x_0 + \frac{a - r(a \cos \theta + b \sin \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, y_0 + \frac{b + r(a \sin \theta - b \cos \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2}\right) \quad (\text{式 10})$$

(二) 方法二：矩陣對角化

我們在研究如何建構仿射變換的推導過程中，將(式 5)先以 A 的次方作降幕並可提出

$\overrightarrow{P_0 P_1}$ ，整理式子為

$$\overrightarrow{P_0 P_n} = (A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A + I_2) \overrightarrow{P_0 P_1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{式 11})$$

其中 $A = \begin{bmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$ 為 2×2 階的伸縮與旋轉矩陣， I_2 為 2×2 階的單位方陣。

在(式 11)中，當 n 趨近於無窮大時，我們要探討 $\lim_{n \rightarrow \infty} \overrightarrow{P_0 P_n}$ 是否可收斂，發現如果矩陣 A 的無窮等比級數和能收斂至某一個矩陣，就可解出收斂向量；然而在計算矩陣 A 的高階次方是一件很龐大的計算，為了由繁化簡，我們引入大學線性代數之矩陣對角化之觀念，將此矩陣 A 先進行矩陣對角化，以下分兩個步驟進行對角化：

步驟 I：先令 λ 為矩陣 A 的特徵值，計算其特徵方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$ 如下：

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} r \cos \theta - \lambda & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2r \cos \theta \lambda + r^2 = 0 \quad (\text{式 12})$$

其 (式 12) 的解即為特徵值，其值分別以尤拉公式記為 $\lambda_1 = r \cdot e^{-i\theta}$ 與 $\lambda_2 = r \cdot e^{i\theta}$ 。

步驟 II：接著計算特徵值 λ_1 與 λ_2 分別對應的特徵向量 $u_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ 與 $u_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ，過程如下：

$$(A - \lambda_1 I) u_1 = \begin{bmatrix} r \cdot i \sin \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cdot i \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i \cdot x_1 = y_1 \\ x_1 = -i \cdot y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 I) u_2 = \begin{bmatrix} -r \cdot i \sin \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & -r \cdot i \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i \cdot x_2 = -y_2 \\ x_2 = i \cdot y_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

綜合以上兩個步驟，將這兩個特徵向量組成一 2×2 矩陣 $P = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ ，其反矩陣 $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ ，

我們可將 (式 11) 中的矩陣 A 進行對角化可得

$$A = PDP^{-1}, \text{ 其中 } D = \begin{bmatrix} r \cdot e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & r \cdot e^{i\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{式 13})$$

接著將 (式 13) 的結果代入 (式 11) 並化簡如下：

$$\overrightarrow{P_0 P_n} = P \left(D^{n-1} + D^{n-2} + \dots + D + I \right) P^{-1} \overrightarrow{P_0 P_1} = P \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} (r \cdot e^{-i\theta})^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n-1} (r \cdot e^{i\theta})^k \end{bmatrix} P^{-1} \overrightarrow{P_0 P_1} \quad (\text{式 14})$$

在 (式 14) 中，當 n 趨近於無窮大時，這裡我們要利用無窮等比級數的收斂性，即

$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ ，其中 $z \in \mathbb{C}$ 且 $|z| < 1$ ，很明顯地，當 $z = r \cdot e^{-i\theta}$ 或 $r \cdot e^{i\theta}$ ， $0 < r < 1$ ，則可推得 $|z| < 1$ ，

故計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \overrightarrow{P_0 P_n}$ 的過程如下：

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \overrightarrow{P_0 P_n} &= P \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (r \cdot e^{-i\theta})^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} (r \cdot e^{i\theta})^k \end{bmatrix} P^{-1} \overrightarrow{P_0 P_1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-r \cdot e^{-i\theta}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-r \cdot e^{i\theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a - r(a \cos \theta + b \sin \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \\ \frac{b - r(b \cos \theta - a \sin \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{式 15})$$

故 (式 15) 為收斂向量，再將其加上 $P_0(x_0, y_0)$ ，即螞蟻收斂的終點之坐標 P 為

$$\left(x_0 + \frac{a - r(a \cos \theta + b \sin \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, y_0 + \frac{b + r(a \sin \theta - b \cos \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2}\right) \quad (\text{式 } 16)$$

此 (式 16) 的結果與仿射變換的方法所算出的結果是相符合的

二、探討平面上，在「無窮行徑」的條件下，找出螞蟻行徑的終點所形的對數螺旋之通式

這裡我們要根據上一節螞蟻行走的路徑，來探究「螞蟻每次到達的終點，即圖三的点 P_n ， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，是否會落在對數螺旋曲線 (logarithmic spiral) 上？」並將其曲線的參數式之通式表達出來，若曲線上的點與收斂點 P 之間的距離呈現指數般增加，則此螺旋即為對數螺旋。

先令 $d_n = \overline{P_n P}$ ，其中 $n = 0, 1, 2, \dots$ ，若能證明 d_n 為以變數 n 為單位的指數函數，也就是 $\langle d_n \rangle$ 為一個等比數列，即可說明螞蟻行徑的終點皆會落在此螺旋上。首先我們先計算 d_0 之值，過程如下：

$$\begin{aligned} d_0 &= \sqrt{\left(\frac{a - r(a \cos \theta + b \sin \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2}\right)^2 + \left(\frac{b + r(a \sin \theta - b \cos \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{(1 - 2r \cos \theta + r^2)^2} \cdot [(a^2 + b^2) - 2r \cos \theta \cdot (a^2 + b^2) + r^2 \cdot (a^2 + b^2)]} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(1 - 2r \cos \theta + r^2)^2} \cdot (1 - 2r \cos \theta + r^2)} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}} \end{aligned} \quad (\text{式 } 17)$$

接著為了要方便計算 d_n 之值， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，我們利用尤拉公式來表達平面上的向量坐標表示法，由圖三中，根據尤拉公式可得 $\overrightarrow{P_0 P_1} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\phi}$ ，其中 ϕ 滿足 $\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 且

$\sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ，而點 P_0 走到點 P_1 時需轉 θ 弧度並走 $r \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ 單位到達點 P_2 ，在過程中做

平行於 x 軸並通過點 P_1 之平行線時，則 $\overrightarrow{P_1 P_2}$ 與平行線的夾角為 $\phi + \theta$ 弧度，故計算 $\overrightarrow{P_0 P_2}$ 如下：

$$\overrightarrow{P_0 P_2} = \overrightarrow{P_0 P_1} + \overrightarrow{P_1 P_2} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\phi} + r \cdot \sqrt{a^2 + b^2} e^{i(\phi + \theta)}$$

接著在點 P_2 轉 θ 弧度後行徑 $r^2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ 單位到達點 P_3 ，同樣地，做平行於 x 軸並通過點 P_2 之

平行線，則 $\overrightarrow{P_2P_3}$ 與平行線的夾角為 $\phi + 2\theta$ 弧度，故計算 $\overrightarrow{P_0P_3}$ 如下：

$$\overrightarrow{P_0P_3} = \overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\phi} + r \cdot \sqrt{a^2 + b^2} e^{i(\phi+\theta)} + r^2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2} e^{i(\phi+2\theta)}$$

以這種方式繼續下去，可得到 $\overrightarrow{P_0P_n}$ 如下：

$$\overrightarrow{P_0P_n} = \overrightarrow{P_0P_1} + \overrightarrow{P_1P_2} + \cdots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\phi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (re^{i\theta})^k, \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{式 18})$$

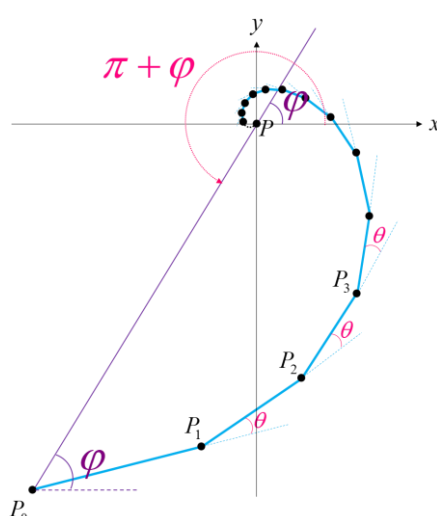
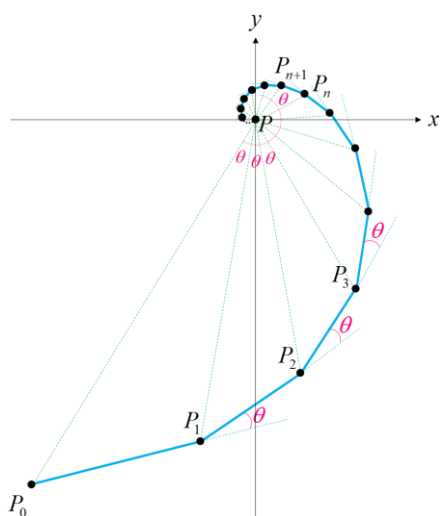
故利用 (式 18) 來求 d_n 之值，即計算 $\left| \overrightarrow{P_nP} \right|$ ，過程中我們用到向量減法，推導過程如下：

$$\begin{aligned} \left| \overrightarrow{P_nP} \right| &= \left| \overrightarrow{P_0P} - \overrightarrow{P_0P_n} \right| = \left| \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\phi} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} (re^{i\theta})^k \right| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left| (re^{i\theta})^n \right| \cdot \left| \sum_{k=0}^{\infty} re^{i\theta k} \right| \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} r^n \left| \frac{1}{1 - re^{i\theta}} \right| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}} \cdot r^n \end{aligned} \quad (\text{式 19})$$

綜合 (式 17) 與 (式 19)，可推得 $\langle d_n \rangle$ 為一個首項為 $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}}$ ，公比為 r 的等比數列，這也表示圖三的点 $P_n, \forall n \in \mathbb{N}$ ，即螞蟻行徑的終點所形成的軌跡可為對數螺旋的建模，而我們將此「建模」的合理性寫在「陸、討論的第三點」做進一步的說明。

有了螺旋的建模的概念後，我們將推導此對數螺旋曲線之通式，分以下三個步驟作說明：

步驟 I：先將此螺旋平移，使其收斂點 P 落到原點上，將點 P_n 與收斂點 P 之間作輔助線，其中 $n = 0, 1, 2, \dots$ ，已知 $\langle d_n \rangle$ 為一個等比數列，則我們可以推得 $\Delta P_n P P_{n+1}$ 皆為相似三角形，再由三角形的外角和定理，不難推出 $\angle P_n P P_{n+1} = \theta$ 弧度，故對數螺旋亦為等角螺旋，如圖十一所示。



圖十一：螞蟻行徑的終點與收斂點連線。 圖十二：以 x 軸當始邊、射線 $\overrightarrow{P_0P}$ 當終邊的正角。

步驟 II：延長 $\overline{PP_0}$ ，如圖十二所示，當考慮以 x 軸當始邊、射線 $\overline{PP_0}$ 當終邊的正角時，其角度值為 $\pi + \varphi$ ，其中 $\varphi = \tan^{-1} \frac{b+r(a \sin \theta - b \cos \theta)}{a-r(a \cos \theta + b \sin \theta)}$ 弧度。

步驟 III：我們考慮以 x 軸當始邊、射線 $\overline{PP_n}$ 當終邊的正角，其角度值以 ω_n 表示為

$$\omega_n = (\pi + \varphi) + n \cdot \theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{式 } 20)$$

將 (式 20) 移項整理可得 $n = \frac{\omega_n - (\pi + \varphi)}{\theta}$ ，並代入 (式 19)，即可建構出此螺旋的極座標方程式

式 $r(\omega_n)$ 如下：

$$r(\omega_n) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}} \cdot r^{\frac{\omega_n - (\pi + \varphi)}{\theta}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{式 } 21)$$

綜合上面步驟，由 (式 21) 與建模的合理性，可推得此螺旋的一般化極座標方程式為

$$r(\omega) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}} \cdot r^{\frac{\omega - (\pi + \varphi)}{\theta}}, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{式 } 22)$$

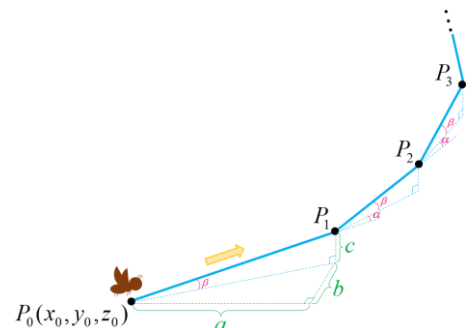
，最後再將此螺旋曲線平移回去，使收斂點 P 回到原本的位置，則我們可以得到此對數螺旋曲線的通式，以參數式表示為

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}} \cdot r^{\frac{\omega - (\pi + \varphi)}{\theta}} \cos \omega + \left(x_0 + \frac{a - r(a \cos \theta + b \sin \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \right) \\ y = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}} \cdot r^{\frac{\omega - (\pi + \varphi)}{\theta}} \sin \omega + \left(y_0 + \frac{b + r(a \sin \theta - b \cos \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \right) \end{cases}$$

，其中 $\varphi = \tan^{-1} \frac{b+r(a \sin \theta - b \cos \theta)}{a-r(a \cos \theta + b \sin \theta)}$ 弧度、 $\omega \in \mathbb{R}$ 。

三、探討空間中，在「無窮飛行」的條件下，找出飛蟻的收斂點坐標之通式

我們接著由平面推廣至空間，如圖十三所示，將題目描述改為「空間中一隻飛蟻從點 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 出發，沿著以 x 軸 a 單位、 y 軸 b 單位、 z 軸 c 單位之對角線飛行至點 P_1 ，接下來每次飛行的仰角為 β 弧度，再以平行 z 軸的軸旋轉 α 弧度後開始飛行，其飛行距離為前一次飛行距離的 r 倍後至下一個點，其中 $\beta = \tan^{-1} \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ， $0 < r < 1$ ，當無窮



圖十三：一般化的飛蟻飛行路徑。

多次的飛行下，求飛蟻收斂的終點之坐標 P 為何？」，以下將進行兩個方法的研究與介紹。

(一)方法一:仿射變換

首先我們取任意相鄰的兩條路徑為例，並且考慮兩向量

$\overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ 與 $\overrightarrow{P_{n+1} P_{n+2}}$ ，其中 $n=0,1,2,\dots$ ，如圖十四所示，如果我

們能說明向量 $\overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ 與 $\overrightarrow{P_{n+1} P_{n+2}}$ 具有伸縮、旋轉與位移的關係，

即可找到兩向量之間的仿射變換，我們將分成以

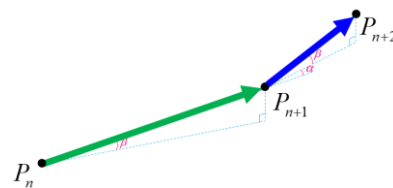
下兩個步驟做討論：

步驟 I： 我們考慮先將圖十四投射在 xy 平面上，如圖

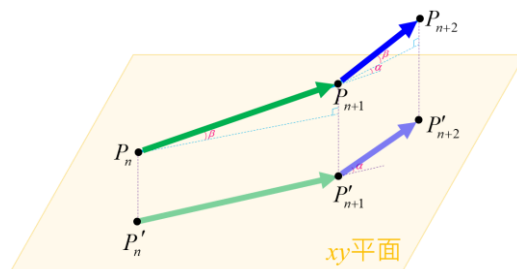
十五所示，向量 $\overrightarrow{P'_n P'_{n+1}}$ 與 $\overrightarrow{P'_{n+1} P'_{n+2}}$ 其實分別就是 $\overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ 與

$\overrightarrow{P_{n+1} P_{n+2}}$ 在 xy 平面上的投影向量，計算 $|\overrightarrow{P'_n P'_{n+1}}|$ 與

$|\overrightarrow{P'_{n+1} P'_{n+2}}|$ 如下：



圖十四：兩個相鄰向量的關係。



圖十五：將兩個相鄰的空間向量投射在 xy 平面上。

$$|\overrightarrow{P'_n P'_{n+1}}| = |\overrightarrow{P_n P_{n+1}}| \cos \beta = \left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot r^n \right) \cdot \cos \beta$$

$$|\overrightarrow{P'_{n+1} P'_{n+2}}| = |\overrightarrow{P_{n+1} P_{n+2}}| \cos \beta = \left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot r^{n+1} \right) \cdot \cos \beta$$

可推得此兩向量的大小具有伸縮的關係如下：

$$|\overrightarrow{P'_{n+1} P'_{n+2}}| = r \cdot |\overrightarrow{P'_n P'_{n+1}}|, \quad n=0,1,2,\dots \quad (\text{式 } 23)$$

因此 $\overrightarrow{P'_{n+1} P'_{n+2}}$ 其實是由 $\overrightarrow{P'_n P'_{n+1}}$ 先做伸縮 r 倍，再旋轉 α 弧度而得，故兩向量之間存在一個

仿射變換，可以用矩陣表示如下

$$A \overrightarrow{P'_n P'_{n+1}} = \overrightarrow{P'_{n+1} P'_{n+2}}, \quad n=0,1,2,\dots \quad (\text{式 } 24)$$

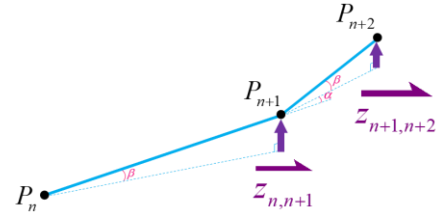
其中 $A = \begin{bmatrix} r \cos \alpha & -r \sin \alpha & 0 \\ r \sin \alpha & r \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 為伸縮與旋轉的 3×3 階矩陣，事實上 (式 24) 與螞蟻在平面上的

的討論一樣，因此仿照平面上的做法，我們同樣地可以推得

$$\overrightarrow{P'_0 P'_n} = A \left(\overrightarrow{P'_0 P'_{n-1}} \right) + \overrightarrow{P'_0 P'_1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{式 } 25)$$

故 (式 25) 即為投影在 xy 平面上的仿射變換。

步驟 II：接下來當我們能找出平行於 z 軸的仿射變換後，則再將這兩種變換做結合，即可找出空間的仿射變換，任取相鄰的兩個向量，用圖十六來解釋，在圖十六中，我們依序令



圖十六：兩個相鄰的空間向量之平行 z 軸的分量。

$\overrightarrow{P_n P_{n+1}}$ 的 z 分量為 $\overrightarrow{z_{n,n+1}}$ 、 $\overrightarrow{P_{n+1} P_{n+2}}$ 的 z 分量為 $\overrightarrow{z_{n+1,n+2}}$ ，計算

$|\overrightarrow{z_{n,n+1}}|$ 與 $|\overrightarrow{z_{n+1,n+2}}|$ 如下：

$$|\overrightarrow{z_{n,n+1}}| = \overline{P_n P_{n+1}} \sin \beta = \left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot r^n \right) \sin \beta = c \cdot r^n$$

$$|\overrightarrow{z_{n+1,n+2}}| = \overline{P_{n+1} P_{n+2}} \sin \beta = \left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot r^{n+1} \right) \sin \beta = c \cdot r^{n+1}$$

可推得此兩向量的大小具有伸縮的關係如下：

$$|\overrightarrow{z_{n+1,n+2}}| = r \cdot |\overrightarrow{z_{n,n+1}}| \quad (\text{式 26})$$

因此 $\overrightarrow{z_{n+1,n+2}}$ 其實是由 $\overrightarrow{z_{n,n+1}}$ 做伸縮 r 倍而得，故此兩向量的關係可以利用矩陣表示如下：

$$S \overrightarrow{z_{n,n+1}} = \overrightarrow{z_{n+1,n+2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{式 27})$$

其中 $S = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$ 為 3×3 階的伸縮矩陣。我們利用 (式 27)，根據向量的加法並進行疊代計算

可推得 $\overrightarrow{z_{0,n}}$ ，推導過程如下：

$$\begin{aligned} \overrightarrow{z_{0,n}} &= \overrightarrow{z_{0,1}} + \overrightarrow{z_{1,2}} + \dots + \overrightarrow{z_{n-1,n}} = \overrightarrow{z_{0,1}} + S \overrightarrow{z_{0,1}} + \dots + S^{n-1} \overrightarrow{z_{0,1}} \\ &= S \left(S^{n-2} \cdot \overrightarrow{z_{0,1}} + S^{n-3} \cdot \overrightarrow{z_{0,1}} + \dots + \overrightarrow{z_{0,1}} \right) + \overrightarrow{z_{0,1}} = S \left(\overrightarrow{z_{0,n-1}} \right) + \overrightarrow{z_{0,1}} \end{aligned} \quad (\text{式 28})$$

故 (式 28) 即為平行於 z 軸的仿射變換。

綜合上面兩個步驟，我們利用向量的加法原理整合 xy 平面上的仿射變換與平行於 z 軸的仿射變換，結合 (式 25) 與 (式 28)，我們可推出 $\overrightarrow{P_0 P_{n-1}}$ 與 $\overrightarrow{P_0 P_n}$ 的遞迴關係式，計算過程如下：

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0 P_n} &= \overrightarrow{P_0 P_{n-1}} + \overrightarrow{z_{0,n}} = A \left(\overrightarrow{P'_0 P'_{n-1}} \right) + \overrightarrow{P'_0 P'_1} + \left(S \overrightarrow{z_{0,n-1}} + \overrightarrow{z_{0,1}} \right) \\ &= \left(A \overrightarrow{P'_0 P'_{n-1}} + S \overrightarrow{z_{0,n-1}} \right) + \left(\overrightarrow{P'_0 P'_1} + \overrightarrow{z_{0,1}} \right) = \left(A \overrightarrow{P'_0 P'_{n-1}} + S \overrightarrow{z_{0,n-1}} \right) + \overrightarrow{P_0 P_1} \end{aligned} \quad (\text{式 29})$$

在 (式 29) 中， $A \overrightarrow{P'_0 P'_{n-1}}$ 為向量 $\overrightarrow{P_0 P_{n-1}}$ 的 x 與 y 分量做伸縮與旋轉，而 $S \overrightarrow{z_{0,n-1}}$ 為向量 $\overrightarrow{P_0 P_{n-1}}$ 的 z 分量做伸縮，因此 (式 29) 可再改寫為

$$\overrightarrow{P_0 P_n} = B \overrightarrow{P_0 P_{n-1}} + \overrightarrow{P_0 P_1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{式 30})$$

，其中 $B = \begin{bmatrix} r \cos \alpha & -r \sin \alpha & 0 \\ r \sin \alpha & r \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$ ，故 (式 30) 即為空間的仿射變換。最後仿照平面上整合伸

縮、平移與旋轉等的仿射變換，再度考慮利用線性代數領域中的齊次坐標之概念與技巧，將

以上三個變換整合在同一個矩陣，將 $\overrightarrow{P_0 P_1}$ 改寫成一個增廣向量為 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$ ，再把矩陣 B 與增廣向

量 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 1 \end{bmatrix}$ 合併寫成一個增廣變換矩陣 K ，則新的仿射變換如下：

$$K \overrightarrow{P_0 P_n} = \overrightarrow{P_0 P_{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{式 31})$$

，其中 K 為 $\begin{bmatrix} r \cos \alpha & -r \sin \alpha & 0 & a \\ r \sin \alpha & r \cos \alpha & 0 & b \\ 0 & 0 & r & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 為 4×4 階的矩陣。接下來我們找出此仿射變換的固

定點，即要解 $K \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w}$ ，則此向量 \overrightarrow{w} 會是仿射變換的固定點，也就是收斂的向量，計算的過程如下：

$$\begin{aligned} K \overrightarrow{w} = \overrightarrow{w} &\Rightarrow \begin{bmatrix} r \cos \alpha & -r \sin \alpha & 0 & a \\ r \sin \alpha & r \cos \alpha & 0 & b \\ 0 & 0 & r & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} r \cos \alpha - 1 & -r \sin \alpha & 0 & a \\ r \sin \alpha & r \cos \alpha - 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & r - 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (r \cos \alpha - 1) \cdot w_1 - r \sin \alpha \cdot w_2 + a = 0 \\ r \sin \alpha \cdot w_1 + (r \cos \alpha - 1) \cdot w_2 + b = 0 \\ (r - 1) \cdot w_3 + c = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{式 32})$$

針對 (式 32) 中的最後一個聯立式中，前面兩個等式，與上一段我們在平面上的聯立式一樣，故 w_1 與 w_2 的值分別 $\frac{a-r(a\cos\alpha+b\sin\alpha)}{1-2r\cos\alpha+r^2}$ 與 $\frac{b+r(a\sin\alpha-b\cos\alpha)}{1-2r\cos\alpha+r^2}$ ，而最後一個等式可以解出 $w_3 = \frac{c}{1-r}$ ，故收斂向量 (w_1, w_2, w_3) 為 $(\frac{a-r(a\cos\alpha+b\sin\alpha)}{1-2r\cos\alpha+r^2}, \frac{b+r(a\sin\alpha-b\cos\alpha)}{1-2r\cos\alpha+r^2}, \frac{c}{1-r})$ ，

最後將其加上出發點 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ，故飛蟻收斂的終點坐標 P 為

$$(x_0 + \frac{a-r(a\cos\alpha+b\sin\alpha)}{1-2r\cos\alpha+r^2}, y_0 + \frac{b+r(a\sin\alpha-b\cos\alpha)}{1-2r\cos\alpha+r^2}, z_0 + \frac{c}{1-r}) \quad (\text{式 33})$$

(二)方法二：矩陣對角化

我們這裡也提供第二個作法，研究如何將 (式 30) 中的矩陣 B 對角化，可利用 (式 30) 來計算遞迴疊代並提出 $\overrightarrow{P_0P_n}$ ，以 B 的次方作降冪整理式子為

$$\overrightarrow{P_0P_n} = (B^{n-1} + B^{n-2} + \cdots + B + I_3) \overrightarrow{P_0P_1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{式 34})$$

其中 $B = \begin{bmatrix} r\cos\alpha & -r\sin\alpha & 0 \\ r\sin\alpha & r\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$ 為 3×3 階的伸縮與旋轉矩陣， I_3 為 3×3 階的單位方陣。

在 (式 34) 中，當 n 趨近於無窮大時，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \overrightarrow{P_0P_n}$ 要收斂至某一個向量，則要先解決矩陣 B 的高階次方的問題，因此再度引入矩陣對角化之技巧，將此矩陣 B 先進行矩陣對角化，以下分兩個步驟進行對角化：

步驟 I：先令 λ 為矩陣 B 的特徵值，計算其特徵方程式 $\det(B - \lambda I) = 0$ 如下：

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} r\cos\alpha - \lambda & -r\sin\alpha & 0 \\ r\sin\alpha & r\cos\alpha - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & r - \lambda \end{vmatrix} = (r - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} r\cos\alpha - \lambda & -r\sin\alpha \\ r\sin\alpha & r\cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (r - \lambda) \cdot (\lambda^2 - 2r\cos\alpha \cdot \lambda + r^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{式 35})$$

其 (式 35) 的解即為特徵值，其值分別以尤拉公式記為 $\lambda_1 = r \cdot e^{-i\alpha}$ 、 $\lambda_2 = r \cdot e^{i\alpha}$ 與 $\lambda_3 = r$ 。

步驟 II：計算 λ_1 、 λ_2 與 λ_3 分別對應的特徵向量 $u_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$ 、 $u_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$ 與 $u_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}$ 過程如下：

$$(B - \lambda_1 I) u_1 = \begin{bmatrix} r \cdot i \sin \alpha & -r \sin \alpha & 0 \\ r \sin \alpha & r \cdot i \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & r - r e^{-i\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i \cdot x_1 = y_1 \\ x_1 = -i \cdot y_1 \\ (r - r e^{-i\alpha}) \cdot z_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(B - \lambda_2 I) u_2 = \begin{bmatrix} -r \cdot i \sin \alpha & -r \sin \alpha & 0 \\ r \sin \alpha & -r \cdot i \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & r - r e^{i\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} i \cdot x_2 = -y_2 \\ x_2 = i \cdot y_2 \\ (r - r e^{i\alpha}) \cdot z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(B - \lambda_3 I) u_3 = \begin{bmatrix} r \cos \alpha - r & -r \sin \alpha & 0 \\ r \sin \alpha & r \cos \alpha - r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (r \cos \alpha - r) \cdot x_3 = r \sin \alpha \cdot y_3 \\ r \sin \alpha \cdot x_3 = (r \cos \alpha - r) \cdot y_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

綜合以上兩個步驟，將這三個特徵向量組成一 3×3 矩陣 $Q = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，並計算其反矩陣 Q^{-1} 為

$\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，我們可將 (式 34) 中的矩陣 B 進行對角化可得

$$B = Q D Q^{-1}, \text{ 其中 } D = \begin{bmatrix} r \cdot e^{-i\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & r \cdot e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \quad (\text{式 36})$$

接著將 (式 36) 的結果代入 (式 34) 並化簡與整理如下：

$$\overrightarrow{P_0 P_n} = Q \left(D^{n-1} + D^{n-2} + \dots + D + I \right) Q^{-1} \overrightarrow{P_0 P_1} = Q \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} (r \cdot e^{-i\alpha})^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n-1} (r \cdot e^{i\alpha})^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n-1} r^k \end{bmatrix} Q^{-1} \overrightarrow{P_0 P_1}$$

在上式中，當 n 趨近於無窮大時，因 $z = r \cdot e^{-i\alpha}$ 、 $r \cdot e^{i\alpha}$ 或 r ， $0 < r < 1$ ，則可推得 $|z| < 1$ ，

故再次利用無窮等比級數的收斂性並計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \overrightarrow{P_0 P_n}$ 的過程如下：

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \overrightarrow{P_0 P_n} &= Q \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} (r \cdot e^{-i\alpha})^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} (r \cdot e^{i\alpha})^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} r^k \end{bmatrix} Q^{-1} \overrightarrow{P_0 P_1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-r \cdot e^{-i\alpha}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-r \cdot e^{i\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-r} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a-r(a \cos \alpha + b \sin \alpha)}{1-2r \cos \alpha + r^2} \\ \frac{b-r(b \cos \alpha - a \sin \alpha)}{1-2r \cos \alpha + r^2} \\ \frac{c}{1-r} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故上式的結果為收斂的向量，再將其加上 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ，即飛蟻收斂的終點坐標 P 為

$$\left(x_0 + \frac{a-r(a \cos \alpha + b \sin \alpha)}{1-2r \cos \alpha + r^2}, y_0 + \frac{b+r(a \sin \alpha - b \cos \alpha)}{1-2r \cos \alpha + r^2}, z_0 + \frac{c}{1-r} \right) \quad (\text{式 37})$$

此 (式 37) 的結果與仿射變換的方法所算出的結果是相符合的。

四、探討空間中，在「無窮飛行」的條件下，找出飛蟻行徑的終點所形的對數螺旋之通式

這裡我們要根據上一節飛蟻飛行的路徑，來探究「飛蟻每次到達的終點，即圖十三的點 P_n ， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，是否會落在空間中的對數螺旋曲線 (logarithmic spiral) 上？」並將其曲線的參數式之通式表達出來，若曲線上的點與收斂點 P 之間的距離呈現指數般增加，則此螺旋即為對數螺旋。

先令 $d_n = \overline{P_n P}$ ，其中 $n = 0, 1, 2, \dots$ ，若能證明 d_n 為以變數 n 為單位的指數函數，也就是 $\langle d_n \rangle$ 為一個等比數列，即可說明飛蟻行徑的終點皆會落在此螺旋上，首先我們先計算 $\overline{P_0 P}$ 之值，過程如下：

$$\begin{aligned} d_0^2 &= \left(\frac{a-r(a \cos \alpha + b \sin \alpha)}{1-2r \cos \alpha + r^2} \right)^2 + \left(\frac{b+r(a \sin \alpha - b \cos \alpha)}{1-2r \cos \alpha + r^2} \right)^2 + \left(\frac{c}{1-r} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(1-2r \cos \alpha + r^2)^2} \cdot \left[(a^2 + b^2) - 2r \cos \alpha \cdot (a^2 + b^2) + r^2 \cdot (a^2 + b^2) \right] + \left(\frac{c}{1-r} \right)^2 \quad (\text{式 38}) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{(1-2r \cos \alpha + r^2)^2} \cdot (1-2r \cos \alpha + r^2) + \left(\frac{c}{1-r} \right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{1-2r \cos \alpha + r^2} + \left(\frac{c}{1-r} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{, 即 } d_0 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1-2r \cos \alpha + r^2} + \left(\frac{c}{1-r} \right)^2} \text{。}$$

接下來討論如何計算 d_n 之值, $\forall n \in \mathbb{N}$, 如果在空間中要求兩點的距離, 可以考慮投影在 xy 平面上的兩點之距離平方, 再加上兩點的 z 分量長度的平方, 利用畢氏定理, 即可求得空間中兩點的距離, 以下分兩個步驟:

步驟 I: 先將點 P_0 、 P_n , $\forall n \in \mathbb{N}$ 、與收斂點 P 投影在 xy 平面上, 可分別得到投影點 P'_n 與 P' , 投影在 xy 平面上的路徑, 其實與平面上螞蟻行徑的討論一樣, 只是平面上旋轉的角度值改為 α 弧度, 故再次用尤拉公式來表達平面上的向量坐標表示法, 可得 $\overrightarrow{P'_0P'_1} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\phi}$, 其中 ϕ 滿足 $\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 且 $\sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 仿照平面上的推導出 (式 18) 的手法, 可得到 $\overrightarrow{P'_0P'_n}$ 的式子如下:

$$\overrightarrow{P'_0P'_n} = \overrightarrow{P'_0P'_1} + \overrightarrow{P'_1P'_2} + \cdots + \overrightarrow{P'_{n-1}P'_n} = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\phi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (re^{i\alpha})^k, \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{式 39})$$

故利用 (式 39) 計算 $\left| \overrightarrow{P'_nP}' \right|$ 之值, 過程中我們用到向量減法, 推導過程如下:

$$\begin{aligned} \left| \overrightarrow{P'_nP}' \right| &= \left| \overrightarrow{P'_0P}' - \overrightarrow{P'_0P'_n} \right| = \left| \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\phi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (re^{i\alpha})^k \right| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left| (re^{i\alpha})^n \right| \cdot \left| \sum_{k=0}^{\infty} re^{(i\alpha)k} \right| \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} r^n \left| \frac{1}{1 - re^{i\alpha}} \right| = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}} \cdot r^n \end{aligned} \quad (\text{式 40})$$

步驟 II: 計算點 P_n 與收斂點 P 的 z 分量長度為

$$\left| z_0 + c \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} - \left(z_0 + \frac{c}{1 - r} \right) \right| = \left| \frac{-cr^n}{1 - r} \right| \quad (\text{式 41})$$

綜合以上兩個步驟, 結合 (式 40) 與 (式 41), 我們利用畢氏定理可計算出 d_n 之值如下:

$$d_n = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}} \cdot r^n \right)^2 + \left| \frac{-cr^n}{1 - r} \right|^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} + \left(\frac{c}{1 - r} \right)^2 \cdot r^n} \quad (\text{式 42})$$

故結合 (式 38) 與 (式 42) 的結果可推得 $\langle d_n \rangle$ 為一個首項為 $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} + \left(\frac{c}{1 - r} \right)^2}$, 公比為 r 的等比數列, 這也表示圖十三的點 P_n , $\forall n \in \mathbb{N}$, 即飛蟻行徑的終點所形成的軌跡可為空間中對數螺旋的建模, 有關此建模的合理性, 請再參閱我們的「陸、討論的第三點」。

有了螺旋的建模的概念後, 我們將推導此對數螺旋曲線之通式, 分以下兩個步驟作說明:

步驟 I: 先將此螺旋平移，使其收斂點 P 落到點 $(0, 0, \frac{c}{1-r})$

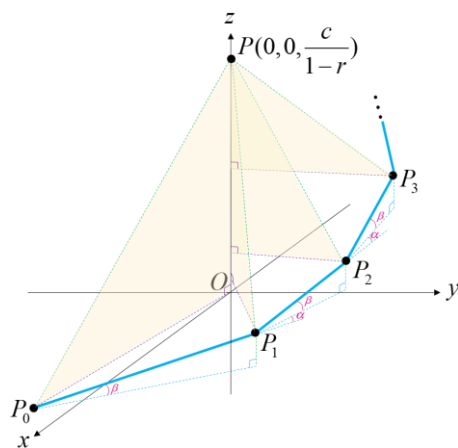
上，並在點 P 與所有點 P_n 之間作輔助線，再從點 P_n 作輔助線垂直於 z 軸，垂足點以 $(P_n)_z$ 表示，形成直角三角形，如

圖十七，我們先說明直角 $\Delta(P_n)_z P P_n$ ， $n=0,1,2,\dots$ ，皆為相

似直角三角形，即證明直角 $\Delta(P_n)_z P P_n$ 的三邊長 $\overline{P_n(P_n)_z}$ 、

$\overline{P_n P}$ 與 $\overline{(P_n)_z P}$ 分別形成的數列 $\langle \overline{P_n(P_n)_z} \rangle$ 、 $\langle \overline{P_n P} \rangle$ 與

$\langle \overline{(P_n)_z P} \rangle$ 皆為以相同的公比之等比數列，證明如下：



圖十七：將飛蟻行徑的終點與收斂點連線。

從圖十七中可知， $\overline{P_n(P_n)_z}$ 的值其實為點 P_n 與收斂點 P 投影在 xy 平面上的兩點之距離，

而 $\overline{P_n P}$ 為飛蟻行徑終點與收斂點的距離，由推導 (式 40) 與 (式 42) 的討論中分別可推得

$\langle \overline{P_n(P_n)_z} \rangle$ 與 $\langle \overline{P_n P} \rangle$ 皆為一個公比為 r 的等比數列，最後驗證 $\langle \overline{(P_n)_z P} \rangle$ 也為一個公比為

r 的等比數列，當 n 為 0 時， $\overline{(P_0)_z P} = \overline{OP} = \frac{c}{1-r}$ ，而當 $\forall n \in \mathbb{N}$ ，計算 $\overline{(P_n)_z P}$ 的過程如下：

$$\overline{(P_n)_z P} = \frac{c}{1-r} - c \cdot \sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{c}{1-r} - c \cdot \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{c}{1-r} \cdot r^n \quad (\text{式 43})$$

由 (式 43) 表示 $\langle \overline{(P_n)_z P} \rangle$ 也為一個公比為 r 的等比數列，因此三個數列皆為以公比為 r 的

等比數列，故直角 $\Delta(P_n)_z P P_n$ ，其中 $n=0,1,2,\dots$ ，皆為相似直角三角形，故進一步地可得到

$$\angle(P_n)_z P P_n = \angle OP_0 P = \tan^{-1} \frac{\frac{c}{1-r}}{\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}}}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{式 44})$$

步驟 II: 考慮將圖十七中的螺旋投射在 xy 平面上，我們可以發現所有的投影點 P'_n 會收斂至

點 P' ，會形成平面上的對數螺旋曲線，剛好可仿照之前在平面上的討論方式，只是平面上旋

轉的角度值改為 α 弧度，先延長 $\overline{P'P'_0}$ ，考慮以 x 軸當始邊、射線 $\overline{P'P'_n}$ 當終邊的正角，其角度

值以 ω_n 表示為

$$\omega_n = (\pi + \varphi) + n \cdot \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{式 45})$$

其中 $\varphi = \tan^{-1} \frac{b+r(a \sin \alpha - b \cos \alpha)}{a-r(a \cos \alpha + b \sin \alpha)}$ 弧度，將 (式 45) 移項整理可得 $n = \frac{\omega_n - (\pi + \varphi)}{\alpha}$ 後，代入 (式 42)，即可建構出一個螺旋的極座標方程式 $r(\omega_n)$ 如下：

$$r(\omega_n) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} + \left(\frac{c}{1-r}\right)^2} \cdot r^{\frac{\omega_n - (\pi + \varphi)}{\alpha}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{式 46})$$

綜合上面步驟，由 (式 46) 與建模的合理性，可推得此螺旋的一般化極座標方程式為

$$r(\omega) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} + \left(\frac{c}{1-r}\right)^2} \cdot r^{\frac{\omega - (\pi + \varphi)}{\alpha}}, \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (\text{式 47})$$

，最後再將此螺旋曲線平移回去，使收斂點 P 回到原本的位置，並利用 (式 44) 的結果，則我們就可以得到此對數螺旋曲線的通式，以參數式表示為

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} + \left(\frac{c}{1-r}\right)^2} \cdot r^{\frac{\omega - (\pi + \varphi)}{\alpha}} \cdot \cos \gamma \cdot \cos \omega + \left(x_0 + \frac{a - r(a \cos \alpha + b \sin \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}\right) \\ y = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} + \left(\frac{c}{1-r}\right)^2} \cdot r^{\frac{\omega - (\pi + \varphi)}{\alpha}} \cdot \cos \gamma \cdot \sin \omega + \left(y_0 + \frac{b + r(a \sin \alpha - b \cos \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}\right) \\ z = \left(z_0 + \frac{c}{1-r}\right) - \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} + \left(\frac{c}{1-r}\right)^2} \cdot r^{\frac{\omega - (\pi + \varphi)}{\alpha}} \cdot \sin \gamma \end{cases}$$

其中 $\varphi = \tan^{-1} \frac{b+r(a \sin \alpha - b \cos \alpha)}{a-r(a \cos \alpha + b \sin \alpha)}$ 弧度、 $\gamma = \tan^{-1} \frac{\frac{c}{1-r}}{\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}}}$ 弧度、 $\omega \in \mathbb{R}$ 。

陸、討論

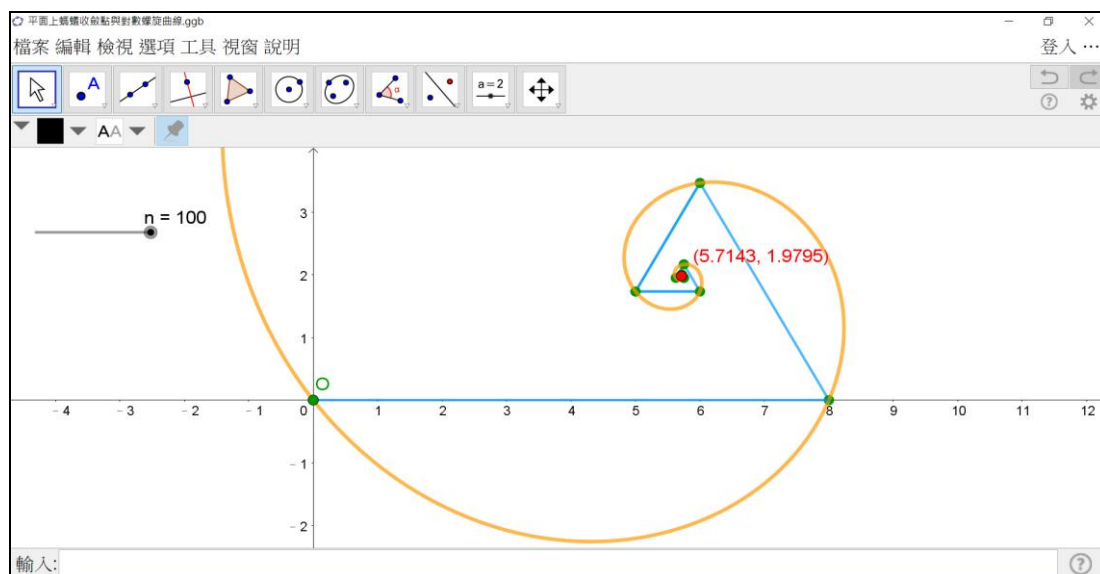
一、驗證平面上收斂點與對數螺旋曲線的通式

依據課本原題意，給定一隻螞蟻一開始從點 $P_0(0,0)$ 出發，直線行徑至點 $P_1(8,0)$ ，接下來每次行徑的距離皆以前一次距離的 $\frac{1}{2}$ 倍後轉 $\frac{2\pi}{3}$ 弧度，將以上的條件代入我們推導的通式中，則螞蟻的收斂點為

$$\left(0 + \frac{8 - \frac{1}{2} \cdot (8 \cos \frac{2\pi}{3})}{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{4}}, 0 + \frac{0 + \frac{1}{2} \cdot (8 \sin \frac{2\pi}{3})}{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{40}{7}, \frac{8\sqrt{3}}{7}\right) \approx (5.7143, 1.9795)$$

，接著用 GGB 動態幾何軟體驗證通式，如圖十八中標註的紅點即當轉動 100 次後所在的位置趨近相同；另一方面，我們也將推導出來的對數螺旋之通式導入 GGB 繪製出曲線，如圖十八

所示，黃色的曲線為對數螺旋曲線，且可以看到螞蟻每次行徑的終點（以綠色表示）皆落在此曲線上，這也就表示所有行徑的終點可形成對數螺旋的建模。



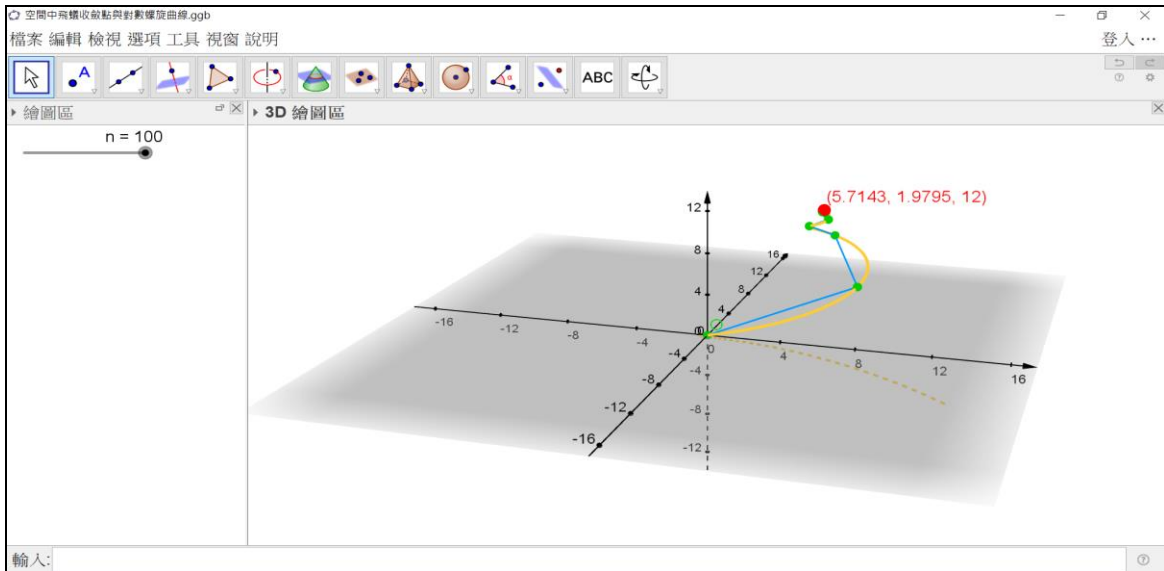
圖十八：在 $a = 8, b = 0, r = \frac{1}{2}, \theta = \frac{2\pi}{3}$ 條件下，以 GGB 繪製螞蟻的收斂點與對數螺旋曲線。

二、驗證空間中收斂點與對數螺旋的通式

推廣課本原題意，給定一隻飛蟻一開始從點 $P_0(0,0,0)$ ，直線飛行至點 $P_1(8,0,6)$ ，接下來每次飛行的仰角為 $\beta = \tan^{-1} \frac{6}{\sqrt{8^2+0^2}}$ 弧度，再以平行 z 軸的軸旋 $\frac{2\pi}{3}$ 弧度後開始飛行，其飛行距離為前一次飛行距離的 $\frac{1}{2}$ 倍後至下一個點，將以上的條件代入我們推導的通式中，則飛蟻的收斂點為

$$\left(0 + \frac{8 - \frac{1}{2} \cdot (8 \cos \frac{2\pi}{3})}{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{4}}, 0 + \frac{0 + \frac{1}{2} \cdot (8 \sin \frac{2\pi}{3})}{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{4}}, 0 + \frac{6}{1 - \frac{1}{2}}\right) \approx (5.7143, 1.9795, 12)$$

，接著用 GGB 動態幾何軟體驗證通式，如圖十九中標註的紅點即當轉動 100 次後所在的位置趨近相同；另一方面，我們也將推導出來的對數螺旋之通式導入 GGB 繪製出曲線，如圖十九所示，黃色的曲線為對數螺旋曲線，且可以看到飛蟻每次行徑的終點（以綠色表示）皆落在此曲線上，這也就表示所有飛行的終點可形成空間對數螺旋的建模。

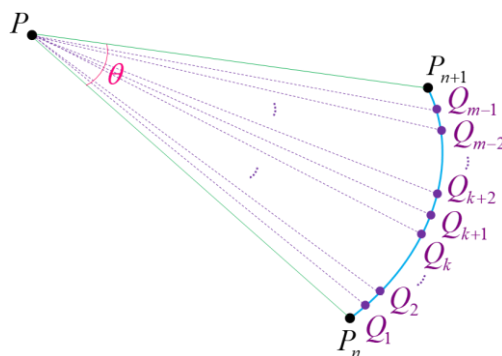


圖十九：在 $a = 8, b = 0, c = 6, r = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{2\pi}{3}$ 條件下，以 GGB 繪製飛蟻的收斂點與對數螺旋曲線。

三、說明螞蟻行徑的終點可建構對數螺旋曲線之合理性

在此我們已經知道螞蟻行徑的終點所形成的軌跡可為對數螺旋的建模，接下來要進一步說明此建模的合理性，根據參考文獻[2]中有提及到一個有關對數螺旋的性質，其敘述為「當極角數列 $\langle \theta_n \rangle$ 為等差數列時，則其對應的半徑數列 $\langle r_n \rangle$ 為等比數列」，也就是說若我們能說明除了圖三的点 P_n 外，落在此曲線軌跡上的其他點滿足此性質，即能證明此建模的合理性。

首先在此螺旋的軌跡上，如圖三所示，對於所有的 $n \in \mathbb{N}$ ，任意找兩個相鄰的終點 P_n 和 P_{n+1} ，將其對應的夾角 $\angle P_n P P_{n+1} = \theta$ 做 m 等分， $m \in \mathbb{N}$ ，我們利用圖二十做說明如下：



圖二十：將 $\angle P_n P P_{n+1}$ 做 m 等分之示意圖。

在 $P_n P_{n+1}$ 上任取三個相鄰的點 Q_k 、 Q_{k+1} 與 Q_{k+2} ，將以 x 軸當始邊、三條射線 $\overrightarrow{PQ_k}$ 、 $\overrightarrow{PQ_{k+1}}$ 與 $\overrightarrow{PQ_{k+2}}$ 當終邊的三個的正角，其極角度值分別為

$$(\pi + \varphi) + n \cdot \theta + k \cdot \frac{\theta}{m} \text{、} (\pi + \varphi) + n \cdot \theta + (k+1) \cdot \frac{\theta}{m} \text{ 與 } (\pi + \varphi) + n \cdot \theta + (k+2) \cdot \frac{\theta}{m}$$

其中公差角為 $\frac{\theta}{m}$ 弧度，代入 (式 22) 可得 $\overline{PQ_k}$ 、 $\overline{PQ_{k+1}}$ 與 $\overline{PQ_{k+2}}$ 之值分別為

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}} \cdot r^{\frac{n+k}{m}} \text{、} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}} \cdot r^{\frac{n+k+1}{m}} \text{ 與 } \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}} \cdot r^{\frac{n+k+2}{m}}$$

由此三項的長度可推得其對應的半徑長形成一個公比為 $r^{\frac{1}{m}}$ 的等比數列，滿足上述提及的對數螺旋性質，且對於 m 可為任意的正整數，故 $\frac{\theta}{m}$ 為有理數或無理數，故對於所有的 $n = 0, 1, 2, \dots$ ，

我們可利用有理數與無理數的稠密性來擴展至 $\angle P_n P P_{n+1}$ ，這也就證明了其對應的 $P_n P_{n+1}$ 上每一個點可建構出一條對數螺旋曲線。

另外，當推廣至空間中的對數螺旋曲線時，計算此軌跡上的點至收斂點的距離，只需要考慮 z 分量的長度，因此證明建構空間中對數螺旋曲線之合理性可仿照平面上的討論，這裡就留給有興趣的讀者證明看看。

四、改變螞蟻行徑規則，建構阿基米德螺旋曲線

這本研究中，我們發現螞蟻每一次行徑的終點 P_n ， $\forall n \in \mathbb{N}$ ，如圖三，與收斂點 P 的距離會形成等比數列，藉此性質可建構出一條對數螺旋曲線，接著我們由此想法做一個發想：「若行徑的終點 P_n 與收斂點 P 的距離形成等差數列，則這樣的行徑的終點軌跡會構造出什麼螺旋曲線呢？」，以下展開我們的討論。

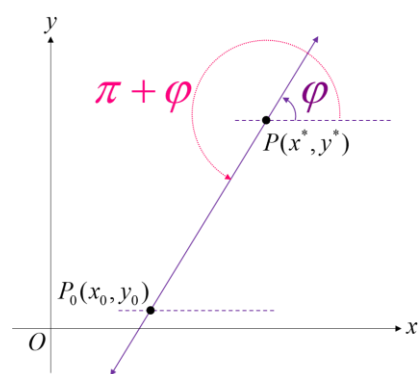
(一) 研究如何改變螞蟻行徑規則

我們認為改變螞蟻行徑的規則是解決這個問題的關鍵，換句話說，必須研究如何決定這些行徑的終點 P_n ，首先在平面上先給定出發點 $P_0(x_0, y_0)$ 與收斂點 $P(x^*, y^*)$ ，以下分四個步驟作說明：

步驟 I：當考慮以 x 軸為始邊、射線 $\overline{P_0 P}$ 為終邊的正角，其角度值為 $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y^* - y_0}{x^* - x_0}\right)$ ，則射線 $\overline{P P_0}$ 當終邊的正角為 $\pi + \varphi$ ，

如圖二十一所示。

步驟 II：同時平移出發點 P_0 與收斂點 P ，使其收斂點 P 落到原



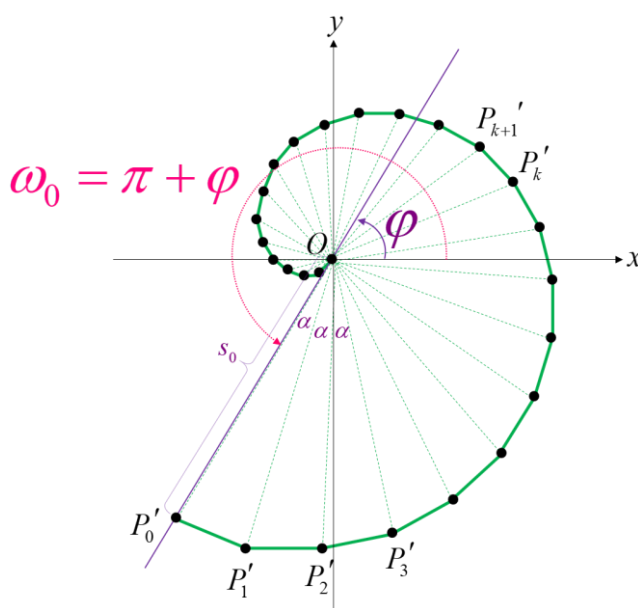
圖二十一：以 x 軸為始邊、射線 $\overline{P_0 P}$ 為終邊的兩正角。

點上，接下來在此兩點之間要來決定這些行徑的所有終點 P'_n 是如何形成的，我們自訂新的規則為「對於所有的點 P'_n ， $n=0,1,2,\dots$ ，必須滿足 $\overline{OP'_n}$ 為一個首項為 $\overline{OP'_0}$ 的等差遞減數列且

$\angle P'_n OP'_{n+1} = \alpha$ 弧度」，首先先令 $s_n = \overline{OP'_n}$ ， $n=0,1,2,\dots$ ，公差為 $d < 0$ ，則等差數列 $\langle s_n \rangle$ 的首項

為 $s_0 = \overline{OP'_0} = \sqrt{(x_0 - x^*)^2 + (y_0 - y^*)^2}$ ，其一般項 $s_n = s_0 + nd$ ，其中因 $s_n = \overline{OP'_n}$ 為一個距離，即

$s_n \geq 0$ ， $\forall n=0,1,2,\dots$ ，故可推得 $n \leq -\frac{s_0}{d}$ ，這表示在不失一般性的情況下，只要當我們有適當的 s_0 與 d 時，項數 n 的最大值可取 $n = \left[-\frac{s_0}{d} \right]$ ，其中 $[\cdot]$ 為高斯函數符號，如圖二十二所示：



圖二十二：根據新的規則所形成的螞蟻行徑終點 P'_n 之示意圖。

步驟 III：考慮以 x 軸當始邊、射線 $\overline{OP'_n}$ 當終邊的正角，其角度值以 ω_n 表示為

$$\omega_n = (\pi + \varphi) + n \cdot \alpha \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

再根據新的規則，我們可以用尤拉公式來表所有的點 P'_n 為

$$P'_n(x'_n, y'_n) = s_n \cdot e^{i\omega_n} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

其中 $s_n = s_0 - nd$ 。

步驟 IV：將 ω_n 移向整理可得 $n = \frac{\omega_n - (\pi + \varphi)}{\alpha}$ ，並代入 $s_n = s_0 - nd$ ，即可建構出此螺旋的極座

標方程式 $r(\omega_n)$ 如下：

$$r(\omega_n) = s_0 + \frac{\omega_n - (\pi + \varphi)}{\alpha} d, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

綜合上面步驟與建模的合理性（此合理性的證明可參考這段討論的最後部分），可推得此螺旋的一般化極座標方程式為

$$r(\omega) = s_0 + \frac{\omega - (\pi + \varphi)}{\alpha} d, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

將上式化簡整理可得

$$r(\omega) = \left(s_0 - \frac{\pi + \varphi}{\alpha} d \right) + \left(\frac{d}{\alpha} \right) \omega, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

會發現此式剛好為阿基米德螺旋曲線（Archimedean spiral）一般通式之形式 $r(\omega) = a + b\omega$ 。

最後再將此螺旋曲線平移回去，使收斂點 P 回到原本的位置，則我們可以得到改變螞蟻行徑終點的通式 $P_n(x_n, y_n)$ 為

$$(s_n \cos(\omega_n) + x^*, s_n \sin(\omega_n) + y^*), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

其中 $s_n = s_0 + nd$ ， $\omega_n = (\pi + \varphi) + n \cdot \alpha$ 弧度，與阿基米德螺旋曲線的通式，以參數式表示為

$$\begin{cases} x = r(\omega) \cos \omega + x^* \\ y = r(\omega) \sin \omega + y^* \end{cases}$$

，其中 $r(\omega) = \left(s_0 - \frac{\pi + \varphi}{\alpha} d \right) + \left(\frac{d}{\alpha} \right) \omega$ ， $\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y^* - y_0}{x^* - x_0} \right)$ 弧度、 $\omega \in \mathbb{R}$ 。

(二) 驗證阿基米德螺旋曲線的通式

在此我們依據新的規則所需要的參數，給定以下條件：出發點 $P_0(0,0)$ 、收斂點 $P(5,12)$ 、公差 $d = -2$ 與 $\angle P_n P P_{n+1} = \cos^{-1} \frac{113}{143}$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$ ，這裡我們先解釋為何選用 $\alpha = \cos^{-1} \frac{113}{143}$ 來做這次驗證的參數，因為先前在驗證對數螺旋曲線時，如圖十八， $\overline{P_0 P_1} = 8$ ，因此為了要讓本研究的驗證之敘述有一致性，我們考慮三角形 $\Delta P_0 P P_1$ ，其中 $\overline{P_0 P} = 13$ 、 $\overline{P_1 P} = 11$ 、 $\overline{P_0 P_1} = 8$ ，故利用餘弦定理，我們計算 $\angle P_0 P P_1 = \alpha$ ，過程如下：

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\overline{P_0 P}^2 + \overline{P_1 P}^2 - \overline{P_0 P_1}^2}{2 \cdot \overline{P_0 P} \cdot \overline{P_1 P}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{13^2 + 11^2 - 8^2}{2 \cdot 13 \cdot 11} \right) = \cos^{-1} \frac{113}{143}$$

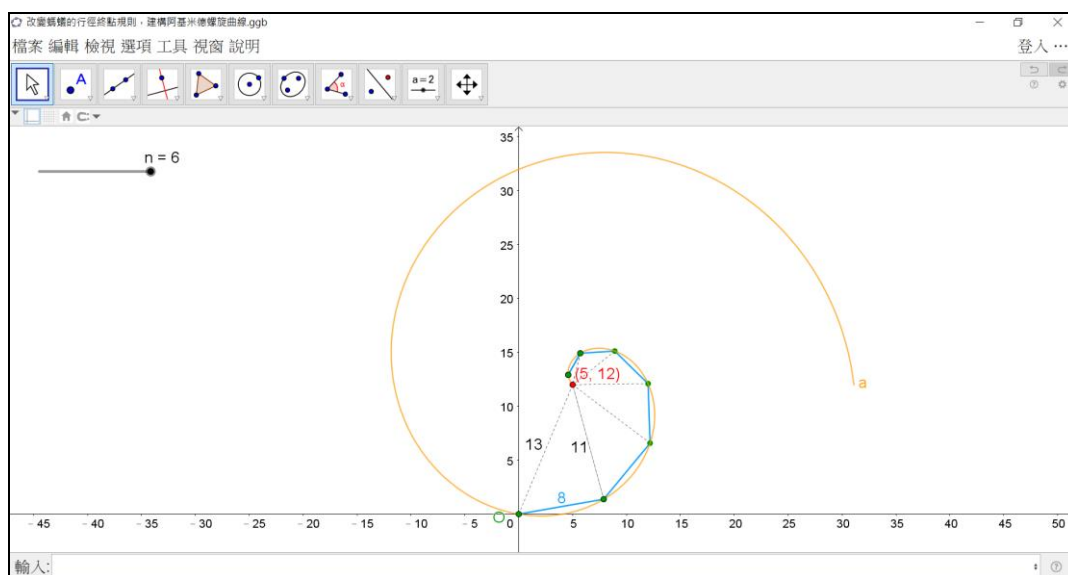
有了以上的條件與解釋後，代入則螞蟻行徑的終點之通式 $P_n(x_n, y_n)$ 為

$$((13-2n)\cos\left(\pi + \tan^{-1}\frac{12}{5} + n\cos^{-1}\frac{113}{143}\right) + 5, (13-2n)\sin\left(\pi + \tan^{-1}\frac{12}{5} + n\cos^{-1}\frac{113}{143}\right) + 12)$$

其中 $\forall n \in \mathbb{N}$ 且 $n \leq \left\lfloor \frac{13}{2} \right\rfloor = 6$ ，而這六個終點可建構出阿基米德螺旋的極座標方程式為

$$r(\omega) = \left(13 + 2 \cdot \frac{\pi + \tan^{-1}\frac{12}{5}}{\cos^{-1}\frac{113}{143}} \right) - \frac{2}{\cos^{-1}\frac{113}{143}} \omega, \quad \omega \in \mathbb{R}$$

最後再將以上的終點 $P_n(x_n, y_n)$ 與 $r(\omega)$ 導入 GGB 並繪製出螞蟻行徑的終點與螺旋曲線，如圖二十三所示，黃色的曲線為阿基米德螺旋曲線，且可以看到螞蟻每次行徑的終點（以綠色表示）皆落在此曲線上，這也就表示所有行徑的終點可形成阿基米德螺旋的建模。

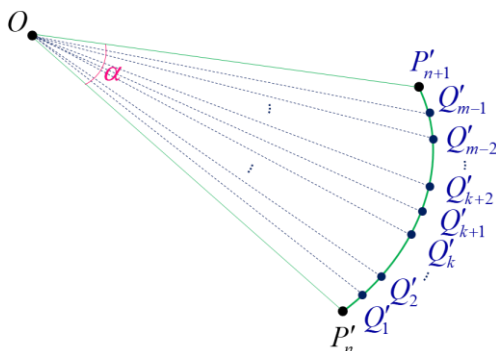


圖二十三：在 $P_0(0,0)$ 、 $P(5,12)$ 、 $d = -2$ 與 $\alpha = \cos^{-1}\frac{113}{143}$ 的條件下，以 GGB 繪製螞蟻行徑的終點與阿基米德螺旋曲線。

(三) 說明改變螞蟻行徑終點的規則可建構阿基米德螺旋曲線之合理性

在此我們已經知道當改變規則後的終點所形成之軌跡可為阿基米德螺旋的建模，接下來要進一步說明此建模的合理性，根據參考文獻[3]中有提及到一個有關阿基米德螺旋的性質，其敘述為「當極角數列 $\langle \alpha_n \rangle$ 為等差數列時，則其對應的半徑數列 $\langle r_n \rangle$ 為等差數列」，也就是說若我們能說明除了圖二十二的點 P'_n 外，落在此曲線軌跡上的其他點滿足此性質，即能證明此建模的合理性。

首先在此螺旋的軌跡上，如圖二十二所示，對於所有的 $n \in \mathbb{N}$ ，任意找兩個相鄰的終點 P'_n 和 P'_{n+1} ，將其對應的夾角 $\angle P'_n O P'_{n+1} = \alpha$ 做 m 等分， $m \in \mathbb{N}$ ，我們利用圖二十四做說明如下：



圖二十四：將 $\angle P'_n O P'_{n+1}$ 做 m 等分之示意圖。

在 $P'_n P'_{n+1}$ 上任取三個相鄰的點 Q'_k 、 Q'_{k+1} 與 Q'_{k+2} ，將以 x 軸當始邊、三條射線 $\overrightarrow{OQ'_k}$ 、 $\overrightarrow{OQ'_{k+1}}$ 與 $\overrightarrow{OQ'_{k+2}}$ 當終邊的三個的正角，其極角度值分別為

$$(\pi + \varphi) + n \cdot \alpha + k \cdot \frac{\alpha}{m} \quad , \quad (\pi + \varphi) + n \cdot \alpha + (k+1) \cdot \frac{\alpha}{m} \quad \text{與} \quad (\pi + \varphi) + n \cdot \alpha + (k+2) \cdot \frac{\alpha}{m}$$

其中公差角為 $\frac{\alpha}{m}$ 弧度，代入我們推導出的螺旋極座標方程式 $r(\omega) = \left(s_0 - \frac{\pi + \varphi}{\alpha} d \right) + \left(\frac{d}{\alpha} \right) \omega$ ，可得 $\overrightarrow{OQ'_k}$ 、 $\overrightarrow{OQ'_{k+1}}$ 與 $\overrightarrow{OQ'_{k+2}}$ 之值分別為

$$s_0 + \left(n + \frac{k}{m} \right) d \quad , \quad s_0 + \left(n + \frac{k+1}{m} \right) d \quad \text{與} \quad s_0 + \left(n + \frac{k+2}{m} \right) d$$

由此三項的長度可推得其對應的半徑長形成一個公差為 $\frac{d}{m}$ 的等差數列，滿足上述提及的阿基米德螺旋性質，且對於 m 可為任意的正整數，故 $\frac{\alpha}{m}$ 為有理數或無理數，故對於所有的 $n = 0, 1, 2, \dots$ ，我們可利用有理數與無理數的稠密性來擴展至 $\angle P'_n O P'_{n+1}$ ，這也就證明了其對應的 $P'_n P'_{n+1}$ 上每一個點可建構出一條阿基米德螺旋曲線。

柒、 結論

在本研究中，我們將課本的挑戰題推廣成一般化的問題，並探究平面與空間中的仿射變換，利用仿射變換的固定點與矩陣對角化，成功地推導出收斂的點坐標之通式與對數螺旋曲線之通式，推導的過程中也有產生一些新的發想，我們將所有通式的結果與未來想嘗試繼續

深究的方向整理如下:

一、探討平面上，在「無窮行徑」的條件下，找出螞蟻的收斂點坐標之通式

(一) 平面上的仿射變換矩陣 T 如下:

$$T \overrightarrow{P_0 P_n} = \overrightarrow{P_0 P_{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

其中 T 為 $\begin{bmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta & a \\ r \sin \theta & r \cos \theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 為 3×3 階的矩陣， P_0 為螞蟻的始點， P_n 為每一次行徑的終點，

且仿射變換矩陣 T 的固定點 $\vec{v} = \left(\frac{a - r(a \cos \theta + b \sin \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, \frac{b + r(a \sin \theta - b \cos \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \right)$ 。

(二) 螞蟻的收斂點坐標之一般通式為

$$\left(x_0 + \frac{a - r(a \cos \theta + b \sin \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, y_0 + \frac{b + r(a \sin \theta - b \cos \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \right)$$

其中 P_0 為 (x_0, y_0) ， $\overrightarrow{P_0 P_1} = (a, b)$ ， r 為每次行徑的距離縮短倍數且 $0 < r < 1$ ， θ 為每次行徑後轉的角度。

二、探討平面上，在「無窮行徑」的條件下，找出螞蟻行徑的終點所形的對數螺旋之通式

根據題意的條件下，如圖三，平面上對數螺旋之通式為

$$\begin{cases} x = r(\omega) \cos \omega + \left(x_0 + \frac{a - r(a \cos \theta + b \sin \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \right) \\ y = r(\omega) \sin \omega + \left(y_0 + \frac{b + r(a \sin \theta - b \cos \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \right) \end{cases}$$

其中 $r(\omega) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}} \cdot r^{\frac{\omega - (\pi + \varphi)}{\theta}}$ 、 $\varphi = \tan^{-1} \frac{b + r(a \sin \theta - b \cos \theta)}{a - r(a \cos \theta + b \sin \theta)}$ 弧度、 $\omega \in \mathbb{R}$ 。

三、探討空間中，在「無窮飛行」的條件下，找出飛蟻的收斂點坐標之通式

(一) 空間中的仿射變換矩陣 K 如下:

$$K \overrightarrow{P_0 P_n} = \overrightarrow{P_0 P_{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

其中 K 為 $\begin{bmatrix} r \cos \alpha & -r \sin \alpha & 0 & a \\ r \sin \alpha & r \cos \alpha & 0 & b \\ 0 & 0 & r & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 為 4×4 階的矩陣， P_0 為飛蟻的始點， P_n 為每一次行徑的終

點，且仿射變換矩陣 K 的固定點 $\vec{w} = \left(\frac{a - r(a \cos \alpha + b \sin \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}, \frac{b + r(a \sin \alpha - b \cos \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}, \frac{c}{1 - r} \right)$ 。

(二) 飛蟻的收斂點坐標之一般通式為

$$\left(x_0 + \frac{a - r(a \cos \alpha + b \sin \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}, y_0 + \frac{b + r(a \sin \alpha - b \cos \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}, z_0 + \frac{c}{1 - r} \right)$$

其中 P_0 為 (x_0, y_0, z_0) ， $\vec{P_0 P_1} = (a, b, c)$ ， r 為每次飛行的距離縮短倍數且 $0 < r < 1$ ， α 為每次飛行後以平行 z 軸之軸的旋轉角度

四、探討空間中，在「無窮飛行」的條件下，找出飛蟻行徑的終點所形的對數螺旋之通式

根據題意的條件下，如圖十三，空間中的對數螺旋之通式為

$$\begin{cases} x = r(\omega) \cdot \cos \gamma \cdot \cos \omega + \left(x_0 + \frac{a - r(a \cos \alpha + b \sin \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} \right) \\ y = r(\omega) \cdot \cos \gamma \cdot \sin \omega + \left(y_0 + \frac{b + r(a \sin \alpha - b \cos \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} \right) \\ z = \left(z_0 + \frac{c}{1 - r} \right) - r(\omega) \cdot \sin \gamma \end{cases}$$

其中 $r(\omega) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} + \left(\frac{c}{1 - r} \right)^2} \cdot r^{\frac{\omega - (\pi + \varphi)}{\alpha}}$ 、 $\varphi = \tan^{-1} \frac{b + r(a \sin \alpha - b \cos \alpha)}{a - r(a \cos \alpha + b \sin \alpha)}$ 弧度、

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{\frac{c}{1 - r}}{\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}}} \text{ 弧度、 } \omega \in \mathbb{R}。$$

五、透過改變螞蟻行徑的規則，利用新的行徑終點建構出阿基米德螺旋曲線之通式

根據新的行徑規則，如圖二十二，螞蟻新的行徑終點之通式 $P_n(x_n, y_n)$ 為

$$(s_n \cos(\omega_n) + x^*, s_n \sin(\omega_n) + y^*), \forall n \in \mathbb{N}$$

其中 $s_n = s_0 + nd$ ， $\omega_n = (\pi + \varphi) + n \cdot \alpha$ ，與阿基米德螺旋曲線的通式，以參數式表示為

$$\begin{cases} x = r(\omega) \cos \omega + x^* \\ y = r(\omega) \sin \omega + y^* \end{cases}$$

，其中 $r(\omega) = \left(s_0 - \frac{\pi + \varphi}{\alpha} d \right) + \left(\frac{d}{\alpha} \right) \omega$ ， $\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{y^* - y_0}{x^* - x_0} \right)$ 、 $\omega \in \mathbb{R}$ ，以上兩個通式中的變數定義

可再參見「陸、討論的第四點」。

六、未來展望：

在這次研究過程中體會到幾何中的仿射變換能將具有規則性的數學過程，用簡潔有力的矩陣來表達，因此往後想嘗試朝下列方向探討：

(一)改變每次的旋轉角度或仰角

為了更貼近現實生活的問題，我們想探討當每次旋轉的角度或仰角不是固定的條件下，找出收斂的點坐標通式與移動軌跡。

(二)研究如何改變行徑的規則，找出其他不同的螺旋曲線

在「陸、討論的第四點」中，透過改變規則，我們找出新的行徑終點並推導出阿基米德螺旋曲線的通式，因此若能深究其他的螺旋曲線，例如：歐拉螺線 (Euler spiral)、雙曲螺線 (Hyperbolic spiral) 與費馬螺線 (Fermat's spiral) 等，找出其圖形的性質，則可以用來思考如何反推與設計有趣的行徑規則。

(三)推廣至高維度的仿射變換應用至不同的層面

在研究空間中的仿射變換過程中，發現仿射變換其實可拆解成平面仿射變換與平行 z 軸的仿射變換，這表示可組合 $n-k$ 維空間的仿射變換與其正交的 k 維之仿射變換，其中 $k \in \mathbb{N}$ ，進而推出 n 維空間的仿射變換，這個想法可作為我們日後進一步深度之探討與研究的主題。


捌、 參考文獻資料

- [1] 游森棚、林延輯 (2020)。高中數學課本 3A。翰林出版。
- [2] 趙文敏 (1989)。等角螺線及其他(上)。科學月刊，第 20 卷，第 9 期，p672-675。
- [3] 趙文敏 (1989)。等角螺線及其他(下)。科學月刊，第 20 卷，第 10 期，p774-776。
- [4] 湯瑪斯·赫爾、游森棚 (2018)。數學摺紙計畫：30 個課程活動探索 **Project origami : activities for exploring mathematics**。世茂出版。p255-264。
- [5] Brown, James Ward/ Churchill, Ruel V., (2003). **Complex Variables and Applications 7th Ed.**, McGraw-Hill Education, p175-215
- [6] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence, (2002). **Linear Algebra, 4th Ed.**, Prentice Hall, p64-145, p245-261

【評語】 050405

本作品探討平面上一隻螞蟻從某點出發，接下來每次都沿方向 (a, b) 移動，且行走的距離皆以前一次距離的 $0 < r < 1$ 倍後轉弧度 θ ，這份研究計畫的目的是求螞蟻的最終座標。作者將移動過程以仿射變換 (affine transformation) 記錄下來，並經過齊次化 (homogenization) 的手法，算出增廣矩陣 (augmented matrix) 的固定點 (fixed point)，即為螞蟻的最終座標。作者另外嘗試使用特徵向量方式求解，也推廣到 3 維的情況。整體而言，這個問題兩位作者已經處理得很清楚，可惜考慮的情況不夠廣泛，數學的創意與深度稍嫌不足，建議可以考慮更一般的移動方式，例如：螞蟻每次的運動方式可以考慮以不同的角度來做旋轉。另外一種方式可以考慮鏡射等狀況，或者是這些運動模式的組合。

作品簡報



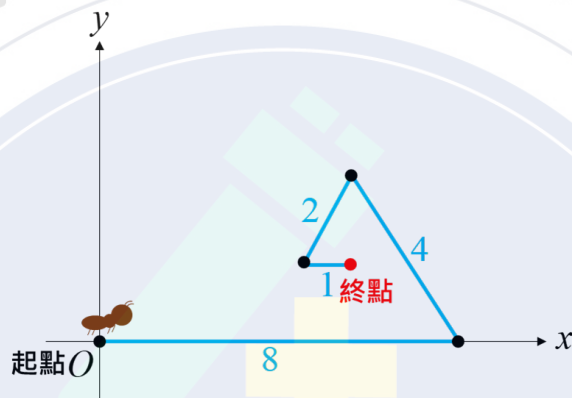
「蟻」來「蟻」去的行徑軌跡之研究

組別: 高級中等學校組

科別: 數學科

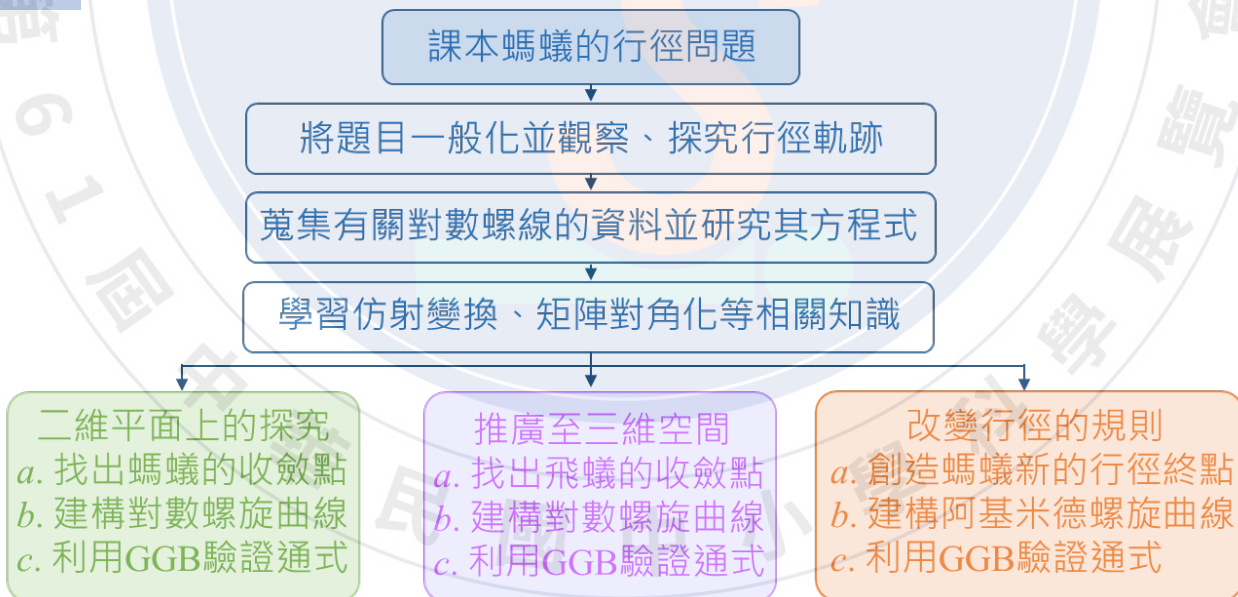
研究簡介

研究動機



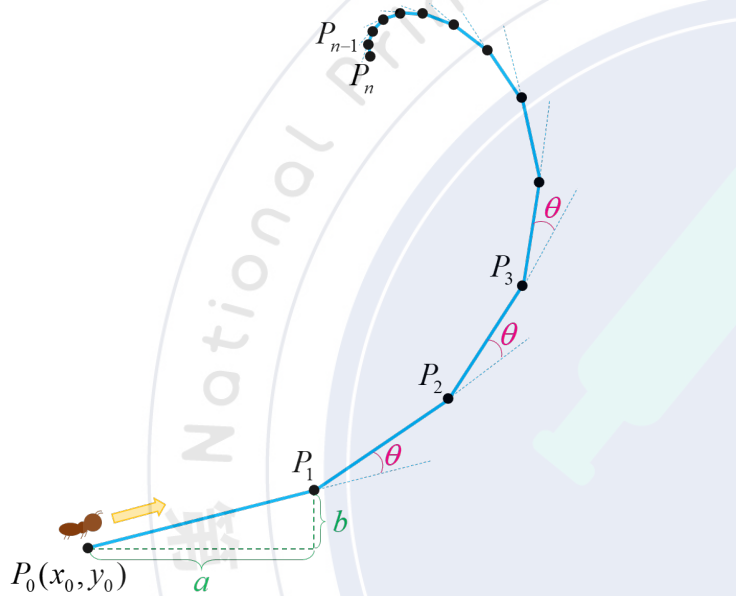
圖一：螞蟻行走的路徑。

研究流程圖

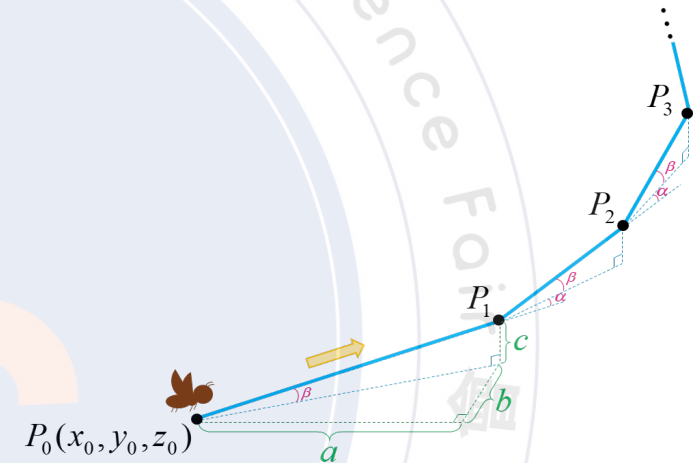


研究問題與目的

研究問題



圖二: 平面上一般化螞蟻的路徑。



圖三: 空間中一般化飛蟻的路徑。

研究目的

- I. 平面上，在「無窮行徑」的條件下，找出螞蟻的收斂點坐標之通式。
- II. 平面上，在「無窮行徑」的條件下，找出螞蟻行徑的終點所形的對數螺旋之通式。
- III. 空間中，在「無窮飛行」的條件下，找出飛蟻的收斂點坐標之通式。
- IV. 空間中，在「無窮飛行」的條件下，找出飛蟻行徑的終點所形的對數螺旋之通式。

研究結果(I): 螞蟻的收斂點通式

方法I: 仿射變換

步驟1. 找出 $\overrightarrow{P_0P_n}$ 與 $\overrightarrow{P_0P_{n+1}}$ 的仿射變換 (如圖四)

$$\overrightarrow{P_0P_{n+1}} = A \overrightarrow{P_0P_n} + \overrightarrow{P_0P_1}, \quad A = \begin{bmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{式1})$$

步驟2. 應用增廣矩陣於仿射變換

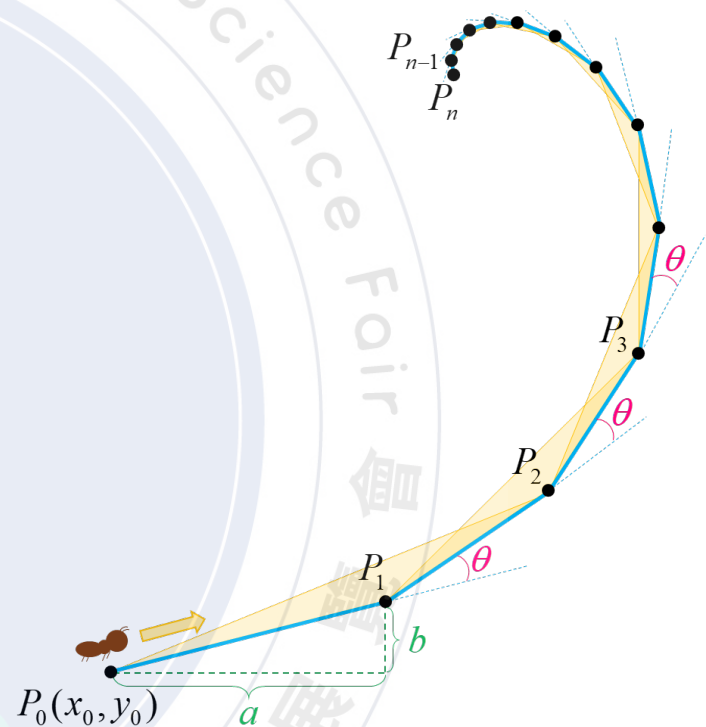
$$T \overrightarrow{P_0P_n} = \overrightarrow{P_0P_{n+1}}, \quad T = \begin{bmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta & a \\ r \sin \theta & r \cos \theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

步驟3. 解仿射變換 T 的固定點 (Fixed point)

$$T \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$$

步驟4. 將初始點 $P_0(x_0, y_0)$ 加上 \overrightarrow{v} 可得螞蟻收斂點

$$\left(x_0 + \frac{a - r(a \cos \theta + b \sin \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, y_0 + \frac{b + r(a \sin \theta - b \cos \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \right)$$



圖四: 將螞蟻路徑轉成相似三角形關係。

研究結果(I): 螞蟻的收斂點通式

方法II：矩陣對角化

步驟1. 計算 (式1) 中矩陣 A 的特徵方程式

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} r \cos \theta - \lambda & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - 2r \cos \theta \lambda + r^2 = 0\end{aligned}$$

解以尤拉公式記為 $\lambda_1 = re^{-i\theta}$ 與 $\lambda_2 = re^{i\theta}$

步驟2. 計算其對應的特徵根並對角化矩陣 A

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \begin{bmatrix} re^{-i\theta} & 0 \\ 0 & re^{i\theta} \end{bmatrix}$$

$$\text{其中 } P = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \text{ 與 } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

步驟3. 以矩陣 D 取代矩陣 A

$$\vec{P_0 P_n} = P \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} (re^{-i\theta})^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n-1} (re^{i\theta})^k \end{bmatrix} P^{-1} \vec{P_0 P_1}$$

步驟4. 求收斂向量，即計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{P_0 P_n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{P_0 P_n} = P \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - re^{-i\theta}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - re^{i\theta}} \end{bmatrix} P^{-1} \vec{P_0 P_1}$$

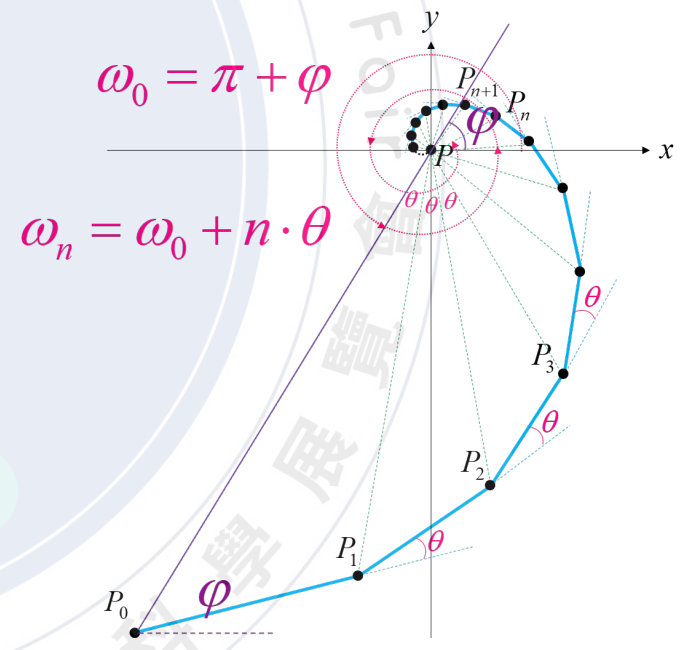
研究結果(II):終點 P_n 建構對數螺旋通式

- 步驟1. 將螺旋平移使其收斂點 P 落在原點上 (如圖五)。
- 步驟2. 證明 $|P_n - P|, n = 0, 1, 2, \dots$ 成等比數列。
- 步驟3. 利用 ω_n 與 n 的關係，建構極坐標方程式 $r(\omega_n)$ 。
- 步驟4. 將螺旋平移至原本位置，可得平面上的對數螺旋通式如下：

$$\begin{cases} x = r(\omega) \cos \omega + \left(x_0 + \frac{a - r(a \cos \theta + b \sin \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \right) \\ y = r(\omega) \sin \omega + \left(y_0 + \frac{b + r(a \sin \theta - b \cos \theta)}{1 - 2r \cos \theta + r^2} \right) \end{cases}, \omega \in \mathbb{R}$$

其中 $r(\omega) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}} \cdot r^{\frac{\omega - (\pi + \varphi)}{\theta}}$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{b + r(a \sin \theta - b \cos \theta)}{a - r(a \cos \theta + b \sin \theta)}$$

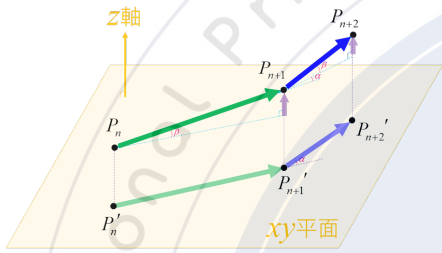


圖五: 平移螺旋使其收斂點 P 落在原點上。

研究結果(III):飛蟻的收斂點通式

方法I：仿射變換

步驟1.將路徑分別投影在 xy 平面上與平行 z 軸



$$\overrightarrow{P_0 P_{n+1}} = B \overrightarrow{P_0 P_n} + \overrightarrow{P_0 P_1}, \quad B = \begin{bmatrix} r \cos \alpha & -r \sin \alpha & 0 \\ r \sin \alpha & r \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \quad (\text{式2})$$

步驟2.應用增廣矩陣與解仿射變換 K 的固定點

$$K \vec{w} = \vec{w}, \quad K = \begin{bmatrix} r \cos \alpha & -r \sin \alpha & 0 & a \\ r \sin \alpha & r \cos \alpha & 0 & b \\ 0 & 0 & r & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

將初始點 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 加上 \vec{w} 可得飛蟻收斂點

$$\left(x_0 + \frac{a - r(a \cos \alpha + b \sin \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}, y_0 + \frac{b + r(a \sin \alpha - b \cos \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}, z_0 + \frac{c}{1 - r} \right)$$

方法II：矩陣對角化

步驟1.求(式2)中矩陣 B 的特徵根與向量並對角化

$$\overrightarrow{P_0 P_n} = Q \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} (re^{-i\alpha})^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n-1} (re^{i\alpha})^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n-1} r^k \end{bmatrix} Q^{-1} \overrightarrow{P_0 P_1}$$

步驟2.求收斂向量，即計算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \overrightarrow{P_0 P_n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overrightarrow{P_0 P_n} = Q \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - re^{-i\alpha}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - re^{i\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 - r} \end{bmatrix} Q^{-1} \overrightarrow{P_0 P_1}$$

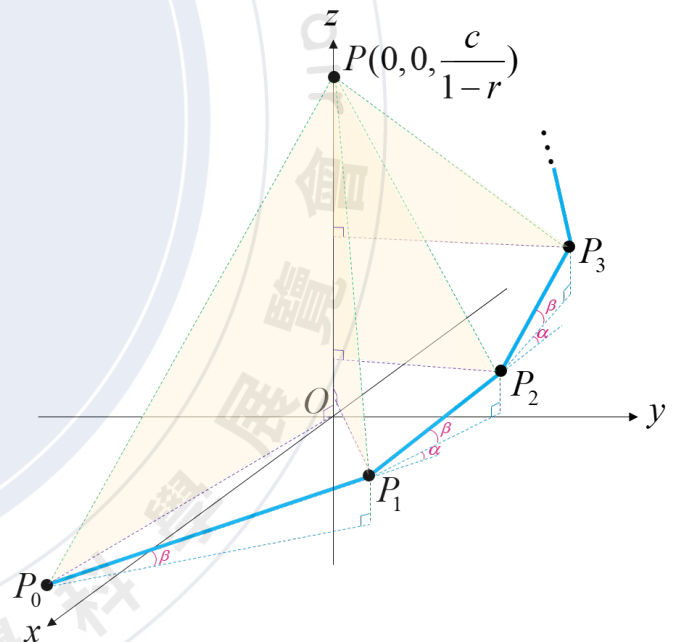
研究結果(IV):終點 P_n 建構對數螺旋通式

- 步驟1. 將螺旋平移使其收斂點 P 落在點 $(0, 0, \frac{c}{1-r})$ 上，如圖六。
- 步驟2. 證明 $|P_n - P|, n = 0, 1, 2, \dots$ 成等比數列。
- 步驟3. 旋轉 z 軸，利用 ω_n 與 n 的關係，建構極坐標方程式 $r(\omega_n)$ 。
- 步驟4. 證明 $\angle PP_n (P_n)_z = \angle PP_0 (P_0)_z, \forall n \in \mathbb{N}$ 。
- 步驟5. 將螺旋平移至原本位置，可得空間中的對數螺旋通式如下：

$$\begin{cases} x = r(\omega) \cdot \cos \gamma \cdot \cos \omega + \left(x_0 + \frac{a - r(a \cos \alpha + b \sin \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} \right) \\ y = r(\omega) \cdot \cos \gamma \cdot \sin \omega + \left(y_0 + \frac{b + r(a \sin \alpha - b \cos \alpha)}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} \right), \omega \in \mathbb{R} \\ z = \left(z_0 + \frac{c}{1-r} \right) - r(\omega) \cdot \sin \gamma \end{cases}$$

$$r(\omega) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2} + \left(\frac{c}{1-r}\right)^2} \cdot r^{\frac{\omega - (\pi + \varphi)}{\alpha}}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{b + r(a \sin \alpha - b \cos \alpha)}{a - r(a \cos \alpha + b \sin \alpha)}, \quad \gamma = \tan^{-1} \frac{\frac{c}{1-r}}{\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 - 2r \cos \alpha + r^2}}}$$

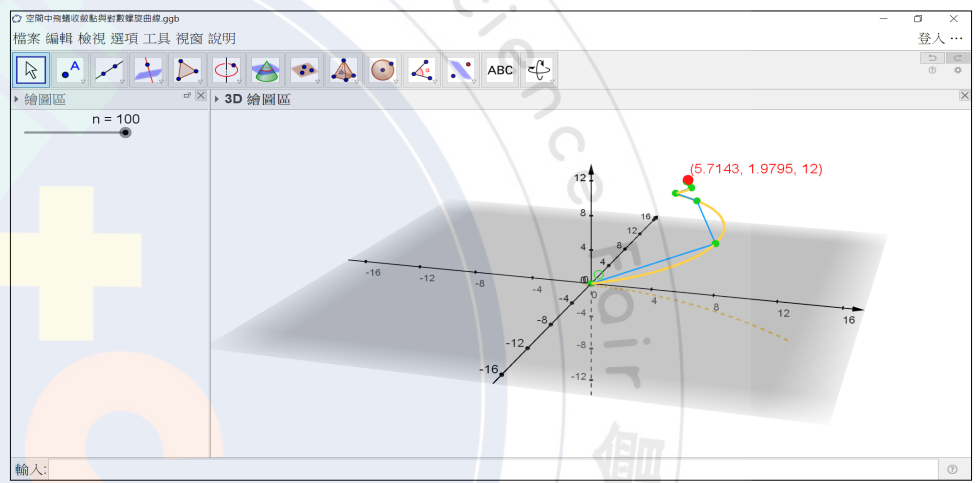
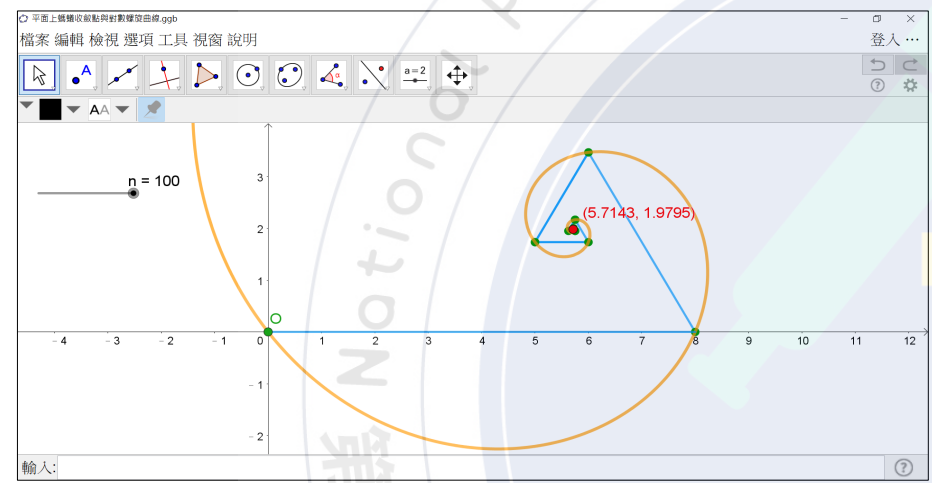


圖六: 平移螺旋並將終點與收斂點連線。

討論

討論I: 利用GGB驗證收斂點與對數螺旋通式

我們可清楚地看到每次行徑的終點 (綠色標示) 皆落在螺旋曲線上(黃色標示)，如圖七與八。

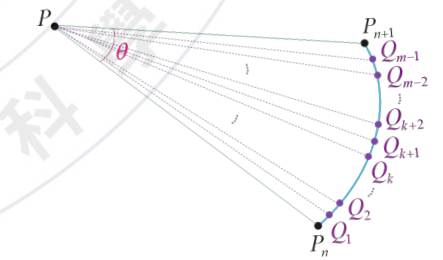


圖七: 給定 $a=8, b=0, r=\frac{1}{2}, \theta=\frac{2\pi}{3}$, 模擬路徑、收斂點與對數螺旋。

圖八: 給定 $a=8, b=0, c=6, r=\frac{1}{2}, \alpha=\frac{2\pi}{3}$, 模擬路徑、收斂點與對數螺旋。

討論II: 說明螞蟻行徑的終點可建構對數螺旋曲線之合理性

- a. 參考文獻 [2] 中對數螺旋的性質: 「當極角數列 $\langle \theta_n \rangle$ 為等差數列時, 則其對應的半徑數列 $\langle r_n \rangle$ 為等比數列」。
- b. 利用有理數與無理數的稠密性來擴展至 $\angle P_n P P_{n+1}$, 即可證明其對應的 $\widehat{P_n P_{n+1}}$ 上所有的點可建構出對數螺旋。



圖九: 將 θ 做 m 等分

討論III:改變螞蟻行徑規則，建構阿基米德螺旋曲線

(一)改變行徑規則的說明

- 步驟1. 給定出發點 P_0 與收斂點 P^* ，並將螺旋平移使其收斂點落在原點，如圖十。
- 步驟2. 自訂新規則為「行徑終點與收斂點的距離呈等差遞減數列且等角旋轉」。
- 步驟3. 根據新規則，利用 ω_n 與 n 的關係，建構極坐標方程式 $r(\omega_n)$ 。
- 步驟4. 將螺旋平移至原本位置，可得平面的阿基米德螺旋通式如下：

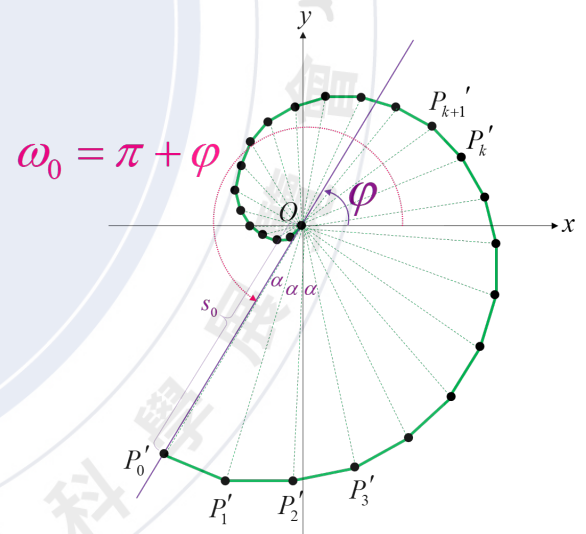
$$\begin{cases} x = r(\omega) \cos \omega + x^* \\ y = r(\omega) \sin \omega + y^* \end{cases}, \omega \in \mathbb{R}$$

$$r(\omega) = \left(s_0 - \frac{\pi + \varphi}{\alpha} d \right) + \left(\frac{d}{\alpha} \right) \omega, \varphi = \tan^{-1} \frac{y^* - y_0}{x^* - x_0}$$

螞蟻新的行徑終點 $P_n(x_n, y_n)$ 之通式：

$$(s_n \cos(\omega_n) + x^*, s_n \sin(\omega_n) + y^*), \forall n \in \mathbb{N}$$

$$s_n = s_0 + nd, \omega_n = (\pi + \varphi) + n \cdot \alpha$$



圖十: 根據新的規則所形成的螞蟻行徑終點 P'_n 之示意圖。

討論

討論III:改變螞蟻行徑規則，建構阿基米德螺旋曲線

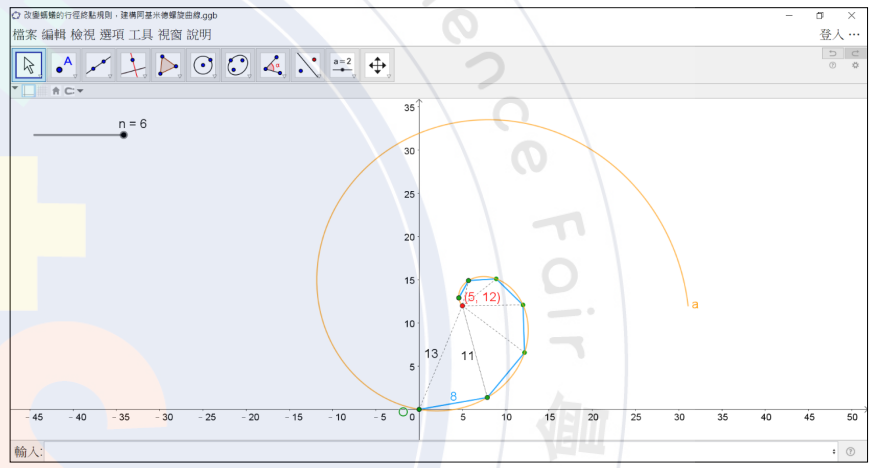
(二)利用GGB驗證阿基米德螺旋通式

給定條件:

出發點 $P_0(0,0)$ 、收斂點 $P(5,12)$

$$\text{公差 } d = -2 \quad \alpha = \cos^{-1} \frac{113}{143}$$

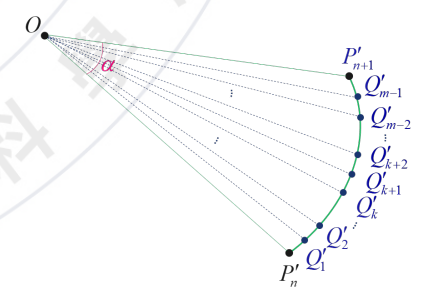
可清楚地看到每次行徑的終點 (綠色標示) 皆落在螺旋曲線上(黃色標示)，如圖十一。



圖十一: 給定參數條件下，模擬螞蟻的行徑終點與繪出阿基米德螺旋曲線。

(三)說明改變螞蟻行徑終點的規則可建構阿基米德螺旋曲線之合理性

- a. 參考文獻 [3] 中阿基米德螺旋的性質: 「當極角數列 $\langle \alpha_n \rangle$ 為等差數列時，則其對應的半徑數列 $\langle r_n \rangle$ 為等差數列」。
- b. 利用有理數與無理數的稠密性來擴展至 $\angle P'_n O P'_{n+1}$ ，即可證明其對應的 $\widehat{P'_n P'_{n+1}}$ 上所有的點可建構出阿基米德螺旋。



圖十二:將 α 做 m 等分。 p.10

結論暨未來展望

- 一、改變每次的旋轉角度或仰角，更貼近現實生活的問題。
- 二、研究如何改變行徑的規則，找出其他不同的螺旋曲線，如：雙曲螺線。
- 三、推廣至高維度的仿射變換，拆解兩個相互正交的維度，應用至不同的層面。

參考文獻資料

- [1] 游森棚、林延輯 (2020)。高中數學課本3A。翰林出版。
- [2] 趙文敏 (1989)。等角螺線及其他(上)。科學月刊，第20卷，第9期，p672-675。
- [3] 趙文敏 (1989)。等角螺線及其他(下)。科學月刊，第20卷，第10期，p774-776。
- [4] 湯瑪斯·赫爾、游森棚 (2018)。數學摺紙計畫：30個課程活動探索 Project origami : activities for exploring mathematics。世茂出版。p255-264。
- [5] Brown, James Ward/ Churchill, Ruel V., (2003). Complex Variables and Applications 7th Ed. ,McGraw-Hill Education, p175-215.
- [6] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel, Lawrence E. Spence, (2002). Linear Algebra, 4th Ed. ,Prentice Hall, p64-145, p245-261.