中華民國第 61 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050402

Siebeck-Marden 定理的推廣--凸四邊形之內切橢圓的焦點問題

學校名稱：國立臺東女子高級中學

作者：	指導老師：
高二 施陳惜情	林志全
高二 蘇筱純	
高二 黃惠婷	

關鍵詞：Siebeck-Marden 定理、
凸四邊形之內切橢圓

摘要

「Siebeck-Marden」定理是複數平面中一個關於三角形之內切橢圓的定理。本研究主要是利用歐氏平面幾何性質應用在複數平面上推廣到複數平面中任意一個存在內切橢圓的凸四邊形上，我們和 Siebeck-Marden 定理「獨立地」找到了一個相對應的二次複數方程式進而可以利用配方法解出凸四邊形之內切橢圓兩個焦點的一個全新的定理。

另外，主要結果的應用的部分，歐氏平面幾何中另一個著名的「Newton 橢圓問題」，藉由我們的主要定理的結果，可以直接推得關於「Newton 橢圓問題」之「加強」的結果，並且提供「Newton 橢圓問題」一個全新的幾何證明。

壹、研究動機

我們在專題課程中經老師的介紹接觸到統合廣義三角函數、圓錐曲線、複數與微積分這四類主題的「Marden 定理」

【Marden 定理】

令$\mathrm{P}(z)=(z-z_1)(z-z_3)(z-z_3)$是一個三次複變數多項式，而且方程式的三個根$z_1,z_2,z_3$是複數平面上不共線的三個點。複數平面上以$z_1,z_2,z_3$為頂點的三角形必存在唯一一個相切於三角形三邊中點的內切橢圓，且該橢圓的兩焦點f_1,f_2(可重合)恰為

$$\mathrm{P}'(z)=(z-z_2)(z-z_3)+(z-z_1)(z-z_3)+(z-z_1)(z-z_2)=0\text{的兩個根。}$$

「Marden 定理」有牽涉到三次複數多項式的微分，由於我們對於微積分並不太熟悉，但是單就計算內切橢圓焦點的角度而言，內切橢圓焦點所符合的二次方程式竟然完全由三頂點z_1,z_2,z_3決定，著實讓我們嘖嘖稱奇。如果單純以歐氏平面幾何觀點出發並結合複數的運算特性，讓我們對於「Marden 定理」充滿了興趣。因為f_1,f_2恰為方程式

$$\begin{aligned}&(z-z_2)(z-z_3)+(z-z_1)(z-z_3)+(z-z_1)(z-z_2)\\&=3z^2-2(z_1+z_2+z_3)z+(z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3)=0\end{aligned}$$

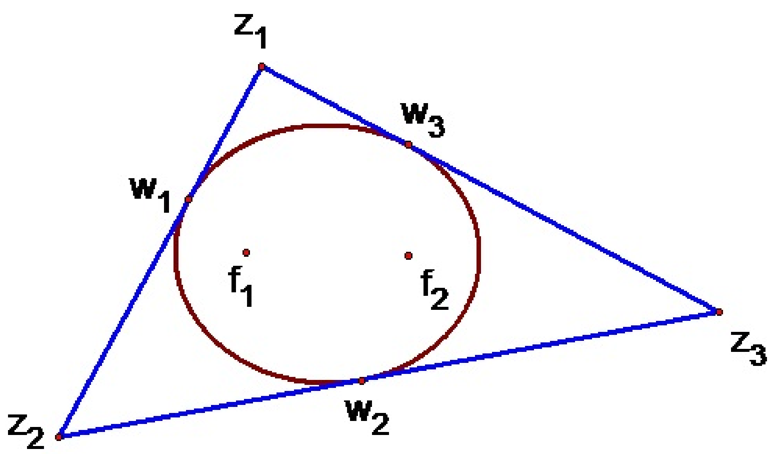
的兩個根。因此，藉由「根與係數」的原理，我們可知內切橢圓的中心為$\frac{f_1+f_2}{2}=\frac{2(z_1+z_2+z_3)}{2\cdot 3}=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$，即為三角形的重心。

這個結論出現在 Morris Marden 於 1945 年發表的一篇論文中，後來被美國數學家 Dan Kalman 稱之為「Marden 定理」。 Dan Kalman 教授於 2008 年在美國數學月刊發表了一篇論文提供了「Marden 定理」一個基本的證明，Kalman 教授藉由該篇論文於 2009 年獲得了由美國數學學會創立的 Lester R. Ford 獎。但事實上，Marden 的結果最早是由德國數學家 JörgSiebeck 在 1864 年發現並證明的。1945 年 Marden 重新證明了 Siebeck 的工作。

數學界通常將他們二位的結果統稱為「Siebeck-Marden 定理」並敘述如下:

【Siebeck-Marden 定理】

令z_1,z_2,z_3是複數平面上不共線的三個點而m_1,m_2,m_3是三個正實數。那麼，複數平面上以z_1,z_2,z_3為頂點的三角形必存在唯一一個內切橢圓，與$\overline{z_1z_2}$、$\overline{z_2z_3}$、$\overline{z_3z_1}$分別相切於w_1,w_2,w_3三點，滿足$\frac{|z_1-w_1|}{|z_2-w_1|}=\frac{m_1}{m_2}$、$\frac{|z_2-w_2|}{|z_3-w_2|}=\frac{m_2}{m_3}$及$\frac{|z_3-w_3|}{|z_1-w_3|}=\frac{m_3}{m_1}$，且橢圓的兩焦點$f_1,f_2$(可重合)恰為方程式$m_1(z-z_2)(z-z_3)+m_2(z-z_1)(z-z_3)+m_3(z-z_1)(z-z_2)=0$的兩個根。(如圖一) [注意：$z_1$ 、z_2及z_3均不為前述之方程式的根。]



圖一

f_1,f_2可藉由一個係數完全由給定的三頂點z_1,z_2,z_3以及切線段比例式中的三個正實數m_1,m_2,m_3所決定之二次方程式

$$m_1(z-z_2)(z-z_3)+m_2(z-z_1)(z-z_3)+m_3(z-z_1)(z-z_2)=0$$

利用配方法解出。

當$m_1 = m_2 = m_3 = 1$時的「Siebeck-Marden 定理」就是「Marden 定理」，「Siebeck-Marden 定理」可視為「Marden 定理」的一般化版本。後來有許多數學家相繼的給了 Siebeck-Marden 定理不同的證明。老師在課堂上特別介紹了最近在 2020 年刊登在美國數學月刊由美國威斯康辛大學教授 AlexandruTupan 教授所寫的文章 “A simple proof of Siebeck-Marden Theorem”，老師告訴我們，Tupan 教授利用平面幾何中橢圓及其切線的已知性質再對應到複數平面上重新給了「Siebeck-Marden 定理」一個簡單的證明。他證明了：在「Siebeck-Marden 定理」中的二次方程式給定之下，方程式的兩個根必定是該三角形之內切橢圓的焦點。

老師提出了一個問題：

【Question1】：為何「Siebeck-Marden 定理」中之三角形內切橢圓的焦點會滿足那麼有規律的二次方程式呢？如果我們推廣到有內切橢圓之凸四邊形的情形，可否有類似的二次方程式讓我們能進而解出該凸四邊形內切橢圓的兩個焦點呢？

老師指出: 我們如果仿造「Marden 定理」的模式類推凸四邊形的情形，因為凸四邊形會有四個頂點z_1,z_2,z_3,z_4，所以會製造出一個四次多項式$\mathrm{P}(z)=(z-z_1)(z-z_3)(z-z_3)(z-z_4)$，然而老師告訴我們$\mathrm{P}'(z)$ =0 會是一個三次方程式，所以會有三個複數根，但是內切橢圓卻只會有兩個焦點，因此無法經由前述的三次方程式$\mathrm{P}'(z)$ =0 精確地解出焦點，加上關於複變數多項式函數微分的部分並不在我們的能力範圍，所以，老師更進一步的提問：

【Question2】：如果放棄多項式微分的部分，一開始並不知道方程式的長相，要如何找到焦點會滿足的二次方程式呢？

老師的提問激發了我們的研究動機。我們想要針對歐氏平面幾何中存在內切橢圓的凸四邊形重新研究其中的幾何性質，然後藉由這些幾何性質嘗試可否，藉由複數的運算原理反過來找出內切橢圓之兩焦點會滿足的二次方程式，希望這個二次方程式就如同「Siebeck-Marden 定理」中一樣，其係數完全由凸四邊形的四個頂點以及切線段的四個比值所決定，然後再進一步地探討「Siebeck-Marden 定理」在凸四邊形上的推廣及應用。

貳、研究目的

本研究的目的試圖將原來的「Siebeck-Marden 定理」推廣至凸四邊形的情形，並且沒有利用到「Siebeck-Marden 定理」的結果。我們探討其中相關的幾何性質，流程如下：

一、探討平面上兩組對邊平行之凸四邊形其內切橢圓的相關幾何性質。

二、探討平面上恰有一組對邊平行之凸四邊形其內切橢圓的相關幾何性質。

三、探討平面上兩組對邊均不平行對邊之凸平行四邊形內切橢圓的相關幾何性質。

四、結合上述有內切橢圓之凸四邊形的幾何性質，進而找到關於了任意凸四邊形之內切橢圓焦點滿足的二次複數方程式，也推廣了「Siebeck-Marden 定理」。

五、針對平面上不為平行四邊形且存在內切橢圓的凸四邊形，藉由我們的主要定理的方程式，可以直接推得關於「Newton 橢圓問題」之加深的結果，也提供了「Newton 橢圓問題」一個全新的幾何證明。

參、研究設備及器材

我們利用 GSP 與 GeoGebra 等電腦動態幾何軟體進行幾何問題的實驗，透過觀察、猜測、驗證等，發掘研究結果並加以證明。

肆、研究過程與方法

一、定義與預備定理：

(一) 橢圓定義與作圖

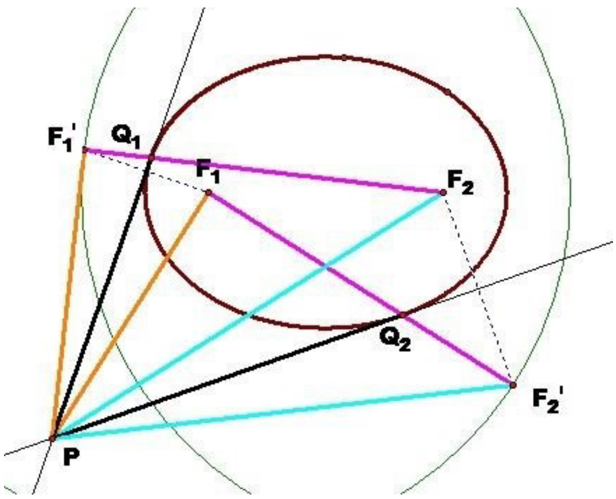
已知歐氏平面上有兩個定點F_1和F_2，及一定長$2a$且$\overline{F_1F_2} < 2a$，則在平面上所有滿足$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$的 P 點所形成的圖形稱為橢圓。藉由橢圓的定義，知道**橢圓**有如下關於橢圓作圖的幾何性質：

【橢圓性質 1】：已知歐式平面上一個橢圓Γ，橢圓長軸的長為$2a$，而F_1、F_2為Γ的焦點。若 L 為橢圓Γ的一條切線，則(1)焦點F_1關於 L 的對稱點F_1'必落在以另一焦點F_2為圓心，$2a$為半徑的圓上，且$\overline{F_1'F_2}$和 L 的交點Q_1恰為 L 相切於Γ的切點。(2)焦點F_2關於任意切線的對稱點F_2'在以另一焦點F_1為圓心，$2a$為半徑的圓上，且$\overline{F_1'F_2}$和 L 的交點Q_2恰為 L 相切於Γ的切點。(如圖二)

【橢圓性質 2】：已知歐式平面上一個橢圓Γ，P為Γ外一點，而F_1和F_2分別是Γ的兩個焦點。令$\overleftrightarrow{PQ_1}$及$\overleftrightarrow{PQ_2}$分別與$\Gamma$相切於$Q_1$及$Q_2$兩點，點$F_1'$為$F_1$相對於$\overleftrightarrow{PQ_1}$的對稱點，而點$F_2'$為$F_2$相對於$\overleftrightarrow{PQ_2}$的對稱點，則

(1) $\Delta PF_1'F_2 \cong \Delta PF_1F_2'$

(2) $\angle Q_1PF_1 = \angle Q_2PF_2$。(如圖二)



圖二

(二) 橢圓與圓柱截痕(外切多邊形)

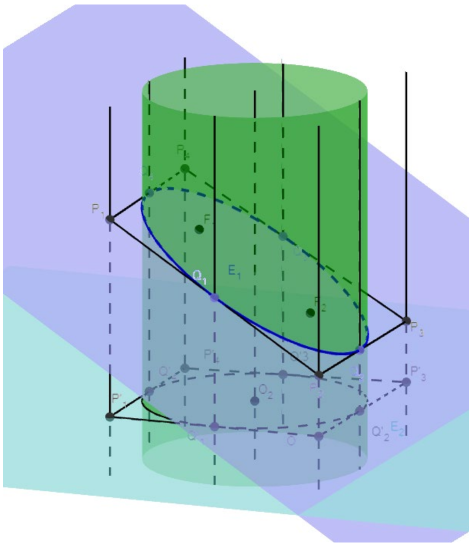
由投影幾何的理論我們知道圓柱和平面的截痕是一個橢圓。而圓柱與一個恰好和該圓柱的中心軸垂直之平面的截痕是一個圓。

【圓柱截痕性質】：

如圖三，空間中已知一圓柱 Ω，平面E_1與 Ω 的截痕為橢圓Γ_1，而E_1中有一個凸四邊形$P_1P_2P_3P_4$其內切橢圓恰為Γ_1，且$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$及$\overline{P_4P_1}$分別和Γ_1相切於E_1中的Q_1、Q_2、Q_3及Q_4四個點。今有另一個平面E_2恰和 Ω 的中心軸垂直，E_2與 Ω 的截痕為圓Γ_2。若將E_1中的凸四邊形$P_1P_2P_3P_4$以及四個切點Q_1、Q_2、Q_3、Q_4沿著和 Ω 之中心軸平行的方向向下做「垂直投影」 到E_2上，必定和圓Γ_2相切的凸四邊形$P_1'P_2'P_3'P_4'$以及四個切點Q_1'、Q_2'、Q_3'、Q_4'重和。

- 藉由平行線性質，我們進而得知$\frac{P_1Q_1}{P_2Q_1}=\frac{P_1'Q_1'}{P_2'Q_1'}$、$\frac{P_2Q_2}{P_3Q_2}=\frac{P_2'Q_2'}{P_3'Q_2'}$、$\frac{P_3Q_3}{P_4Q_3}=\frac{P_3'Q_3'}{P_4'Q_3'}$、$\frac{P_4Q_4}{P_1Q_4}=\frac{P_4'Q_4'}{P_1'Q_4'}$恆有「**保相切**」及「**保比例**」的特性。同樣地，進而如果在E_1中$\overleftrightarrow{P_1P_2}$平行於$\overleftrightarrow{P_3P_4}$，則對應到$E_2$中，$\overleftrightarrow{P_1'P_2'}$必定也會平行於$\overleftrightarrow{P_3'P_4'}$，也就是仍然會有「**保平行**」的特性。

[**注意**：對於E_1中給定的橢圓Γ_1，我們必定可以製造合適的平面E_2使得E_2中的圓Γ_2是橢圓Γ_1在平面E_2的「**垂直投影**」 **，且滿足**圓Γ_2的**直徑**恰好等於橢圓Γ_1的**短軸**。]



圖三

(三) 複數運算的幾何意義

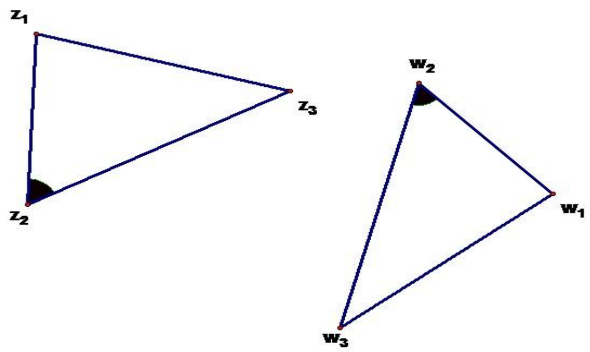
已知複數平面上有兩個三角形$\Delta z_1z_2z_3$以及$\Delta w_1w_2w_3$，且z_1,z_2,z_3依逆時針排列，而w_1,w_2,w_3也依逆時針排列。

【複數性質 1】：

如果$\angle z_1z_2z_3=\angle w_1w_2w_3$(如圖四)，則存在一個正實數$r$使得

$$\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=r\left(\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\right)$$

，其中$r=\frac{|z_1-z_2||w_3-w_2|}{|z_3-z_2||w_1-w_2|}$。



圖四

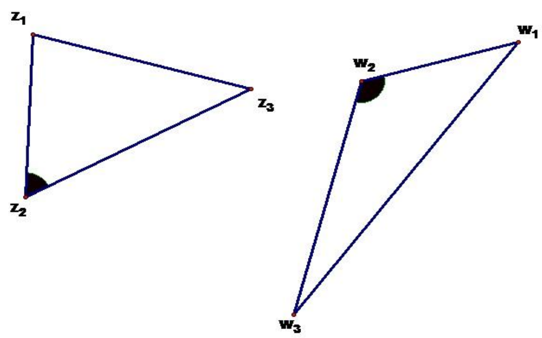
【證明】：由圖可知複數$\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\neq 0$的主輻角等於$\angle z_1z_2z_3$，而複數$\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\neq 0$的主輻角等於$\angle z_1z_2z_3$，因為$\angle z_1z_2z_3=\angle w_1w_2w_3$，故必存在正實數$r$使得$\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}=r\left(\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\right)$。再於等號兩邊同時取「絕對值」，我們可知$r=\frac{|z_1-z_2||w_3-w_2|}{|z_3-z_2||w_1-w_2|}$。

【複數性質 2】：

如果$\angle z_1z_2z_3+\angle w_1w_2w_3=180°$(如圖五)，則存在一個正實數$r$使得

$$\left(\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right)\left(\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\right)=-r。$$

，其中$r=\frac{|z_1-z_2||w_3-w_2|}{|z_3-z_2||w_1-w_2|}$。



圖五

【證明】：由圖可知複數$\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\neq 0$的主幅角等於$\angle z_1z_2z_3$，而複數$\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\neq 0$的主幅角等於$\angle w_1w_2w_3$，進而可知複數$\left(\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right)\left(\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\right)\neq 0$的主幅角等於$\angle z_1z_2z_3+\angle w_1w_2w_3=180°$，故必存在正實數$r$使得$\left(\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}\right)\left(\frac{w_1-w_2}{w_3-w_2}\right)=(-r)+0i=-r$。再於等號兩邊同時取絕對值，我們可知$r=\frac{|z_1-z_2||w_3-w_2|}{|z_3-z_2||w_1-w_2|}$。

二、幾何引理：

我們針對歐氏平面幾何中存在內切橢圓的凸四邊形重新研究其中的幾何性質，首先我們證明幾個引理

【引理一】：已知歐式平面上一個凸四邊形$\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$(依逆時針方向)有一個內切橢圓Γ，且Γ和$\overline{\mathrm{P_1P_2}}$、$\overline{\mathrm{P_2P_3}}$、$\overline{\mathrm{P_3P_4}}$及$\overline{\mathrm{P_4P_1}}$分別和$\Gamma$相切於$\mathrm{Q_1}$、$\mathrm{Q_2}$、$\mathrm{Q_3}$及$\mathrm{Q_4}$四個點。如果定點$\mathrm{F}$是橢圓$\Gamma$其中的一個焦點，則$\overleftrightarrow{\mathrm{P_1F}}$、$\overleftrightarrow{\mathrm{P_2F}}$、$\overleftrightarrow{\mathrm{P_3F}}$及$\overleftrightarrow{\mathrm{P_4F}}$分別為$\angle\mathrm{Q_4FQ_1}$、$\angle\mathrm{Q_1FQ_2}$、$\angle\mathrm{Q_2FQ_3}$及$\angle\mathrm{Q_3FQ_4}$的角平分線。

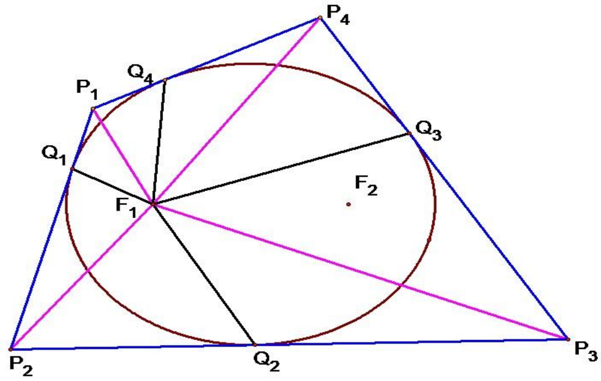


圖 1-01

【證明】：如圖 1-01，取$\mathrm{F}=\mathrm{F_1}$。我們的目標要證明$\angle\mathrm{P_1F_1Q_1}=\angle\mathrm{P_1F_1Q_4}$。我們依如下的步驟證明：(如圖 1-02)

1. 先取$\mathrm{F_2}$相對於$\overleftrightarrow{\mathrm{P_1P_4}}$的對稱點$\mathrm{F_2}'$，再取$\mathrm{F_2}$相對於$\overleftrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$的對稱點$\mathrm{F_2}''$。
   再分別連接$\overline{\mathrm{F_2'Q_4}}$、$\overline{\mathrm{F_2'P_1}}$、$\overline{\mathrm{F_2''P_1}}$以及$\overline{\mathrm{F_2''Q_1}}$。
3. 由【橢圓性質 1】，可知$\mathrm{F_1}$、$\mathrm{Q_4}$、$\mathrm{F_2}'$三點共線，$\mathrm{F_1}$、$\mathrm{Q_1}$、$\mathrm{F_2}''$三點共線，且$\overline{\mathrm{F_1F_2'}}=\overline{\mathrm{F_1F_2''}}$橢圓$\Gamma$的長軸長。
4. 再由【橢圓性質 1】，可知P_1同時落在$\overline{\mathrm{F_2F_2'}}$及$\overline{\mathrm{F_2F_2''}}$的中垂線上，故可知$\overline{\mathrm{P_1F_2}}=\overline{\mathrm{P_1F_2'}}=\overline{\mathrm{P_1F_2''}}$。

5. 因此，利用$\overline{F_1F_2'} = \overline{F_1F_2''}$、$\overline{P_1F_2} = \overline{P_1F_2''}$以及$\overline{P_1F_1} = \overline{P_1F_1}$，由三角形 S.S.S.全等性質可推得$\Delta P_1F_1F_2' \cong \Delta P_1F_1F_2''$，進而$\angle P_1F_1F_2' = \angle P_1F_1F_2''$。
6. 因為$\angle P_1F_1Q_1 = \angle P_1F_1F_2''$以及$\angle P_1F_1Q_4 = \angle P_1F_1F_2'$，最後得到$\angle P_1F_1Q_1 = \angle P_1F_1Q_4$。這意味著$\overleftrightarrow{P_1F_1}$為$\angle Q_4F_1Q_1$的分角線。

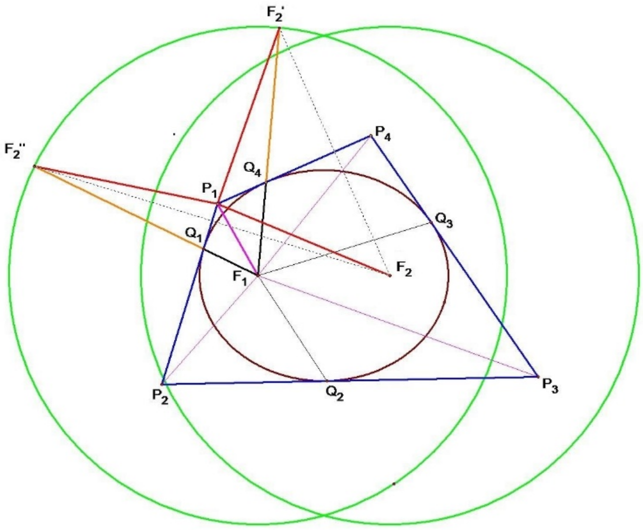


圖 1-02

利用同樣的證明手法，我們知道$\overleftrightarrow{P_2F_1}$、$\overleftrightarrow{P_3F_1}$及$\overleftrightarrow{P_4F_1}$分別也會是$\angle Q_1F_1Q_2$、$\angle Q_2F_1Q_3$及$\angle Q_3F_1Q_4$的角平分線，命題依然成立。

同樣地，取$F=F_2$時，利用同樣的證明手法，我們可以知到$\overleftrightarrow{P_1F_2}$、$\overleftrightarrow{P_2F_2}$、$\overleftrightarrow{P_3F_2}$及$\overleftrightarrow{P_4F_2}$分別也會是$\angle Q_4F_2Q_1$、$\angle Q_1F_2Q_2$、$\angle Q_2F_2Q_3$及$\angle Q_3F_2Q_4$的角平分線。最後，我們完成證明。

【引理二】：已知歐式平面上一個凸四邊形$P_1P_2P_3P_4$(依逆時針方向)有一個內切橢圓Γ，且Γ和$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$及$\overline{P_4P_1}$分別和Γ相切於Q_1、Q_2、Q_3及Q_4四個點。如果定點F是橢圓Γ其中的一個焦點，則：

(1)$\angle P_1FQ_1 + \angle P_2FQ_2 + \angle P_3FQ_3 + \angle P_4FQ_4 = \angle P_1FQ_4 + \angle P_2FQ_1 + \angle P_3FQ_2 + \angle P_4FQ_3 = 180^\circ$。

(2)$\angle P_1FP_2 + \angle P_3FP_4 = \angle P_1FP_4 + \angle P_2FP_3 = 180^\circ$。(如圖 2)

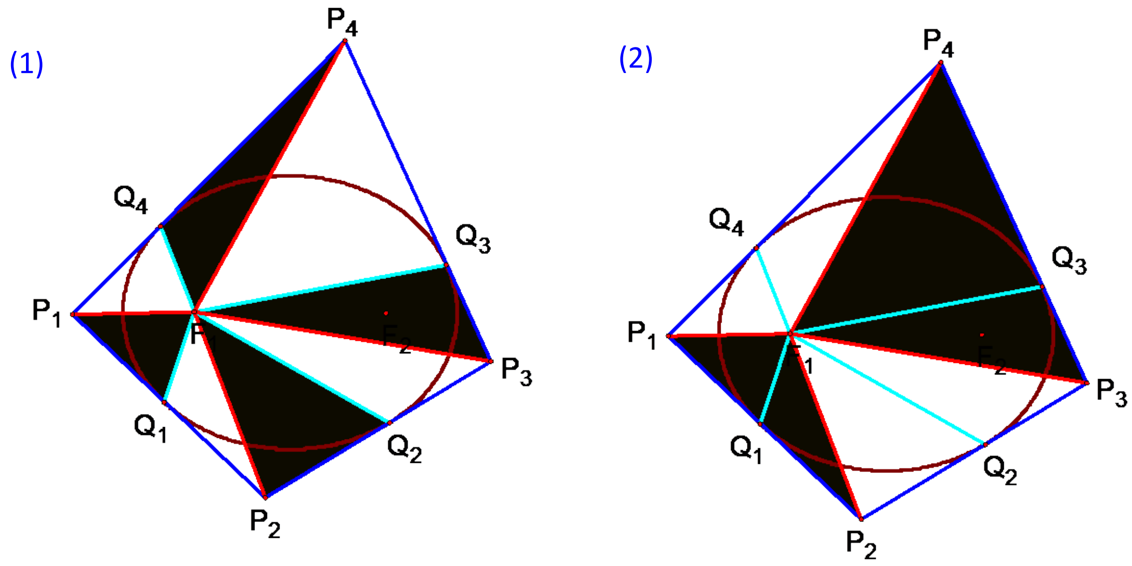


圖 2

【證明】：

給定F為橢圓Γ其中的一個焦點，由【引理一】可知$\angle P_1FQ_1=\angle P_1FQ_4$、$\angle P_2FQ_1=\angle P_2FQ_2$、$\angle P_3FQ_2=\angle P_3FQ_3$以及$\angle P_4FQ_3=\angle P_4FQ_4$。

(1) 如圖 2，取$F=F_1$。因此$\angle P_1F_1Q_1+\angle P_2F_1Q_2+\angle P_3F_1Q_3+\angle P_4F_1Q_4=$

$\frac{1}{2}(\angle P_1F_1Q_1+\angle P_1F_1Q_4)+\frac{1}{2}(\angle P_2F_1Q_1+\angle P_2F_1Q_2)+\frac{1}{2}(\angle P_3F_1Q_2+\angle P_3F_1Q_3)+$

$\frac{1}{2}(\angle P_4F_1Q_3+\angle P_4F_1Q_4)=\frac{1}{2}\times 360^\circ=180^\circ$。

因此，$\angle P_1FQ_4+\angle P_2FQ_1+\angle P_3FQ_2+\angle P_4FQ_3$

$=360^\circ-(\angle P_1F_1Q_1+\angle P_2F_1Q_2+\angle P_3F_1Q_3+\angle P_4F_1Q_4)=180^\circ$。

當我們取$F=F_2$時，利用同樣的證明手法，命題依然成立。

(2) 如圖 2，取$F=F_1$。因此$\angle P_1F_1P_2+\angle P_3F_1P_4=(\angle P_1F_1Q_1+\angle P_2F_1Q_1)+$

$(\angle P_3F_1Q_3+\angle P_4F_1Q_3)=(\angle P_1F_1Q_1+\angle P_2F_1Q_2)+(\angle P_3F_1Q_3+\angle P_4F_1Q_4)=180^\circ$。

$\angle P_1FP_4+\angle P_2FP_3=360^\circ-(\angle P_1FP_2+\angle P_3FP_4)=360^\circ-180^\circ=180^\circ$。⋯⋯(經由(1))

當我們取$F=F_2$時，利用同樣的證明手法，命題依然成立，故得證。

【引理三】：如圖 3，已知歐氏平面上一個凸四邊形$P_1P_2P_3P_4$(依逆時針方向)有一個內切橢圓Γ，其中F_1、F_2為Γ的兩個焦點，而F_2'為F_2相對切線$\overleftrightarrow{P_1P_2}$的對稱點，且$\overleftrightarrow{P_1P_4}$與$\overleftrightarrow{P_2P_3}$平行，則

(1)$\angle P_1F_1P_2+\angle P_1F_2P_2=\angle P_3F_1P_4+\angle P_3F_2P_4=180^\circ$。

(2)$\angle P_1F_1P_2+\angle P_1F_2'P_2=180^\circ$且$P_1$、$F_1$、$P_2$、$F_2'$四點共圓。

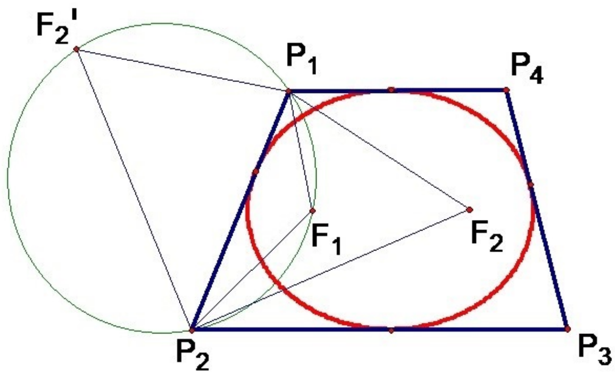


圖 3

【證明】：

(1)由【橢圓性質 2】中的(2)，可知

及$\angle P_1P_2F_1=\angle P_3P_2F_2$。因此，

$$\angle P_2P_1P_4=\angle P_2P_1F_2+\angle P_4P_1F_2=\angle P_2P_1F_2+\angle P_2P_1F_1，$$

$$\angle P_1P_2P_3=\angle P_1P_2F_2+\angle P_3P_2F_2=\angle P_1P_2F_2+\angle P_1P_2F_1。$$

又因$\overleftrightarrow{P_1P_4}$與$\overleftrightarrow{P_2P_3}$平行，藉由「同側內角互補」的性質，則$\angle P_2P_1P_4+\angle P_1P_2P_3=180^\circ$。

故$(\angle P_2P_1F_2+\angle P_2P_1F_1)+(\angle P_1P_2F_2+\angle P_1P_2F_1)=180^\circ$。

因 $\Delta P_1P_2F_1$及 $\Delta P_1P_2F_2$各自的「內角和」均為180°，故

$\angle P_1F_1P_2+\angle P_1F_2P_2=180^\circ-(\angle P_2P_1F_1+\angle P_1P_2F_1)+180^\circ-(\angle P_1P_2F_2+\angle P_2P_1F_2)$

$=360^\circ-(\angle P_2P_1F_2+\angle P_2P_1F_1)-(\angle P_1P_2F_2+\angle P_1P_2F_1)=360^\circ-(\angle P_2P_1P_4+\angle P_1P_2P_3)$

$=360^\circ-180^\circ=180^\circ$。

利用同樣的證明手法，我們知道$\angle P_3F_1P_4+\angle P_3F_2P_4=180^\circ$，命題依然成立，故得證。

(2)因為F_2'為F_2相對於$\overleftrightarrow{P_1P_2}$的對稱點，所以$\angle P_1F_2P_2=\angle P_1F_2'P_2$。由(1)可知

$$\angle P_1F_1P_2+\angle P_1F_2P_2=180^\circ$$

進而推得$\angle P_1F_1P_2+\angle P_1F_2'P_2=180^\circ$。利用四邊形「對角互補」的性質，我們知道$P_1$、$F_1$、$P_2$、$F_2'$四點共圓，故得證。

【引理四】：如圖 4，已知歐氏平面上一個平行四邊形$P_1P_2P_3P_4$(依逆時針方向)有一個內切橢圓Γ，且Γ和$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$及$\overline{P_4P_1}$分別和Γ相切於Q_1、Q_2、Q_3及Q_4四個點。令F_1、F_2為Γ的兩個焦點，O 為Γ的對稱中心，而F_1'、F_2'分別為F_1、F_2相對於切線$\overleftrightarrow{P_1P_4}$的對稱點。

我們恆有如下的結果：

(1) $\Delta P_1F_2'P_4 \cong \Delta P_3F_1P_2$以及$\Delta P_1F_1'P_4 \cong \Delta P_3F_2P_2$。

(2) 如果定點F是橢圓Γ其中的一個焦點，則$\frac{\overline{P_1F}\times\overline{P_3F}}{\overline{P_2F}\times\overline{P_4F}} = \frac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}} = \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$ 。

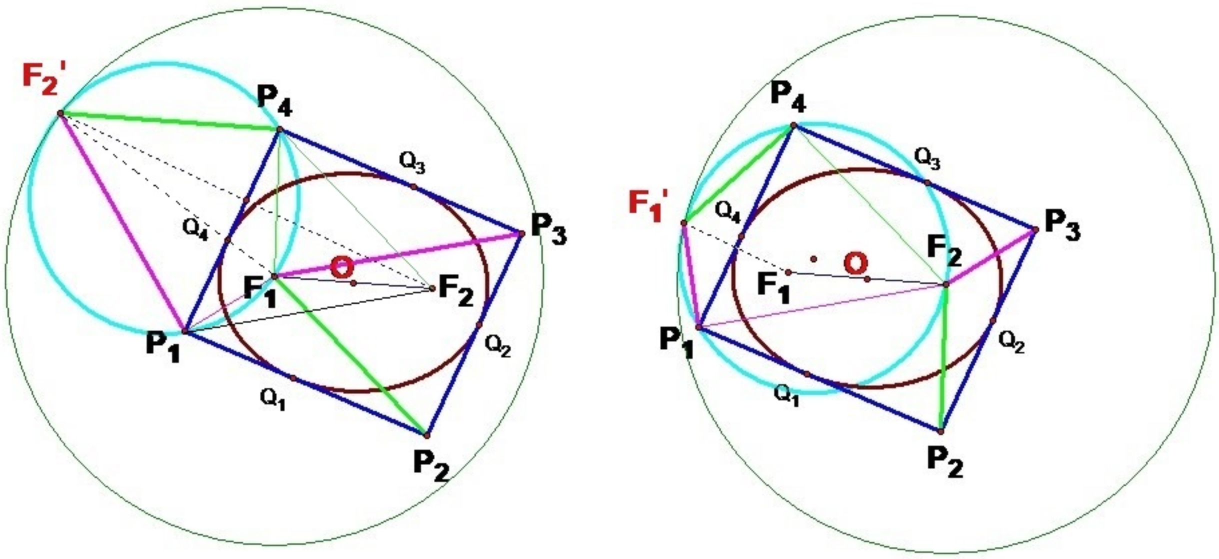


圖 4

【證明】：

(1)先針對焦點F_1討論，已知F_2'為F_2相對於切線$\overleftrightarrow{P_1P_4}$的對稱點。因為$\overleftrightarrow{P_1P_2}$與$\overleftrightarrow{P_3P_4}$平行，藉由【引理三】的性質(2)可知$\angle P_1F_1P_4 + \angle P_1F_2'P_4 = 180^{\circ}$且$P_1$、$F_1$、$P_4$、$F_2'$四點共圓。做四邊形$F_1P_1F_2'P_4$的外接圓C，(如圖 4 左)

另外，由【引理二】的性質(2)可知$\angle P_1F_1P_4 + \angle P_3F_1P_2 = 180^{\circ}$，推得

$$\angle P_1F_2'P_4 = \angle P_3F_1P_2 。$$

再由【橢圓性質 1】，因為$\overleftrightarrow{P_1P_4}$為$\overline{F_2F_2'}$的中垂線，所以

$$以及\overline{P_1F_2} = \overline{P_1F_2'}。因此，$$

$$\overline{P_2F_1} = \overline{P_4F_2'}以及\overline{P_3F_1} = \overline{P_1F_2'}。$$

進而可推得$\overline{P_2F_1} = \overline{P_4F_2'}$以及$\overline{P_3F_1} = \overline{P_1F_2'}$。

因此，由三角形 S.A.S.全等性質可推得$\Delta P_1F_2'P_4 \cong \Delta P_3F_1P_2$。

同樣地，針對另一個焦點F_2，此時F_1'為F_1相對於切線$\overleftrightarrow{P_1P_4}$的對稱點，我們利用前述同樣的證明手法，可以推得$\Delta P_1F_1'P_4 \cong \Delta P_3F_2P_2$。

(2)先針對$F = F_1$討論。因為

$$\overline{P_1F_1} \times \overline{P_3F_1} = \overline{P_1F_1} \times \overline{P_1F_2'}以及\overline{P_4F_1} \times \overline{P_2F_1} = \overline{P_4F_1} \times \overline{P_4F_2'}。$$

因為P_1、F_1、P_4、F_2'四點共圓(如圖 4 左)，所以$\angle F_1P_1F_2' = 180^{\circ} - \angle F_1P_4F_2'$

進而$\sin\angle F_1P_1F_2' = \sin(180^\circ - \angle F_1P_4F_2') = \sin\angle F_1P_4F_2'$。

由三角形面積公式$\Delta F_1P_1F_2' = \frac{1}{2} \times \overline{P_1F_1} \times \overline{P_1F_2'} \times \sin\angle F_1P_1F_2'$

以及$\Delta F_1P_4F_2' = \frac{1}{2} \times \overline{P_4F_1} \times \overline{P_4F_2'} \times \sin\angle F_1P_4F_2'$，

結合前述的性質，可推得

$$\frac{\overline{P_1F_1} \times \overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1} \times \overline{P_4F_1}} = \frac{\overline{P_1F_1} \times \overline{P_1F_2'}}{\overline{P_4F_2'} \times \overline{P_4F_1}} = \frac{\frac{1}{2} \times \overline{P_1F_1} \times \overline{P_1F_2'} \times \sin\angle F_1P_1F_2'}{\frac{1}{2} \times \overline{P_4F_1} \times \overline{P_4F_2'} \times \sin\angle F_1P_1F_2'} = \frac{\frac{1}{2} \times \overline{P_1F_1} \times \overline{P_1F_2'} \times \sin\angle F_1P_1F_2'}{\frac{1}{2} \times \overline{P_4F_1} \times \overline{P_4F_2'} \times \sin\angle F_1P_4F_2'}$$

$$= \frac{\Delta F_1P_1F_2'}{\Delta F_1P_4F_2'} = \frac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}}$$

由於 O 為Γ的對稱中心，所以$\frac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}} = \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$進而推得

$$\frac{\overline{P_1F_1} \times \overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1} \times \overline{P_4F_1}} = \frac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}} = \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$$ 。(如圖 4 左)

同樣地，當$F=F_2$時，仿照前述$F=F_1$的情形，利用同樣的證明手法，我們同樣可以推得

$$\frac{\overline{P_1F_2} \times \overline{P_3F_2}}{\overline{P_2F_2} \times \overline{P_4F_2}} = \frac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}} = \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$$ 。(如圖 4 右)

也就是，對於Γ的焦點F，恆有性質：

$$\frac{\overline{P_1F} \times \overline{P_3F}}{\overline{P_2F} \times \overline{P_4F}} = \frac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}} = \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$$ 。

最後，我們完成證明。

【引理五】：如圖 5-01，已知歐氏平面上一個有一個內切橢圓Γ的梯形$P_1P_2P_3P_4$(依逆時針方向)且滿足$\overleftrightarrow{P_1P_4}$平行於$\overleftrightarrow{P_2P_3}$，以及$\angle P_1P_2P_3 + \angle P_2P_3P_4 < 180^\circ$。令$F_1$、$F_2$為Γ的兩個焦點，O 為Γ的對稱中心，而Γ和$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$及$\overline{P_4P_1}$分別和Γ相切於$Q_1$、$Q_2$、$Q_3$及$Q_4$四個點。假設圓$C_1$及圓$C_2$分別為$\Delta F_1P_2P_3$及$\Delta F_1P_1P_4$的外接圓，連接$\overrightarrow{F_1Q_2}$及$\overrightarrow{F_1Q_4}$分別交圓$C_1$及圓$C_2$於$H_1$及$H_2$。我們恆有如下的結果：

(1) $\Delta P_1F_1P_4 \sim \Delta P_3H_1P_2$以及 $\Delta P_3F_1P_2 \sim \Delta P_1H_2P_4$。

(2) 如果定點F是橢圓Γ其中的一個焦點，則

$$\frac{\overline{P_1F} \times \overline{P_3F}}{\overline{P_2F} \times \overline{P_4F}} = \frac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}} = \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$$ 。

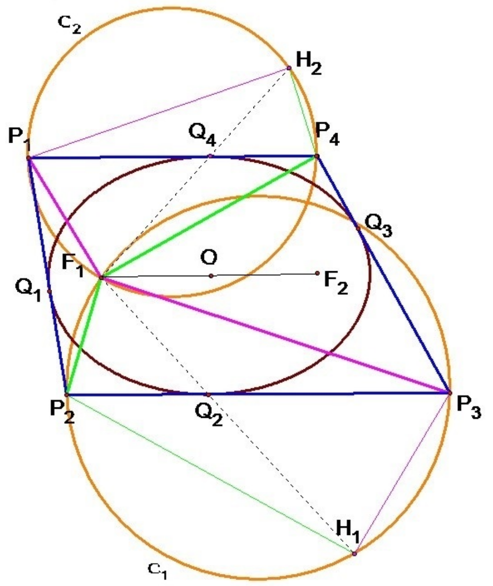


圖 5-01

【證明】：

如圖 5-01，假設梯形$P_1P_2P_3P_4$(依逆時針方向)有一個內切橢圓Γ，且滿足$\overleftrightarrow{P_1P_4}$平行於$\overleftrightarrow{P_2P_3}$，以及$\angle P_1P_2P_3 + \angle P_2P_3P_4 < 180^\circ$。

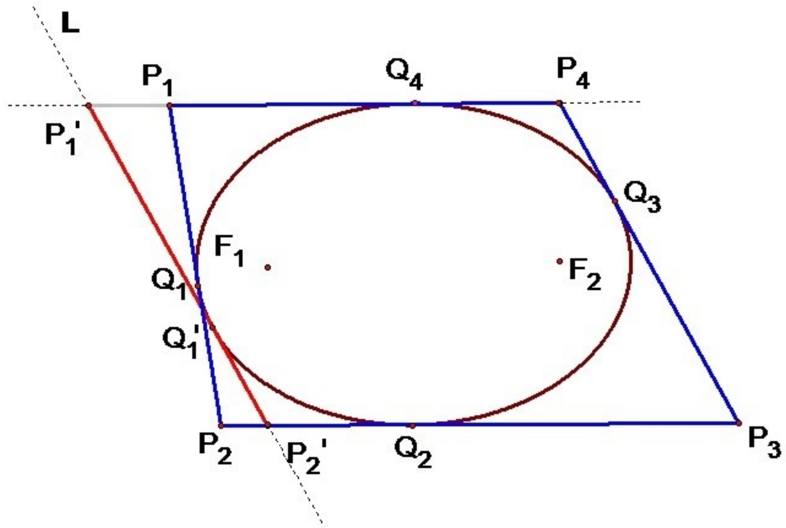


圖 5-02

(1) 針對內切橢圓Γ做一條新的切線L與Γ 相切於Q_1'且滿足直線L與$\overline{P_3P_4}$平行。

(2) 令$\overleftrightarrow{P_1P_4}$交L於$P_1'$，以及$\overleftrightarrow{P_2P_3}$交L於$P_2'$。再連接$\overline{P_1'P_1}$和$\overline{P_1'P_2'}$。(如圖 5-02)

注意： 因$\angle P_1P_2P_3 + \angle P_2P_3P_4 < 180^\circ$，所以$P_1$必定落在$\overline{P_1'Q_4}$的內部，而$P_2'$落在$\overline{P_2Q_2}$的內部！

取點F_2'為F_2相對於$\overleftrightarrow{P_2P_3}$的對稱點，分別再連接$\overline{P_2'F_1}$、$\overline{P_2'F_2'}$、$\overline{P_3F_2'}$、$\overline{F_1F_2'}$以及$\overline{F_2F_2'}$。

令點S為$\overline{P_2P_3}$與$\overline{F_2F_2'}$的交點。(如圖 5-03)

由【引理三】的(2)可知$\angle P_2'F_1P_3+\angle P_2'F_2'P_3=180^\circ$且$F_1$、$P_2'$、$F_2'$、$P_3$四點共圓。因此，做四邊形$F_1P_2'F_2'P_3$的外接圓**C**。

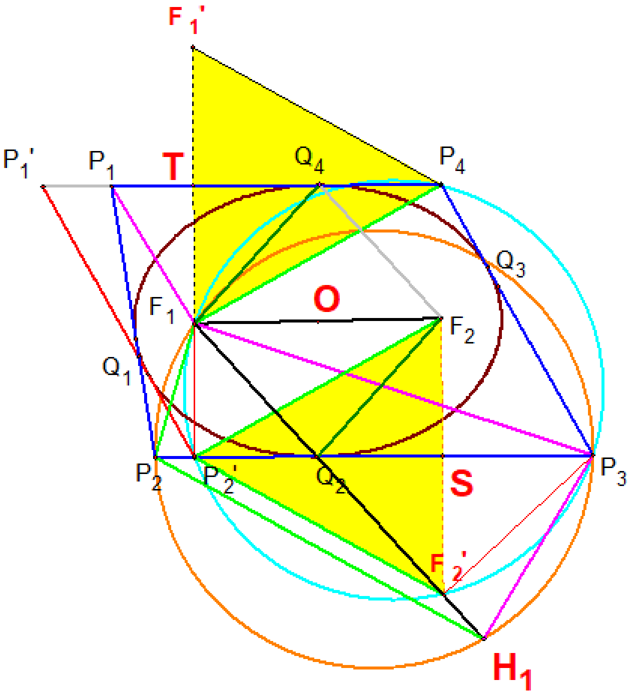


圖 5-03

緊接著，再取F_1'為F_1相對於$\overleftrightarrow{P_1P_4}$的對稱點。然後連接$\overline{P_4F_1'}$以及$\overline{F_1F_1'}$。令點T為$\overline{P_1P_4}$與$\overline{F_1F_1'}$的交點。藉由對稱點的原理，我們知道

$$\Delta F_2P_2'S\cong\ \Delta F_2'P_2'S\text{以及}\Delta F_1P_4T\cong\Delta F_1'P_4T。$$

由於四邊形$P_1'P_2'P_3P_4$是一個平行四邊形，圖形對稱於中心O，故$\Delta F_2P_2'F_2'\cong\Delta F_1P_4F_1'$，進而

$$\Delta F_2P_2'S\cong\ \Delta F_2'P_2'S\cong\Delta F_1P_4T\cong\Delta F_1'P_4T。$$

然後，做$\Delta F_1P_2P_3$的外接圓**C₁**。由題意，我們知道，連接$\overrightarrow{F_1Q_2}$，會交圓**C₁**於點H_1。再連接$\overline{P_2H_1}$以及$\overline{P_3H_1}$。(如圖 5-03)

利用「圓內接四邊形對角互補」的性質可知$\angle P_2F_1P_3+\angle P_3H_1P_2=180^\circ$

再由【引理二】(2)，$\angle P_1F_1P_4+\angle P_2F_1P_3=180^\circ$，因此推得

$$\angle P_1F_1P_4=\angle P_3H_1P_2\text{..}(*)$$

藉由「圓**C**的圓周角性質」，可知$\angle F_2'P_2'S=\angle F_2'P_2'P_3=\angle F_2'F_1P_3$；

藉由「圓**C₁**的圓周角性質」，可知$\angle F_2'F_1P_3=\angle H_1F_1P_3=\angle H_1P_2P_3$，進而可推得

結合(*)以及(**)，藉由「三角形 A.A. 相似性質」，我們知道$\Delta P_1F_1P_4\sim\Delta P_3H_1P_2$。

由題意，我們知道，連接$\overrightarrow{F_1Q_4}$，會交圓C_2於點H_2。再連接$\overline{P_1H_2}$以及$\overline{P_4H_2}$。(如圖 5-04)

同樣地，利用「圓內接四邊形對角互補」的性質可知$\angle P_1F_1P_4+\angle P_1H_2P_4=180^\circ$

再由【引理二】(2)，$\angle P_1F_1P_4+\angle P_2F_1P_3=180^\circ$，因此推得

$$\angle P_2F_1P_3 = \angle P_1H_2P_4 \text{...} (\#)$$

因為圖形對稱於中心O，故 $\angle P_4F_1Q_4 = \angle P_2'F_2Q_2$，又$\angle P_2'F_2Q_2 = \angle P_2'F_2'Q_2$。

藉由「圓C的圓周角性質」，$\angle P_2'F_2'Q_2 = \angle P_2P_3F_1$；

藉由「圓C_2的圓周角性質」，可知 $\angle P_4F_1Q_4=\angle P_4F_1H_2 = P_4P_1H_2$，進而可推得

$$\angle P_2P_3F_1 = P_4P_1H_2 \text{...} (\#\#)$$

結合(#)以及(##)，藉由「三角形 A.A. 相似性質」，我們知道 $\Delta P_3F_1P_2 \sim \Delta P_1H_2P_4$。

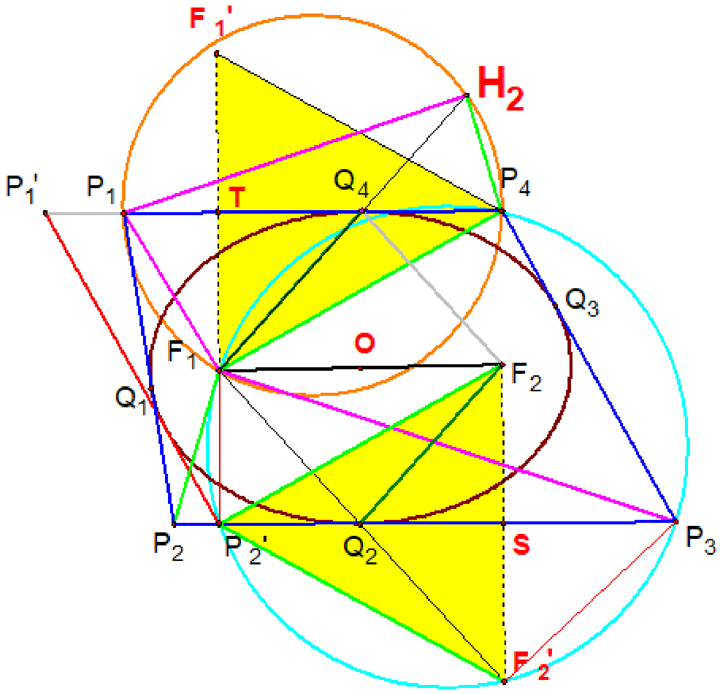


圖 5-04

(2) 先針對$F=F_1$討論。令

$$\frac{\overline{P_1F_1}}{\overline{P_3H_1}} = \frac{\overline{P_4F_1}}{\overline{P_2H_1}} = t$$

因為F_1、P_2、H_1、P_3四點共圓，所以$\angle H_1P_2F_1=180^\circ - \angle H_1P_3F_1$(如圖 5-03)

進而$\sin\angle H_1P_2F_1 = \sin(180^\circ - \angle H_1P_3F_1) = \sin\angle H_1P_3F_1$。由三角形面積公式

$\Delta H_1P_3F_1 = \frac{1}{2} \times \overline{P_3H_1} \times \overline{P_3F_1} \times \sin\angle H_1P_3F_1$以及$\Delta H_1P_2F_1 = \frac{1}{2} \times \overline{P_2H_1} \times \overline{P_2F_1} \times \sin\angle H_1P_2F_1$，

結合前述的性質，可推得

$$\frac{\overline{P_1F_1}\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1}\times\overline{P_4F_1}}=\frac{(t\times\overline{P_3H_1})\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1}\times(t\times\overline{P_2H_1})}=\frac{\overline{P_3H_1}\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1}\times\overline{P_2H_1}}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{P_3H_1}\times\overline{P_3F_1}\times\sin\angle H_1P_3F_1}{\frac{1}{2}\times\overline{P_2F_1}\times\overline{P_2H_1}\times\sin\angle H_1P_3F_1}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{P_3H_1}\times\overline{P_3F_1}\times\sin\angle H_1P_3F_1}{\frac{1}{2}\times\overline{P_2H_1}\times\overline{P_2F_1}\times\sin\angle H_1P_2F_1}=\frac{\Delta H_1P_3F_1}{\Delta H_1P_2F_1}=\frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}\text{ 。}$$

也就是，

$$\frac{\overline{P_1F_1}\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1}\times\overline{P_4F_1}}=\frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\&)$$

因為 $\Delta P_3F_1P_2\sim\Delta P_1H_2P_4$，同樣的原理(如圖 5-04)，我們可推得

$$\frac{\overline{P_1F_1}\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1}\times\overline{P_4F_1}}=\frac{\Delta H_2P_1F_1}{\Delta H_2P_4F_1}=\frac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\&\&)$$

結合(&)與(&&)，我們知道

$$\frac{\overline{P_1F_1}\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1}\times\overline{P_4F_1}}=\frac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}}=\frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$$

同樣地，當$F=F_2$時，仿照前述$F=F_1$的情形，利用同樣的證明手法，我們同樣可以推得

$$\frac{\overline{P_1F_2}\times\overline{P_3F_2}}{\overline{P_2F_2}\times\overline{P_4F_2}}=\frac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}}=\frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}\text{ 。}$$

也就是，對於Γ的焦點F，恆有性質：

$$\frac{\overline{P_1F}\times\overline{P_3F}}{\overline{P_2F}\times\overline{P_4F}}=\frac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}}=\frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}\text{ 。}$$

最後，我們完成證明。

注意：

1. 經由【引理四】及【引理五】兩種情形的證明手法，我們知道當在「**橢圓有外切平行切線**」時會有漂亮的幾何性質，也對我們的證明技巧產生了極大的效用。因此，我們準備沿用類似的手法證明「**兩組對邊均不平行**」之凸四邊形的情形。

2. 在下面的【引理六】，我們只需證明凸四邊形滿足 $\angle P_1P_2P_3+\angle P_2P_3P_4<180^\circ$ 且 $\angle P_2P_3P_4+\angle P_3P_4P_1<180^\circ$ 的情形即可。因為，藉由**鏡射**(相對於任意一條與$\overleftrightarrow{P_2P_3}$垂直之直線)，我們馬上可知道滿足 $\angle P_1P_2P_3+\angle P_2P_3P_4<180^\circ$ 且 $\angle P_4P_1P_2+\angle P_1P_2P_3<180^\circ$ 的凸四邊形一樣會滿足同樣的命題！

【引理六】：已知歐氏平面上一個有一個內切橢圓Γ的凸四邊形$P_1P_2P_3P_4$(依逆時針方向)且滿足兩組對邊均不平行以及$\angle P_1P_2P_3 + \angle P_2P_3P_4 < 180^\circ$。令$F_1$、$F_2$為$\Gamma$的兩個焦點，O 為$\Gamma$的對稱中心，而$\Gamma$和$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$及$\overline{P_4P_1}$分別和$\Gamma$相切於$Q_1$、$Q_2$、$Q_3$及$Q_4$四個點。針對內切橢圓$\Gamma$做兩條新的切線$L_1$以及$L_2$使得$L_1$平行於$\overleftrightarrow{P_3P_4}$而$L_2$平行於$\overleftrightarrow{P_1P_2}$，其中$L_1$交$\overline{P_1P_2}$於S點，而$L_2$交$\overline{P_1P_2}$於T點。假設圓$C_1$及圓$C_2$分別為$\Delta F_1P_1P_2$及$\Delta F_1P_3P_4$的外接圓，連接$\overrightarrow{F_1S}$及$\overrightarrow{F_1T}$分別交圓$C_1$及圓$C_2$於$H_1$及$H_2$。我們恆有如下的結果：

(1) $\Delta P_3F_1P_4 \sim \Delta P_1H_1P_2$以及 $\Delta P_1F_1P_2 \sim \Delta P_3H_2P_4$。

(2) 如果定點F是橢圓Γ其中的一個焦點，則

$$\frac{\overline{P_1F} \times \overline{P_3F}}{\overline{P_2F} \times \overline{P_4F}} = \frac{\overline{P_1S}}{\overline{P_2S}} = \frac{\overline{P_3T}}{\overline{P_4T}}\ 。$$

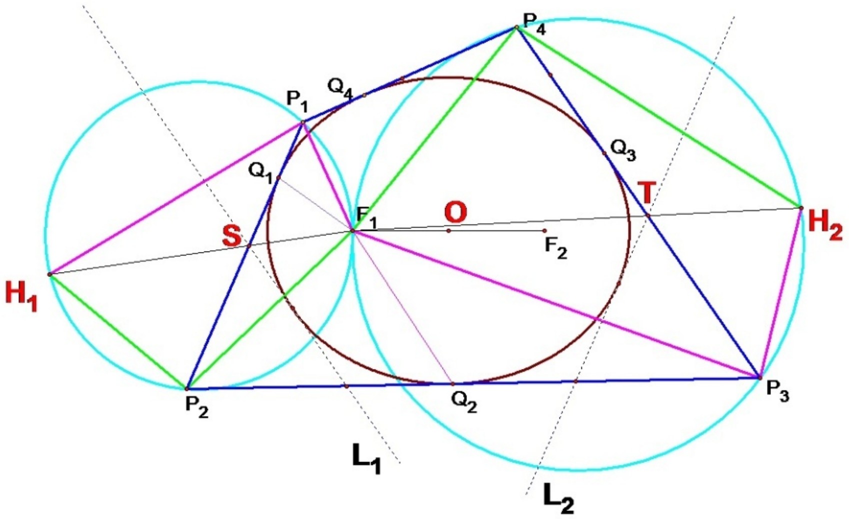


圖 6-01

【證明】：

不失其一般性，假設$\angle P_1P_2P_3 + \angle P_2P_3P_4 < 180^\circ$且 $\angle P_2P_3P_4 + \angle P_3P_4P_1 < 180^\circ$。如圖 6-01

首先，已知L_1是內切橢圓Γ的切線且L_1平行於$\overleftrightarrow{P_3P_4}$，令$L_1$與$\Gamma$相切於$Q_1'$，而$L_1$與切線$\overleftrightarrow{P_2P_3}$相切於$P_2'$。針對$\Gamma$另外再做一條新的切線L，使得L平行於$\overleftrightarrow{P_2P_3}$令L與$\Gamma$相切於$Q_4'$，而L與切線$\overleftrightarrow{P_3P_4}$相交於$P_4'$。令L與$L_1$相交於$P_1'$，我們知道凸四邊形$P_1'P_4'P_3P_2'$是一個平行四邊形。(如圖 6-02)

利用圓C_1之「圓內接四邊形對角互補」的性質可知$\angle P_1F_1P_2 + \angle P_1H_1P_2 = 180^\circ$

再由【引理二】(2)，$\angle P_1F_1P_2 + \angle P_3F_1P_4 = 180^\circ$，因此推得

$$\angle P_3F_1P_4 = \angle P_1H_1P_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (※)$$

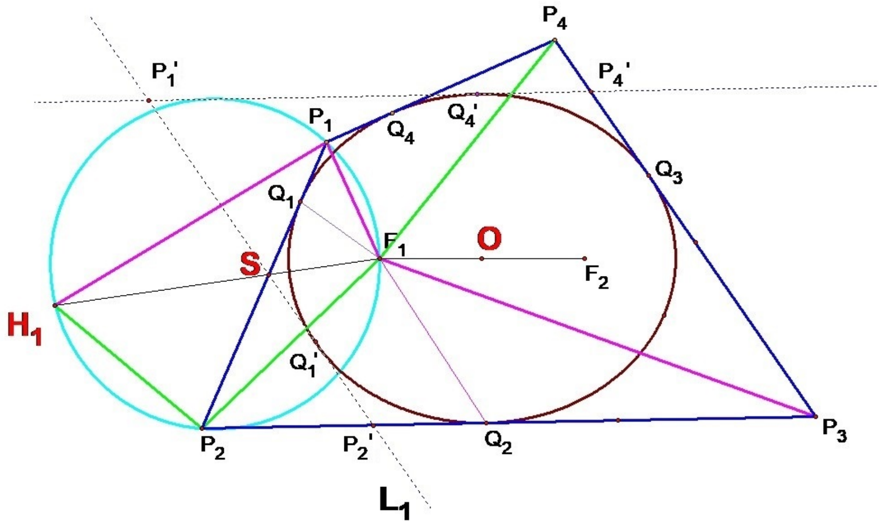


圖 6-02

取點F_2'為F_2相對於切線L_1的對稱點，分別連接$\overline{F_1P_2'}$、$\overline{P_1'F_2'}$、$\overline{F_2F_2'}$以及$\overline{P_1'F_2}$。因Γ是平行四邊形$P_1'P_2'P_3P_4'$的內切橢圓，故藉由【引理三】(2)我們知道P_1'、F_1、P_2'、F_2'四點共圓。做四邊形$P_1'F_1P_2'F_2'$的外接圓**C**，(如圖 6-03)

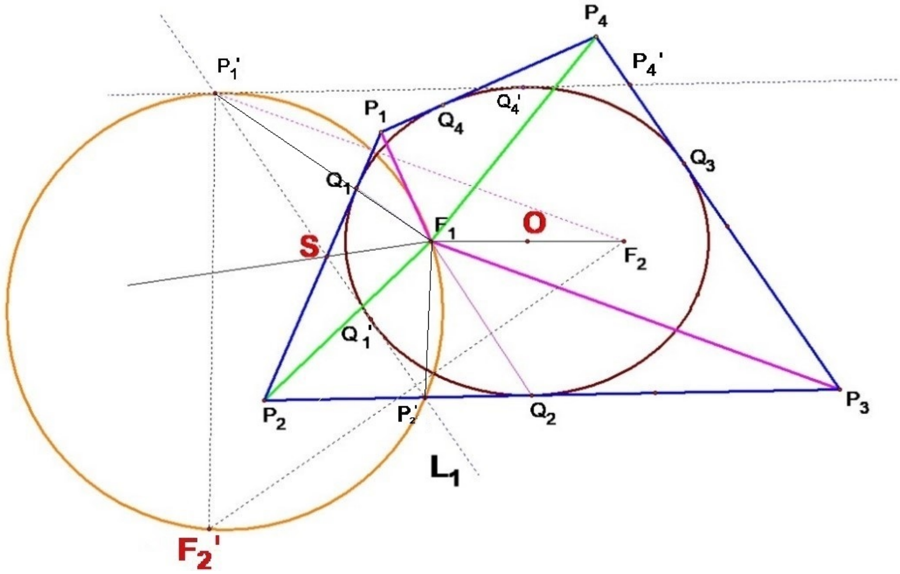


圖 6-03

注意： 我們由【橢圓性質 1】可知，F_1、Q_1'、F_2'三點必定共線，而且藉由切線與切點之間的關係，我們可知 $\angle Q_1'F_1Q_2 > \angle P_2'F_1Q_2$！

接下來我們要證明 $\Delta P_3F_1P_4 \sim \Delta P_1H_1P_2$。

我們將圖形依$\angle P_1'F_1P_2$與$\angle P_1'F_1F_2' = \angle P_1'F_1Q_1'$的大小關係分成下面三種 Case 討論：

Case I. $\angle P_1'F_1Q_1'=\angle P_1'F_1F_2' > \angle P_1'F_1P_2$。(如圖 6-04)

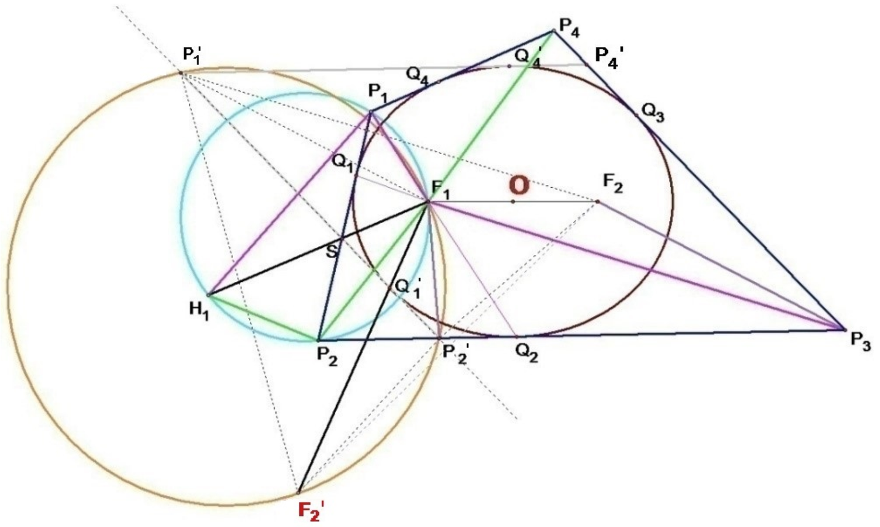


圖 6-04

因為頂點及焦點連線為焦點至頂點兩側切點連線的角平分線，藉由【引理一】可知 $\overleftrightarrow{F_1S}$為$\angle Q_1F_1Q_1'$的角平分線，$\overleftrightarrow{F_1P_2}$為$\angle Q_1F_1Q_2$的角平分線，以及$\overleftrightarrow{F_1P_2'}$為$\angle Q_1'F_1Q_2$的角平分線。

因為$\angle P_1'F_1F_2' > \angle P_1'F_1P_2$，所以由圖可知$\angle Q_2F_1P_2 = \angle P_2F_1P_2' + \angle Q_2F_1P_2'$。

$\angle Q_1F_1Q_2=\angle Q_1F_1P_2 + \angle Q_2F_1P_2 = \angle Q_1F_1S + \angle Q_1'F_1S + \angle Q_1'F_1P_2' + \angle Q_2F_1P_2$

$\Leftrightarrow 2\angle Q_2F_1P_2 = 2\angle Q_1'F_1S + 2\angle Q_1'F_1P_2' \Leftrightarrow \angle Q_2F_1P_2 = \angle Q_1'F_1S + \angle Q_1'F_1P_2'$

可推得 $\angle Q_2F_1P_2 = \angle P_2F_1P_2' + \angle Q_2F_1P_2' = \angle Q_1'F_1S + \angle Q_1'F_1P_2'$，因$\angle Q_2F_1P_2' = \angle Q_1'F_1P_2'$，所以$\angle P_2F_1P_2' = \angle Q_1'F_1S = \angle Q_1'F_1H_1$，$\angle H_1F_1P_2 + \angle Q_1'F_1P_2 = \angle Q_1'F_1P_2 + \angle P_2'F_1F_2'$，進而

$$\angle H_1F_1P_2=\angle P_2'F_1F_2' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\%)$$

利用圓C_1之「圓周角性質」可知 $\angle H_1F_1P_2=\angle H_1P_1P_2$；

利用圓C之「圓周角性質」可知 $\angle F_2'F_1P_2'=\angle F_2'P_1'P_2'$；

再利用「鏡射之對稱性」可知 $\angle F_2'P_1'P_2'=\angle F_2P_1'P_2'$；

因為「 O 為內切橢圓Γ以及平行四邊形$P_1'P_4'P_3P_2'$的對稱中心」我們由圖可知 $\angle F_2P_1'P_2'=\angle F_1P_3P_4'=\angle F_1P_3P_4$；結合上述的結果與(%)最後推得

$$\angle H_1F_1P_2=\angle F_1P_3P_4。\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\%\%)$$

結合(※)以及(%%)，藉由「三角形 A.A. 相似性質」，我們知道 $\Delta P_3F_1P_4 \sim \Delta P_1H_1P_2$。

Case II. $\angle P_1'F_1Q_1'$=$\angle P_1'F_1F_2'=\angle P_1'F_1P_2$。(如圖 6-05)

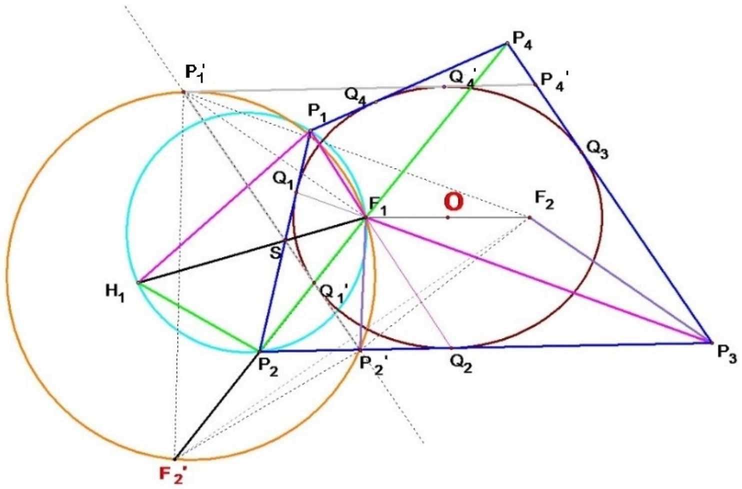


圖 6-05

仿照 **Case I.** 的證明手法，我們可推得

$$\angle Q_2F_1P_2=2\angle P_2F_1P_2'=\angle Q_1'F_1S+\angle P_2F_1P_2'$$

進而可推得 $\angle P_2F_1P_2'=\angle Q_1'F_1S=\angle Q_1'F_1H_1$。

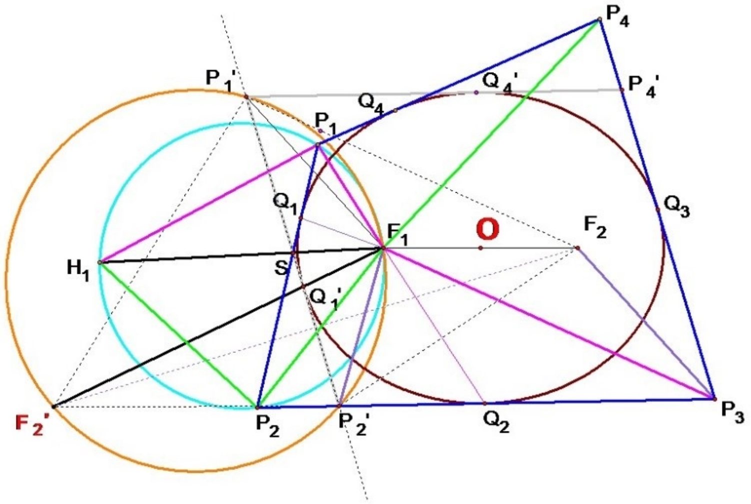
故$\angle H_1F_1P_2$=$\angle P_2'F_1F_2'$ ………………………………………($)

然後利用圓C_1與圓C之「圓周角性質」，再利用「鏡射之對稱性」以及「 O 為內切橢圓Γ以及平行四邊形$P'_1P'_4P_3P'_2$的對稱中心」可推得$\angle P_2'F_1F_2'$=$\angle F_2P_1'P_2'$=$\angle F_1P_3P_4'$=$\angle F_1P_3P_4$；$\angle H_1P_1P_2$=$\angle H_1F_1P_2$；最後推得

$\angle H_1P_1P_2$=$\angle F_1P_3P_4$。 ………………………………………($$)

結合(※)以及($$)，藉由「三角形 A.A. 相似性質」，推得 $\Delta P_3F_1P_4\sim\Delta P_1H_1P_2$。

Case III. $\angle P_1'F_1Q_1'$=$\angle P_1'F_1F_2'<\angle P_1'F_1P_2$。(如圖 6-06)



.圖 6-06

仿照 **Case I.** 的證明手法，我們可推得

$$\angle Q_2F_1P_2 = \angle P_2F_1P_2' + \angle Q_2F_1P_2' = \angle Q_1'F_1S + \angle Q_1'F_1P_2'$$

進而可推得$\angle H_1F_1Q_1' + \angle Q_1'F_1P_2 = \angle Q_2F_1P_2' = \angle Q_1'F_1P_2' = \angle Q_1'F_1P_2 + \angle P_2'F_1P_2$。

所以

$$\angle H_1F_1P_2 = \angle P_2'F_1F_2' \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (@)$$

然後利用圓C_1與圓C之「圓周角性質」，再利用「鏡射之對稱性」以及「O 為內切橢圓Γ以及平行四邊形$P_1'P_4'P_3P_2'$的對稱中心」可推得$\angle P_2'F_1F_2' = \angle F_2P_1'P_2' = \angle F_1P_3P_4' = \angle F_1P_3P_4$；$\angle H_1P_1P_2 = \angle H_1F_1P_2$；結合前述的結果與(@)；最後推得

$$\angle H_1P_1P_2 = \angle F_1P_3P_4。 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (@@)$$

結合(※)以及(@@)，藉由「三角形 A.A. 相似性質」，我們知道 $\Delta P_3F_1P_4 \sim \Delta P_1H_1P_2$。故得證。

藉由上述的同樣的證明流程，我們同樣可以證得$\Delta P_1F_1P_2 \sim \Delta P_3H_2P_4$(如圖 6-01)，所以，在此我們省略證明。

(2) 先針對$F=F_1$討論。令

$$\frac{\overline{P_3F_1}}{\overline{P_1H_1}} = \frac{\overline{P_4F_1}}{\overline{P_2H_1}} = t$$

因為F_1、P_2、H_1、P_1四點共圓，所以$\angle H_1P_2F_1 = 180^\circ - \angle H_1P_1F_1$

進而$\sin\angle H_1P_2F_1 = \sin(180^\circ - \angle H_1P_1F_1) = \sin\angle H_1P_1F_1$。由三角形面積公式

$\Delta H_1P_1F_1 = \frac{1}{2} \times \overline{P_1H_1} \times \overline{P_1F_1} \times \sin\angle H_1P_1F_1$以及$\Delta H_1P_2F_1 = \frac{1}{2} \times \overline{P_2H_1} \times \overline{P_2F_1} \times \sin\angle H_1P_2F_1$，

結合前述的性質，可推得

$$\frac{\overline{P_1F_1} \times \overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1} \times \overline{P_4F_1}} = \frac{\overline{P_1F_1} \times (t \times \overline{P_1H_1})}{\overline{P_2F_1} \times (t \times \overline{P_2H_1})} = \frac{\overline{P_1F_1} \times \overline{P_1H_1}}{\overline{P_2F_1} \times \overline{P_2H_1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \overline{P_1H_1} \times \overline{P_1F_1} \times \sin\angle H_1P_1F_1}{\frac{1}{2} \times \overline{P_2H_1} \times \overline{P_2F_1} \times \sin\angle H_1P_1F_1} = \frac{\frac{1}{2} \times \overline{P_3H_1} \times \overline{P_3F_1} \times \sin\angle H_1P_1F_1}{\frac{1}{2} \times \overline{P_2H_1} \times \overline{P_2F_1} \times \sin\angle H_1P_2F_1}$$

$$= \frac{\Delta H_1P_1F_1}{\Delta H_1P_2F_1} = \frac{\overline{P_1S}}{\overline{P_2S}}。$$ (如圖 6-01)

也就是，

$$\frac{\overline{P_1F_1} \times \overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1} \times \overline{P_4F_1}} = \frac{\overline{P_1S}}{\overline{P_2S}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\&)$$

因為$\Delta P_1F_1P_2 \sim \Delta P_3H_2P_4$，同樣的原理，我們可推得

$$\frac{\overline{P_1F_1}\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1}\times\overline{P_4F_1}}=\frac{\Delta H_2P_3F_1}{\Delta H_2P_4F_1}=\frac{\overline{P_3T}}{\overline{P_4T}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\&\&)$$

結合(&)與(&&)，我們知道

$$\frac{\overline{P_1F_1}\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1}\times\overline{P_4F_1}}=\frac{\overline{P_1S}}{\overline{P_2S}}=\frac{\overline{P_3T}}{\overline{P_4T}}$$

同樣地，當F=F_2時，仿照前述F=F_1的情形，利用同樣的證明手法，我們同樣可以推得

$$\frac{\overline{P_2F_2}\times\overline{P_3F_2}}{\overline{P_2F_2}\times\overline{P_4F_2}}=\frac{\overline{P_1S}}{\overline{P_2S}}=\frac{\overline{P_3T}}{\overline{P_4T}}$$ 。(如圖 6-01)

也就是，對於Γ的焦點F，恆有性質：

$$\frac{\overline{P_1F}\times\overline{P_3F}}{\overline{P_2F}\times\overline{P_4F}}=\frac{\overline{P_1S}}{\overline{P_2S}}=\frac{\overline{P_3T}}{\overline{P_4T}}$$ 。

最後，我們完成證明。

【引理七】：如圖 7-01，已知歐氏平面中一個凸四邊形$P_1P_2P_3P_4$有一個內切橢圓Γ，而$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$及$\overline{P_4P_1}$分別和Γ相切於Q_1、Q_2、Q_3及Q_4四個點，且滿足

$$\frac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{P_2Q_1}}=\frac{m_1}{m_2}\text{、}\frac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{P_3Q_2}}=\frac{m_2}{m_3}\text{、}\frac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{P_4Q_3}}=\frac{m_3}{m_4}\text{、}\frac{\overline{P_4Q_4}}{\overline{P_1Q_4}}=\frac{m_4}{m_1}$$

，其中m_1,m_2,m_3,m_4是四個正實數。如果定點F是橢圓Γ其中的一個焦點，則，則恆有

$$\frac{\overline{P_1F}\times\overline{P_3F}}{\overline{P_2F}\times\overline{P_4F}}=\frac{m_1+m_3}{m_2+m_4}$$ 。

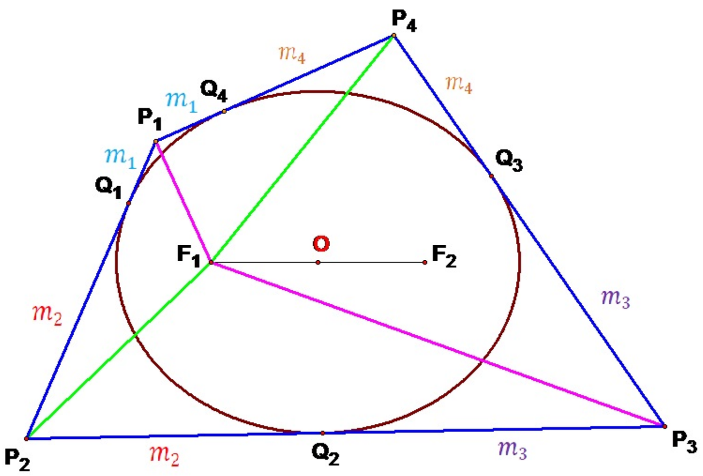


圖 7-01

【證明】：不失其一般性，令F = F_1。我們證明的步驟依凸四邊形$P_1P_2P_3P_4$兩組對邊間的平行關係細分為「兩組對邊平行」、「恰一組對邊平行」、「兩組對邊均不平行」三種情形進行討論：

Case 1. 兩組對邊平行，也就是四邊形$P_1P_2P_3P_4$為平行四邊形。

由於圖形會對稱於橢圓的對稱中心 O，故此時，$m_1 = m_3$且$m_2 = m_4$。

藉由【引理四】

可推得

$$\frac{\overline{P_1F} \times \overline{P_3F}}{\overline{P_2F} \times \overline{P_4F}} = \frac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}} = \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{2m_1}{2m_2} = \frac{m_1 + m_1}{m_2 + m_2} = \frac{m_1 + m_3}{m_2 + m_4} 。$$

故得證。

Case 2. 恰有一組對邊不平行，也就是四邊形$P_1P_2P_3P_4$為梯形。

藉由【引理五】我們知道

$$\frac{\overline{P_1F_1} \times \overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1} \times \overline{P_4F_1}} = \frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}} = \frac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}} \Leftrightarrow \frac{m_3}{m_2} = \frac{m_1}{m_4} = \frac{m_1 + m_3}{m_2 + m_4}$$

最後，我們推得

$$\frac{\overline{P_1F_1} \times \overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1} \times \overline{P_4F_1}} = \frac{m_1 + m_3}{m_2 + m_4}$$

故得證。

Case 3. 兩組對邊均不平行

藉由【引理六】我們知道

$$\frac{\overline{P_1F} \times \overline{P_3F}}{\overline{P_2F} \times \overline{P_4F}} = \frac{\overline{P_1S}}{\overline{P_2S}} = \frac{\overline{P_3T}}{\overline{P_4T}} 。$$

藉由【圓柱截痕性質】「保比例」、「保平行」以及「保相切」的特性；歐氏平面上必定存在一個(如圖 7-02)有內切圓的凸四邊形$A_1A_2A_3A_4$

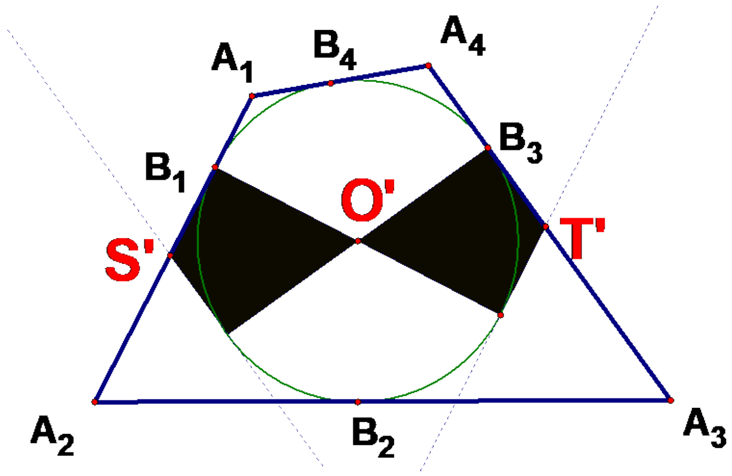


圖 7-02

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_1}}=\frac{m_1}{m_2}、\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_3B_2}}=\frac{m_2}{m_3}、\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_4B_3}}=\frac{m_3}{m_4}、\frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{A_1B_4}}=\frac{m_4}{m_1}$$

$$\frac{\overline{A_1S'}}{\overline{A_2S'}}=\frac{\overline{A_3T'}}{\overline{A_4T'}} \text{以及} \overline{B_1S'}=\overline{B_3T'} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

我們可以假設$\overline{A_1S'}=(m_1+\alpha)t$、$\overline{A_2S'}=(m_2-\alpha)t$、$\overline{A_3T'}=(m_3-\alpha)t$ 以及 $\overline{A_4T'}=(m_4+\alpha)t$

$$\because \frac{\overline{A_1S'}}{\overline{A_2S'}}=\frac{(m_1+\alpha)t}{(m_2-\alpha)t}=\frac{(m3-\alpha)t}{(m4+\alpha)t}=\frac{\overline{A_3T'}}{\overline{A_4T'}}$$

$$\Leftrightarrow (m_1+\alpha)(m_4+\alpha)=(m_2-\alpha)(m_3-\alpha)$$

$$\Leftrightarrow m_1m_4+m_1\alpha+m_4\alpha=m_2m_3-m_2\alpha-m_3\alpha$$

$$\Leftrightarrow \alpha=\frac{(m_2m_3-m_1m_4)}{(m_1+m_2+m_3+m_4)}$$

$$\frac{(m_1+\alpha)}{(m_2-\alpha)}=\frac{m_1+\frac{(m_2m_3-m_1m_4)}{(m_1+m_2+m_3+m_4)}}{m_2-\frac{(m_2m_3-m_1m_4)}{(m_1+m_2+m_3+m_4)}}=\frac{(m_1m_1+m_1m_2+m_1m_3+m_1m_4+m_2m_3)}{(m_2m_2+m_2m_3+m_2m_4+m_1m_4)}$$

$$=\frac{m_1(m_1+m_3)+m_2(m_1+m_3)}{m_2(m_2+m_4)+m_1(m_2+m_4)}$$

$$=\frac{(m_1+m_2)(m_1+m_3)}{(m_1+m_2)(m_2+m_4)}=\frac{(m_1+m_3)}{(m_2+m_4)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由(1)、(2)可知

$$\frac{\overline{A_1S'}}{\overline{A_2S'}}=\frac{(m_1+m_3)}{(m_2+m_4)}\text{。}$$

因此，藉由「保比例」的特性，我們知道原來有內切橢圓的凸四邊形必定也滿足

$$\frac{\overline{P_1F}\times\overline{P_3F}}{\overline{P_2F}\times\overline{P_4F}}=\frac{\overline{P_1S}}{\overline{P_2S}}=\frac{\overline{P_3T}}{\overline{P_4T}}=\frac{\overline{A_1S'}}{\overline{A_2S'}}=\frac{(m_1+m_3)}{(m_2+m_4)}$$

故得證。

伍、研究結果

一、主要結果：

接下來，我們要利用前面所觀察到之新的幾何引理，證明我們的主要研究結果。

【定理】：

令z_1, z_2, z_3, z_4是複數平面上之凸四邊形的四個頂點(依逆時針方向，且任三點不共線)，而m_1, m_2, m_3, m_4是四個正實數。若該凸四邊形存在一個內切橢圓Γ和$\overline{z_1z_2}$、$\overline{z_2z_3}$、$\overline{z_3z_4}$、$\overline{z_4z_1}$分別相切於w_1, w_2, w_3, w_4四點，滿足$\frac{|z_1-w_1|}{|z_2-w_1|} = \frac{m_1}{m_2}$、$\frac{|z_2-w_2|}{|z_3-w_2|} = \frac{m_2}{m_3}$、$\frac{|z_3-w_3|}{|z_4-w_3|} = \frac{m_3}{m_4}$及$\frac{|z_4-w_4|}{|z_1-w_4|} = \frac{m_4}{m_1}$。

則Γ的兩焦點f_1, f_2(可重合)恰為方程式

$$(m_1 + m_3)(z - z_2)(z - z_4) + (m_2 + m_4)(z - z_1)(z - z_3) = 0$$

的兩個根。

【證明】：假設f_1, f_2是內切橢圓Γ的兩個焦點。

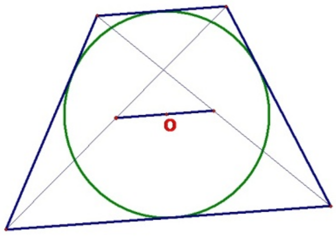
結合【複數性質 2】、【引理二】的(2) 以及【引理七】，我們立即可推得必存在正實數$r = \frac{|z_1-f_1|}{|z_2-f_1|}\frac{|z_3-f_1|}{|z_4-f_1|} = \frac{|z_1-f_2|}{|z_2-f_2|}\frac{|z_3-f_2|}{|z_4-f_2|} = \frac{m_1+m_3}{m_2+m_4} > 0$，使得

$$\frac{(f_1-z_1)(f_1-z_3)}{(f_1-z_2)(f_1-z_4)} = -r = -\left(\frac{m_1+m_3}{m_2+m_4}\right) \text{......................}(*)$$

$$\frac{(f_2-z_1)(f_2-z_3)}{(f_2-z_2)(f_2-z_4)} = -r = -\left(\frac{m_1+m_3}{m_2+m_4}\right) \text{......................}(**)$$

由(*)及(**)，相當於f_1, f_2是二次方程式$\frac{(z-z_1)(z-z_3)}{(z-z_2)(z-z_4)} = -\left(\frac{m_1+m_3}{m_2+m_4}\right)$的根，也就是說$f_1, f_2$是二次方程式$(m_1 + m_3)(z - z_2)(z - z_4) + (m_2 + m_4)(z - z_1)(z - z_3) = 0$的兩個根，故得證。

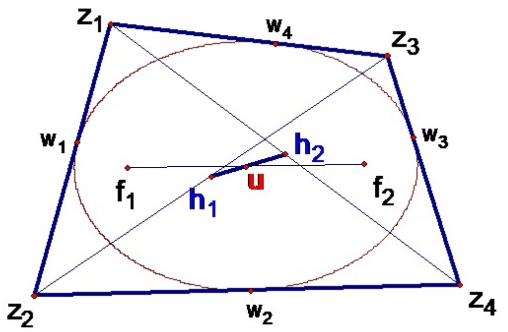
二、應用：



Newton 定理：歐氏平面平面上一個不為菱形且存在內切圓的凸四邊形，其內切圓圓心必定落在該凸四邊形之 Newton 線(兩對角線中點之連線)上。

「Newton 定理」有著許多不同的證明，可以利用投影幾何中圓柱截痕的原理推廣成「Newton 橢圓問題」。

【Newton 橢圓問題】：歐氏平面上一個不為平行四邊形且存在內切橢圓的凸四邊形，其內切橢圓的對稱中心必定落在該凸四邊形兩對角線中點之連線段上。



藉由我們的主要結果，可以直接推得如下關於「Newton 橢圓問題」之「更加強」的結果，我們證明：內切橢圓的對稱中心必定是以凸四邊形之兩對角線中點為兩端點之連線段的內分點，我們同時也提供了「Newton 橢圓問題」一個全新的幾何證明。

由上述【定理】可推出如果凸四邊形兩對角線$\overline{z_1z_3}$及$\overline{z_2z_4}$中點分別為h_1及h_2，而橢圓Γ的對稱中心為u，則**橢圓Γ的對稱中心u必為該凸四邊形兩對角線中點之連$\overline{h_1h_2}$的內分點**，且滿足

$$\frac{|h_1-u|}{|h_2-u|}=\frac{m_1+m_3}{m_2+m_4}=\frac{|f_1-z_1|\times|f_1-z_3|}{|f_1-z_2|\times|f_1-z_4|}=\frac{|f_2-z_1|\times|f_2-z_3|}{|f_2-z_2|\times|f_2-z_4|}$$

進而，$\overline{h_1u}$：$\overline{h_2u}=(m_1+m_3):(m_2+m_4)$。亦即，歐氏平面上一個不為平行四邊形且存在內切橢圓的凸四邊形，其內切橢圓的對稱中心必定落在該凸四邊形兩對角線中點之連線段上。

【證明】：令z_1,z_2,z_3,z_4是凸四邊形的四個頂點(依逆時針方向，且任三點不共線)。假設凸四邊形存在一個內切橢圓Γ和$\overline{z_1z_2}$、$\overline{z_2z_3}$、$\overline{z_3z_4}$、$\overline{z_4z_1}$分別相切於w_1,w_2,w_3,w_4四點，滿足

$$\frac{|z_1-w_1|}{|z_2-w_1|}=\frac{m_1}{m_2}、\frac{|z_2-w_2|}{|z_3-w_2|}=\frac{m_2}{m_3}、\frac{|z_3-w_3|}{|z_4-w_3|}=\frac{m_3}{m_4}及\frac{|z_4-w_4|}{|z_1-w_4|}=\frac{m_4}{m_1}$$

，其中m_1,m_2,m_3,m_4是四個正實數，而f_1,f_2為Γ的兩焦點。

藉由我們的主要結果的【定理】，可知f_1,f_2必定為二次方程式

$$(m_1+m_3)(z-z_2)(z-z_4)+(m_2+m_4)(z-z_1)(z-z_3)=0$$
$$\Leftrightarrow (m_1+m_2+m_3+m_4)z^2-[(m_1+m_3)(z_2+z_4)+(m_2+m_4)(z_1+z_3)]$$
$$-[(m_1+m_3)z_2z_4+(m_2+m_4)z_1z_3]=0$$

的兩個根。我們知道Γ對稱中心為$\frac{f_1+f_2}{2}$。

藉由「根與係數」的原理，我們可推得內切橢圓的中心為

$$\frac{f_1+f_2}{2}=\frac{(m_1+m_3)(z_2+z_4)+(m_2+m_4)(z_1+z_3)}{2\times(m_1+m_2+m_3+m_4)}$$

$$= \left(\frac{m_1+m_3}{m_1+m_2+m_3+m_4}\right) \times \left(\frac{z_2+z_4}{2}\right)+\left(\frac{m_2+m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}\right) \times \left(\frac{z_1+z_3}{2}\right) \ldots\ldots(☆)$$

由於$\frac{z_1+z_3}{2}$與$\frac{z_2+z_4}{2}$分別為凸四邊形兩對角線中點，假設凸四邊形不是平行四邊形，所以$\frac{z_1+z_3}{2} \neq \frac{z_2+z_4}{2}$。我們令$m_1+m_3=a>0$及$m_2+m_4=b>0$，

令$h_1=\frac{z_1+z_3}{2}$、$h_2=\frac{z_2+z_4}{2}$及$u=\frac{f_1+f_2}{2}$，進而(☆)可以重新寫成

$$u = \left(\frac{b}{a+b}\right) \times h_1 + \left(\frac{a}{a+b}\right) \times h_2, a>0, b>0 \ldots\ldots(☆☆)$$

我們知道，(☆☆)意味著：Γ的對稱中心u恰好落在以凸四邊形兩對角線中點h_1及h_2為兩端點的連$\overline{h_1h_2}$的內分點，而且

$$\frac{|h_1-u|}{|h_2-u|}=\frac{m_1+m_3}{m_2+m_4}=\frac{|f_1-z_1| \times |f_1-z_3|}{|f_1-z_2| \times |f_1-z_4|}=\frac{|f_2-z_1| \times |f_2-z_3|}{|f_2-z_2| \times |f_2-z_4|}$$

也就是，$\overline{h_1u}$：$\overline{h_2u}=(m_1+m_3)$：$(m_2+m_4)$故得證。

陸、討論

我們的主要結果【定理一】是推廣到凸四邊形的情形，但同樣也是必須發生在凸四邊形有內切橢圓的情形，因此，未來我們希望也能用幾何性質來證明另外一個方向：

已知z_1, z_2, z_3, z_4是複數平面上之凸四邊形的四個頂點(依逆時針方向，且任三點不共線，當任意四個正實數m_1, m_2, m_3, m_4給定時，該凸四邊形必定存在一個內切橢圓恰好和$\overline{z_1z_2}$、$\overline{z_2z_3}$、$\overline{z_3z_4}$、$\overline{z_4z_1}$分別相切於w_1, w_2, w_3, w_4四點，且滿足

$$\frac{|z_1-w_1|}{|z_2-w_1|}=\frac{m_1}{m_2}、\frac{|z_2-w_2|}{|z_3-w_2|}=\frac{m_2}{m_3}、\frac{|z_3-w_3|}{|z_4-w_3|}=\frac{m_3}{m_4}及\frac{|z_4-w_4|}{|z_1-w_4|}=\frac{m_4}{m_1}。$$

我們的研究結果就會更完備。

另外，我們將「Siebeck-Marden 定理」從三角形推廣至凸四邊形，在過程中我們找到了具有規律性的公式，讓我們不禁思索是否我們能夠透過這公式延伸到任意的凸n多邊形上面，找尋其關聯性，說不定會得到意想不到的收穫。

柒、結論

本研究探討的主題為「Siebeck-Marden 定理的推廣---凸四邊形之內切橢圓的焦點問題」。茲將重要結論摘列如下：

一、橢圓的任一焦點到任一頂點連線，會平分此焦點到頂點兩側切點的角度。

二、不論是兩組對邊平行、還是一組對邊平行的凸四邊形，又或者是兩組對邊皆不平行的四邊形，都適用於$\frac{\overline{\mathrm{P_1F}}\times\overline{\mathrm{P_3F}}}{\overline{\mathrm{P_2F}}\times\overline{\mathrm{P_4F}}}=\frac{m_1+m_3}{m_2+m_4}$這個式子。但前提必須先知道凸四邊形的四個頂點$\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{P_4}$以及四條切線段中的四個長度比例m_1, m_2, m_3, m_4。

三、凸四邊形之內切橢圓藉由「圓柱截痕」的原理垂直投影成另一凸四邊形之內接圓時，頂點到切點的線段有著「保比例」、「保平行」及「保相切」的特性，因此，當我們需要計算四邊形之內切橢圓的切線段比值時，可以對應到四邊形之內接圓的切線段比值，此時更有助於我們的計算。

四、藉由我們的主要結果的【定理】，可以直接推得如下關於「Newton 橢圓問題」之「更加強」的結果，我們證明：內切橢圓的對稱中心必定是以凸四邊形之兩對角線中點為兩端點之連線段的內分點，且分線段比值恰好就是我們【引理七】裡的比值。我們同時也提供了「Newton 橢圓問題」一個全新的幾何證明。

五、我們主要結果的【定理】裡的二次方程式既簡單且又有規律性，又可進一步利用配方法直接解出兩焦點。事實上，在研究的過程中，我們一開始是先猜測方程式的係數，利用動態幾何軟體 GSP 進行實驗而確認，再進行幾何證明。最終符合了我們的預期。

捌、參考資料及其他

1. 橢圓中的那幾個神奇的定理- 每日頭條 https://kknews.cc/zh-tw/news/4qq2n8v.html

2.複數法在中學數學中的應用- 葉文傑

https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d372/37208.pdf

3.複數的幾何意涵- 林信安

http://math1.ck.tp.edu.tw/%E6%9E%97%E4%BF%A1%E5%AE%89/%E5%AD%B8%E8%A1%93%E7%A0%94%E7%A9%B6/%E7%A7%91%E5%AD%B8%E7%8F%AD/%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E8%AC%9B%E7%BE%A9/%E7%AC%AC44%E5%96%AE%E5%85%83%E8%A4%87%E6%95%B8%E7%9A%84%E5%B9%BE%E4%BD%95%E6%84%8F%E6%B6%B5.pd.

4.牛頓定理- 維基百科，自由的百科全書 - Wikipedia

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%89%9B%E9%A1%BF%E5%AE%9A%E7%90%86

5. 圓柱截痕– GeoGebra

https://www.geogebra.org/m/wxRaRpYY

6. Dan Kalman, (2008), “An Elementary Proof of Marden's Theorem”, *The American Mathematical Monthly*, 115: 330–338, ISSN0002-9890.

7. Marden's theorem - Wikipedia

https://en.wikipedia.org/wiki/Marden%27s_theorem

8. Marden, Morris (1945), “A note on the zeroes of the sections of a partial fraction”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 51 (12): 935–940,

DOI: S0002-9904-1945-08470-5.

9. JörgSiebeck, (1864), “Über eine neue analytische Behandlungweise der Brennpunkte”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 64: 175–182, ISSN0075-4102.

10. AlexandruTupan, (2020), “A Simple Proof of the Siebeck–Marden Theorem”, *The American Mathematical Monthly*, 127:8, 734-736, DOI:10.1080/00029890.2020.1785256.

【評語】050402

本作品延伸 Siebeck-Marden 定理 (三角形內切橢圓)，到凸四邊形之內切橢圓的焦點問題。得以一個類似希瓦定理的邊長比例關係，並刻畫出焦點所滿足的複係數二次式的根，這部分的結果相當不錯。但是較為可惜的是內切橢圓存在性問題作者並沒有著墨，如果能夠有內切橢圓存在性的研究與討論會更完整。

作品簡報

Siebeck-Marden定理的推廣

--凸四邊形之內切橢圓的焦點問題

高級中等學校組 數學科

摘要

利用歐氏平面幾何性質應用在複數平面上推廣到其任意一個存在內切橢圓的凸四邊形上，我們和Siebeck-Marden定理「獨立地」找到了一個相對應的二次複數方程式進而可以利用配方法解出凸四邊形之內切橢圓兩個焦點的一個全新的定理。

並藉由我們的主要定理的結果，推得關於「Newton橢圓問題」之「加強」的結果，並且提供「Newton橢圓問題」一個全新的幾何證明。

研究目的

本研究的目的是將原來的「Siebeck-Marden定理」推廣至凸四邊形的情形，並且沒有利用到「Siebeck-Marden定理」的結果。

一、探討平面上兩組對邊平行之凸四邊形其內切橢圓的相關幾何性質。

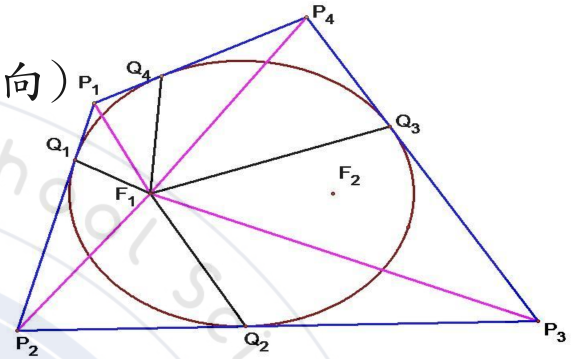
二、探討平面上恰有一組對邊平行之凸四邊形其內切橢圓的相關幾何性質。

三、探討平面上兩組對邊均不平行對邊之凸平行四邊形內切橢圓的相關幾何性質。

四、結合上述有內切橢圓之凸四邊形的幾何性質，進而找到關於了任意凸四邊形之內切橢圓焦點滿足的二次複數方程式，也推廣了「Siebeck-Marden定理」。

五、針對平面上不為平行四邊形且存在內切橢圓的凸四邊形，藉由我們的主要定理的方程式，可以直接推得關於「Newton橢圓問題」之加深的結果，也提供了「Newton橢圓問題」一個全新的幾何證明。

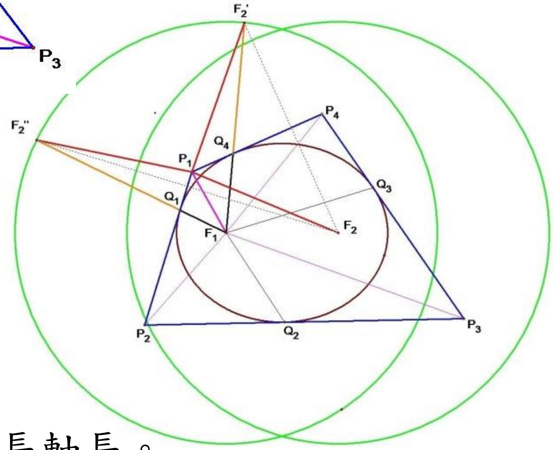
【引理一】：已知歐式平面上一個凸四邊形$P_1P_2P_3P_4$(依逆時針方向)有一個內切橢圓Γ，且Γ和$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$及$\overline{P_4P_1}$分別和Γ相切於Q_1、Q_2、Q_3及Q_4四個點。
如果定點F是橢圓Γ其中的一個焦點，則$\overleftrightarrow{P_1F}$、$\overleftrightarrow{P_2F}$、$\overleftrightarrow{P_3F}$及$\overleftrightarrow{P_4F}$分別為$\angle Q_4FQ_1$、$\angle Q_1FQ_2$、$\angle Q_2FQ_3$及$\angle Q_3FQ_4$的角平分線。



(圖1-01)

【證明】：如圖1-01，取$F=F_1$。我們的目標要證明$\angle P_1F_1Q_1=\angle P_1F_1Q_4$。

我們依如下的步驟證明：(如圖1-02)



(圖1-02)

1. 先取F_2相對於$\overleftrightarrow{P_1P_4}$的對稱點$F_2'$，再取$F_2$相對於$\overleftrightarrow{P_1P_2}$的對稱點$F_2''$。
2. 再分別連接$\overline{F_2'Q_4}$、$\overline{F_2'P_1}$、$\overline{F_2''P_1}$以及$\overline{F_2''Q_1}$。
3. 由【橢圓性質1】，可知F_1、Q_4、F_2'三點共線，F_1、Q_1、F_2''三點共線，且$\overline{F_1F_2'}=\overline{F_1F_2''}$橢圓Γ的長軸長。
4. 再由【橢圓性質1】，可知P_1同時落在$\overline{F_2F_2'}$及$\overline{F_2F_2''}$的中垂線上，故可知$\overline{P_1F_2}=\overline{P_1F_2'}=\overline{P_1F_2''}$。
5. 因此，利用$\overline{F_1F_2'}=\overline{F_1F_2''}$、$\overline{P_1F_2}=\overline{P_1F_2''}$以及$\overline{P_1F_1}=\overline{P_1F_1}$，由三角形S.S.S.全等性質可推得$\Delta P_1F_1F_2'\cong\Delta P_1F_1F_2''$，進而$\angle P_1F_1F_2'=\angle P_1F_1F_2''$。
6. 因為$\angle P_1F_1Q_1=\angle P_1F_1F_2''$以及$\angle P_1F_1Q_4=\angle P_1F_1F_2'$，最後得到$\angle P_1F_1Q_1=\angle P_1F_1Q_4$。這意味著$\overleftrightarrow{P_1F_1}$為$\angle Q_4F_1Q_1$的分角線。

利用同樣的證明手法，我們知道$\overleftrightarrow{P_2F_1}$、$\overleftrightarrow{P_3F_1}$及$\overleftrightarrow{P_4F_1}$分別也會是$\angle Q_1F_1Q_2$、$\angle Q_2F_1Q_3$及$\angle Q_3F_1Q_4$的角平分線，命題依然成立。
同樣地，取$F=F_2$時，利用同樣的證明手法，我們可以知到$\overleftrightarrow{P_1F_2}$、$\overleftrightarrow{P_2F_2}$、$\overleftrightarrow{P_3F_2}$及$\overleftrightarrow{P_4F_2}$分別也會是$\angle Q_4F_2Q_1$、$\angle Q_1F_2Q_2$、$\angle Q_2F_2Q_3$及$\angle Q_3F_2Q_4$的角平分線。
最後，我們完成證明。

【引理二】：已知歐式平面上一個凸四邊形$P_1P_2P_3P_4$(依逆時針方向)
有一個內切橢圓Γ，且Γ和$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$及$\overline{P_4P_1}$
分別和Γ相切於Q_1、Q_2、Q_3及Q_4四個點。
如果定點F是橢圓Γ其中的一個焦點，則：
(1) $\angle P_1FQ_1+\angle P_2FQ_2+\angle P_3FQ_3+\angle P_4FQ_4=\angle P_1FQ_4+\angle P_2FQ_1+\angle P_3FQ_2+\angle P_4FQ_3=180°$
(2) $\angle P_1FP_2+\angle P_3FP_4=\angle P_1FP_4+\angle P_2FP_3=180°$ (如圖2)

【證明】：

給定F為橢圓其中的，由【引理一】可知$\angle P_1FQ_1=\angle P_1FQ_4$、$\angle P_2FQ_1=\angle P_2FQ_2$、$\angle P_3FQ_2=\angle P_3FQ_3$以及$\angle P_4FQ_3=\angle P_4FQ_4$。

(1)如圖2，取$F=F_1$。因一個焦點此

$\angle P_1F_1Q_1+\angle P_2F_1Q_2+\angle P_3F_1Q_3+\angle P_4F_1Q_4=\frac{1}{2}(\angle P_1F_1Q_1+\angle P_1F_1Q_4)+\frac{1}{2}(\angle P_2F_1Q_1+\angle P_2F_1Q_2)+\frac{1}{2}(\angle P_3F_1Q_2+\angle P_3F_1Q_3)+\frac{1}{2}(\angle P_4F_1Q_3+\angle P_4F_1Q_4)$

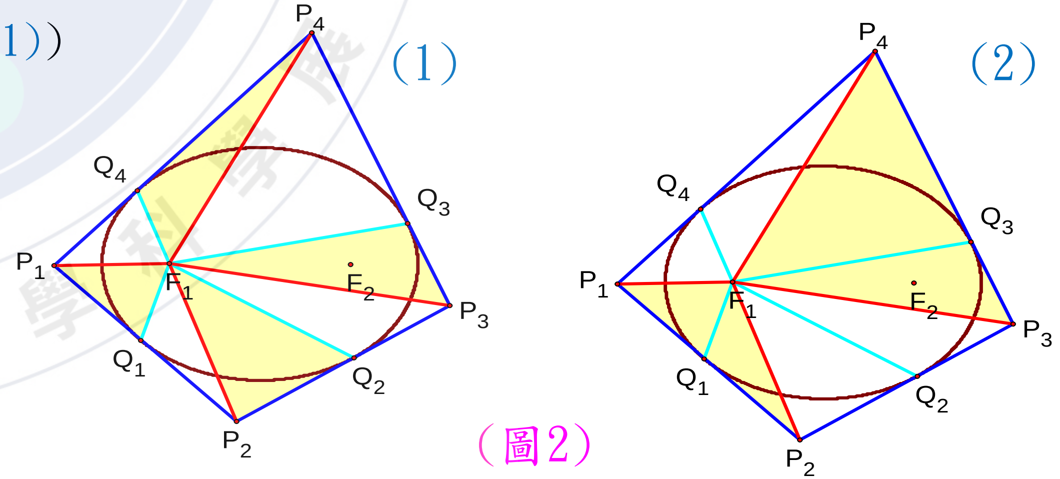
$=\frac{1}{2}\times 360° = 180°$ 因此，$\angle P_1FQ_4+\angle P_2FQ_1+\angle P_3FQ_2+\angle P_4FQ_3=360°-(\angle P_1F_1Q_1+\angle P_2F_1Q_2+\angle P_3F_1Q_3+\angle P_4F_1Q_4)=180°$

當我們取$F=F_2$時，利用同樣的證明手法，命題依然成立。

(2)取$F=F_1$。因此$\angle P_1F_1P_2+\angle P_3F_1P_4=\angle P_1F_1Q_1+\angle P_2F_1Q_1+\angle P_3F_1Q_3+\angle P_4F_1Q_3=\angle P_1F_1Q_1+\angle P_2F_1Q_2+\angle P_3F_1Q_3+\angle P_4F_1Q_4=180°$

$\angle P_1FP_4+\angle P_2FP_3=360°-(\angle P_1FP_2+\angle P_3FP_4)=360°-180°=180°$ …… (經由(1))

當我們取$F=F_2$時，利用同樣的證明手法，命題依然成立，故得證。



(圖2)

【引理三】：如圖3，已知歐氏平面上一個凸四邊形$P_1P_2P_3P_4$(依逆時針方向)有一個內切橢圓Γ，其中F_1、F_2為Γ的兩個焦點，而F_2'為F_2相對切線$\overleftrightarrow{P_1P_2}$的對稱點，且$\overleftrightarrow{P_1P_4}$與$\overleftrightarrow{P_2P_3}$平行，則：

(1) $\angle P_1F_1P_2+\angle P_1F_2P_2=\angle P_3F_1P_4+\angle P_3F_2P_4=180°$

(2) $\angle P_1F_1P_2+\angle P_1F_2'P_2=180°$ 且P_1、F_1、P_2、F_2'四點共圓。

【證明】：

(1)由【橢圓性質2】中的(2)，可知$\angle P_2P_1F_1=\angle P_4P_1F_2$及$\angle P_1P_2F_1=\angle P_3P_2F_2$。

因此，$\angle P_2P_1P_4=\angle P_2P_1F_2+\angle P_4P_1F_2=\angle P_2P_1F_2+\angle P_2P_1F_1$，$\angle P_1P_2P_3=\angle P_1P_2F_2+\angle P_3P_2F_2=\angle P_1P_2F_2+\angle P_1P_2F_1$。

又因$\overleftrightarrow{P_1P_4}$與$\overleftrightarrow{P_2P_3}$平行，藉由「同側內角互補」的性質，則$\angle P_2P_1P_4+\angle P_1P_2P_3=180°$

故$(\angle P_2P_1F_2+\angle P_2P_1F_1)+(\angle P_1P_2F_2+\angle P_1P_2F_1)=180°$

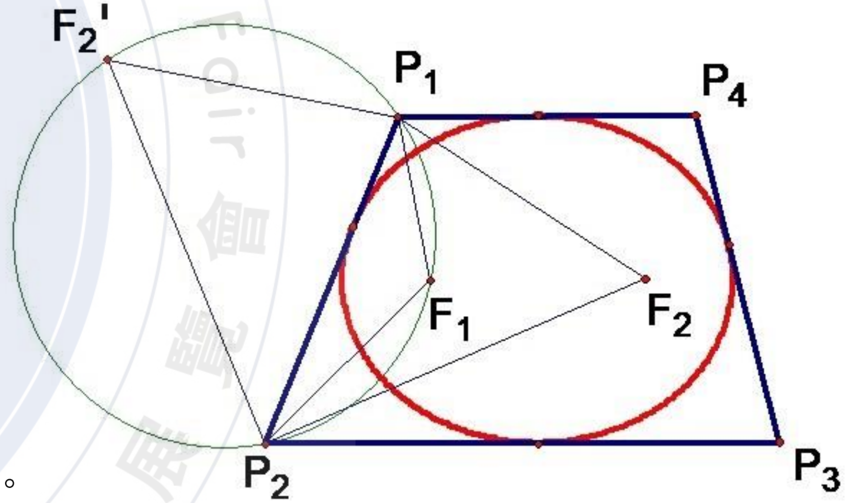
因$\Delta P_1P_2F_1$及$\Delta P_1P_2F_2$各自的「內角和」均為180°，故

$\angle P_1F_1P_2+\angle P_1F_2P_2=180°-(\angle P_2P_1F_1+\angle P_1P_2F_1)+180°-(\angle P_1P_2F_2+\angle P_2P_1F_1)$

$=360°-(\angle P_2P_1F_2+\angle P_2P_1F_1)-(\angle P_1P_2F_2+\angle P_1P_2F_1)=360°-(\angle P_2P_1P_4+\angle P_1P_2P_3)$

$=360°-180°=180°$。

利用同樣的證明手法，我們知道$\angle P_3F_1P_4+\angle P_3F_2P_4=180°$，命題依然成立，故得證。



(圖3)

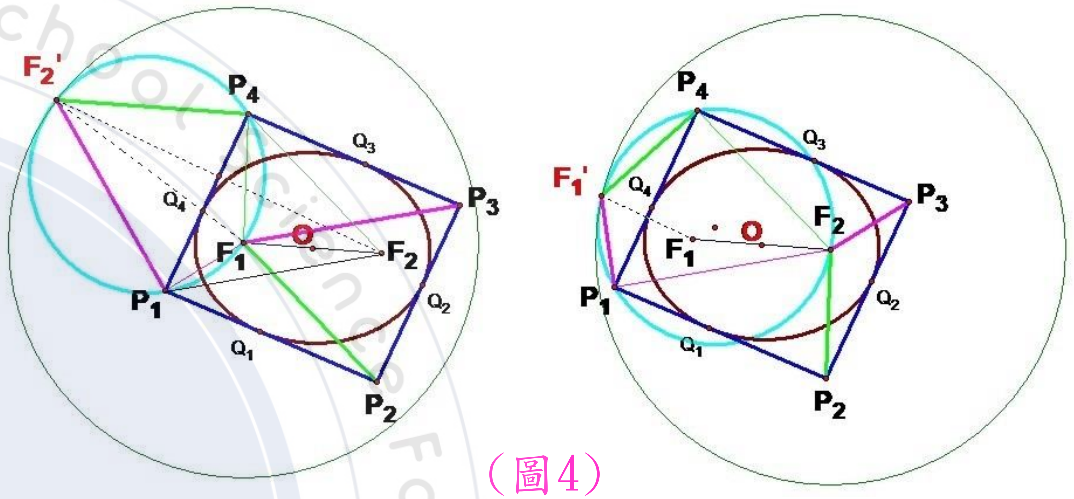
(2)因為F_2'為F_2相對於$\overleftrightarrow{P_1P_2}$的對稱點，所以$\angle P_1F_2P_2=\angle P_1F_2'P_2$。由(1)可知$\angle P_1F_1P_2+\angle P_1F_2P_2=180°$

進而推得$\angle P_1F_1P_2+\angle P_1F_2'P_2=180°$利用四邊形「對角互補」的性質，我們知道$P_1$、$F_1$、$P_2$、$F_2'$四點共圓，故得證。

【引理四】：如圖4，已知歐氏平面上一個平行四邊形$P_1P_2P_3P_4$(依逆時針方向)
有一個內切橢圓Γ，且和$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$及$\overline{P_4P_1}$分別和Γ相切於Q_1、Q_2、Q_3及Q_4四個點。
令F_1、F_2為Γ的兩個焦點，O為Γ的對稱中心，
而F_1'、F_2'分別為F_1、F_2相對於切線$\overleftrightarrow{P_1P_4}$的對稱點。
我們恆有如下的結果：

(1) $\Delta P_1F_2'P_4 \cong \Delta P_3F_1P_2$以及$\Delta P_1F_1'P_4 \cong \Delta P_3F_2P_2$。

(2)如果定點F是橢圓其中的一個焦點，則$\dfrac{\overline{P_1F}\times\overline{P_3F}}{\overline{P_2F}\times\overline{P_4F}} = \dfrac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}} = \dfrac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$。



(圖4)

【證明】：

先針對$F=F_1$討論。因為$\overline{P_1F_1}\times\overline{P_3F_1}=\overline{P_1F_1}\times\overline{P_1F_2'}$以及$\overline{P_4F_1}\times\overline{P_2F_1}=\overline{P_4F_1}\times\overline{P_4F_2'}$。

因為P_1、F_1、P_4、F_2'四點共圓(如圖4左)，所以$\angle F_1P_1F_2'=180^\circ-\angle F_1P_4F_2'$

進而$\sin\angle F_1P_1F_2'=\sin 180^\circ-\angle F_1P_4F_2'= \sin\angle F_1P_4F_2'$。

由三角形面積公式$\Delta F_1P_1F_2'=\frac{1}{2}\times\overline{P_1F_1}\times\overline{P_1F_2'}\times\sin\angle F_1P_1F_2'$

以及$\Delta F_1P_4F_2'=\frac{1}{2}\times\overline{P_4F_1}\times\overline{P_4F_2'}\times\sin\angle F_1P_4F_2'$，

結合前述的性質，可推得$\dfrac{\overline{P_1F_1}\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_4F_1}\times\overline{P_2F_1}}=\dfrac{\Delta F_1P_1F_2'}{\Delta F_1P_4F_2'}=\dfrac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}}$

由於O為的對稱中心，所以$\dfrac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}}=\dfrac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$進而推得$\dfrac{\overline{P_1F_1}\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_4F_1}\times\overline{P_2F_1}}=\dfrac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}}=\dfrac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$。(如圖4左)

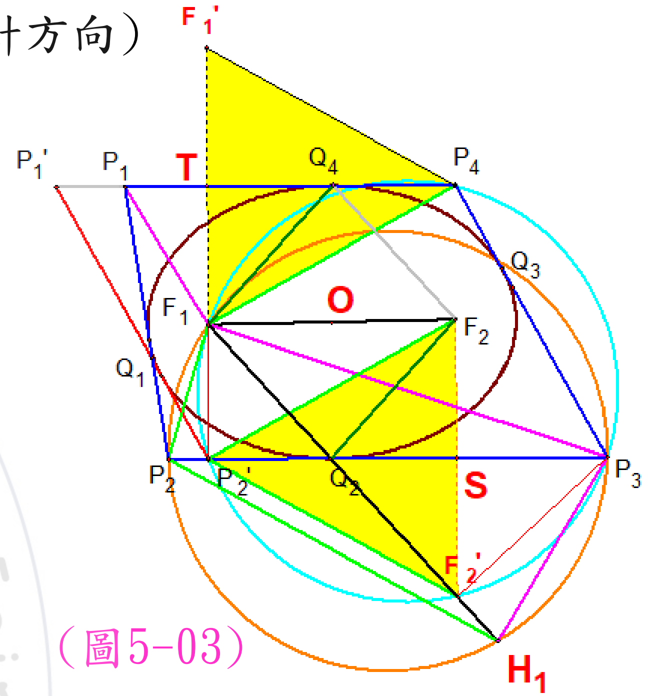
同樣地，當$F=F_2$時，仿照前述$F=F_1$的情形，利用同樣的證明手法，我們同樣可以推得$\dfrac{\overline{P_1F_2}\times\overline{P_3F_2}}{\overline{P_2F_2}\times\overline{P_4F_2}}=\dfrac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}}=\dfrac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$。(如圖4右)

也就是，對於的焦點F，恆有性質：$\dfrac{\overline{P_1F}\times\overline{P_3F}}{\overline{P_2F}\times\overline{P_4F}} = \dfrac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}} = \dfrac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$。

【引理五】：如圖5-01，已知歐氏平面上一個有一個內切橢圓Γ的梯形$P_1P_2P_3P_4$(依逆時針方向)且滿足$\overleftrightarrow{P_1P_4}$平行於$\overleftrightarrow{P_2P_3}$以及$\angle P_1P_2P_3+\angle P_2P_3P_4<180^\circ$ 。
令F_1、F_2為Γ的兩個焦點，O為Γ的對稱中心，而Γ和$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$及$\overline{P_4P_1}$分別和圓Γ相切於Q_1、Q_2、Q_3及Q_4四個點。
假設圓C_1及圓C_2分別為$\Delta F_1P_2P_3$及$\Delta F_1P_1P_4$的外接圓，
連接$\overline{F_1Q_2}$及$\overline{F_1Q_4}$分別交圓C_1及圓C_2於H_1及H_2。我們恆有如下的結果：

(1) $\Delta P_1F_1P_4 \sim \Delta P_3H_1P_2$以及$\Delta P_3F_1P_2 \sim \Delta P_1H_2P_4$。

(2)如果定點F是橢圓其中的一個焦點，則$\dfrac{\overline{P_1F}\times\overline{P_3F}}{\overline{P_2F}\times\overline{P_4F}}=\dfrac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}}=\dfrac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$。



(圖5-03)

【證明】：

(1)針對內切橢圓做一條新的切線L與 相切於Q_1'且滿足直線L與P_3P_4平行。

(2)令$\overleftrightarrow{P_1P_4}$交L於P1'，以及$\overleftrightarrow{P_2P_3}$交L於$P_2'$。再連接$\overline{P_1'P_1}$和$\overline{P_1'P_2'}$。

先針對$F=F_1$討論。令$\dfrac{\overline{P_1F_1}}{\overline{P_3H_1}}=\dfrac{\overline{P_4F_1}}{\overline{P_2H_1}}=t$

可推得

$\dfrac{\overline{P_1F_1}\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1}\times\overline{P_4F_1}}=\dfrac{(t\times\overline{P_3H_1})\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1}\times(t\times\overline{P_2H_1})}=\dfrac{\Delta H_1P_3F_1}{\Delta H_1P_2F_1}=\dfrac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$。(如圖5-03)

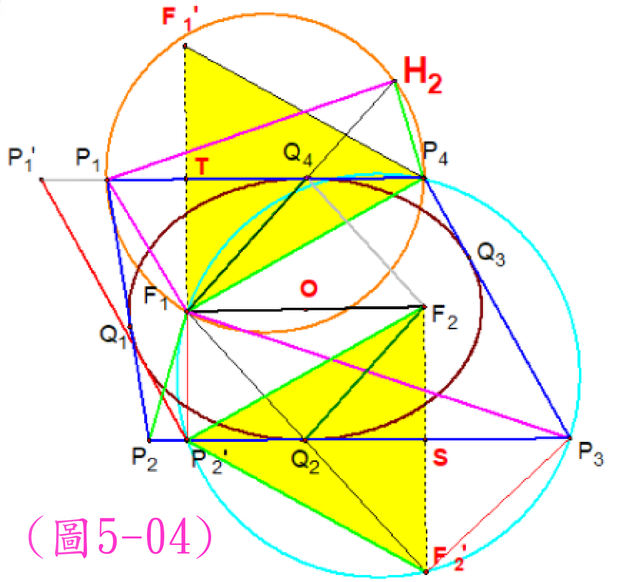
也就是，

$\dfrac{\overline{P_1F_1}\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1}\times\overline{P_4F_1}}=\dfrac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$..(&)

因為 $\Delta P_3F_1P_2\sim\Delta P_1H_2P_4$，同樣的原理，我們可推得

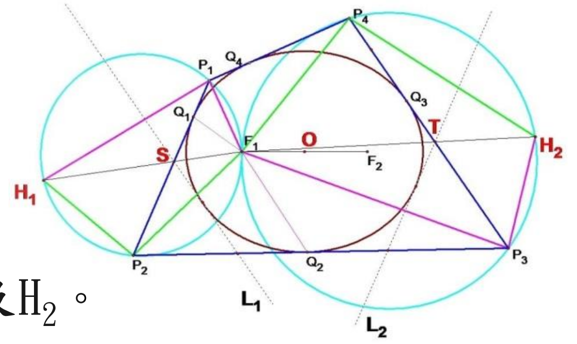
$\dfrac{\overline{P_1F_1}\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_2F_1}\times\overline{P_4F_1}}=\dfrac{\Delta H_2P_1F_1}{\Delta H_2P_4F_1}$..(&&)

結合(&)與(&&)，我們知道對於的焦點F，恆有性質：$\dfrac{\overline{P_1F}\times\overline{P_3F}}{\overline{P_2F}\times\overline{P_4F}}=\dfrac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}}=\dfrac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}$。(如圖5-04)



(圖5-04)

【引理六】：已知歐氏平面上一個有一個內切橢圓Γ的凸四邊形$P_1P_2P_3P_4$(依逆時針方向)且滿足兩組對邊均不平行以及$\angle P_1P_2P_3+\angle P_2P_3P_4<180^\circ$。
令F_1、F_2為Γ的兩個焦點，O為Γ的對稱中心，而Γ和$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$及$\overline{P_4P_1}$分別和Γ相切於Q_1、Q_2、Q_3及Q_4四個點。針對內切橢圓Γ做兩條新的切線L_1以及L_2使得L_1平行於$\overleftrightarrow{P_3P_4}$而$L_2$平行於$\overleftrightarrow{P_1P_2}$，其中$L_1$交$P_1P_2$於S點，而$L_2$交$\overline{P_1P_2}$於T點。
假設圓C_1及圓C_2分別為$\Delta F_1P_1P_2$及$\Delta F_1P_3P_4$的外接圓，連接$\overline{F_1S}$及$\overline{F_1T}$分別交圓C_1及圓C_2於H_1及H_2。
我們恆有如下的結果：
(1) $\Delta P_3F_1P_4 \sim \Delta P_1H_1P_2$以及 $\Delta P_1F_1P_2 \sim \Delta P_3H_2P_4$。



(圖6-01)

(2) 如果定點F是橢圓其中的一個焦點，則$\dfrac{\overline{P_1F}\times\overline{P_3F}}{\overline{P_2F}\times\overline{P_4F}} = \dfrac{\overline{P_1S}}{\overline{P_2S}} = \dfrac{\overline{P_3T}}{\overline{P_4T}}$(如圖6-01)。

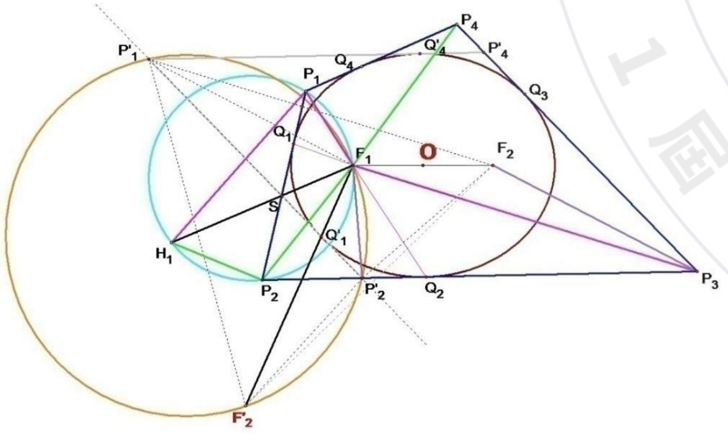
【證明】：我們將圖形依$\angle P_1'F_1P_2$與$\angle P_1'F_1F_2'=\angle P_1'F_1Q_1'$的大小關係分成下面三種Case討論：

Case I. $\angle P_1'F_1Q_1' =\angle P_1'F_1F_2' >\angle P_1'F_1P_2$ (如圖6-04)

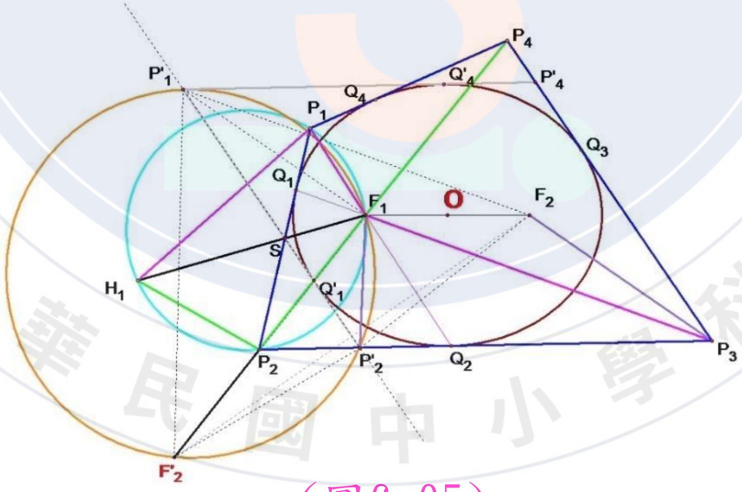
Case II. $\angle P_1'F_1Q_1' =\angle P_1'F_1F_2' =\angle P_1'F_1P_2$ (如圖6-05)

Case III. $\angle P_1'F_1Q_1' =\angle P_1'F_1F_2' <\angle P_1'F_1P_2$ (如圖6-06)

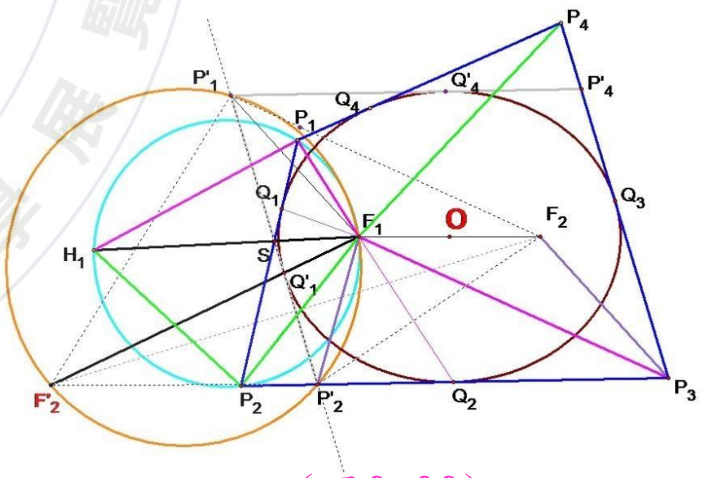
對於的焦點F，恆有性質：
$\dfrac{\overline{P_1F}\times\overline{P_3F}}{\overline{P_2F}\times\overline{P_4F}} = \dfrac{\overline{P_1S}}{\overline{P_2S}} = \dfrac{\overline{P_3T}}{\overline{P_4T}}$。
最後，我們完成證明。



(圖6-04)



(圖6-05)



(圖6-06)

【引理七】(如圖7-01)已知歐氏平面中一個凸四邊形$P_1P_2P_3P_4$有一個內切橢圓Γ，
而$\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_4}$及$\overline{P_4P_1}$分別和Γ相切於Q_1、Q_2、Q_3及Q_4四個點，
且滿足$\frac{\overline{P_1Q_1}}{\overline{P_2Q_1}}=\frac{m_1}{m_2}$、$\frac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{P_3Q_2}}=\frac{m_2}{m_3}$、$\frac{\overline{P_2Q_2}}{\overline{P_4Q_3}}=\frac{m_3}{m_4}$、$\frac{\overline{P_4Q_4}}{\overline{P_1Q_4}}=\frac{m_4}{m_1}$，
其中m_1，m_2，m_3，m_4是四個正實數。

如果定點F是橢圓其中的一個焦點，則恆有$\frac{\overline{P_1F}\times\overline{P_3F}}{\overline{P_2F}\times\overline{P_4F}}=\frac{m_1+m_3}{m_2+m_4}$。

【證明】：不失其一般性，令$F=F_1$。我們證明的步驟依凸四邊形$P_1P_2P_3P_4$兩組對邊間的平行關係細分為「兩組對邊平行」、「恰一組對邊平行」、「兩組對邊均不平行」三種情形進行討論：

Case 1. 兩組對邊平行，也就是四邊形$P_1P_2P_3P_4$為平行四邊形。
由於圖形會對稱於橢圓的對稱中心O，故此時，$m_1=m_3$且$m_2=m_4$。
藉由【引理四】可推得

$$\frac{\overline{P_1F}\times\overline{P_3F}}{\overline{P_2F}\times\overline{P_4F}}=\frac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}}=\frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{m_1+m_1}{m_2+m_2}=\frac{m_1+m_3}{m_2+m_4}$$ 。故得證。

Case 2. 恰有一組對邊不平行，也就是四邊形$P_1P_2P_3P_4$為梯形。
藉由【引理五】我們知道

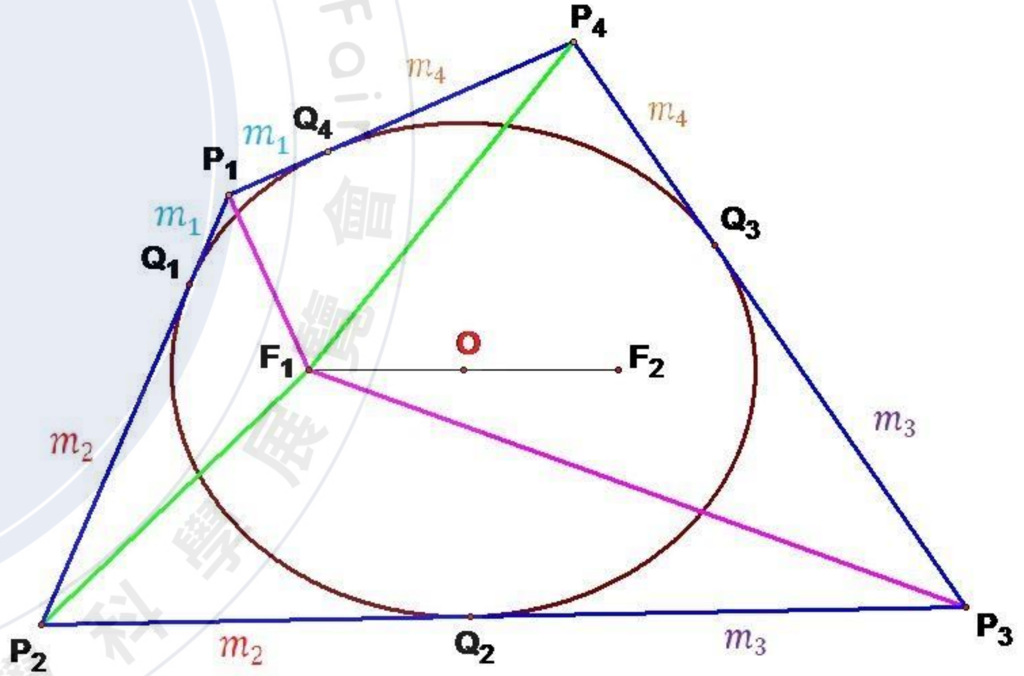
$$\frac{\overline{P_1F_1}\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_4F_1}\times\overline{P_2F_1}}=\frac{\overline{P_3Q_2}}{\overline{P_2Q_2}}=\frac{\overline{P_1Q_4}}{\overline{P_4Q_4}}\leftrightarrow\frac{m_3}{m_2}=\frac{m_1}{m_4}=\frac{m_1+m_3}{m_2+m_4}$$

最後，我們推得$\frac{\overline{P_1F_1}\times\overline{P_3F_1}}{\overline{P_4F_1}\times\overline{P_2F_1}}=\frac{m_1+m_3}{m_2+m_4}$故得證。

Case 3. 兩組對邊均不平行

藉由【引理六】我們知道

$$\frac{\overline{P_1F}\times\overline{P_3F}}{\overline{P_2F}\times\overline{P_4F}}=\frac{\overline{P_1S}}{\overline{P_2S}}=\frac{\overline{P_3T}}{\overline{P_4T}}$$ 。



(圖7-01)

主要結果

- 藉由【圓柱截痕性質】「保比例」、「保平行」以及「保相切」的特性；歐氏平面上必定存在一個有內切圓的凸四邊形$A_1A_2A_3A_4$(如圖7-02)

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_1}}=\frac{m_1}{m_2}、\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_3B_2}}=\frac{m_2}{m_3}、\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_4B_3}}=\frac{m_3}{m_4}、\frac{\overline{A_4B_4}}{\overline{A_1B_4}}=\frac{m_4}{m_1}$$

$$\frac{\overline{A_1S'}}{\overline{A_2S'}}=\frac{\overline{A_3T'}}{\overline{A_4T'}}\text{以及 }\overline{B_1S'}=\overline{B_3T'}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

我們可以假設

$\overline{A_1S'}=m_1+\alpha t$、$\overline{A_2S'}=m_2-\alpha t$、$\overline{A_3T'}=m_3-\alpha t$ 以及$\overline{A_4T'}=m_4+\alpha t$

$$\because \frac{\overline{A_1S'}}{\overline{A_2S'}}=\frac{(m_1+\alpha)t}{(m_2-\alpha)t}=\frac{(m_3-\alpha)t}{(m_4+\alpha)t}=\frac{\overline{A_3T'}}{\overline{A_4T'}}\Leftrightarrow\alpha=\frac{(m_2\times m_3-m_1\times m_4)}{(m_1+m_2+m_3+m_4)}$$

$$\frac{(m_1+\alpha)}{(m_2-\alpha)}=\frac{(m_1+m_3)}{(m_2+m_4)}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)、(2)可知$\frac{\overline{A_1S'}}{\overline{A_2S'}}=\frac{(m_1+m_3)}{(m_2+m_4)}$。

因此，藉由「保比例」的特性，我們知道原來有內切橢圓的凸四邊形必定也滿足

$$\frac{\overline{P_1F}\times\overline{P_3F}}{\overline{P_2F}\times\overline{P_4F}}=\frac{\overline{P_1S}}{\overline{P_2S}}=\frac{\overline{P_3T}}{\overline{P_4T}}=\frac{\overline{A_1S'}}{\overline{A_2S'}}=\frac{(m_1+m_3)}{(m_2+m_4)}$$ 故得證。

- 兩焦點f_1，f_2(可重合)恰為方程式 $(m_1+m_3)(z-z_2)(z-z_4)+(m_2+m_4)(z-z_1)(z-z_3)=0$的兩個根。

【證明】：假設f_1，f_2是內切橢圓的兩個焦點。

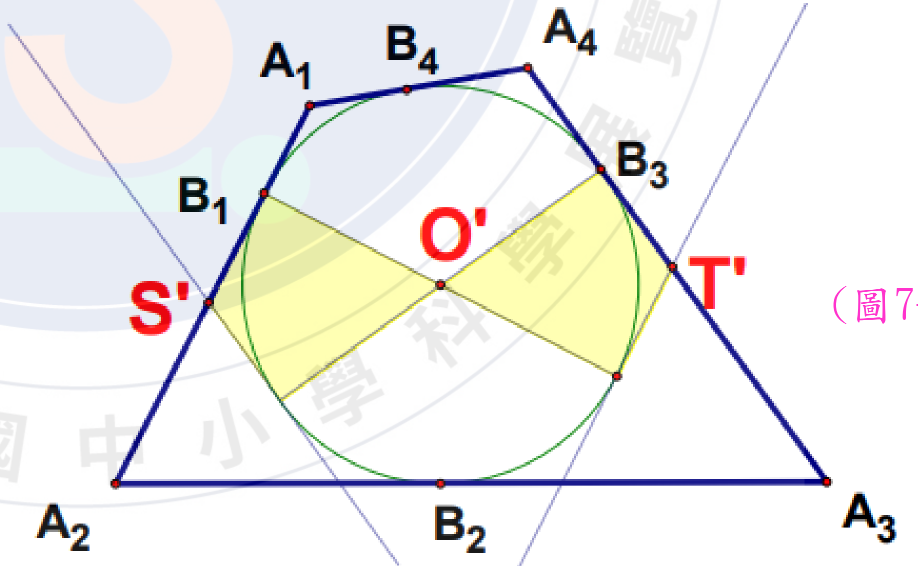
結合【複數性質2】、【引理一】的(2) 以及【引理七】，我們立即可推得必存在正實數

$$r=\frac{|z_1-f_1|}{|z_2-f_1|}\times\frac{|z_3-f_1|}{|z_4-f_1|}=\frac{|z_1-f_2|}{|z_2-f_2|}\times\frac{|z_3-f_2|}{|z_4-f_2|}=\frac{(m_1+m_3)}{(m_2+m_4)}>0$$，使得

$$\frac{(f_1-z_1)(f_1-z_3)}{(f_1-z_2)(f_1-z_4)}=-r=-\frac{(m_1+m_3)}{(m_2+m_4)}\cdots\cdots\cdots\cdots(\times)$$

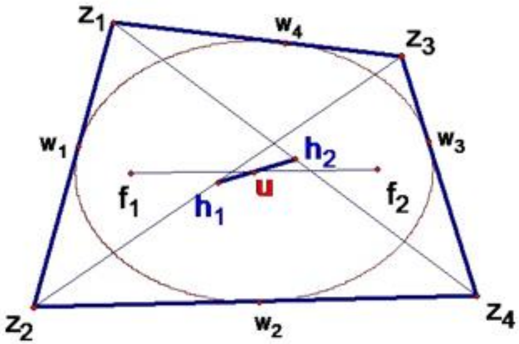
$$\frac{(f_2-z_1)(f_2-z_3)}{(f_2-z_2)(f_2-z_4)}=-r=-\frac{(m_1+m_3)}{(m_2+m_4)}\cdots\cdots\cdots\cdots(\times\times)$$

由(×)及(××)，相當於f_1，f_2是二次方程式 $\frac{(z-z_1)(z-z_3)}{(z-z_2)(z-z_4)}=-\frac{(m_1+m_3)}{(m_2+m_4)}$的根，也就是說$f_1$，$f_2$是二次方程式 $(m_1+m_3)(z-z_2)(z-z_4)+(m_2+m_4)(z-z_1)(z-z_3)=0$的兩個根，故得證。



(圖7-02)

應用



歐氏平面平面上一個不為菱形且存在內切圓的凸四邊形，
其內切圓圓心必定落在該凸四邊形之Newton線(兩對角線中點之連線)上。
利用投影幾何中圓柱截痕的原理可推廣成「Newton橢圓問題」：【Newton橢圓問題】
我們證明：內切橢圓的對稱中心必定是以凸四邊形之兩對角線中點為兩端點之連線段的內分點。

【證明】：令z_1, z_2, z_3, z_4是凸四邊形的四個頂點(依逆時針方向，且任三點不共線)。假設凸四邊形存在一個內切橢圓和$\overline{z_1z_2}$、$\overline{z_2z_3}$、$\overline{z_3z_4}$、$\overline{z_4z_1}$分別相切於w_1, w_2, w_3, w_4四點，

滿足$\frac{|z_1-w_1|}{|z_2-w_1|}=\frac{m_1}{m_2}$、$\frac{|z_2-w_2|}{|z_3-w_2|}=\frac{m_2}{m_3}$、$\frac{|z_3-w_3|}{|z_4-w_3|}=\frac{m_3}{m_4}$及$\frac{|z_4-w_4|}{|z_1-w_4|}=\frac{m_4}{m_1}$

，其中m_1，m_2，m_3，m_4是四個正實數，而f_1，f_2為的兩焦點。

藉由「根與係數」的原理，我們可推得內切橢圓的中心為$\frac{f_1+f_2}{2}=\frac{(m_1+m_3)(z_2+z_4)+(m_2+m_4)(z_1+z_3)]}{2}\times(m_1+m_2+m_3+m_4)$

$$=\frac{\frac{(m_1+m_3)}{(m_1+m_2+m_3+m_4)}(z_2+z_4)}{2}+\frac{\frac{(m_2+m_4)}{(m_1+m_2+m_3+m_4)}(z_1+z_3)}{2}\cdots\cdots(☆)$$

由於$\frac{z_1+z_3}{2}$與$\frac{z_2+z_4}{2}$分別為凸四邊形兩對角線中點，假設凸四邊形不是平行四邊形，所以$\frac{z_1+z_3}{2}\neq\frac{z_2+z_4}{2}$。

我們令$m_1+m_3=a>0$及$m_2+m_4=b>0$， 令$h_1=\frac{z_1+z_3}{2}$、$h_2=\frac{z_2+z_4}{2}$及$u=\frac{f_1+f_2}{2}$，進而(☆)可以重新寫成

$$u=\frac{b}{(a+b)}\times h_1+\frac{a}{(a+b)}\times h_2,\ a>0,\ b>0\cdots\cdots(☆☆)$$

我們知道，(☆☆)意味著：的對稱中心u恰好落在以凸四邊形兩對角線中點h_1及h_2為兩端點的連h_1h_2的內分點，

而且對照【引理三】及【定理一】的結果，可知

$\frac{|h_1-u|}{|h_2-u|}=\frac{m_1+m_3}{m_2+m_4}=\frac{|f_1-z_1|\times|f_1-z_3|}{|f_1-z_2|\times|f_1-z_4|}=\frac{|f_2-z_1|\times|f_2-z_3|}{|f_2-z_2|\times|f_2-z_4|}$。也就是，$h_1u$ ： $h_2u=m_1+m_3$ ： m_2+m_4故得證。

參考資料

1.橢圓中的那幾個神奇的定理- 每日頭條　https://kknews.cc/zh-tw/news/4qq2n8v.html

2.複數法在中學數學中的應用- 葉文傑　https://web.math.sinica.edu.tw/math_media/d372/37208.pdf

3.複數的幾何意涵- 林信安

http://math1.ck.tp.edu.tw/%E6%9E%97%E4%BF%A1%E5%AE%89/%E5%AD%B8%E8%A1%93%E7%A0%94%E7%A9%B6/%E7%A7%91%E5%AD%B8%E7%8F%AD/%E8%AA%B2%E7%A8%8B%E8%AC%9B%E7%BE%A9/%E7%AC%AC44%E5%96%AE%E5%85%83%E8%A4%87%E6%95%B8%E7%9A%84%E5%B9%BE%E4%BD%95%E6%84%8F%E6%B6%B5.pd.

4.牛頓定理- 維基百科，自由的百科全書 - Wikipedia

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%89%9B%E9%A1%BF%E5%AE%9A%E7%90%86

5.圓柱截痕 - GeoGebra　https://www.geogebra.org/m/wxRaRpYY

6.Dan Kalman, (2008), "An Elementary Proof of Marden's Theorem", The American Mathematical Monthly, 115: 330 – 338, ISSN0002-9890.

7.Marden 's theorem - Wikipedia　https://en.wikipedia.org/wiki/Marden%27s_theorem

8.Marden, Morris (1945), "A note on the zeroes of the sections of a partial fraction", Bulletin of the American Mathematical Society, 51 (12): 935 – 940,

DOI: S0002-9904-1945-08470-5.

9.JörgSiebeck, (1864), "Über eine neue analytische Behandlungweise der Brennpunkte", Journal für die reine und angewandte Mathematik, 64: 175 – 182, ISSN0075-4102.

10.AlexandruTupan, (2020), "A Simple Proof of the Siebeck – Marden Theorem", The American Mathematical Monthly, 127:8, 734-736, DOI:10.1080/00029890.2020.1785256.