

# 中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

## 作品說明書

---

國小組 生活與應用科學(一)科

### 團隊合作獎

082805

「天」「機」雲錦-天際輪廓臺北 101 讓手機來  
測測你的身高

學校名稱：新北市五股區德音國民小學

作者： 小六 李中桓 小六 羅卉妤 小六 李冠霆 小六 陳 涓	指導老師： 林慶哲
---	--------------

關鍵詞：臺北 101、測量高度、三角函數

## 摘 要

本研究透過收集資訊的能力，藉由網路資源、手機 APP 功能，期許達成測量物體高度誤差小於 1% 的目標。最後找出能以最小誤差來測量臺北 101 大樓的方法。

最初先嘗試不同測量物體高度的方法，討論過程中發現隨著不同角度，物體距離與高度存在規律的倍數關係，利用網路搜尋發現這就是三角函數的基礎概念，最後選定以此方式來測量臺北 101 高度。

研究發現，以簡易手機自拍三腳架、手機角度 APP，在臺北 101 大樓仰角  $45^\circ$  的周邊地點中，以臺北市府廣場測量臺北 101 大樓高度是最適當的地點，平均誤差在 1% 以下 (0.356%)，最低測量誤差甚至達 0.007% (誤差 3cm)。

## 研究動機

每回升旗仰望國旗冉冉爬上旗桿時，總好奇想著國旗旗桿到底有多高？問老師或旗手同學，也都沒有答案。轉眼間我們都要畢業了，於是下定決心要在畢業前，解答這陪伴著我們無數重要時刻旗桿的高度之謎。

但在不爬上去又不放倒旗桿的情況下要測量出它的高度，實在得花點腦筋，若能找到測量高度的好方法，就能進一步嘗試來測量臺灣最高大樓—臺北 101。高聳入雲的臺北 101 連經過都要捧著脖子才能看到最高點，如果能夠站在地面就測出它的高度，那有多酷呢！畢竟在沒有專業測量工具下，我們能運用的只有簡易的測量工具。

於是最終以測量臺北 101 大樓高度為最後目標，透過實驗過程找出適合小朋友的測量方法。

## 壹、 研究目的

- 一、 找出適合測量高度的方法
- 二、 不同觀測高度角，物體高度與距離的倍數關係
- 三、 找出準確測量教室掛物高度的方法
- 四、 找出準確測量國旗旗桿高度的方法
- 五、 找出準確測量臺北 101 高度的方法

## 貳、 研究設備及器材

編號	名稱	數量
1	電腦	5 台
2	印表機	1 台
3	手機	5 台
4	自拍三腳架	5 支
5	小鐵環	5 個
6	棉線	5 條
7	橡皮擦	5 塊
8	直尺	5 條
9	大皮尺捲 50m	1 個
10	三角板	5 個
11	量角器	5 個

## 參、文獻探討

### 一、高度及距離測量方法

在「月來越好玩」中以硬幣測量法，利用水管及硬幣自製觀測器，找出硬幣與月球、管長與月距的比例，求出月球距離平均誤差在 2.0%（陳金善，2012 年）。

在「測量因你而容易，數學因此而有趣」中利用三角形邊長比例關係，配合自製量角器加雷射筆，測量 18.3m 的行政大樓的結果為 18.4m，誤差 0.54%（許美慧，2005 年）。

由以上的研究發現，要測量物體高度及距離，使用自製觀測器或是加裝雷射筆，可減少觀測誤差，並且可使用直角三角形邊長比例關係，來求得物體高度。本研究也是利用三角函數來求距離與高度比例。但本研究想要用更簡易的方式，儘量不自製觀測器或使用雷射筆，就能準確測量高度。

### 二、網路資源及手機 APP 測量

人手一機的時代，每個人隨時隨地都能利用手機上網找尋各種資料，並使用 APP 解決問題。

在「食在小心，開發 APP 以進行飲食健康管理之研究」裡，透過手機 APP 掃瞄食物的成份與熱量，能夠有效控管使用者一日所需熱量並警示（呂威德、林士弘，2015 年）。

在「手機感測器之動作辨識與低頭族應用」研究中，以手機的加速度感測器與陀螺儀功能，開發出的 APP 能辨識使用者邊走邊使用手機時，適時跳出安全警示（徐毅、劉完利，2014 年）。

在「智慧型遠端插座用電監控系統」，利用手機 APP 遠端遙控家中電器開關，達到監控電器設備及節省電源的功能（張文憲、陳思亮，2013 年）。

另在「危機自陷—臺灣高鐵差異沉陷的新測量方法」中，使用電腦 QCNL 軟體搭配電腦加速度感測器，來測量高鐵橋墩沉陷情形（蕭崇毅、莊貴冠，2011 年）。

由以上研究可知，以現有電腦或手機功能可以解決許多不同領域的問題。本研究想透過手機 GPS 定位、手機陀螺儀感測器，以達到測量物體高度的可行性。

### 三、臺北 101 高度

台北 101（Taipei 101）是位於臺灣臺北市信義區的摩天大樓，樓高 508 公尺，地上樓層共有 101 層，於 1999 年 9 月動工，2004 年 12 月 31 日完工開幕。最初名稱為臺北國際金融中心，2003 年改為現名（維基百科）。

在 Google 搜尋「台北 101 高度」，首頁顯示 508 公尺。在維基百科台北 101條目中第一行也指出樓高 508 公尺。

進一步找尋資料發現，根據美國權威建築機構世界高層建築與都市人居學會（CTBUH）定義的標準，地基的高度也應該算入建築的總高，因此台北 101最終認定為 509.2 公尺。

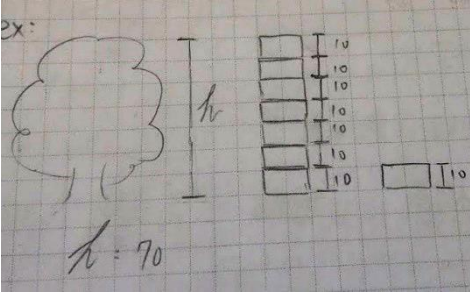
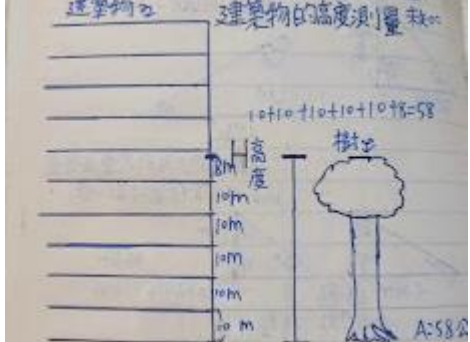
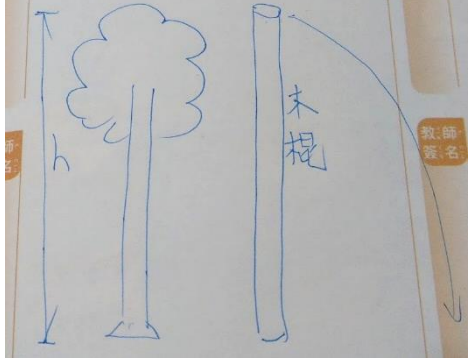
透過得知台北 101大樓實際高度，使用本研究的測量高度方法，可得知最終誤差結果是否符合預期。

## 肆、 研究過程與結果

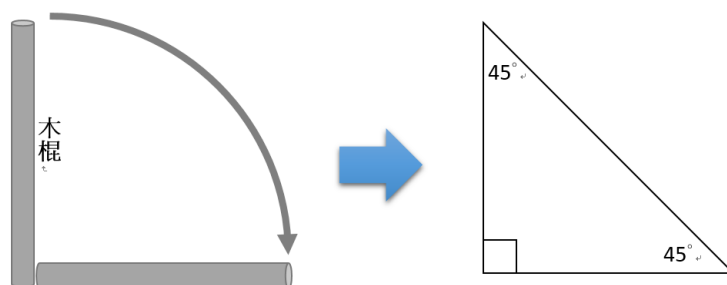
### 一、 【研究一】 找出適合測量高度的方法

#### 【實驗一之 1】 不同測量方法的可行性及優缺點

先進行自由腦力激盪，自行設想測量樹木高度的方法，再一起討論這些方法的可行性，並分析其優缺點。

<p>同學 A</p>	<p>如果要求樹高，可先找木箱，然後層層堆疊，最後計算木箱數量x木箱高度，即可求樹高。</p> <p>優缺點：將箱子疊高容易倒下很危險。若測量物體太高，要找到很多相同箱子有難度。</p> <p>可行性：不太可行。</p>	
<p>同學 B</p>	<p>如果要求樹高，可比對樹旁的建築物，測出樹有幾層樓高，然後測量單層樓高度即可求得樹高。</p> <p>優缺點：需先求出單層樓高才能進一步求樹高，但由於無法測量樓高，因此問題還是無法解決。另外若樹木附近沒有建築物，此方法就不可行。</p> <p>可行性：不可行，無法測出單層樓高度。</p>	
<p>同學 C</p>	<p>如果要求樹高，可找到差不多長度的木棍，立起來比對，然後放倒測量木棍長度即為樹高。</p> <p>優缺點：很難找到跟樹高一樣長度的木棍，要垂直立起也是一大挑戰。若放倒打到人可能受傷。</p> <p>可行性：不可行。</p>	

雖然我們各自想出的方法都不太可行，但討論過程中發現同學 C 的木棍法，其實可以聯想到等腰直角三角形的原理，於是想利用直角三角形邊長比的特性，看是否能夠找出適合測量高度的方法。

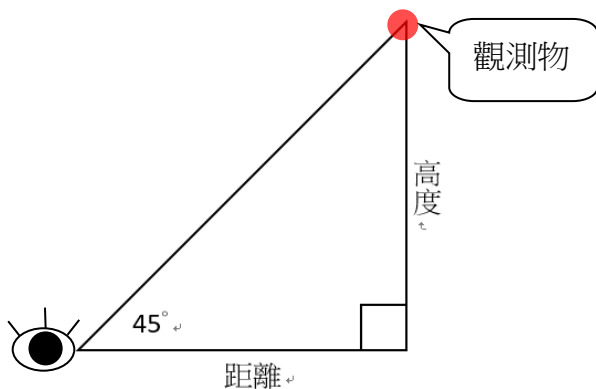


## 【實驗一之 2】特殊直角三角形的邊長比例關係

我們準備  $45^\circ-45^\circ-90^\circ$  及  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$  這兩種常用文具三角板，要探討其邊長的比例關係。

**45°-45°-90° 三角形：**

此三角形兩邊邊長相等，因此當觀測物高度角為  $45^\circ$  時，觀測物高度：距離 = 1 : 1



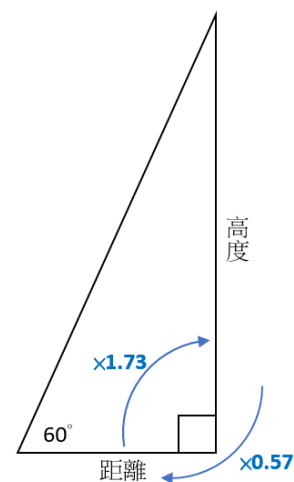
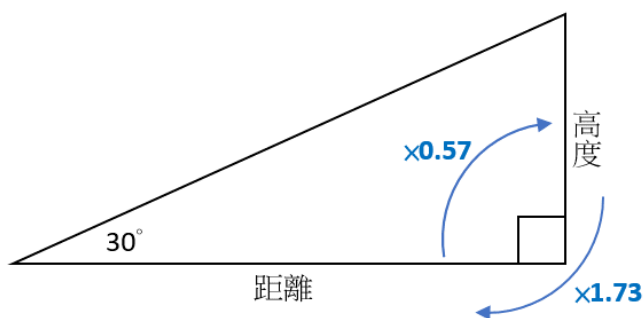
**30°-60°-90° 三角形：**

另一種三角板為  $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ，我們手繪畫出此三角形後，將兩邊長相除，求得倍數關係，得知觀測角  $30^\circ$  時，距離：高度 = 1 : 0.57

(若觀測角  $30^\circ$  且距離 10 公尺，則高度 =  $10 \times 0.57 = 5.7$  公尺。)

反之，觀測角  $30^\circ$  時，高度：距離 = 1 : 1.73

(若觀測角  $30^\circ$  時在已知高度 10 公尺狀況下，可求得距離 =  $10 \times 1.73 = 17.3$  公尺。)



另外，當觀測角  $60^\circ$  時，高度與距離的倍數關係與  $30^\circ$  相反：

## 二、【研究二】不同觀測高度角，物體高度與距離的倍數關係

由前述實驗得知，我們可以利用  $45^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $60^\circ$  這三個特殊觀測角，來求物體高度。那其他角度是否也具有倍數規律性呢？

**【實驗二之 1】手繪找出直角三角形不同角度，兩邊長倍數關係**

由於要手繪出不同角度的三角形，並量出邊長後相除求得倍數關係，資料量過龐大。因此我們以間隔  $5^\circ$ ，量出介於  $0^\circ \sim 90^\circ$  間的邊長倍數關係。

度	樹高	距離	高÷距	距÷高
0°	0	10	0	∞
5°	0.87	10	0.087	11.4942529
10°	1.7	10	0.17	5.88235294
15°	2.7	10	0.27	3.7037037
20°	3.6	10	0.36	2.77777778
25°	4.7	10	0.47	2.12765957
30°	5.8	10	0.58	1.72413793
35°	7.1	10	0.71	1.4084507
40°	8.5	10	0.85	1.17647059
45°	10	10	1	1
50°	11.5	10	1.15	0.86956522
55°	13.2	10	1.32	0.75757576
60°	15	10	1.5	0.66666667
65°	16.4	10	1.64	0.61
70°	18.3	10	1.83	0.54644809
75°	20.7	10	2.07	0.48313527
80°	23.6	10	2.36	0.42372881
85°	27.1	10	2.71	0.36900369
90°	∞	10	∞	0

度	樹高	距離	高÷距	距÷高
0°	0	10	0	∞
5°	0.87	10	0.087	11.4942529
10°	1.7	10	0.17	5.88235294
15°	2.7	10	0.27	3.7037037
20°	3.6	10	0.36	2.77777778
25°	4.7	10	0.47	2.12765957
30°	5.8	10	0.58	1.72413793
35°	7.1	10	0.71	1.4084507
40°	8.5	10	0.85	1.17647059
45°	10	10	1	1
50°	11.5	10	1.15	0.86956522
55°	13.2	10	1.32	0.75757576
60°	15	10	1.5	0.66666667
65°	16.4	10	1.64	0.61
70°	18.3	10	1.83	0.54644809
75°	20.7	10	2.07	0.48313527
80°	23.6	10	2.36	0.42372881
85°	27.1	10	2.71	0.36900369
90°	∞	10	∞	0

度	樹高	距離	高÷距	距÷高
0°	0	10	0	∞
5°	0.87	10	0.087	11.49
10°	1.7	10	0.17	5.88
15°	2.7	10	0.27	3.7
20°	3.6	10	0.36	2.78
25°	4.7	10	0.47	2.14
30°	5.8	10	0.58	1.68
35°	7.1	10	0.71	1.36
40°	8.5	10	0.85	1.19
45°	10	10	1	1
50°	11.5	10	1.15	0.87
55°	13.2	10	1.32	0.77
60°	15	10	1.5	0.67
65°	16.4	10	1.64	0.62
70°	18.3	10	1.83	0.55
75°	20.7	10	2.07	0.49
80°	23.6	10	2.36	0.43
85°	27.1	10	2.71	0.37
90°	∞	10	∞	0

我們經過測量邊長倍數關係之後，發現只要在**固定角度下**，**直角三角形兩邊邊長的比例大致呈現差不多的倍數關係**。

### 【實驗二之 2】使用軟體 Excel 算出直角三角形不同角度，兩邊長倍數關係

因為手繪直角三角形存在誤差，因此想利用 Excel 軟體來求出精準的倍數。上網查詢得知可使用 Excel 的三角函數 TAN()及 RADIIOUS()函數。在得知函數功能後，以 Excel 製作出直角三角形兩邊邊長的倍數對照表（三角函數表）。

※為求後續測量精準度，本表格精準度算至 0.1°，但由於資料量龐大只列出間隔 1°表格。

度	tan 高度÷距離	cot 距離÷高度	度
0	0	-----	90
1	0.0175	57.29	89
2	0.0349	28.6363	88
3	0.0524	19.0811	87
4	0.0699	14.3007	86
5	0.0875	11.4301	85
6	0.1051	9.5144	84
7	0.1228	8.1443	83
8	0.1405	7.1154	82
9	0.1584	6.3138	81
10	0.1763	5.6713	80
11	0.1944	5.1446	79
12	0.2126	4.7046	78
13	0.2309	4.3315	77
14	0.2493	4.0108	76
15	0.2679	3.7321	75
16	0.2867	3.4874	74

度	tan 高度÷距離	cot 距離÷高度	度
23	0.4245	2.3559	67
24	0.4452	2.246	66
25	0.4663	2.1445	65
26	0.4877	2.0503	64
27	0.5095	1.9626	63
28	0.5317	1.8807	62
29	0.5543	1.804	61
30	0.5774	1.7321	60
31	0.6009	1.6643	59
32	0.6249	1.6003	58
33	0.6494	1.5399	57
34	0.6745	1.4826	56
35	0.7002	1.4281	55
36	0.7265	1.3764	54
37	0.7536	1.327	53
38	0.7813	1.2799	52
39	0.8098	1.2349	51

17	0.3057	3.2709	73
18	0.3249	3.0777	72
19	0.3443	2.9042	71
20	0.364	2.7475	70
21	0.3839	2.6051	69
22	0.404	2.4751	68
度	cot 距離÷高度	tan 高度÷距離	度

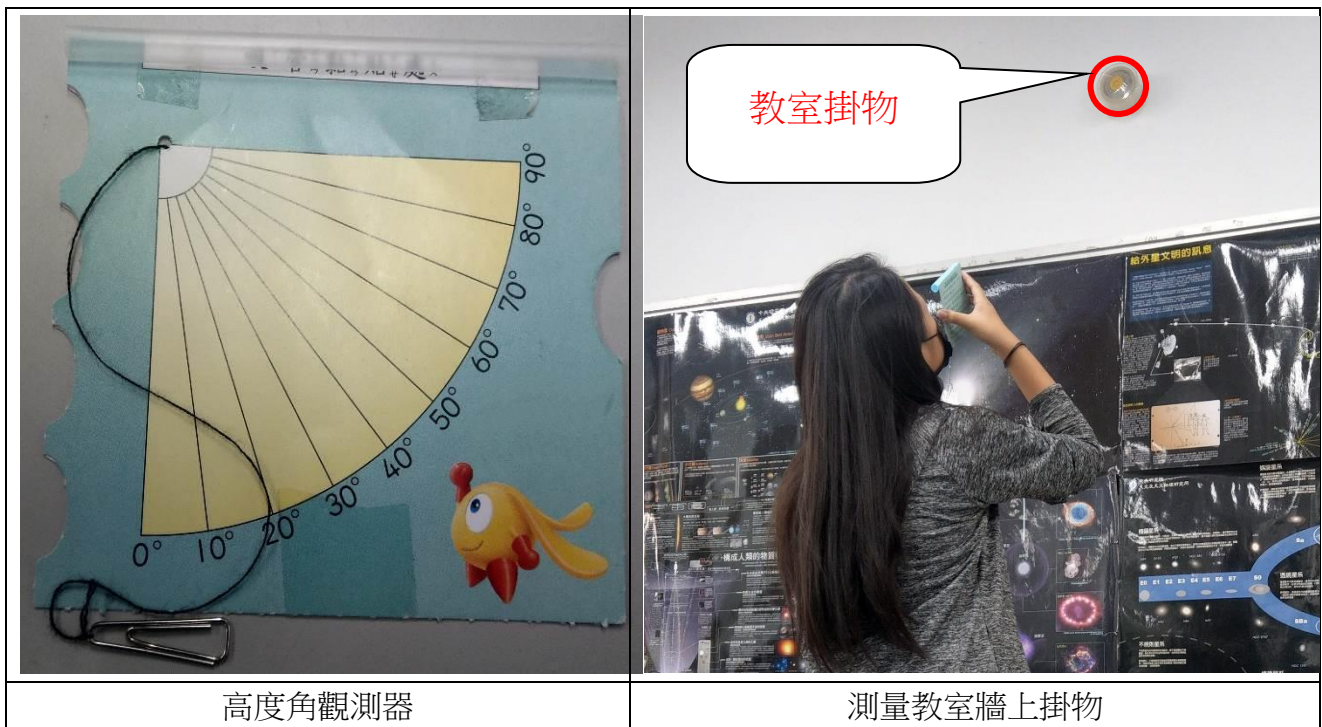
40	0.8391	1.1918	50
41	0.8693	1.1504	49
42	0.9004	1.1106	48
43	0.9325	1.0724	47
44	0.9657	1.0355	46
45	1	1	45
度	cot 距離÷高度	tan 高度÷距離	度

表 2-1.直角三角形兩邊邊長倍數對照表（三角函數表）

### 三、【研究三】找出準確測量教室牆上掛物高度的方法

#### 【實驗三之 1】手持高度角觀測器，測量教室牆上掛物高度

首先利用四年級自然課製作的高度角觀測器，觀測器每個角度間隔  $10^\circ$ ，用它來觀測教室牆上掛物。



高度角觀測器

測量教室牆上掛物

此掛物實際高度為 250.0cm，我們在距離掛物 100cm 處測量高度角，並配合三角函數表找出對應的邊長倍數，測量示意圖如下：

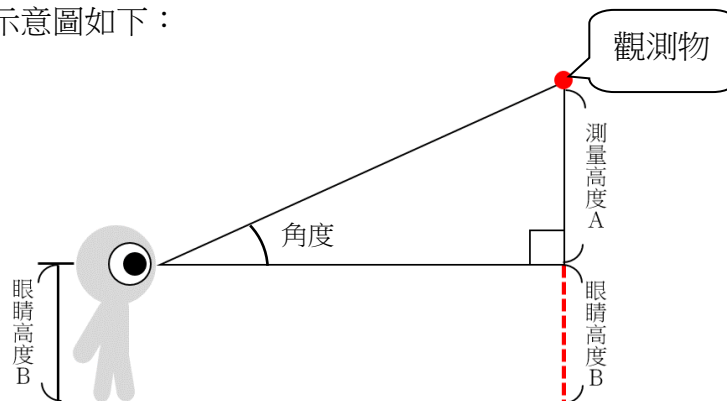


圖 3-1.手持角度觀測器測量高度示意圖



最後測量結果如下表：

※測量高度=TAN(角度)\*距離

角度	距離	測量高度(A)	眼睛高度(B)	總測量高度(A+B)	實際高度	誤差
40	100	83.9	154.2	238.1	250	4.756%
36	100	72.7	154.2	226.9	250	9.258%
40	100	83.9	154.2	238.1	250	4.756%
40	100	83.9	148	231.9	250	7.236%
40	100	83.9	148	231.9	250	7.236%
40	100	83.9	148	231.9	250	7.236%
45	100	100.0	148	248.0	250	0.800%
46	100	103.6	148	251.6	250	0.621%
43	100	93.3	148	241.3	250	3.499%
平均						5.044%

表 3-1. 手持高度角觀測器，測量教室牆上掛物高度結果

由實驗三之 1 可得知，以手持高度角觀測器測量誤差達 5.044%，一方面是手持不穩，另一方面是高度角觀測器精準度只有 10°。

### 【實驗三之 2】手持手機使用 APP，測量教室牆上掛物高度

由於高度角觀測器間隔刻度 10°，誤差太大，因此我們用手機找尋測量高度角相關 APP，最後找到一款可測實景物體高度角的 APP，且角度間隔 0.1°，可以更精準測量。



圖 2.高度角 APP

測量結果如下表：

角度	距離	測量高度(A)	眼睛高度(B)	總測量高度(A+B)	實際高度	誤差
40	100	83.910	154.2	238.110	250	4.76%
40.4	100	85.107	154.2	239.307	250	4.28%
40.6	100	85.710	154.2	239.910	250	4.04%

42.7	100	92.277	148	240.277	250	3.89%
42.5	100	91.633	148	239.633	250	4.15%
42.6	100	91.955	148	239.955	250	4.02%
38	100	78.129	148	226.129	250	9.55%
36.5	100	73.996	148	221.996	250	11.20%
37.3	100	76.180	148	224.180	250	10.33%
平均						<b>6.245%</b>

表 3-2. 手持手機使用 APP，測量教室牆上掛物高度結果

由實驗三之 2 可得知，以手持手機使用 APP 測量誤差達 6.245%，雖然角度精準度由間隔 10° 提高至 0.1°，但測量誤差並沒有提高。可見用手持不穩定還是造成觀測誤差最大的關鍵。

### 【實驗三之 3】三腳架及手機 APP，測量教室牆上掛物高度

為了改良手持手機造成的不穩定，於是改用簡易自拍三腳架來測量，上網找到最簡易型的三腳架（約 55 元）來做測量。



改良後的測量高度示意圖如下：

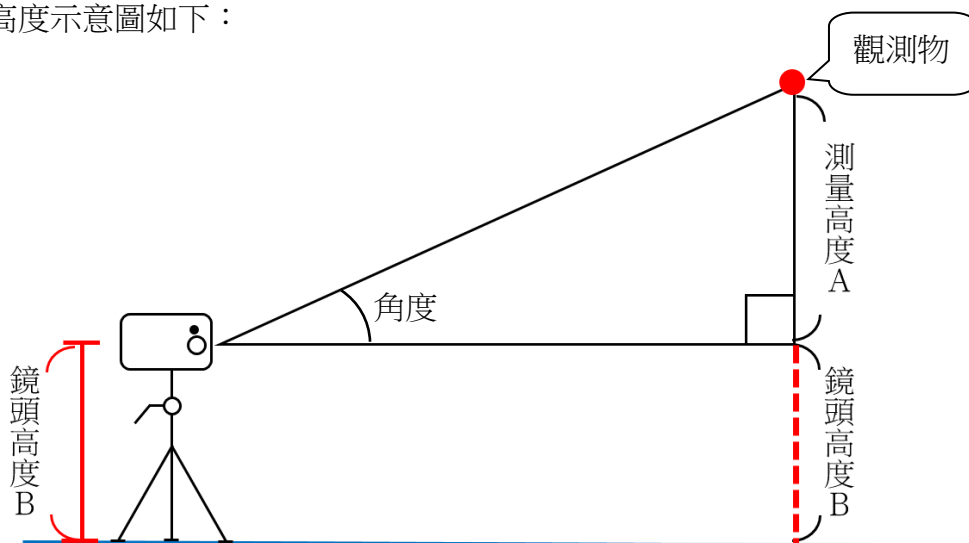


圖 3-3. 以三腳架測量高度示意圖

測量結果如下表：

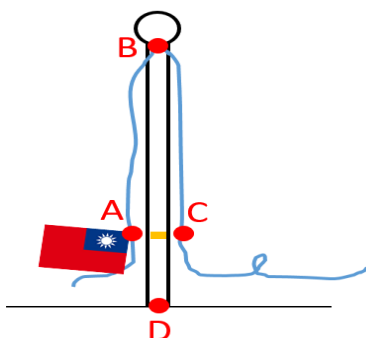



角度	距離	測量高度(A)	鏡頭高度(B)	總測量高度(A+B)	實際高度	誤差
59.7	100	171.1	71.4	242.5	250	2.988%
59.8	100	171.8	71.4	243.2	250	2.713%
60.2	100	174.6	71.4	246.0	250	1.596%
59.3	100	168.4	71	239.4	250	4.232%
59.4	100	169.1	71	240.1	250	3.964%
59.3	100	168.4	71	239.4	250	4.232%
62.8	100	194.6	68.5	263.1	250	5.232%
60.6	100	177.5	68.5	246.0	250	1.611%
59.3	100	168.4	68.5	236.9	250	5.232%
61.1	100	181.1	69.4	250.5	250	0.220%
61.3	100	182.7	69.4	252.1	250	0.821%
61.3	100	182.7	69.4	252.1	250	0.821%
平均						2.805%

表 3-3. 手持手機使用 APP，測量教室牆上掛物高度結果

由實驗三之 3 可得知，當以三腳架代替手持測量時，誤差為 2.805%，大大提升了觀測的精準度。

#### 四、【研究四】找出準確測量國旗旗桿高度的方法

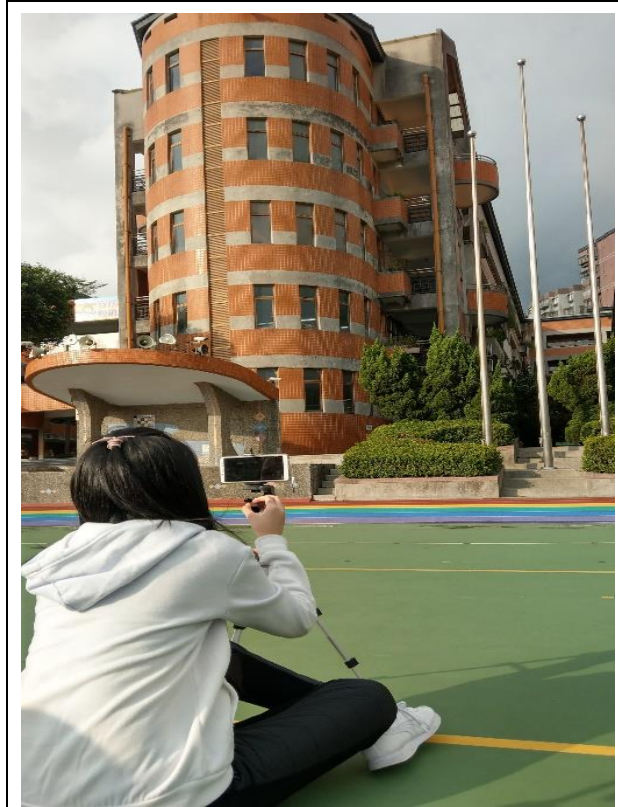
在測量旗桿之前，我們要先量出正確國旗旗桿高度，於是請升旗旗手來幫忙拉旗繩，藉由繩子的長度來算出旗桿實際的高度。

	
<p>(1)旗桿高度= <math>BD = BC + CD</math></p>	<p>(2)將旗繩拉直，標出記號</p>
	
<p>(3)依序標記 A, B, C, D 四點</p>	<p>(4)測量出各段長度</p>

結果：最後計算出旗桿實際高度為 1244.2cm (12m44.2cm)

### 【實驗四之 1】三腳架及手機 APP，測量國旗旗桿高度

由於在實驗三之 3 使用三腳架配合手機高度角 APP，可量到更精準的高度，因此先使用此方法來測量國旗旗桿高度，再做後續調整。



測量國旗旗桿高度

測量結果如下表：

角度	距離	測量高度(A)	鏡頭高度(B)	總測量高度(A+B)	實際高度	誤差
41	1400	1217.0	71.4	1288.4	1244.2	3.553%
41	1400	1217.0	71.4	1288.4	1244.2	3.553%
40.8	1400	1208.4	71.4	1279.8	1244.2	2.865%
40.7	1400	1204.2	71.4	1275.6	1244.2	2.523%
40.6	1400	1199.9	71.4	1271.3	1244.2	2.182%
35.6	1622.6	1161.7	71.4	1233.1	1244.2	0.895%
35.4	1622.6	1153.1	71.4	1224.5	1244.2	1.582%
35.3	1652.4	1170.0	71	1241.0	1244.2	0.260%
35	1652.4	1157.0	71	1228.0	1244.2	1.300%
35.1	1652.4	1161.3	71	1232.3	1244.2	0.954%
38.4	1502.4	1190.8	71	1261.8	1244.2	1.414%
38.1	1502.4	1178.0	71	1249.0	1244.2	0.388%
38.2	1502.4	1182.3	71	1253.3	1244.2	0.729%
33.3	1800	1182.4	71	1253.4	1244.2	0.738%
33.3	1800	1182.4	71	1253.4	1244.2	0.738%
33.6	1800	1195.9	71	1266.9	1244.2	1.826%
33.5	1800	1191.4	71	1262.4	1244.2	1.462%
33.4	1800	1186.9	71	1257.9	1244.2	1.100%


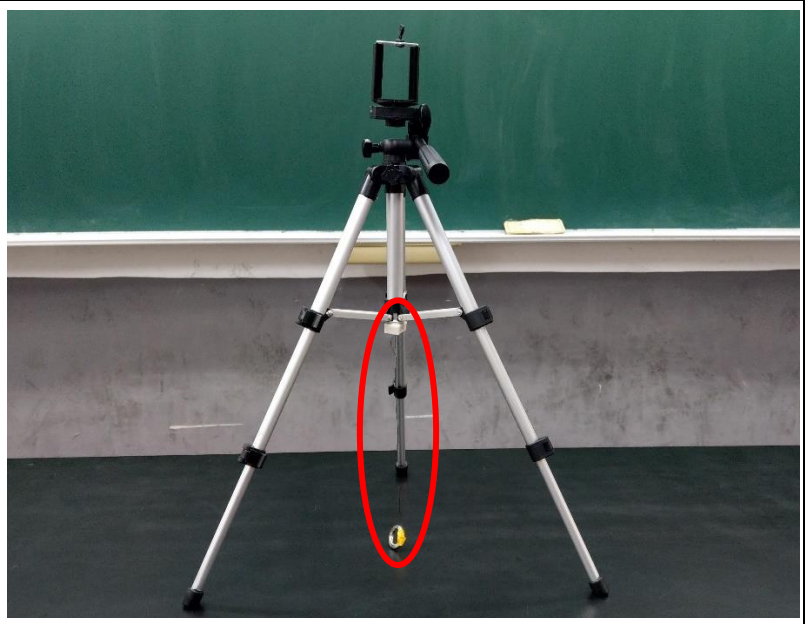

24.6	2618	1198.6	71.4	1270.0	1244.2	2.075%
23.9	2618	1160.1	71.4	1231.5	1244.2	1.018%
24.3	2618	1182.1	71.4	1253.5	1244.2	0.745%
平均						<b>1.519%</b>

表 4-1. 三腳架及手機 APP，測量國旗旗桿高度結果

由實驗四之 1 可得知，以三腳架及手機 APP 測量國旗旗桿高度，平均誤差在 1.519%，其中最準確的一次測量高度為 1241.0cm，與旗桿實際高度 1244.2cm 誤差只有 3.2cm (0.260%)。平均為 1.519%，可惜沒有達到目標 1% 以下，但已經很接近了，接著我們繼續做調整。

**【實驗四之 2】加入三腳架置中設備，測量國旗旗桿高度**

由於三腳架在對齊地上距離標記，要用肉眼看是否對準，會造成些許誤差，因此製作一個簡單的置中設備，利用手邊找到的物品直接來製作：

	
<p>(1)準備手邊可得的物品： 棉線、橡皮擦、鐵環</p>	<p>(3)完成鐵環置中設備</p>
	
<p>(2)開始製作</p>	

利用此置中設備，測量結果如下：

角度	距離	測量高度(A)	鏡頭高度(B)	總測量高度(A+B)	實際高度	誤差
40.5	1400	1195.7	71.4	1267.1	1244.2	1.842%
40.6	1400	1199.9	71.4	1271.3	1244.2	2.182%
40.5	1400	1195.7	71.4	1267.1	1244.2	1.842%
40.5	1400	1195.7	71.4	1267.1	1244.2	1.842%
40.6	1400	1199.9	71.4	1271.3	1244.2	2.182%
33.4	1800	1186.9	71	1257.9	1244.2	1.100%
33.6	1800	1195.9	71	1266.9	1244.2	1.826%
33.5	1800	1191.4	71	1262.4	1244.2	1.462%
33.5	1800	1191.4	71	1262.4	1244.2	1.462%
33.7	1800	1200.5	71	1271.5	1244.2	2.190%
平均						<b>1.793%</b>

表 4-2. 改良加入置中設備，測量國旗旗桿高度結果

由實驗四之 2 可得知，以三腳架置中裝置及手機 APP 測量國旗旗桿高度，平均誤差在 1.793%，與實驗四之 1 相差不大。還是沒有達到目標 1% 以下，我們繼續做調整。

**【實驗四之 3】** 加入手機 APP 望遠功能，測量國旗旗桿高度

如果要看得遠方物體，通常會使用望遠鏡，可讓物體看得更清楚。依此想法，我們以手機望遠鏡功能，提高手機鏡頭倍數來放大目標物進行高度測量：



圖 4-3.開啟望遠放大功能

測量結果如下：

角度	距離	測量高度(A)	鏡頭高度(B)	總測量高度(A+B)	實際高度	誤差
40.7	1400	1204.2	71.4	1275.6	1244.2	2.523%
40.5	1400	1195.7	71.4	1267.1	1244.2	1.842%
40.3	1400	1187.3	71.4	1258.7	1244.2	1.164%
40.3	1400	1187.3	71.4	1258.7	1244.2	1.164%
40.4	1400	1191.5	71.4	1262.9	1244.2	1.502%
33.5	1800	1191.4	71	1262.4	1244.2	1.462%
33.5	1800	1191.4	71	1262.4	1244.2	1.462%
33.4	1800	1186.9	71	1257.9	1244.2	1.100%
33.4	1800	1186.9	71	1257.9	1244.2	1.100%
33.3	1800	1182.4	71	1253.4	1244.2	0.738%
						1.406%

表 4-3. 加入手機 APP 望遠功能，測量國旗旗桿高度結果

由實驗四之 3 可得知，以三腳架及手機 APP 測量國旗旗桿高度，平均誤差在 1.406%，與實驗四之 1、實驗四之 2 相差不多。

還是沒有達到目標 1% 以下，我們繼續做調整。

**【實驗四之 4】** 結合三腳架置中設備及手機 APP 望遠功能，測量國旗旗桿高度

結合實驗四之 2 置中設備及實驗四之 3 手機 APP 望遠功能，看同時使用這 2 個方法是否可以再讓精準度更進一步提升。實驗結果如下：

角度	距離	測量高度(A)	鏡頭高度(B)	總測量高度(A+B)	實際高度	誤差
40.4	1400	1191.5	71.4	1262.9	1244.2	1.502%

40.2	1400	1183.1	71.4	1254.5	1244.2	0.827%
40.3	1400	1187.3	71.4	1258.7	1244.2	1.164%
40.3	1400	1187.3	71.4	1258.7	1244.2	1.164%
40.5	1400	1195.7	71.4	1267.1	1244.2	1.842%
33.1	1800	1173.4	71	1244.4	1244.2	0.016%
33	1800	1168.9	71	1239.9	1244.2	0.343%
33	1800	1168.9	71	1239.9	1244.2	0.343%
33.2	1800	1177.9	71	1248.9	1244.2	0.377%
33.4	1800	1186.9	71	1257.9	1244.2	1.100%
						0.868%

表 4-4. 結合三腳架置中設備及手機 APP 望遠功能結果

由實驗四之 4 可得知，結合三腳架置中設備及手機 APP 望遠功能後，測量國旗旗桿高度平均誤差在 0.868%，其中最準確的一次測量高度為 1244.4cm，與旗桿實際高度 1244.2cm 誤差只有 0.2cm (0.016%)。

總算達成誤差目標在 1% 以下，後續對於測量臺北 101 大樓高度非常有幫助。

## 五、【研究五】找出誤差最小的測高位置

在測量臺北 101 之前，先找出在哪個距離，或是哪個角度可以盡量縮小誤差。避免在臺北 101 周邊漫無目的找地點測量。

### 【實驗五之 1】在不同距離下，測量國旗旗桿高度誤差最小的位置

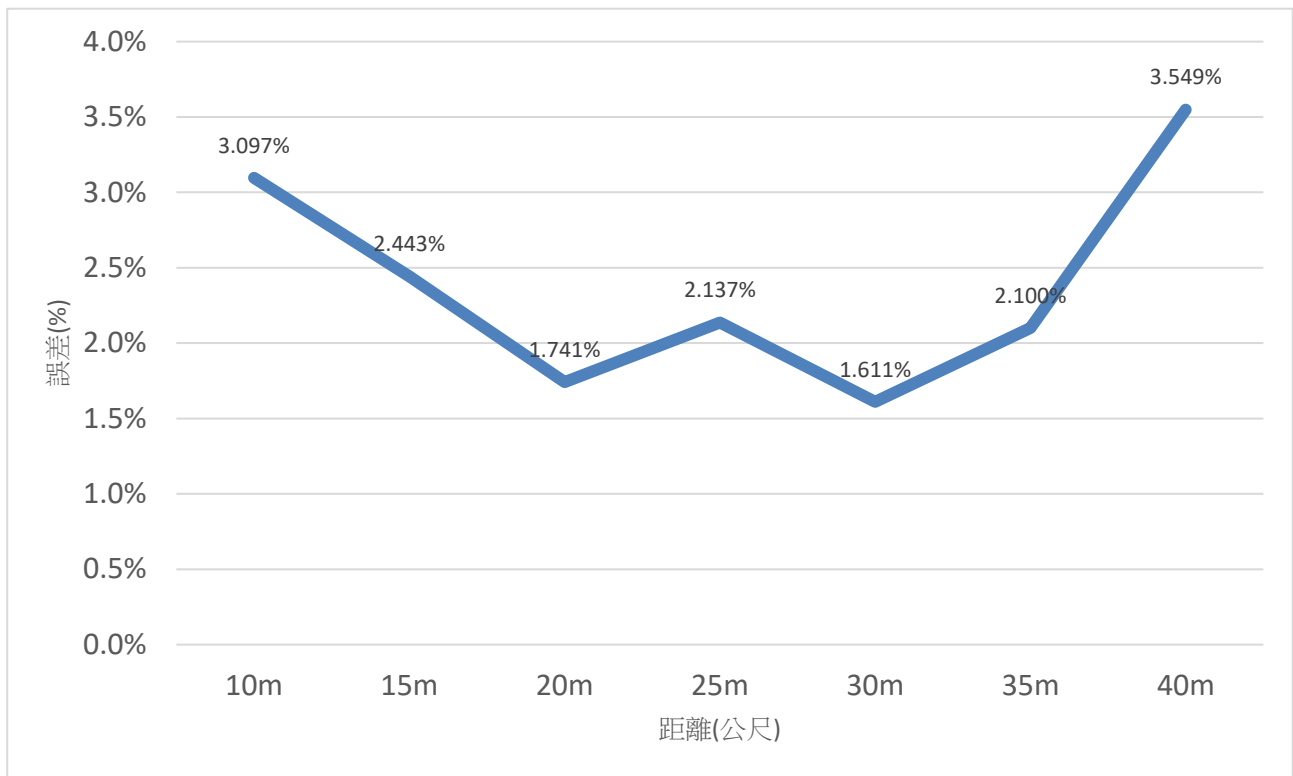
離國旗旗桿每隔 5m 的距離測量一次，找出誤差最小的位置。測量結果如下：

角度	距離	測量高度(A)	鏡頭高度(B)	總測量高度(A+B)	實際高度	誤差
50.6	1000	1217.4	71.4	1288.8	1244.2	3.586%
50.5	1000	1213.1	71.4	1284.5	1244.2	3.239%
50.5	1000	1213.1	71.4	1284.5	1244.2	3.239%
50.4	1000	1208.8	71.4	1280.2	1244.2	2.893%
50.3	1000	1204.5	71.4	1275.9	1244.2	2.548%
50.5	1000	1213.1	71	1284.1	1244.2	3.207%
50.4	1000	1208.8	71	1279.8	1244.2	2.861%
50.5	1000	1213.1	71	1284.1	1244.2	3.207%
38.8	1500	1206.0	71.4	1277.4	1244.2	2.671%
38.7	1500	1201.7	71.4	1273.1	1244.2	2.325%
38.8	1500	1206.0	71.4	1277.4	1244.2	2.671%
38.8	1500	1206.0	71.4	1277.4	1244.2	2.671%
38.7	1500	1201.7	71.4	1273.1	1244.2	2.325%
38.7	1500	1201.7	71	1272.7	1244.2	2.293%
38.6	1500	1197.4	71	1268.4	1244.2	1.948%
38.8	1500	1206.0	71	1277.0	1244.2	2.639%
30.9	2000	1197.0	71.4	1268.4	1244.2	1.943%
30.9	2000	1197.0	71.4	1268.4	1244.2	1.943%
31	2000	1201.7	71.4	1273.1	1244.2	2.324%

30.9	2000	1197.0	71.4	1268.4	1244.2	1.943%
30.9	2000	1197.0	71.4	1268.4	1244.2	1.943%
30.7	2000	1187.5	71	1258.5	1244.2	1.150%
30.8	2000	1192.2	71	1263.2	1244.2	1.530%
30.7	2000	1187.5	71	1258.5	1244.2	1.150%
25.5	2500	1192.4	71.4	1263.8	1244.2	1.578%
25.7	2500	1203.2	71.4	1274.6	1244.2	2.441%
25.6	2500	1197.8	71.4	1269.2	1244.2	2.009%
25.5	2500	1192.4	71	1263.4	1244.2	1.546%
25.7	2500	1203.2	71	1274.2	1244.2	2.409%
25.8	2500	1208.5	71	1279.5	1244.2	2.841%
21.7	3000	1193.8	71.4	1265.2	1244.2	1.691%
21.7	3000	1193.8	71.4	1265.2	1244.2	1.691%
21.7	3000	1193.8	71.4	1265.2	1244.2	1.691%
21.8	3000	1199.9	71	1270.9	1244.2	2.147%
21.7	3000	1193.8	71	1264.8	1244.2	1.659%
21.6	3000	1187.8	71	1258.8	1244.2	1.172%
21.7	3000	1193.8	71	1264.8	1244.2	1.659%
21.6	3000	1187.8	71	1258.8	1244.2	1.172%
19	3500	1205.1	71.4	1276.5	1244.2	2.600%
19	3500	1205.1	71.4	1276.5	1244.2	2.600%
19	3500	1205.1	71.4	1276.5	1244.2	2.600%
18.9	3500	1198.3	71	1269.3	1244.2	2.019%
19	3500	1205.1	71	1276.1	1244.2	2.568%
18.7	3500	1184.7	71	1255.7	1244.2	0.923%
18.7	3500	1184.7	71	1255.7	1244.2	0.923%
19	3500	1205.1	71	1276.1	1244.2	2.568%
17	4000	1222.9	71.4	1294.3	1244.2	4.029%
17	4000	1222.9	71.4	1294.3	1244.2	4.029%
16.9	4000	1215.3	71.4	1286.7	1244.2	3.415%
16.9	4000	1215.3	71	1286.3	1244.2	3.383%
16.8	4000	1207.7	71	1278.7	1244.2	2.771%
17	4000	1222.9	71	1293.9	1244.2	3.996%
16.8	4000	1207.7	71	1278.7	1244.2	2.771%
17	4000	1222.9	71	1293.9	1244.2	3.996%

表 5-1. 每隔 5m，測量國旗旗桿高度誤差結果





圖表 5-1. 每隔 5m，測量國旗旗桿高度誤差結果

由實驗五之 1 可得知，每隔 5m 測量一次高度，想找出誤差最小的位置，是在 20m 及 30m 處，與國旗高度 12m44.2cm 似乎沒什麼規律性。

由於找不出規律性，於是我們往下做另一個實驗。

**【實驗五之 2】** 在不同角度下，測量國旗旗桿高度誤差最小的位置

接著我們在高度角每隔 5° 的位置，測量國旗旗桿高度，看是否能找出規律性。我們先計算出每個角度距離旗桿的位置：

角度(°)	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
距離(cm)	4382	3226	2518	2034	1677	1399	1174	985	822	678	548	427	315

接著在這些位置開始測量旗桿高度，測量結果如下：

角度	距離	測量高度(A)	鏡頭高度(B)	總測量高度(A+B)	實際高度	誤差
15.5	4382	1215.2	69.8	1285.0	1244.2	3.282%
15.4	4382	1207.0	69.8	1276.8	1244.2	2.620%
15.3	4382	1198.8	69.8	1268.6	1244.2	1.959%
20.6	3226	1212.6	68.5	1281.1	1244.2	2.964%
20.2	3226	1186.9	68.5	1255.4	1244.2	0.903%
20.7	3226	1219.0	68.5	1287.5	1244.2	3.480%
25.5	2518	1201.0	68.5	1269.5	1244.2	2.035%
25.4	2518	1195.6	68.5	1264.1	1244.2	1.602%
25.4	2518	1195.6	68.5	1264.1	1244.2	1.602%
30.2	2034	1183.8	68.5	1252.3	1244.2	0.652%

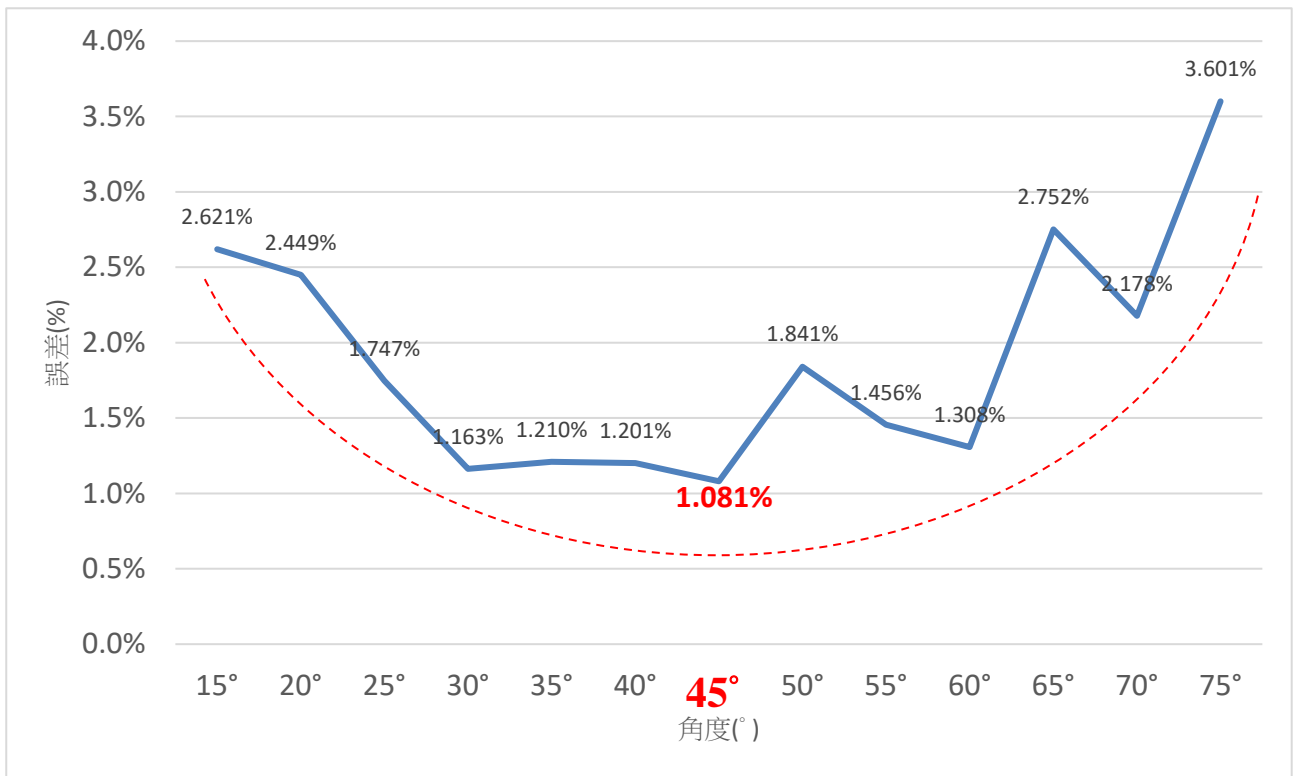
30.5	2034	1198.1	68.5	1266.6	1244.2	1.802%
30.3	2034	1188.6	68.5	1257.1	1244.2	1.035%
35.5	1677	1196.2	68.5	1264.7	1244.2	1.647%
35.3	1677	1187.4	69.8	1257.2	1244.2	1.043%
35.3	1677	1187.4	68.5	1255.9	1244.2	0.939%
40.5	1399	1194.9	68.5	1263.4	1244.2	1.540%
40.3	1399	1186.4	68.5	1254.9	1244.2	0.863%
40.4	1399	1190.6	68.5	1259.1	1244.2	1.201%
45.3	1174	1186.4	68.5	1254.9	1244.2	0.857%
45.2	1174	1182.2	68.5	1250.7	1244.2	0.524%
45.6	1174	1198.8	68.5	1267.3	1244.2	1.861%
55.6	822	1200.5	68.5	1269.0	1244.2	1.993%
55.3	822	1187.1	68.5	1255.6	1244.2	0.918%
60.7	678	1208.2	68.5	1276.7	1244.2	2.611%
60.3	678	1188.7	68.5	1257.2	1244.2	1.042%
60.1	678	1179.1	68.5	1247.6	1244.2	0.272%
65.7	548	1213.7	68.5	1282.2	1244.2	3.053%
65.6	548	1208.1	68.5	1276.6	1244.2	2.601%
65.6	548	1208.1	68.5	1276.6	1244.2	2.601%
70.2	427	1186.0	69.8	1255.8	1244.2	0.935%
70.4	427	1199.2	69.8	1269.0	1244.2	1.990%
70.7	427	1219.3	69.8	1289.1	1244.2	3.610%
75.6	318	1238.5	69.8	1308.3	1244.2	5.154%
75.6	315	1226.8	69.8	1296.6	1244.2	4.215%
75.2	315	1192.2	69.8	1262.0	1244.2	1.433%

表 5-2-1. 在不同角度下，測量國旗旗桿高度誤差結果

由上表整理出各角度組距之誤差：

角度(°)	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
誤差(%)	2.621	2.449	1.747	1.163	1.210	1.201	1.081	1.841	1.456	1.308	2.752	2.178	5.738

表 5-2-2. 每隔 5 度，測量國旗旗桿高度誤差結果



圖表 5-2. 每隔 5 度，測量國旗旗桿高度誤差結果

由實驗五之 2 可得知，每隔 5° 測量一次高度，結果是在 45° 位置誤差值最小。測量時雖然伴隨著誤差，但大致可看出愈往 45° 兩側誤差愈大。

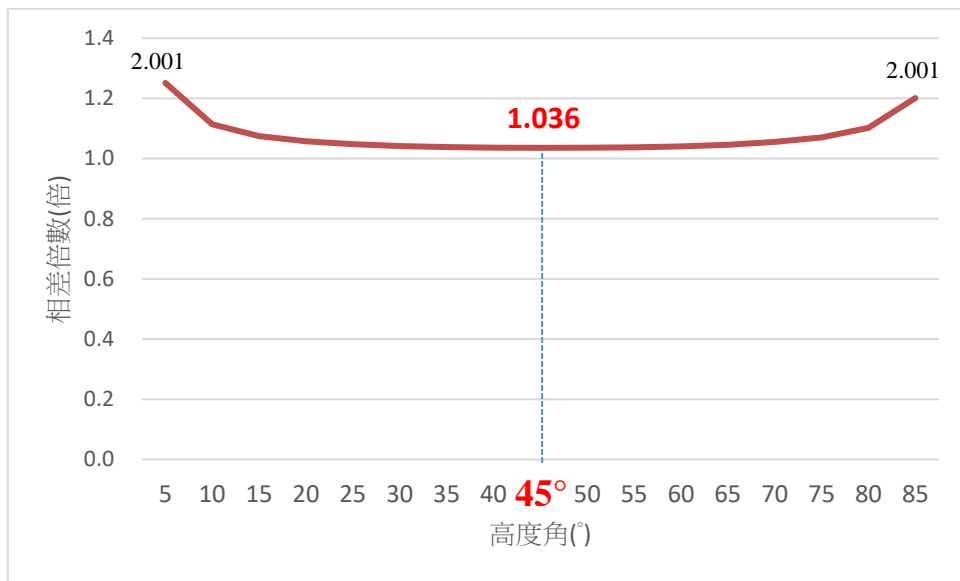
**【實驗五之 3】以 Excel 驗證是否在 45° 時，測量誤差值最小**

為了更進一步知道為何在 45° 誤差最小，於是利用三角函數來計算每差距 1° 時，邊長倍數差距是多少？計算結果如下（1°~45° 與 46°~89° 倍數為相反數，因此只列出 1°~45°）：

度	tan 倍數	與前 1° 倍數差距	度	tan 倍數	與前 1° 倍數差距
0	0.0000	-----	23	0.4245	<b>1.051</b>
1	0.0175	-----	24	0.4452	<b>1.049</b>
2	0.0349	<b>2.001</b>	25	0.4663	<b>1.047</b>
3	0.0524	<b>1.501</b>	26	0.4877	<b>1.046</b>
4	0.0699	<b>1.334</b>	27	0.5095	<b>1.045</b>
5	0.0875	<b>1.251</b>	28	0.5317	<b>1.044</b>
6	0.1051	<b>1.201</b>	29	0.5543	<b>1.043</b>
7	0.1228	<b>1.168</b>	30	0.5774	<b>1.042</b>
8	0.1405	<b>1.145</b>	31	0.6009	<b>1.041</b>
9	0.1584	<b>1.127</b>	32	0.6249	<b>1.040</b>
10	0.1763	<b>1.113</b>	33	0.6494	<b>1.039</b>
11	0.1944	<b>1.102</b>	34	0.6745	<b>1.039</b>
12	0.2126	<b>1.094</b>	35	0.7002	<b>1.038</b>

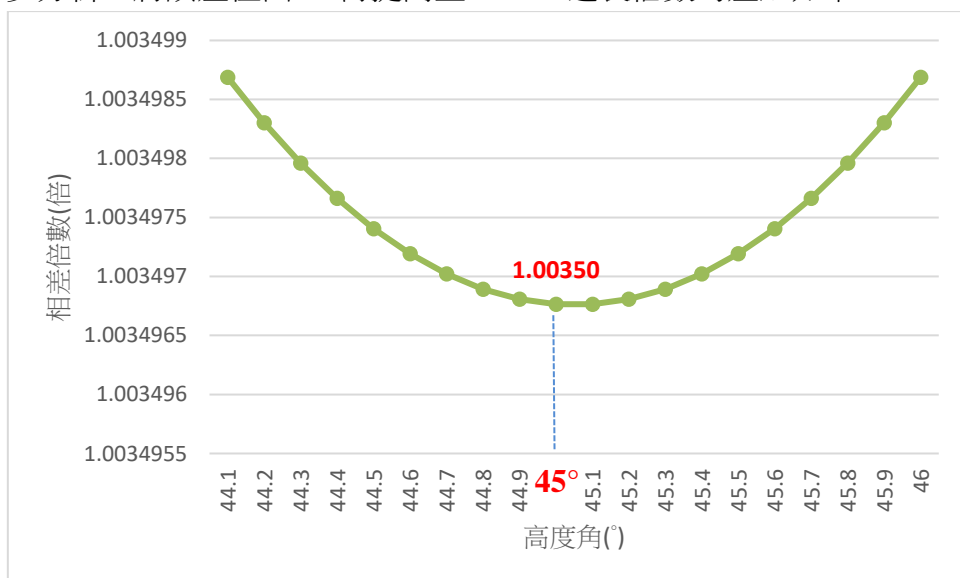
13	0.2309	<b>1.086</b>	36	0.7265	<b>1.038</b>
14	0.2493	<b>1.080</b>	37	0.7536	<b>1.037</b>
15	0.2679	<b>1.075</b>	38	0.7813	<b>1.037</b>
16	0.2867	<b>1.070</b>	39	0.8098	<b>1.036</b>
17	0.3057	<b>1.066</b>	40	0.8391	<b>1.036</b>
18	0.3249	<b>1.063</b>	41	0.8693	<b>1.036</b>
19	0.3443	<b>1.060</b>	42	0.9004	<b>1.036</b>
20	0.3640	<b>1.057</b>	43	0.9325	<b>1.036</b>
21	0.3839	<b>1.055</b>	44	0.9657	<b>1.036</b>
22	0.4040	<b>1.053</b>	45	1.0000	<b>1.036</b>

表 5-3 每差距 1°時，邊長倍數的差距



圖表 5-3-1. 每差距 1°時，邊長倍數的差距

由圖表 5-3-1 結果可知，當測量角度在 45°左右時，即使測量高度角誤差 $\pm 1^\circ$ 時，邊長倍數也只有差 0.036 倍。例如原本正確高度角為 45°卻誤量成 46°時，物體高度誤差也只有 3.6%。接著再進一步分析，將誤差值由 $\pm 1^\circ$ 再提高至 $\pm 0.1^\circ$ ，邊長倍數的差距如下：



圖表 5-3-2. 在 45°左右，每差距 0.1°時，邊長倍數的差距

由圖表 5-3-2 可得知，當測量角度在  $45^\circ$  左右時，即使測量高度角誤差  $\pm 0.1^\circ$  時，邊長倍數也只有差 0.0035 倍。例如原本要正確高度角為  $45^\circ$  卻誤量成  $45.1^\circ$  時，物體高度誤差也只有 0.36%。由實驗五之 3 結果可知，若要測量物體高度，距測量物高度角  $45^\circ$  左右的地點，可以縮小測量的誤差程度。

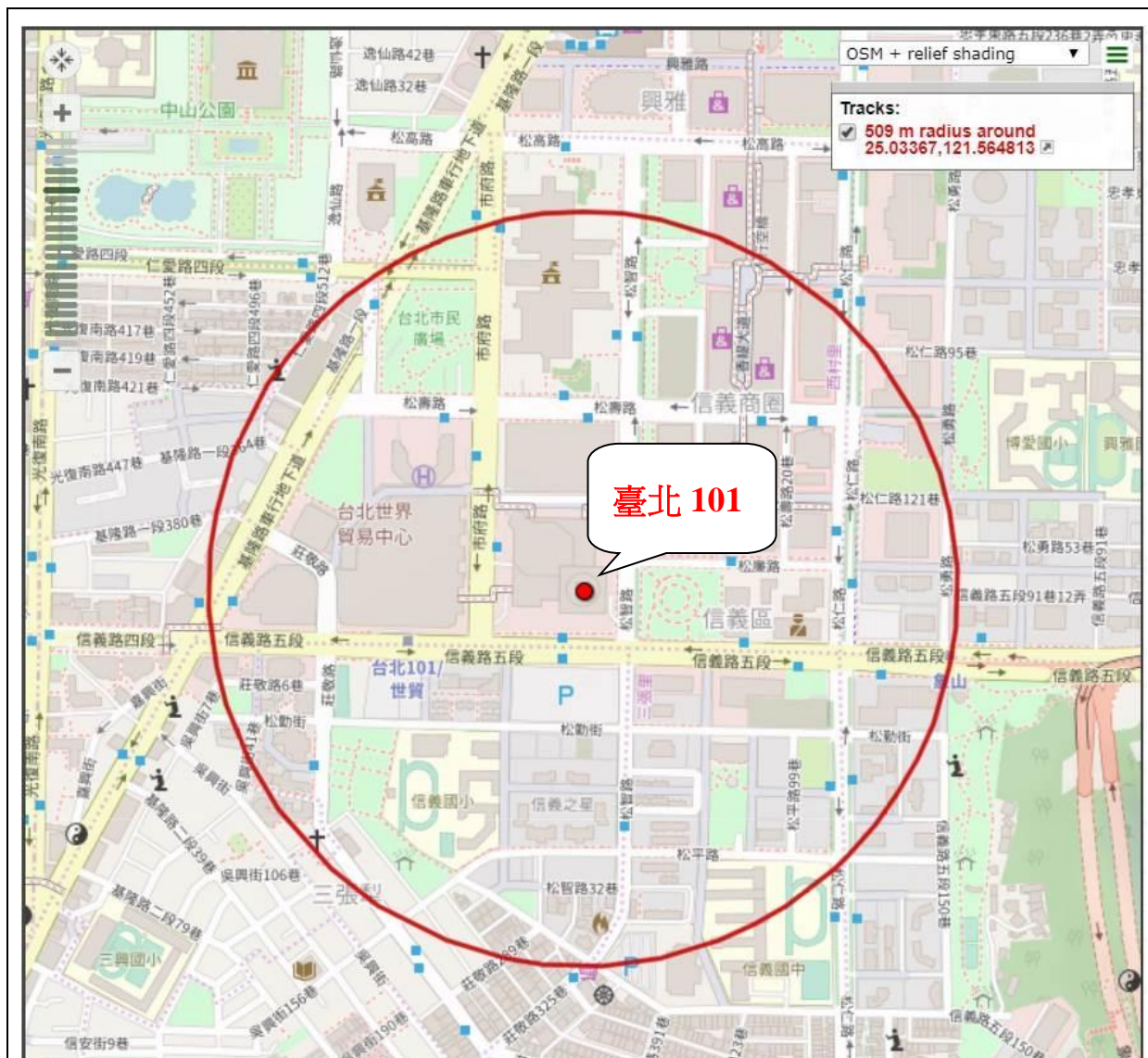
## 六、【研究六】找出準確測量臺北 101 高度的方法

### 【實驗六之 1】在臺北 101 高度角 $45^\circ$ 周邊，測量臺北 101 高度

為了找到適合測量臺北 101 的地點，我們找離臺北 101 高度角  $45^\circ$  周邊地點，而  $45^\circ-45^\circ-90^\circ$  就是等腰直角三角形，也是以臺北 101 為圓心，大樓高度（509.2m）為半徑畫圓，來尋找最適合的測量地點。上網搜尋適合的資源後，找到 [gpsvisualizer.com](http://gpsvisualizer.com) 網站有我們需要的功能。首先利用此網站定位臺北 101 大樓中心點，得到 GPS 座標為（25.033670, 121.564813）：



接著以 509.2m 為半徑畫圓，可以求出離臺北 101 高度角為  $45^\circ$  的所有點：

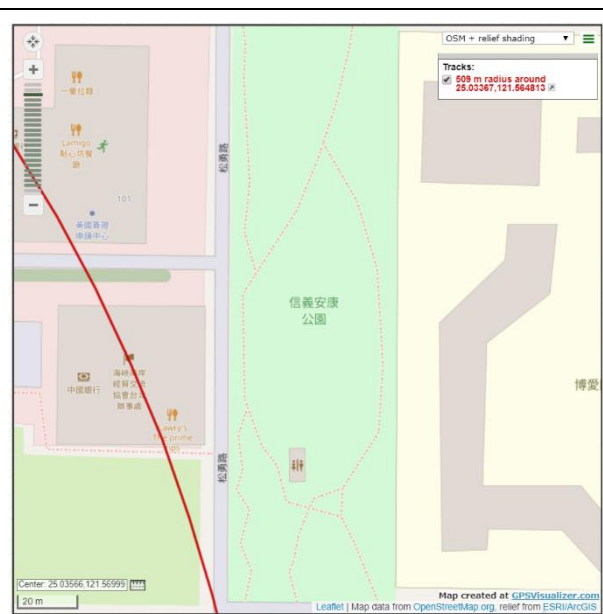


離臺北 101 高度角 45° 的所有點

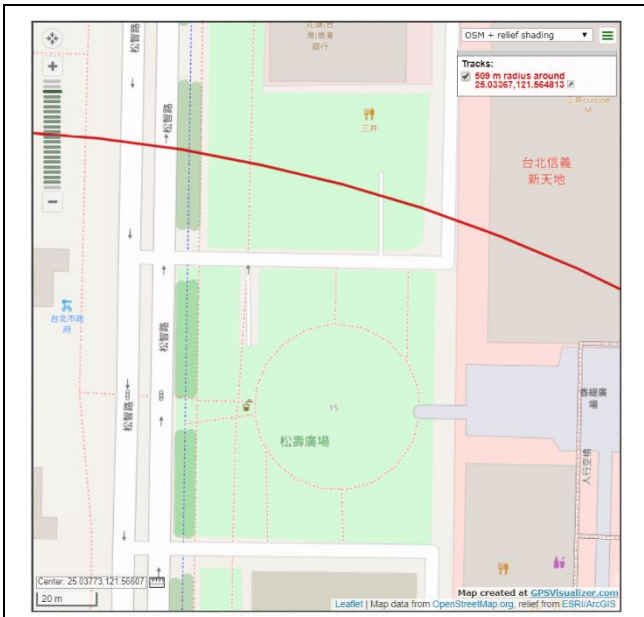
最後在圓周經過的地點中，選定了四個較平坦且無障礙物，適合觀測的地點如下：



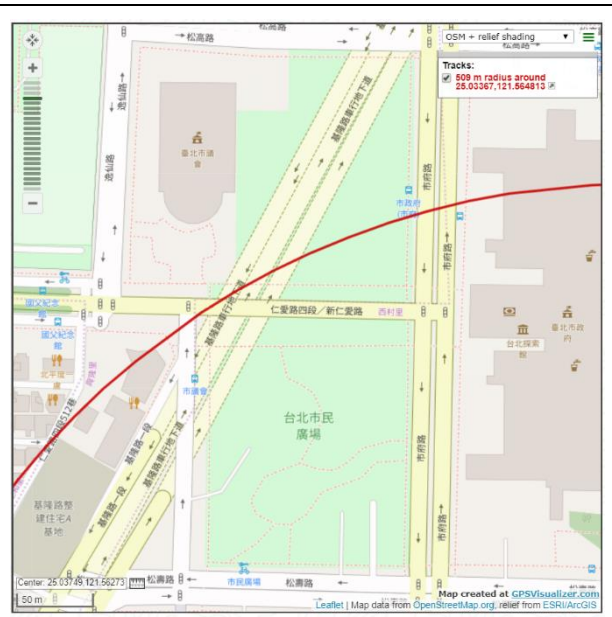
捷運象山站



信義安康社區



松壽廣場



台北市政府廣場

於是動身前往臺北 101 周邊這四個地點進行測量：



捷運象山站



信義安康社區

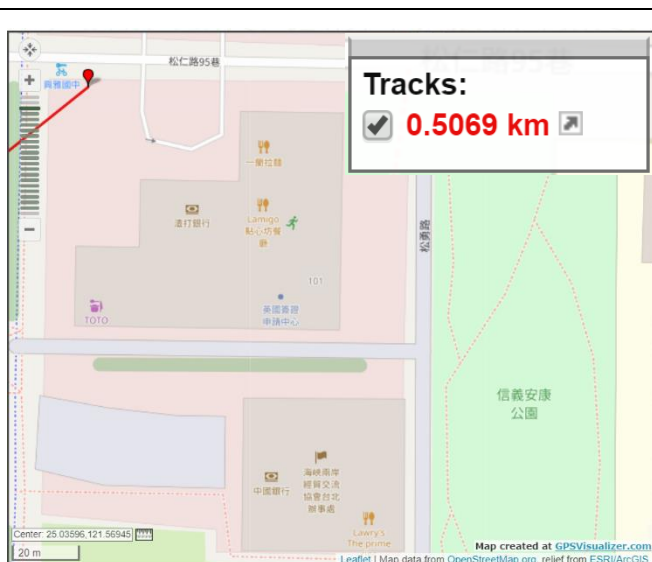


松壽廣場



台北市政府廣場

此四個測量地點「實際 GPS 座標」、「與臺北 101 距離」，可使用 [gpsvisualizer.com](http://gpsvisualizer.com) 網站來完成測量：

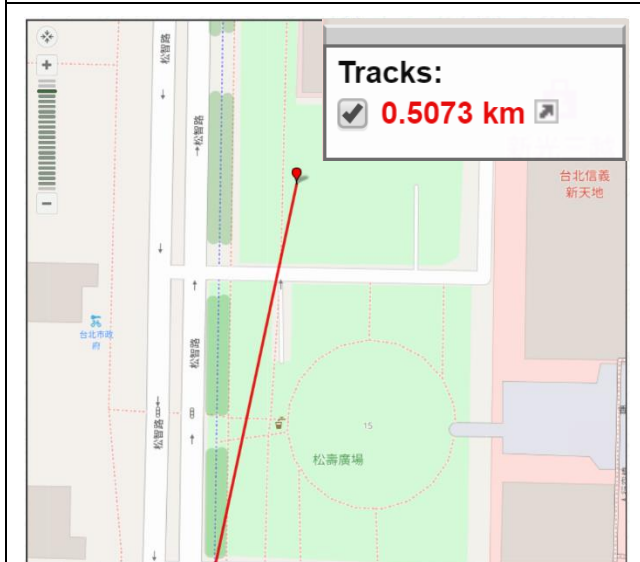


捷運象山站

座標 (25.032626, 121.569734)、距離 509.9 m

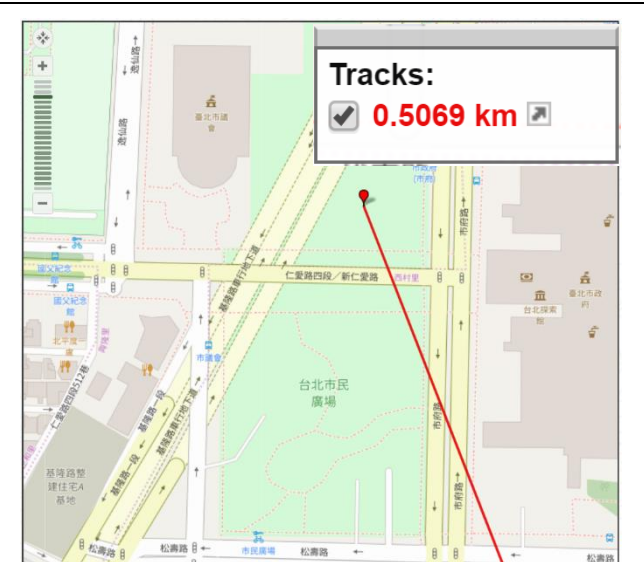
信義安康社區

座標 (25.036519, 121.568743)、距離 506.9 m



松壽廣場

座標 (25.038147, 121.565873)、距離 507.3 m



台北市政府廣場

座標 (25.037934, 121.562991)、距離 506.9 m

最後測量結果如下：

地點	角度	距離	測量高度 (A)	距地面 (B)	總測量高度 (A+B)	實際高度	誤差	地點 平均誤差
象山	45.8	509.9	524.34	0.71	525.05	509.2	3.113%	象山站 2.981%
象山	45.2	509.9	513.47	0.71	514.18	509.2	0.978%	
象山	45.2	509.9	513.47	0.71	514.18	509.2	0.978%	
象山	45.3	509.9	515.27	0.71	515.98	509.2	1.331%	
象山	45.4	509.9	517.07	0.71	517.78	509.2	1.685%	
象山	46.3	509.9	533.58	0.714	534.29	509.2	4.928%	
象山	46.2	509.9	531.72	0.714	532.43	509.2	4.563%	
象山	46	509.9	528.02	0.714	528.73	509.2	3.836%	
象山	46.2	509.9	531.72	0.714	532.43	509.2	4.563%	



象山	46	509.9	528.02	0.714	528.73	509.2	3.836%	
信義安康	45.8	506.9	521.26	0.71	521.97	509.2	2.507%	信義安康 2.545%
信義安康	45.5	506.9	515.83	0.71	516.54	509.2	1.441%	
信義安康	45.6	506.9	517.63	0.71	518.34	509.2	1.795%	
信義安康	45.9	506.9	523.08	0.71	523.79	509.2	2.865%	
信義安康	45.8	506.9	521.26	0.71	521.97	509.2	2.507%	
信義安康	45.8	506.9	521.26	0.714	521.97	509.2	2.508%	
信義安康	45.9	506.9	523.08	0.714	523.79	509.2	2.866%	
信義安康	45.9	506.9	523.08	0.714	523.79	509.2	2.866%	
信義安康	46	506.9	524.91	0.714	525.62	509.2	3.226%	
信義安康	45.9	506.9	523.08	0.714	523.79	509.2	2.866%	
松壽廣場	46.1	507.3	527.16	0.71	527.87	509.2	3.667%	松壽廣場 4.323%
松壽廣場	46.1	507.3	527.16	0.71	527.87	509.2	3.667%	
松壽廣場	46.1	507.3	527.16	0.71	527.87	509.2	3.667%	
松壽廣場	46.1	507.3	527.16	0.71	527.87	509.2	3.667%	
松壽廣場	46.2	507.3	529.01	0.71	529.72	509.2	4.029%	
松壽廣場	46.3	507.3	530.86	0.714	531.57	509.2	4.394%	
松壽廣場	46.5	507.3	534.58	0.714	535.30	509.2	5.125%	
松壽廣場	46.5	507.3	534.58	0.714	535.30	509.2	5.125%	
松壽廣場	46.4	507.3	532.72	0.714	533.43	509.2	4.759%	
松壽廣場	46.5	507.3	534.58	0.714	535.30	509.2	5.125%	
市府廣場	45.1	506.9	508.67	0.71	509.38	509.2	0.036%	市府廣場 0.286%
市府廣場	45.2	506.9	510.45	0.71	511.16	509.2	0.385%	
市府廣場	45.1	506.9	508.67	0.71	509.38	509.2	0.036%	
市府廣場	45	506.9	506.90	0.71	507.61	509.2	0.312%	
市府廣場	45.2	506.9	510.45	0.71	511.16	509.2	0.385%	
市府廣場	45.2	506.9	510.45	0.714	511.17	509.2	0.386%	
市府廣場	45	506.9	506.90	0.714	507.61	509.2	0.311%	
市府廣場	45	506.9	506.90	0.714	507.61	509.2	0.311%	
市府廣場	45	506.9	506.90	0.714	507.61	509.2	0.311%	
市府廣場	45.2	506.9	510.45	0.714	511.17	509.2	0.386%	
<b>總平均誤差</b>							<b>2.534%</b>	

表 6-1. 在臺北 101 高度角 45° 周邊，測量臺北 101 高度結果

由實驗六之 1 可得知，測量臺北 101 高度：

- 總平均誤差 2.534%。
- 四個地點中，最準確地點為臺北市府廣場，其平均誤差 0.286%。
- 臺北市府廣場所有測量中，單次最準確誤差只有 0.036%，也就是測得高度 509.38 m，與實際高度 509.2 m 誤差只有 18cm。

**【實驗六之 2】加入海拔因素，校正測量臺北 101 高度**

在捷運象山站測測量時，有同學想到一個問題，就是測量位置和旁邊馬路的地勢高低不同，這樣會不會造成測量誤差呢？為了解決這個問題，於是把測量地點的海拔高度也考慮進來。



找到網路資源 Google Earth 可以測量海拔：



地點	捷運象山站	信義安康社區	松壽廣場	市府廣場	臺北 101 大樓
海拔	16m	19m	14m	19m	21m
與 101 海拔落差	-5m	-2m	-7m	-2m	—

表 6-2-1.測量地點之海拔高度

加入海拔高度校正後，測得結果如下：

地點	角度	距離	測量高度	測量高度 +海拔(A)	鏡頭高度 (B)	總測量高度 (A+B)	實際高度	誤差	地點 平均誤差
象山	45.8	509.9	524.34	519.34	0.71	520.05	509.2	2.131%	象山站 2.001%
象山	45.2	509.9	513.47	508.47	0.71	509.18	509.2	0.003%	
象山	45.2	509.9	513.47	508.47	0.71	509.18	509.2	0.003%	
象山	45.3	509.9	515.27	510.27	0.71	510.98	509.2	0.349%	
象山	45.4	509.9	517.07	512.07	0.71	512.78	509.2	0.703%	
象山	46.3	509.9	533.58	528.58	0.714	529.29	509.2	3.946%	
象山	46.2	509.9	531.72	526.72	0.714	527.43	509.2	3.581%	
象山	46	509.9	528.02	523.02	0.714	523.73	509.2	2.854%	
象山	46.2	509.9	531.72	526.72	0.714	527.43	509.2	3.581%	
象山	46	509.9	528.02	523.02	0.714	523.73	509.2	2.854%	
信義安康	45.8	506.9	521.26	519.26	0.71	519.97	509.2	2.114%	信義安康 2.152%
信義安康	45.5	506.9	515.83	513.83	0.71	514.54	509.2	1.048%	
信義安康	45.6	506.9	517.63	515.63	0.71	516.34	509.2	1.402%	
信義安康	45.9	506.9	523.08	521.08	0.71	521.79	509.2	2.473%	
信義安康	45.8	506.9	521.26	519.26	0.71	519.97	509.2	2.114%	
信義安康	45.8	506.9	521.26	519.26	0.714	519.97	509.2	2.115%	
信義安康	45.9	506.9	523.08	521.08	0.714	521.79	509.2	2.473%	
信義安康	45.9	506.9	523.08	521.08	0.714	521.79	509.2	2.473%	
信義安康	46	506.9	524.91	522.91	0.714	523.62	509.2	2.833%	
信義安康	45.9	506.9	523.08	521.08	0.714	521.79	509.2	2.473%	
松壽廣場	46.1	507.3	527.16	520.16	0.71	520.87	509.2	2.292%	松壽廣場 2.948%
松壽廣場	46.1	507.3	527.16	520.16	0.71	520.87	509.2	2.292%	
松壽廣場	46.1	507.3	527.16	520.16	0.71	520.87	509.2	2.292%	
松壽廣場	46.1	507.3	527.16	520.16	0.71	520.87	509.2	2.292%	
松壽廣場	46.2	507.3	529.01	522.01	0.71	522.72	509.2	2.655%	
松壽廣場	46.3	507.3	530.86	523.86	0.714	524.57	509.2	3.019%	
松壽廣場	46.5	507.3	534.58	527.58	0.714	528.30	509.2	3.750%	
松壽廣場	46.5	507.3	534.58	527.58	0.714	528.30	509.2	3.750%	
松壽廣場	46.4	507.3	532.72	525.72	0.714	526.43	509.2	3.384%	
松壽廣場	46.5	507.3	534.58	527.58	0.714	528.30	509.2	3.750%	
市府廣場	45.1	506.9	508.67	506.67	0.71	507.38	509.2	0.357%	市府廣場 0.356%
市府廣場	45.2	506.9	510.45	508.45	0.71	509.16	509.2	0.008%	
市府廣場	45.1	506.9	508.67	506.67	0.71	507.38	509.2	0.357%	

市府廣場	45	506.9	506.90	504.90	0.71	505.61	509.2	0.705%
市府廣場	45.2	506.9	510.45	508.45	0.71	509.16	509.2	0.008%
市府廣場	45.2	506.9	510.45	508.45	0.714	509.17	509.2	0.007%
市府廣場	45	506.9	506.90	504.90	0.714	505.61	509.2	0.704%
市府廣場	45	506.9	506.90	504.90	0.714	505.61	509.2	0.704%
市府廣場	45	506.9	506.90	504.90	0.714	505.61	509.2	0.704%
市府廣場	45.2	506.9	510.45	508.45	0.714	509.17	509.2	0.007%
<b>總平均誤差</b>							<b>1.864%</b>	

表 6-2-2. 加入海拔因素，校正後測量臺北 101 高度結果

由實驗六之 2 可得知，加入海拔校正後，測量臺北 101 高度：

- 總平均誤差由 2.534% 提升至 **1.864%** 變準確。
- 四個地點中，最準確地點依然是臺北市府廣場其平均誤差由 0.286% 略降至 **0.356%**。
- 臺北市府廣場所有測量中，最準確誤差由 0.036% 提升至 **0.007%**，也就是測得高度 509.17 m，與實際高度 509.2 m 誤差只有 3cm。



## 伍、 結論

利用下列軟、硬體輔助，最後實驗結果為：

- 測量臺北 101 高度總平均誤差為 1.864%。
- 最準確的測量地點為臺北市府廣場，可測得平均誤差為 0.356%。
- 臺北市府廣場所有測量中，單次最準確誤差為 0.007%，也就是測得高度 509.17 m，與實際高度 509.2 m 誤差只有 3cm。

雖然總平均誤差沒有達成 1% 以下，但在臺北市府廣場測量「平均誤差」及「單次最準確誤差」都有達成誤差 1% 以下目標。

硬體：

	
自拍三腳架：穩定手機方便觀查	手機：結合相關 APP 測量

軟體：

			
<b>高度角 APP</b> 測量物體高度角	<b>Excel</b> 計算高度/距離倍數 (三角函數表)	<b>GPS Visualizer</b> 測量地點 GPS 座標、兩點距離、 座標半徑畫圓	<b>Google 地球</b> 測量地點海拔

## 陸、心得

同學 A：雖然總平均沒有達到 1% 以下，很可惜。不過過程中我們自己尋找答案，漸漸的提高精準度，最後也成功測量到 101，十分有趣。

同學 B：從一開始好奇國旗旗桿的我們，到現在卻能知道台北 101 的高度，在之前的課程有時候是比較辛苦的，但是仔細想想這也是一種挑戰啊。

同學 C：這次的研究，我們在老師的教導下，數學及邏輯能力大大提升，所以我們都很努力的把這次研究做好。果然！在我們的合作下結束了這次的難題，成功達成目標。

同學 D：我被老師選為科展人員，我十分高興和榮幸之至，測量了許多不同的高度角度，也了解了角度與距離，和許多國中會上到的東西。

## 柒、延伸探討

本研究尚有幾點待延伸探討或改進之處：

- 一、測量臺北 101 海拔時，由於 Google Earth 無法點選臺北 101 大樓正中央求取海拔值，只能點選臺北 101 南側大門口取得海拔值，因此存在誤差。
- 二、雖然測量臺北 101 單次最精準的誤差達 0.007%，但所有測量平均誤差為 1.864%，並沒有達成預期 1% 以下的標準，因此有待後續改良。
- 三、希望未來能將此測量方法延伸運用，測量更遠方的物體，例如月球。

## 捌、參考資料

- 中華民國第五十二屆中小學科學展覽會作品「月來越好玩」，2012 年。
- 中華民國第四十五屆中小學科學展覽會作品「測量因你而容易，數學因此而有趣」，2005 年。
- 中華民國第五十五屆中小學科學展覽會「食在小心，開發 APP 以進行飲食健康管理之研究」，2015 年。
- 臺灣國際科展作品「手機感測器之動作辨識與低頭族應用」，2014 年。
- 中華民國第五十三屆中小學科學展覽會作品「智慧型遠端插座用電監控系統」，2013 年。
- 中華民國第五十一屆中小學科學展覽會作品「危機自陷—臺灣高鐵差異沉陷的新測量方法」，2011 年。
- 台北 101 基本資料，維基百科，[https://zh.wikipedia.org/wiki/台北\\_101](https://zh.wikipedia.org/wiki/台北_101)。
- GPS 座標測距離，GPSVisualizer，<https://www.gpsvisualizer.com/calculators>。
- GPS 座標測海拔，Google Earth，<https://www.google.com.tw/intl/zh-TW/earth/>。

## 【評語】 082805

本作品將直角三角形邊長比例的關係運用於測量物體的高度，讓生硬的數學變得有趣，是值得獎勵的特色，作者先以學校旗桿驗證提出的方法，再實際測量 101 大樓高度，找尋最佳觀測地點，具研究精神。然而部分實驗時的假設需要再細心思考，如實驗中提出 45 度角的測量誤差最小，因此在測量 101 高度時，先在地圖上畫出以 101 高度為半徑的圓，做為觀察位置，但實際測量某物體高度時，是無法先知道待測物的高度的，因此也無法先選定觀測位置；另外，本作品使用 GPS 定位找到觀測點，GPS 可能有誤差，也許將影響高度計算的精確度。

# 摘要

本研究藉由網路資源、手機 APP 功能，期許達成測量物體高度誤差小於 1% 的目標。最後找出能以最小誤差來測量臺北 101 大樓的方法。

研究發現，以簡易手機自拍三腳架、手機角度 APP，在臺北市府廣場測量臺北 101 大樓高度是最適當的地點，平均誤差在 1% 以下 (0.356%)，最低測量誤差甚至達 0.007% (誤差 3cm)。

## 研究動機

每回升旗時總好奇想著國旗到底有多高？轉眼間我們都要畢業了，於是下定決心要在畢業前解答這謎題。最後利用此測量物體高度的方法，嘗試來測量臺灣最高大樓—臺北 101。

## 壹、研究目的

- 找出適合測量高度的方法。
- 不同高度角，物體高度與距離的倍數關係。
- 找出準確測量教室掛物高度的方法。
- 找出準確測量國旗旗桿高度的方法。
- 找出準確測量臺北 101 高度的方法。

## 貳、研究設備及器材

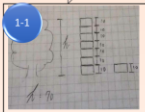


電腦、印表機、手機、自拍三腳架、小鐵環、棉線、橡皮擦、直尺、大皮尺捲 50m、三角板、量角器。

## 參、研究過程或方法

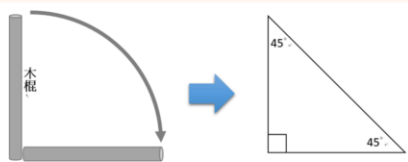
- 【研究一】找出適合測量高度的方法。
- 【研究二】不同高度角，物體高度與距離的倍數關係。
- 【研究三】找出準確測量教室掛物高度的方法。
- 【研究四】找出準確測量國旗旗桿高度的方法。
- 【研究五】找出誤差最小的測高位置。
- 【研究六】找出準確測量臺北 101 高度的方法。

## 肆、研究結果與討論

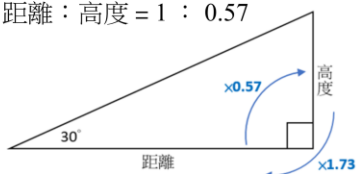
### 一 研究 找出適合測量高度的方法

		
同學 A：以木箱層層堆疊，最後計算木箱數量x木箱高度即可求樹高。	同學 B：可比對樹旁的建築物，然後測量單層樓高度即可求得樹高。	同學 C：可找到差不多長度的木棍，然後放倒測量木棍長度即為樹高。

利用同學 C 的木棍法，聯想到等腰直角三角形的原理。當觀測物高度角為 45° 時，觀測物的高度：距離 = 1 : 1



另一種常見特殊三角形 30°-60°-90°，我們手繪求得倍數關係，得知觀測角 30° 時，距離：高度 = 1 : 0.57

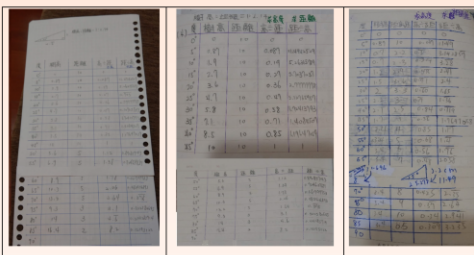


### 討論：

- 可利用特殊三角形兩邊邊長比例的倍數，來求物體的高度。

### 二 研究 不同高度角，高度與距離的倍數關係

2-1 手繪出不同角度的三角形，並量出邊長後相除求得倍數關係：



2-2 利用 Excel 軟體來求出精準的邊長比倍數關係：

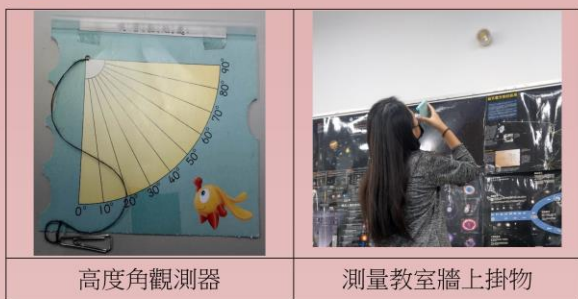
度	Tan 高度÷距離 求高度	Cot 距離÷高度 求距離	度
0	0	-----	90
1	0.0175	57.29	89
2	0.0349	28.6363	88
3	0.0524	19.0811	87
4	0.0699	14.3007	86
5	0.0875	11.4301	85
~~~~~			
43	0.9325	1.0724	47
44	0.9657	1.0355	46
45	1	1	45
度	Cot 距離÷高度 求距離	Tan 高度÷距離 求高度	度

### 討論：

- 可利用此直角三角形邊長倍數對照表 (三角函數表) 來測量物體的高度。

### 三 研究 找出準確測量教室牆上掛物高度的方法

3-1 手持+高度角觀測器，測量牆上掛物：



測量誤差高達 5.044%，一方面是手持不穩，另一方面是高度角觀測器精準度只有 10°

3-2 手持+手機高度角 APP，測量牆上掛物：



誤差高達 6.245%，雖然角度觀測的精準度提高，但測量誤差並沒有提高，手持誤差還是太大。

3-3 三腳架+手機 APP，測量教室牆上掛物高度：



以三腳架代替手持測量時，測量平均誤差為 2.805%，大大提升了觀測的精準度。

### 四 研究 找出準確測量國旗旗桿高度的方法

4-1 三腳架+手機 APP，測量國旗旗桿高度：



平均誤差 1.519%，最準確的一次測量與旗桿實際高度誤差只有 3.2cm (0.260%)。

4-2 三腳架置中裝置，測量國旗旗桿高度：  
平均誤差在 1.793%，與實驗四-1 相差不大。

4-3 APP 望遠功能，測量國旗旗桿高度：  
平均誤差在 1.406%，與實驗四-1 相差不大。

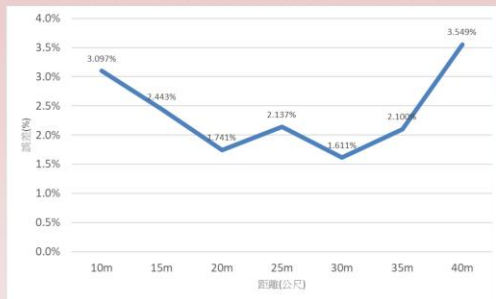
4-4 置中裝置+APP 望遠功能，測量國旗旗桿高度：



平均誤差在 0.868%，最準確的一次測量與旗桿實際高度誤差只有 0.2cm (0.016%)。

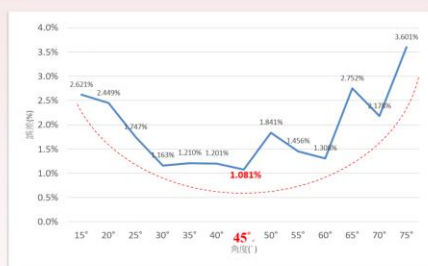
### 五 研究 找出誤差最小的測高位置

5-1 不同距離下，找出旗桿高度誤差最小的位置：



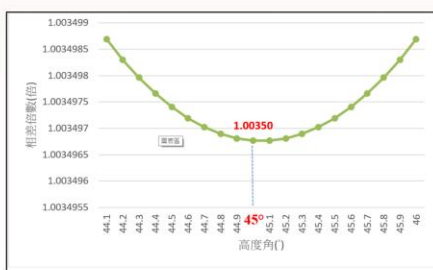
每隔 5m 測量一次高度，想找出最小誤差的位置，但似乎沒什麼規律性。

5-2 不同角度下，找出旗桿高度誤差最小的位置：



每隔 5° 測量一次高度，結果是在 45° 誤差值最小。

5-3 Excel 驗證是否在 45° 時，測量誤差值最小：



若要測量物體高度，距測量物高度角 45° 左右的地點，可以縮小測量的誤差程度。



## 六 研究 找出準確測量臺北 101 高度的方

## 6-2 加入海拔因素，校正測量臺北 101 高度

6-1 在臺北 101 高度角  $45^\circ$  周邊測量高度：

(1) 找出臺北 101 的 GPS 座標：



(2) 找出離臺北 101 高度角為  $45^\circ$  位置中，最適合的測量地點：



(3) 用 GPSVisualizer 網站找出這四個最適合測量地點之座標、與 101 距離：

地點	象山站	信義安康社區	松壽廣場	市府廣場
座標	25.032626, 121.569734	25.036519, 121.568743	25.038147, 121.565873	25.037934, 121.562991
與 101 距離	509.9 m	506.9 m	507.3 m	506.9 m

(4) 此四個地點測出臺北 101 高度的誤差值：

地點	象山站	信義安康社區	松壽廣場	市府廣場
平均誤差	2.981%	2.545%	4.323%	0.286%

結論：

- 總平均誤差 2.534%。
- 四個地點中，最準確地點為臺北市府廣場其平均誤差 0.286%。
- 臺北市府廣場單次最準確誤差只有 0.036%，與實際高度 509.2 m 誤差只有 18cm。

(1) 以 Google Earth 測量海拔高度：

地點	象山站	信義安康社區	松壽廣場	市府廣場
海拔	16m	19m	14m	19m
與 101 差距	- 5m	- 2m	- 7m	- 2 m

(2) 加入海拔高度校正後的結果如下：

地點	象山站	信義安康社區	松壽廣場	市府廣場
平均誤差	2.001%	2.152%	2.948%	0.356%

- 總平均誤差提升至 1.864% 變準確。
- 四個地點中，最準確地點依然是臺北市府廣場，但平均誤差稍降至 0.356%。
- 臺北市府廣場所有測量中，單次最準確誤差提升至 0.007%，與實際高度誤差只有 3cm。

## 伍、結論

利用下列軟、硬體輔助：



自拍三腳架：穩定手機觀查      手機：結合相關 APP 測量



高度角 APP      Excel 三角函數表      GPSVisualizer      Google 地球

測量臺北 101 高度結果為：

- 測量高度總平均誤差為 1.864%。
- 最準確的測量地點為臺北市府廣場，測得平均誤差為 0.356%。
- 臺北市府廣場所有測量中，單次最準確誤差為 0.007%，也就是測得高度 509.17 m，與實際高度誤差只有 3cm。
- 雖然總平均誤差沒有達成 1% 以下，但在臺北市府廣場測量平均誤差及單次最準確誤差都有達成誤差 1% 以下目標。

## 陸、延伸探討

- 測量 101 海拔時，由於 Google Earth 無法點選臺北 101 大樓正中央取海拔值，只能點選臺北 101 南側大門口取得海拔值，因此存在誤差。
- 雖然測量臺北 101 單次最精準的誤差達 0.007%，但所有測量平均誤差為 1.864%，並沒有達成預期 1% 以下的標準，因此有待後續改良。
- 希望未來能將此測量方法延伸運用，測量更遠方的物體，例如月球。