中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080415

交換訊息

學校名稱：新北市三峽區龍埔國民小學

作者：	指導老師：
小六 董宣樂 小四 林秉儒	龔凡凱

關鍵詞：最佳化、訊息、交換

摘要

從廣告影片中也能發掘有趣的數學題目。

本作品主要研究從廣告「交換名片」發想的數學問題：試求全體人員完成一對一交換名片所需**最少輪數**，我們得到最佳解；由於交換名片屬於交換訊息的一種，所以我們探討更一般化的情況，設計兩種交換訊息的方式：「攜帶」與「分送」，找出這兩種所需的最少輪數。前者的最少輪數和「**2 的 n 次方**」有關；後者的最少輪數則利用「**費氏 n−步數列**」解決。最後我們比較了三種方式的最少輪數。

貳、研究動機

一、廣告內容

《Eight: Business Cards》一來自日本的廣告，內容分別呈現了 2 人、3 人、4 人、5 人、6 人、9 人、20 人，各採用不同方式交換名片，最後為 100 人，100 人使用手機的電子名片交換 App──正是廣告主打的商品，以下圖 1─圖 5 呈現廣部份畫面。

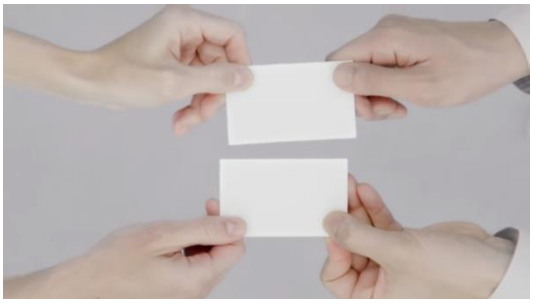


圖 1.　2 人交換名片

圖 2.　3 人交換名片

圖 3.　4 人交換名片

圖 4.　5 人交換名片

圖 5. 100 人交換名片

二、研究的契機

有同學看到網路的日本廣告，內容呈現 2 人、3 人、4 人、5 人、6 人、9 人、20 人、100 人交換名片的過程，雖然僅僅是個廣告，但我們聯想到一些數學問題：在一對一交換名片的情況下，每輪有一些人交換，那麼最少需要多少輪才會使得所有人完成交換名片？和同學分享這個問題後，去請教老師，經過討論後，我們討論更一般化的交換訊息，分別探討三種不同的方式，試求出最少輪數。

參、研究工具

一、計算紙、筆

肆、研究目的

本作品探討兩類得到訊息的方式所需的最少的輪數：第一類在二種不同的條件下，全體共 N 人，若每一個人都分別與其他 $N-1$ 人交換訊息完畢；第二類為從 1 個人開始傳送訊息，依給定方式傳送讓全部 N 人都取得。合計三種方式陳述如下：

一、在一對一交換訊息的情況下；

二、若能攜帶訊息替別人交換；

三、若一個人一次通知 1 個沒有訊息的人，至多通知訊息給 n 個人。

以上三種交換訊息方式的定義，在研究過程與討論的章節會詳細描述。

伍、文獻比較

屆次	作品名稱	作品大綱	本作品的與文獻相異之處
53	(高中組數學科) 來人啊！把訊息傳出去	全部 m 人，各有一項不同的訊息，一次對談人數為 n 人，探討最快讓 m 人擁有所有訊息的次數。	**1.規定的交換方式不同** **2.討論最少輪數。**
55	(國中組數學科) 打電話—尋找最佳解	n 人各有一則不同的訊息，利用打電話互換訊息，探討使每個人知道全部訊息所需的最少時間。	**規定的交換方式不同**
60	(本作品) 交換訊息	1. 全部 N 人，各有一項訊息，分別採「一對一」和「攜帶式」交換訊息的方式，探討所需最少輪數。 2. 1 人有全部的訊息，1 人 n 輪依次發給 n 人，探討使全部的人得到訊息所需最少輪數。	

補充說明 1(探討最少輪數的理由). 本作品規定的三種交換方式，各自的最少交換次數分別和 N 有固定的關係，在頁 28 的「五、交換次數」將給出計算過程；因而我們著重在最少輪數。

陸、研究過程與討論

一、符號

為了更簡潔的陳述作品，我們請老師指導使用數學符號。

符號 2. $R_{1-1}(N)$ 記作在 1 對 1 的條件下，N人交換完訊息所需的最少輪數。

符號 3. $Rb(N)$記作在攜帶訊息的條件下，N人交換完訊息所需的最少輪數。

符號 4. $R_n(N)$記作一次通知 1 個人訊息，最多通知n個人的條件下—也就是n次通知n人，N人得到所有訊息所需的最少輪數。

二、一對一交換訊息

(一)方式

方式 5(一對一交換訊息). 兩人同時交出訊息與收到訊息(如圖 1)，每一輪中 2 人 1 組互換訊息。

(二)試算數據. 我們稱每兩人交換訊息一次為「**1 次事件**」，為節省篇幅，$N=3$ 和$N=4$ 的計算過請參見實驗日誌，僅看$N=5$ 和$N=6$的計算。

1.5 個人. 設有 A、B、C、D、E 五個人，兩兩都交換訊息的全部事件如下：

AB	BC	CD	DE
AC	BD	CE	
AD	BE		
AE			
4 次	3 次	2 次	1 次

共有

$$4+3+2+1=10$$

個事件，由於每一輪至多有 2 對交換訊息，也就是單一輪最多完成 2 次事件，因而至少需要的輪數為

$$10\div2=5,$$

具體安排為

表 1. $N=5$，用 5 輪完成 10 次事件的安排

輪次	交換訊息的配對	未參與配對
1	BC DE	A
2	AD CE	B
3	AE BD	C
4	AC BE	D
5	AB CD	E

符號記作

$$R_{1-1}(5)=5。$$

2.6 個人. 設有 A、B、C、D、E、F 六個人，兩兩都交換訊息的全部事件如下：

AB	BC	CD	DE	EF
AC	BD	CE	DF	
AD	BE	CF		
AE	BF			
AF				
5 次	4 次	3 次	2 次	1 次

共有

$$5+4+3+2+1=15$$

個事件，由於每一輪至多有 3 對交換訊息，因而至少需要的輪數為

$$15\div3=5，$$

具體安排為

表 2. $N=6$，利用表 1，用 5 輪完成 15 次事件的安排

輪次	交換訊息的配對
1	BC DE AF
2	AD CE BF
3	AE BD CF
4	AC BE DF
5	AB CD EF

符號記作

$$R_{1-1}(6)=5。$$

5.最少輪數的安排. 根據$R_{1-1}(5)$、$R_{1-1}(6)$的討論過程，當 N 為奇數，最少輪數理想值為 N 輪，每一個人 1 輪恰與 1 人配對交換名片(訊息)，共需配對 N—1 人，每一個人出現在 N—1 輪後可不用再出現，換句話說，在 N 輪中出現 N—1 輪，表示恰有 1 輪沒有與人交換。當要安排 N+1 人時，可以利用先前奇數 N 人的安排，第 N+1 人分別與每一輪沒有參與配對的 1 人交換，如此一來，N+1 人便可在 N 輪完成交換名片(訊息)。因此，只要排出奇數 N 在 N 輪之中完成全部交換的事件，N+1 人也能在 N 輪之中完成全部交換的事件。

我們已分別找出 N＝7、N＝9、N＝11 的安排，也就得到 N＝8、N＝10、N＝12 的安排

表 3. $N=7$，用 7 輪完成 21 次事件的安排

輪次	N＝7 交換訊息的配對			未參與配對
1	BC	DE	AF	G
2	AD	CE	GF	B
3	AE	BD	CG	F
4	AG	BE	DF	C
5	BG	CD	EF	A
6	BF	AC	EG	D
7	CF	AB	DG	E

表 4. $N=8$，利用表 4 用 7 輪完成 28 次事件的安排

輪次	N＝8 交換訊息的配對			
1	BC	DE	AF	GH
2	AD	CE	GF	BH
3	AE	BD	CG	FH
4	AG	BE	DF	CH
5	BG	CD	EF	AH
6	BF	AC	EG	DH
7	CF	AB	DG	EH

表 5. $N=9$，用 9 輪完成 36 次事件的安排

輪次	N＝9 交換訊息的配對				未參與 配對
1	BC	DE	AF	GH	I
2	AD	CE	GF	IH	B
3	AE	BD	CG	FI	H
4	AG	BE	DI	CH	F
5	BG	CI	EF	AH	D
6	BF	AI	EG	DH	C
7	CF	IB	DG	EH	A
8	BH	DF	AC	GI	E
9	FH	CD	AB	EI	G

表 6. $N=10$，利用表 5，用 9 輪完成 45 次事件的安排

輪次	N＝10 交換訊息的配對				
1	BC	DE	AF	GH	IJ
2	AD	CE	GF	IH	BJ
3	AE	BD	CG	FI	HJ
4	AG	BE	DI	CH	FJ
5	BG	CI	EF	AH	DJ
6	BF	AI	EG	DH	CJ
7	CF	IB	DG	EH	AJ
8	BH	DF	AC	GI	EJ
9	FH	CD	AB	EI	GJ

表 7. $N=11$，用 11 輪完成 55 次事件的安排

輪次	N＝11 交換訊息的配對					未參與 配對
1	BC	DE	AF	GH	IJ	K
2	AD	CE	GF	IH	KJ	B
3	AE	BD	CG	FI	HK	J
4	AG	BE	DI	CK	FJ	H
5	BG	IK	EF	AH	DJ	C
6	BF	AK	EG	DH	CJ	I
7	CF	BI	FK	EH	AJ	D
8	BH	DK	AC	GI	EJ	F
9	FH	CD	KB	EI	GJ	A
10	BJ	CH	AI	DF	GK	E
11	HJ	CI	DG	AB	EK	G

表 8. $N=12$，利用表 7，用 11 輪完成 66 次事件的安排

輪次	N＝12 交換訊息的配對					
1	BC	DE	AF	GH	IJ	KL
2	AD	CE	GF	IH	KJ	BL
3	AE	BD	CG	FI	HK	JL
4	AG	BE	DI	CK	FJ	HL
5	BG	IK	EF	AH	DJ	CL
6	BF	AK	EG	DH	CJ	IL
7	CF	BI	FK	EH	AJ	DL
8	BH	DK	AC	GI	EJ	FL
9	FH	CD	KB	EI	GJ	AL
10	BJ	CH	AI	DF	GK	EL
11	HJ	CI	DG	AB	EK	GL

(三)一般化. N個人，兩兩交換完訊息的事件共有

$$(N-1)+(N-2)+\cdots+3+2+1=\frac{N\times(N-1)}{2}$$

以下分N為奇數和N為偶數。

1. 當N為奇數，最少輪數的理想值. 每輪至多有 $\frac{N-1}{2}$ 對交換名片，所以需要的最少輪數為

$$\frac{N\times(N-1)}{2}\div\frac{N-1}{2}=N$$

這裡我們遇到一個困難：要排出奇數 N個人，在 N輪裡呈現$\frac{N\times(N-1)}{2}$個事件，**一直沒有找到好的作法**—更清楚的說，沒有找到有規律的作法，在計算每一個奇數 N時，都是通過**試誤法**來完成。目前最多找到 11 人的排法，11 人以上開始計算量變大，不易排出來，因此我們給出猜想如下：

猜想 6. N為奇數，要將 $\frac{N\times(N-1)}{2}$ 件事件全部呈現出來的最少輪數為N。

2. 當N為偶數，最少輪數的理想值. 每輪至多有 $\frac{N}{2}$ 對交換訊息，所以需要的最少輪數為

$$\frac{N\times(N-1)}{2}\div\frac{N}{2}=N-1$$

原本我們設想得到奇數 N—1 的安排後，就能依每一輪落單的 1 人配上第 N人，便得到偶數的安排，目前奇數 N沒有具體的排法，因此只看理想值，為了方便敘述，回憶頁 4 符號 2，我們定義

$$R^{*}{}_{1-1}(N)$$

為$R_{1-1}(N)$的理想值，$R^{*}{}_{1-1}(N)\leq R_{1-1}(N)$。統整 N分別為奇數和偶數的討論可得到：

$$\begin{cases} R^{*}{}_{1-1}(N)=N & \text{當}N\text{為奇數，} \\ R^{*}{}_{1-1}(N)=N-1 & \text{，當}N\text{為偶數。} \end{cases}$$

三、攜帶訊息

(一)方式

方式 7(攜帶訊息). 兩人將訊息交給其中一方，交出訊息者等待。收到訊息的人繼續與未交出訊息者交換，同樣收訊息的人繼續與人交換，交出者等待。最終餘 2 人，再互換訊息，接著最終取得所有訊息的 2 人，分別依自己收訊息的過程，逆向交給那些等待的人，給他們還沒取得之訊息。直到每個人都拿到其他$N-1$人的訊息。

以全體 5 人依方式 7 交換訊息為例，見圖 9：

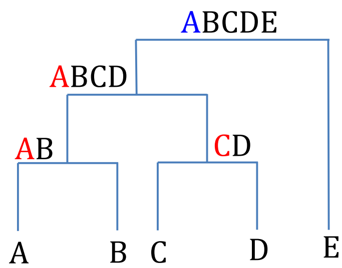


圖 6. 5 個人依攜帶訊息方式交換的流程

五個人 A、B、C、D、E 依「攜帶訊息」的方式交換的意思為：A 和 B 交換後，A 帶著 B 的訊息；C 和 D 交換後，C 帶著 D 的訊息，然後 A 帶走 C 手上的訊息。接著 A 帶著 B、C、D 的訊息和 E 交換，E 取得 A、B、C、D 的訊息。最後 A 沿著原來的路線分別給 B、C、D 手上沒有的訊息。直到最後剩 2 人交換訊息前，其餘交換方式為一人帶走，一人交出(兩人第一次接觸時，也可以先交換彼此手上的訊息，此不影響最少輪數)，圖 6 紅色字母表示帶著對方的訊息繼續向下一個人交換

當然 5 個人攜帶訊息的交換不只是圖 6 的模式，也可以如圖 7：

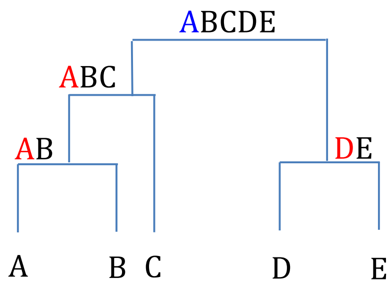


圖 7. 另一種 5 個人依攜帶訊息方式交換的流程

(二)計數最少輪數的方法. 以下以 8 個人為例，設有 ABCDEFGH 八個人要以攜帶訊息方式交換，過程如圖 8：

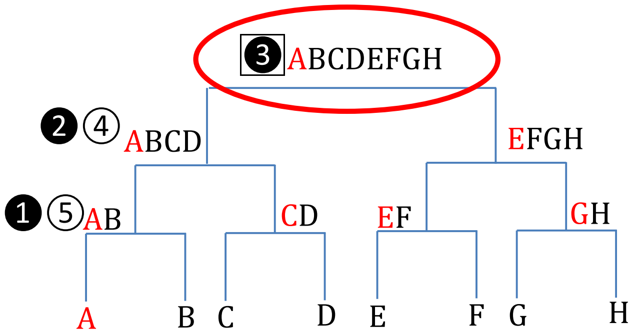


圖 8. 8 個人依攜帶訊息方式交換，計數輪數，紅圈表示只花 1 輪的時間

黑色帶圈序號表示 A 一路收走訊息，直到最上層與 E 交換訊息，紅圈處表示只花 1 輪的時間。白色帶圈序號表示 A 沿著收訊息的路徑分別交給 C 和 B 訊息。可知 A 費了 5 輪的時間。

驗證 5 輪是最少輪數，注意到第 1 輪至多有 4 人可以帶走訊息，

$$8 \div 2 = 4。$$

第 2 輪至多有 2 人可以帶走訊息，

$$4 \div 2 = 2，$$

第 3 輪剛好剩 2 人 1 對 1 交換訊息，

$$2 \div 2 = 1，$$

之後 A 和 E 各自延著收訊息的路線逆向，給先前被收走訊息的人他們手上沒有的訊息。A 在第 4 輪發給第 2 輪中交出訊息的人、在第 5 輪發給第 1 輪中交出訊息的人。得知最少輪數＝5，符號記作

$$Rb(8) = 5，$$

注意到圖 7 的輪數也是 5。

(三)2 人─10 人攜帶訊息最少輪數

$2 \leq N \leq 20$的攜帶交換訊息過程記錄在實驗日誌中，我們將$1 \leq N \leq 20$的$Rb(N)$統整在表 9。

表 9. $Rb(N)$，$1 \leq N \leq 20$的統整

N（人數）	$Rb(N)$攜帶交換訊息的最少輪數
1	**0**
2	**1**
3	**3**
4	**3**
5	**5**
6	**5**
7	**5**
8	**5**
9	**7**
10	**7**
11	**7**
12	**7**
13	**7**
14	**7**
15	**7**
16	**7**
17	**9**
18	**9**
19	**9**
20	**9**

.

(四)分析

從表 9 觀察出，$Rb(N)$以N＝2、4、8、16 為分界，特別列出N＝2、4、8、16 的$Rb(N)$值於表 10。

表 10. N＝2、4、8、16 的$Rb(N)$值

N(人數)	N化成 2 的 n 次方	$Rb(N)$ 攜帶交換訊息的最少輪數
2	2^1	1
4	2^2	3
8	2^3	5
16	2^4	7

從 2 的指數和最少輪數的關係，可觀察出

$$Rb(2) = R_b(2^1) = 1 = 2 \times 1 - 1$$

$$Rb(4) = R_b(2^2) = 3 = 2 \times 2 - 1$$

$$Rb(8) = R_b(2^3) = 5 = 2 \times 3 - 1$$

$$Rb(16) = R_b(2^4) = 7 = 2 \times 4 - 1$$

推論有如下關係：

(1) $$Rb(2^m) = 2m - 1，$$

同時比對表 10 和(1)，得到

(2) 當$2^m + 1 \leq N < 2^{m+1}$，則有$Rb(N) = 2m + 1$。

(五)(1)和(2)對一般化成立

我們將分別說明(1)和(2)成立對任意正整數m成立，利用討論$Rb(8) = 5$的過程(頁 10)。

說明(1)對任意正整數m成立. 當$N = 2^m$，注意到每一輪至多有一半的人帶走訊息，剩一半的人等待拿到其它人的訊息，每一輪最多拿走訊息的人數(等於等待的人數)計算過程如下：

輪數	每一輪最多拿走訊息的人數
1	$2^m \div 2 = 2^{m-1}$
2	$2^{m-1} \div 2 = 2^{m-2}$
3	$2^{m-2} \div 2 = 2^{m-3}$
$\vdots$	$\vdots$
$m-1$	$2^2 \div 2 = 2^1$
m	$2 \div 2 = 1$

合計經過$m-1$輪取走訊息，第m輪只剩最後 2 人交換訊息(如圖 8 紅圈處)，然後這 2 人沿著各輪收名片逆向發訊息給各輪交出訊息的人，最少輪數的理想值合計為

$$2 \times (m-1) + 1 = 2m - 1。$$

實際上也能排得出上述理想最少輪數，只要依「**單淘汰賽制**」安排即可，如圖 8，因此我們得到

$$Rb(2^m) = 2m - 1。$$ □

說明(2)對任意正整數m成立. 根據(1)可知

$$Rb(2^{m+1}) = 2m + 1，$$

而對於$2^m + 1 \le N \le 2^{m+1}$，總有

(3) $$Rb(2^m + 1) \le Rb(N) \le Rb(2^{m+1}) = 2m + 1。$$

所以只要說明

(4) $$Rb(2^m + 1) = 2m + 1$$

成立即可，

先計數$N = 2^m + 1$第 1 輪最多帶走訊息的人數為

$$[(2^m + 1) \div 2] = 2^{m-1}，其中[\ \ ]為高斯符號，$$

同時表示最多有2^{m-1}人等待接收訊息，不再參與下一輪的交換訊息，因為

單一輪最多收走訊息的人數＝單一輪最多不再參與下一輪的交換訊息的人數。

推得第 2 輪最多要參與交換訊息的人數為

$$2^m + 1 - 2^{m-1} = 2^{m-1} + 1。$$

第 2 輪最多帶走訊息的人數為

$$[(2^{m-1} + 1) \div 2] = 2^{m-2}，$$

表示最多有2^{m-2}人等待接收訊息，不再參與下一輪的交換訊息，所以第 3 輪最多要參與交換訊息的人數為

$$2^{m-1} + 1 - 2^{m-2} = 2^{m-2} + 1。$$

第 3 輪最多帶走訊息的人數為

$$[(2^{m-2} + 1) \div 2] = 2^{m-3}，$$

表示最多有2^{m-3}人等待接收訊息，不再參與下一輪的交換訊息，表示第 4 輪最多要參與交換訊息的人數為

$$2^{m-2} + 1 - 2^{m-3} = 2^{m-3} + 1。$$

$$\vdots$$

$$[(2^1 + 1) \div 2] = 1，$$

$$2^1 + 1 - 1 = 2。$$

$$2 \div 2 = 1。$$

前m輪收走訊息，第$m+1$輪恰有 2 人交換訊息，之後再花m輪的時間，沿著收訊息的各輪逆向一一發給各輪收走訊息的人，合計最少輪數的理想值為

(5) $$2 \times m + 1。$$

同樣可藉由「**單淘汰賽制**」的過程安排，就能使用(5)的輪數完成訊息交換，故得到

$$Rb(2^m + 1) = 2m + 1，$$

也就表示(2)成立。 □

四、分送訊息

(一)方式. 我們從班上老師請同學發作業產生靈感，設計出分送訊息的規定：

方式 8(分送訊息). 第 1 個人拿到全部訊息後，規定每 1 輪通知 1 個沒有訊息的人，取得訊息的人下一輪可以開始通知其它沒有訊息的人，每個人至多通知n位。

承方式 8，我們想知道最少需要多少輪才會使所有人都取得訊息？

首先我們將發訊息的人之移動路線記錄起來，也就可得出發給的人數，見圖 9：

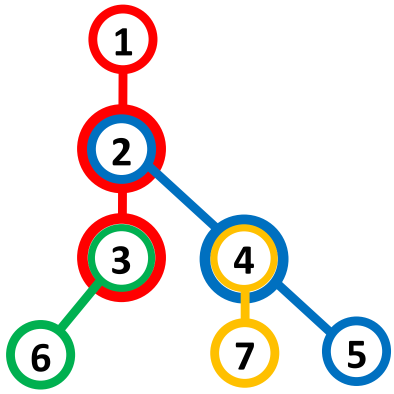


圖 9. $N=7$，一種依方式 8 傳訊息的路線。

圖 9 的說明：

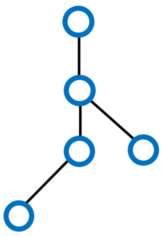
見紅線：1 號發給 2 號，然後 1 號發給 3 號
見藍線：2 號發給 4 號，然後 2 號發給 5 號
見綠線：3 號發給 6 號，
見黃線：4 號發給 7 號

接著分別觀察$n=2$、3、4的情形。

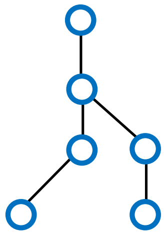
(二)觀察數據. 1 個「○」表示 1 個人。

1. $n=2$

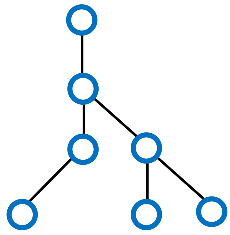
a.1 人　b.2 人　c.3 人　d.4 人



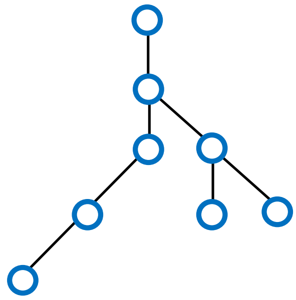
e.5 人



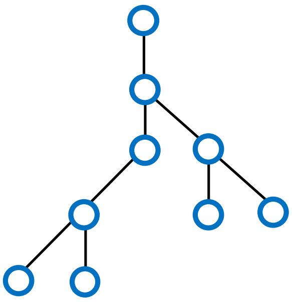
f.6 人



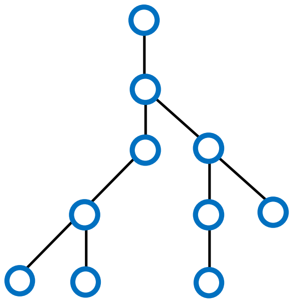
g.7 人



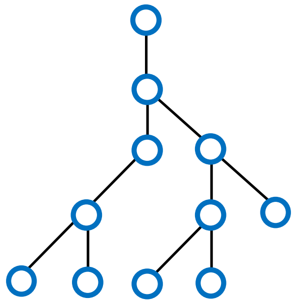
h.8 人



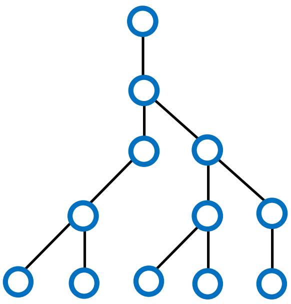
i.9 人



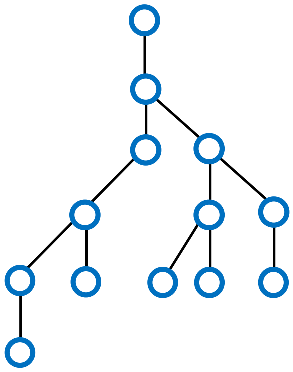
j.10 人



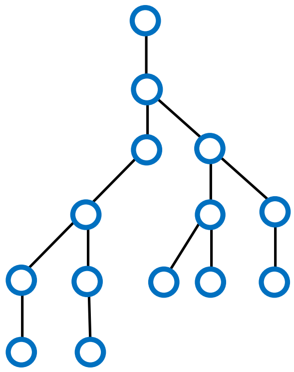
k.11 人



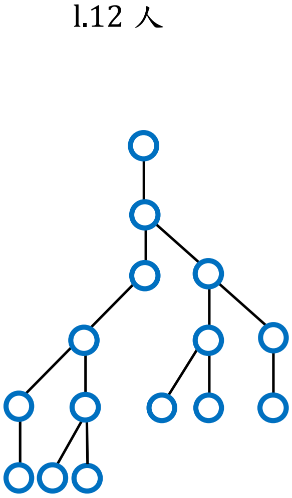
l.12 人



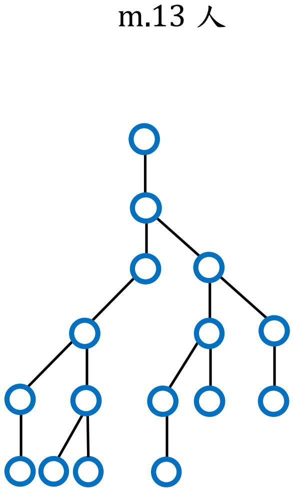
m.13 人



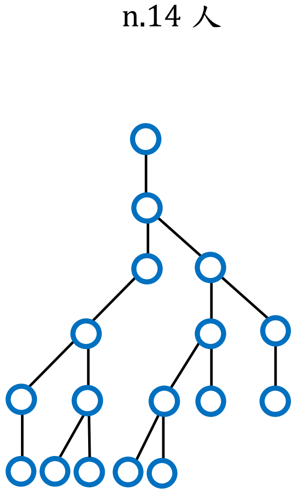
n.14 人



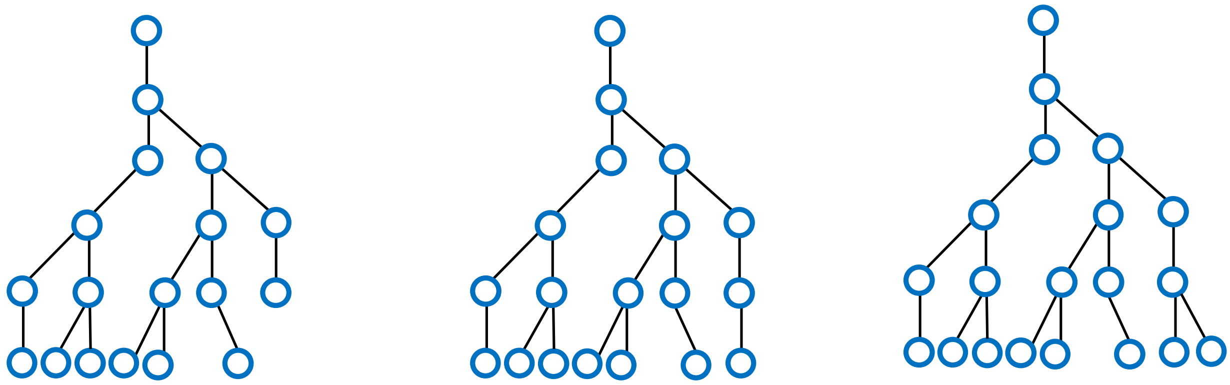
o.15 人



p.16 人



q.17 人



r.18 人　　s.19 人　　t.20 人

圖 10. n = 2，每人至多發給2人訊息，$1 \le N \le 20$。

分送訊息最少輪數的證明.

注意圖 9 和圖 10 將每個人發訊息的路線畫出來，每人已充份使用分送訊息的空間，不會再發給更多的人，表示無法使用更少輪數傳遞完全部的訊息，因而依圖 9 和圖 10 的畫法得到的是最少輪數。

將$n = 2$，$1 \le N \le 20$的數據列在表 11：

表 11. $R_2(N)$分送交換訊息的最少輪數

N（人數）	$R_2(N)$ 分送交換訊息的最少輪數
1	0
2	1
3	2
4	2
$5 \le N \le 7$	3
$8 \le N \le 12$	4
$13 \le N \le 20$	5

3. $n=3$，$1 \le N \le 20$. 從圖 10 得到靈感，先將完整的 5 輪一次畫出來，如圖 11：

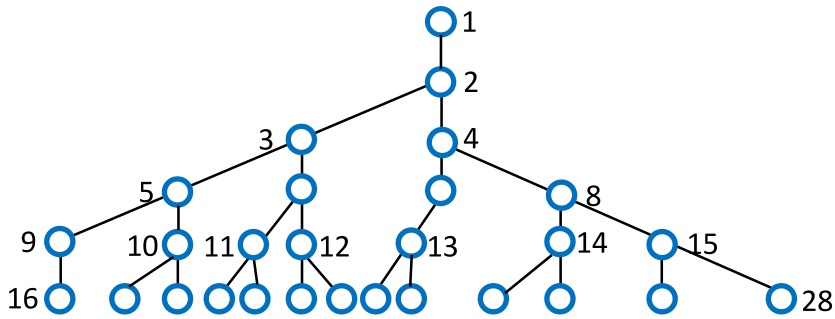


圖 11. $n = 31 \le N \le 28$，編號為手上已有訊息的人數，同一輪由左至右編號值由小到大。

表 12. $R_3(N)$分送交換訊息的最少輪數

N（人數）	$R_3(N)$分送交換訊息的最少輪數
1	0
2	1
3、4	2
$5 \le N \le 8$	3
$9 \le N \le 15$	4
$16 \le N \le 28$	5

3. $n = 4$，$1 \le N \le 60$. 見圖 12。

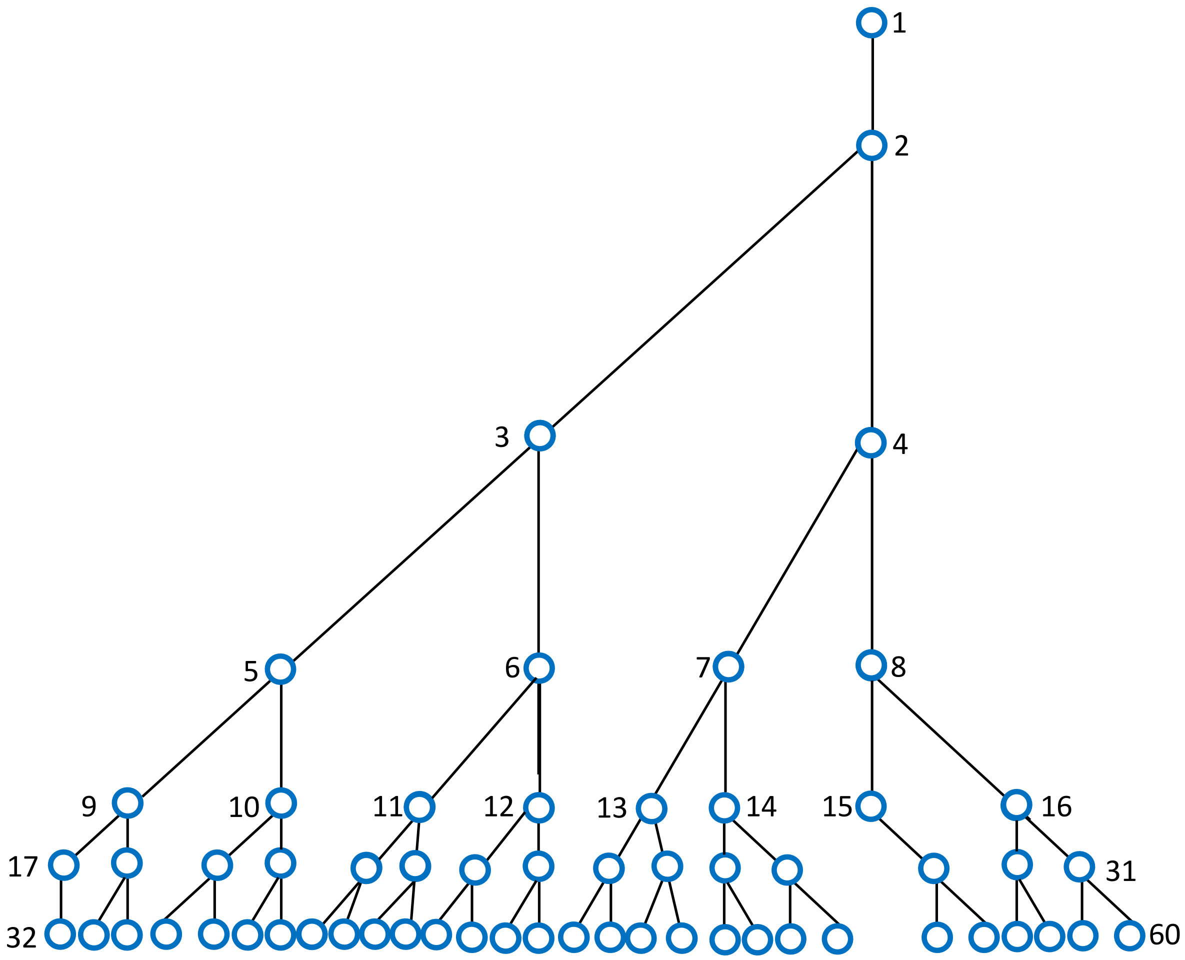


圖 12. $n = 4$，至多發給4人名片，$1 \le N \le 60$

表 13. $R_4(N)$分送交換訊息的最少輪數

N（人數）	$R_4(N)$分送交換訊息的最少輪數
1	0
2	1
3、4	2
$5 \le N \le 8$	3
$9 \le N \le 16$	4
$17 \le N \le 31$	5
$32 \le N \le 60$	6

(三)費氏 n-步數列.

從表 11─表 13 我們統整每一輪的數量如下：

表 14.統整表 11─表 13 每一輪的收到訊息人數

輪數 / n的值	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
n=2	1	1	2	3	5	8	13
n=3	1	1	2	4	7	13	24
n=4	1	1	2	4	8	15	29

在整數數列線上大全(OEIS)輸入表 6 的數據，查得$n=2$為前 7 項的費氏數列，$n=3$為前 7 項的費氏 3-步數列，$n=4$形成的數列為前 7 項的費氏 4-步數列；費氏$n-$步數列的定義為(為了配合本作品，項數對應的值與 OEIS 提供的定義略有出入，不過沒有影響正確性)：

補充說明 9(設定探討費氏數列的理由). 將表 14 的數據輸入 OEIS 查詢，得到的數列不只費氏數列一種，之所以認為是費氏數列，我們將圖 9 和圖 10 延伸試算，與費氏數列的圖相比，相當符合，因而先設定為費氏數列，然後給出驗證確定。

定義 10(費氏n-步數列).

$$\begin{cases} F_0^{(n)}=F_1^{(n)}=1，F_k^{(n)}=2^{k-1}，2\le k\le n\ 。\\ F_k^{(n)}=F_{k-1}^{(n)}+F_{k-2}^{(n)}+F_{k-3}^{(n)}+\cdots+F_{k-n}^{(n)}，k\ge n。\end{cases}$$

(四)是費氏 n-步數列的理由. 我們將圖 10-t、圖 11 和圖 12 適當的著色圓圈，分別得到圖 13、圖 14 和圖 15，然後要利用圖 13—圖 15 分說明為何表 6 呈現費氏 n-步數列。

1. n＝2，是費氏數列的理由.

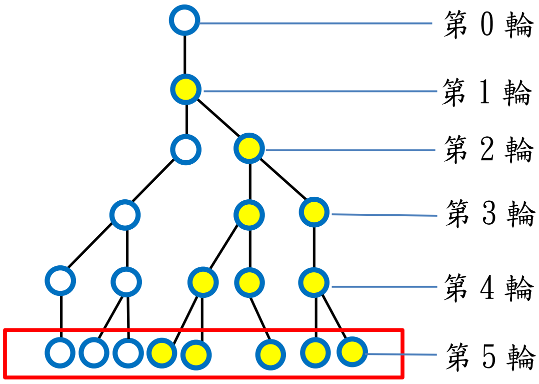


圖 13. $n=2$，費氏數列，黃色表示以第二輪拿到訊息的人為首，形成的分支。看得出紅框那一輪的數量由前 1 項的數量和前 2 項的數量的和組成

從顏色的分布來看，可看出第 5 輪的組成分別由第 1 輪的人開始(黃色)和第 2 輪的人開始(白色部份)生成的後代組成，所以有

第 5 輪的人數＝第 1 輪的人開始生成的人數＋第 2 輪的人開始生成的人數

也就是這一項的人數等於前兩項人數的和。

2.n＝3，是費氏 3-步數列的理由.

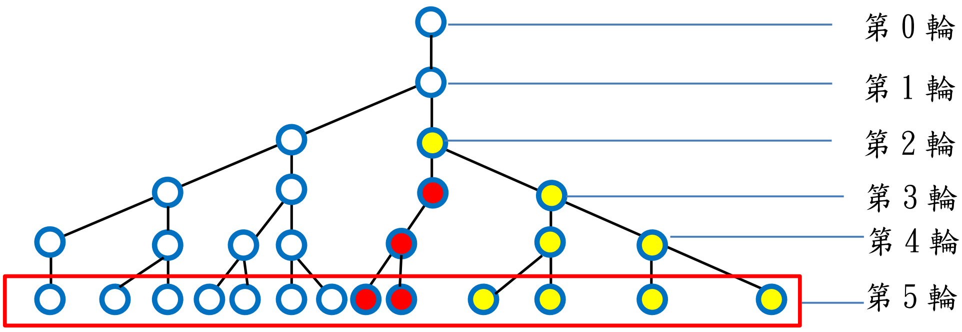


圖 14. $n=3$，費氏 3-步數列，黃色表示以第二輪取得訊息的人為首，形成的分支、紅色表示以第三輪拿到訊息的人為首，形成的分支。看得出紅框這一輪的值由前 1 項的數量、前 2 項的數量和前 3 項的數量和組成

從顏色的分布來看，可看出第 5 輪的組成分別由第 1 輪的人開始(白色)和第 2 輪的人開始(黃色部份)，以及第 3 輪起的人(紅色)生成的後代組成，所以有

第 5 輪的人數＝第 1 輪的人開始生成的人數＋第 2 輪的人開始生成的人數＋

＋第 3 輪的人開始生成的人數

也就是這一項的人數等於前三項人數的和。

3. n＝4，是費氏 4-步數列的理由.

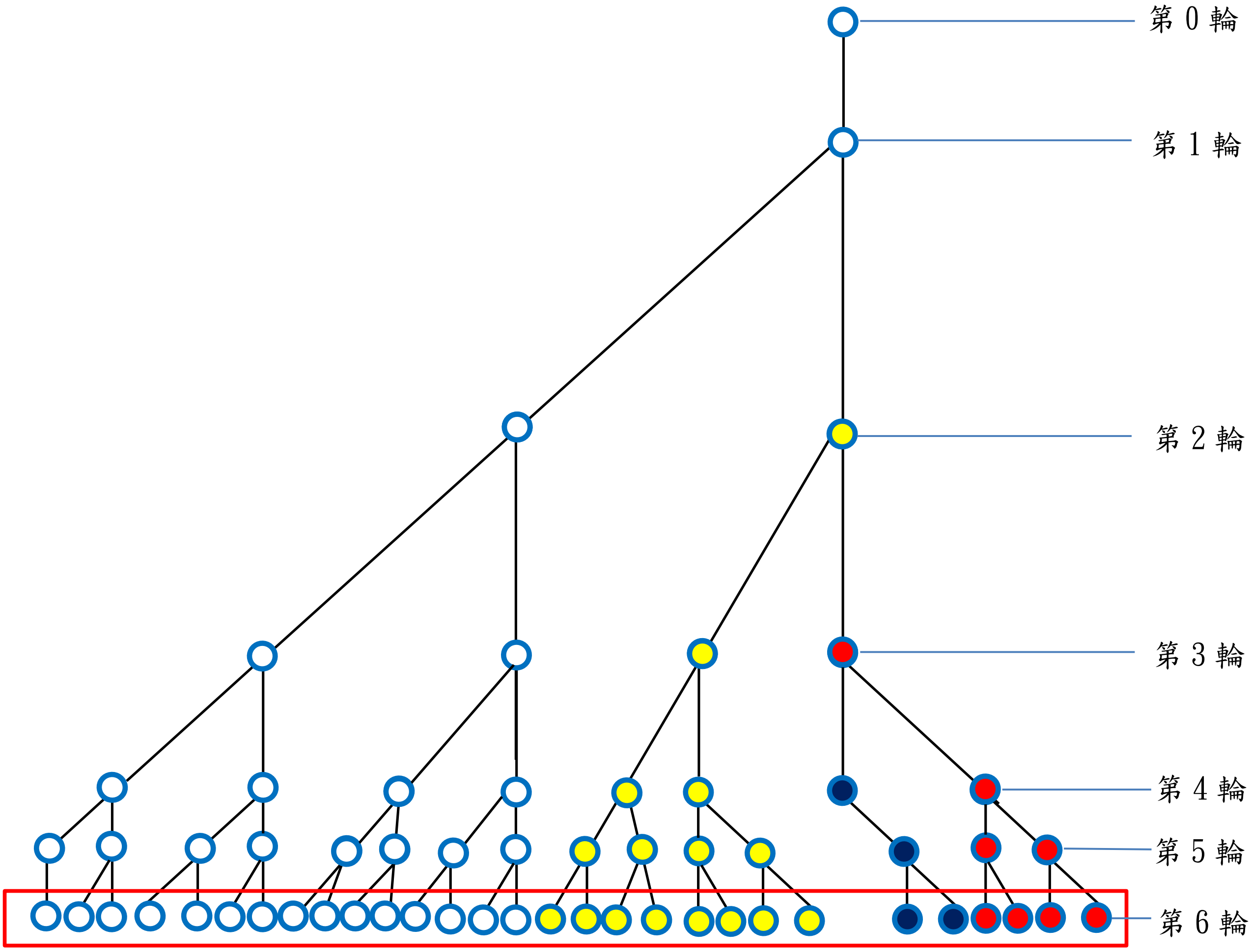


圖 15. 費氏 4-步數列，紅框處的人數由前 1 項的值、前 2 項的值、前 3 項和前 4 項的和組成

從顏色的分布來看，可看出第 6 輪的組成分別由第 1 輪的人開始(白色)和第 2 輪的人開始(黃色部份)，以及第 3 輪起的人(紅色)，第 4 輪起(藍色)的人分別生成的後代組成，所以有

第 6 輪的人數＝第 1 輪的人開始生成的人數＋第 2 輪的人開始生成的人數＋

＋第 3 輪的人開始生成的人數＋第 4 輪的人開始生成的人數

也就是這一項的人數等於前四項人數的和。

4.統整初始值和遞迴關係. 利用圖 13—圖 15 觀察出初始值與遞迴關係對一般化都成立的理由。

(1)初始值

第 2 個拿到訊息的人在第 2 輪開始發放，所以第 0 輪和第 1 輪都是 1，而從第 1 輪—第 2 輪起持續一分為二，**這一代的數量都是前一代的 2 倍**，直到第n輪為止，因為自第$\boldsymbol{n+1}$輪起，第 1 個發訊息的人停止動作了。故第 0 輪到第n輪，各輪收到訊息人數分別為：

$$1、1、2、4、8、16、\ldots、2^{n-1}$$

(2)遞迴關係

第 1 個人發訊息的過程，會產生新的n個人，所以**第$\boldsymbol{n+1}$輪起，會分別是收到這$\boldsymbol{n}$個人發的訊息的人，而這$\boldsymbol{n}$個人**，分別在第 1 輪、第 2 輪、第 3 輪、…、第n輪開始出現，各自發給了$F_{k-1}^{(n)}$、$F_{k-2}^{(n)}$、$F_{k-3}^{(n)}$、⋯、$F_{k-n}^{(n)}$個人，所以有

$$F_k^{(n)} = F_{k-1}^{(n)} + F_{k-2}^{(n)} + F_{k-3}^{(n)} + \cdots + F_{k-n}^{(n)}，k \ge n。$$

(五)最少輪數

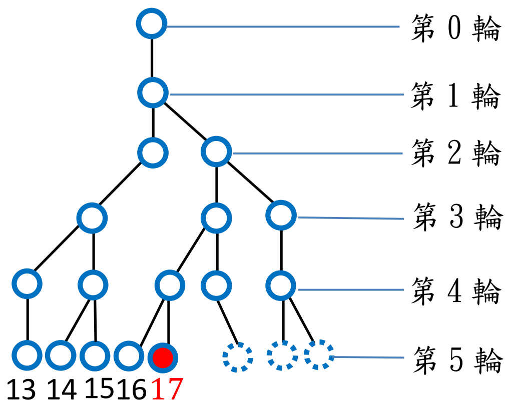


圖 16. $n = 2$，17 人全部得到訊息最少要 5 輪。

以$n = 2$，$N = 17$為例，觀察圖 16，可看出

$$F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 < 17 \le F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5，$$

推得

$$R_2(17) = 5。$$

接下來試算更多數據，整理成表 15—表 17，分別比較N(人數)和費氏n-步數列和。

表 15. 根據表 11 的數據，比較N(人數)和費氏數列和

N(人數)	$R_2(N)$ 分送交換訊息的最少輪數	N(人數)和費氏數列和的比較
1	0	$1 = F_0$
2	1	$2 = F_0 + F_1$
3	2	$4 = F_0 + F_1 + F_2$
4	2	
$5 \le N \le 7$	3	$7 = F_0 + F_1 + F_2 + F_3$
$8 \le N \le 12$	4	$12 = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4$
$13 \le N \le 20$	5	$20 = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5$

表 16. 根據表 12 的數據，比較N(人數)和費氏 3-步數列和

N(人數)	$R_3(N)$分送交換訊息的最少輪數	N(人數)和費氏 3-步數列和的比較
1	0	$1 = F_0^{(3)}$
2	1	$2 = F_0^{(3)} + F_1^{(3)}$
3、4	2	$4 = F_0^{(3)} + F_1^{(3)} + F_2^{(3)}$
$5 \le N \le 8$	3	$8 = F_0^{(3)} + F_1^{(3)} + F_2^{(3)} + F_3^{(3)}$
$9 \le N \le 15$	4	$15 = F_0^{(3)} + F_1^{(3)} + F_2^{(3)} + F_3^{(3)} + F_4^{(3)}$
$16 \le N \le 28$	5	$28 = F_0^{(3)} + F_1^{(3)} + F_2^{(3)} + F_3^{(3)} + F_4^{(3)} + F_5^{(3)}$

表 17. 根據表 13 的數據，比較N(人數)和費氏 4-步數列和

N(人數)	$R_4(N)$分送交換訊息的最少輪數	N(人數)和費氏 4-步數列和的比較
1	0	$1 = F_0^{(4)}$
2	1	$2 = F_0^{(4)} + F_1^{(4)}$
3、4	2	$4 = F_0^{(4)} + F_1^{(4)} + F_2^{(4)}$
$5 \le N \le 8$	3	$8 = F_0^{(4)} + F_1^{(4)} + F_2^{(4)} + F_3^{(4)}$
$9 \le N \le 16$	4	$16 = F_0^{(4)} + F_1^{(4)} + F_2^{(4)} + F_3^{(4)} + F_4^{(4)}$
$17 \le N \le 31$	5	$31 = F_0^{(4)} + F_1^{(4)} + F_2^{(4)} + F_3^{(4)} + F_4^{(4)} + F_5^{(4)}$
$32 \le N \le 60$	6	$60 = F_0^{(4)} + F_1^{(4)} + F_2^{(4)} + F_3^{(4)} + F_4^{(4)} + F_5^{(4)} + F_6^{(4)}$

從表 15—表 17 得知，若

$$F_0^{(n)}+F_1^{(n)}+F_2^{(n)}+F_3^{(n)}+\cdots+F_{k-1}^{(n)}<N\leq\ F_0^{(n)}+F_1^{(n)}+F_2^{(n)}+F_3^{(n)}+\cdots+F_k^{(n)}$$

則

$$R_n(N)=k。$$

例 11(求$N=200$，$n=5$ 依方式 8 交換名片所需的最少輪數). 分別考慮費式 5-步數列前 8 項和前 9 項的和：

$$\begin{aligned}&F_0^{(5)}+\ F_1^{(5)}+F_2^{(5)}+F_3^{(5)}+F_4^{(5)}+F_5^{(5)}+F_6^{(5)}+F_{7}^{(5)}=\\&=1+1+2+4+8+16+31+61=\\&=124\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&F_0^{(5)}+F_1^{(5)}+F_2^{(5)}+F_3^{(5)}+F_4^{(5)}+F_5^{(5)}+F_6^{(5)}+F_7^{(5)}+F_{8}^{(5)}=\\&=1+1+2+4+8+16+31+61+120=\\&=244\end{aligned}$$

$$124<200<244$$

我們有

$$R_5(200)=8。$$

五、三種交換訊息方式的最少輪數比較

(一)列表觀察

表 18. 三種交換訊息方式的最少輪數比較

最少輪數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R^*{}_{1-1}(N)$	1	1	3	3	5	5	7	7	9	9
$Rb(N)$	1	1	3	3	5	5	5	5	7	7
$R_2(N)$	0	1	2	2	3	3	3	4	4	4
$R_3(N)$	0	1	2	2	3	3	3	3	4	4
$R_4(N)$	0	1	2	2	3	3	3	3	4	4

從表 18 的紅框處可知

(6) $$R_n(N)<Rb(N)<R^*{}_{1-1}(N)，N\geq 7。$$

(二)最少輪數大小不同的理由

1. $Rb(N) < R^{*}{}_{1-1}(N)$.

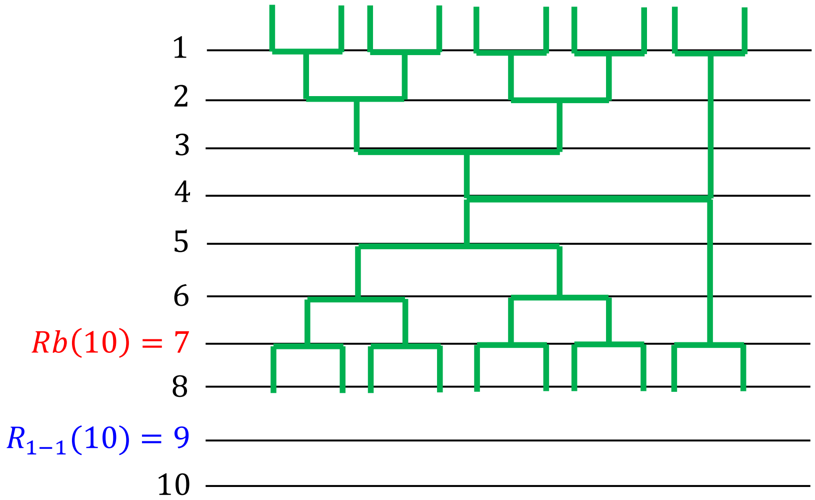


圖 17. $N = 10$的一對一交換與攜帶訊息的最少輪數比較

> $Rb(N) < R^{*}{}_{1-1}(N)$*的理由.* 觀察圖 17，因為$R^{*}{}_{1-1}(N)$的值不是N就是$N-1$，因而N加 2，輪數加 1；而$Rb(N)$的N加上 2 的某次方(視目前輪數而定)，輪數才會+2(見頁 11 表 9)，所以一對一需要輪數會比攜帶式來得多。

2. $R_n(N) < Rb(N)$. 只要說明

(7)
$$R_2(N) < Rb(N)$$

即可，因為

(8)
$$R_{n_1}(N) \leq R_{n_2}(N)\text{，當}n_1 > n_2 \text{ 。}$$

當費氏n-步數列的n愈大，同樣的值，會介於數列中更前面的項數之間，例如

$$F_{12} < 200 < F_{13}\text{，}$$

$$F_{10}^{(3)} < 200 < F_{11}^{(3)}\text{，}$$

$$F_{9}^{(4)} < 200 < F_{10}^{(4)}\text{。}$$

所以(8)成立。

接著開始說明$R_2(N) < Rb(N)$，查詢整數數列線上大全(OEIS)，編號 A000079(2 的 n 次

方)和 A000045(費氏數列)提供的數據表，得到表 19：

表 19. $Rb(N)$和$R_2(N)$的比較， $Rb(N)<R_2(N)$，而且兩者差距愈來愈大

$\boldsymbol{N}$	1	10	100	1000	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$Rb(N)$	1	7	13	19	27	33	39	47	53
$R_2(N)$	1	4	9	14	18	23	28	33	37

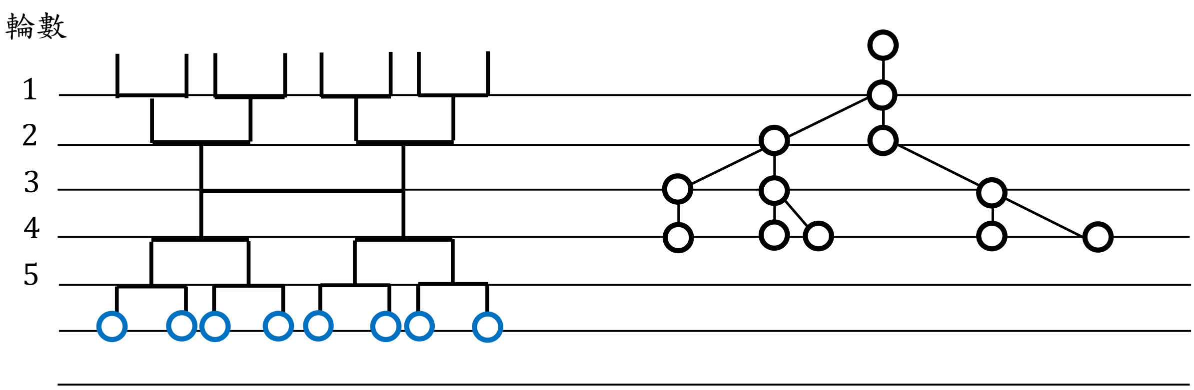


圖 18. $Rb(8)=5$(左)和$R_2(12)=4$(右)的示意圖

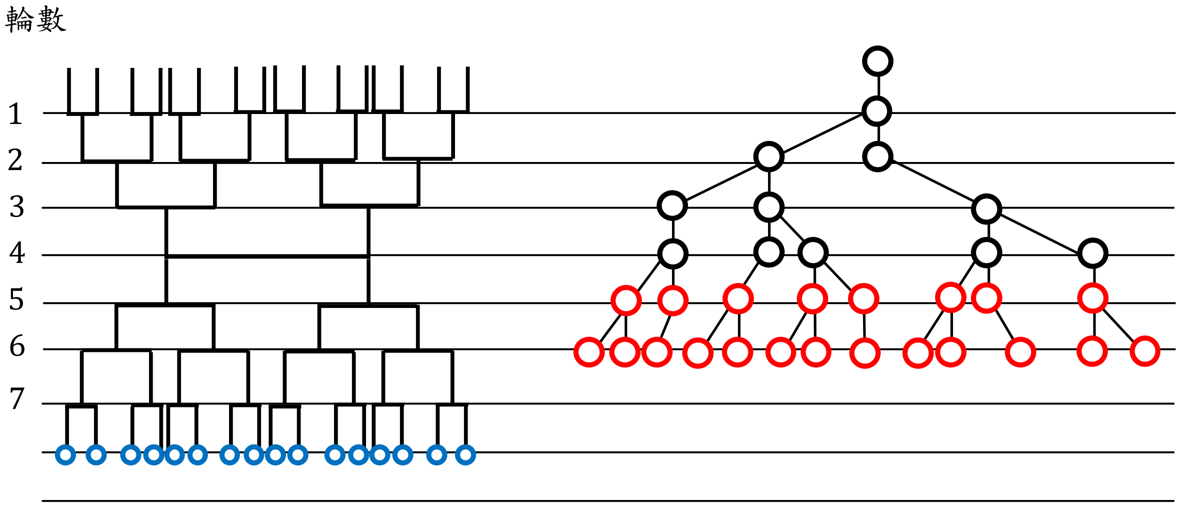


圖 19. $Rb(16)=7$(左)和$R_2(33)=6$(右)的示意圖

輪數同樣增加 2 輪，攜帶交換的數量最多增加$2^3=8$人(見圖 19 和圖 18 的藍圈數量差)；分送訊息的人數量增加(即圖 19 的紅圈數量)

$$F_6+F_5=21。$$

得到分送訊息兩輪中能拿到訊息的人數比攜帶訊息的人數還多，也就是分送訊息所需的輪數

比攜帶訊息來得少，因而(7)成立。

甚至我們還可得到F_{2k-1}和2^k的差距隨著k愈大而愈大，見結果 12。

結果 12.

$$F_{2k-1} - 2^k > F_{2k-2}\text{，}k \geq 7\text{。}$$

說明. 首先有

(9) $$F_{13} - 2^7 = 249 > F_{12}\text{，}$$

因為

(10) $$F_{13} > 2 \times F_{11}\text{，}$$

故

(11) $$F_{15} - F_{14} > 2 \times F_{11} = 2 \times (F_{13} - F_{12}) > 2 \times 2^7 = 2^8\text{，}$$

推得

(12) $$F_{15} - 2^8 > F_{14}\text{。}$$

繼續依(9)、(10)和(11)的方式計算，就會逐步得出

$$F_{17} - 2^9 > F_{16}\text{，}$$

$$F_{19} - 2^{10} > F_{18}\text{，}$$

如此一來，結果 12 成立。 □

結果 12 解釋了表 19 呈現的，兩者的輪數愈差愈多的原因。

五、交換次數

這裡針對補充說明 1 詳細說明：三種交換訊息方式的最少次數分別和N有固定的關係。

(一)一對一交換訊息的次數

即為頁 7 的事件總數

$$\frac{N \times (N-1)}{2}$$

(二)攜帶訊息的次數

依單淘汰賽制的觀點，如同計算比賽場次，只是要搭配本作品的最少輪數計數方式計算。N個人參加單淘汰賽需要舉行$N-1$場，由於攜帶訊息需回傳，還需$N-2$場，故總場次為

$$N-1+N-2=2\times N-3。$$

(三)分送訊息的次數

觀察圖 13 和圖 14，可知人數即決定次數，N人所需的次數為

$$N-1。$$

柒、從工作量比較最少輪數

從定義觀察，三種交換訊息方式的每個人工作量分別如下：

1. 1 對 1 交換，每輪**每人**都要消化掉一次事件。
2. 攜帶訊息，**有一個人**代勞，漸漸集中訊息，然後又發回去
3. 分送訊息，**有一些人**代勞，使得所有人各自拿到訊息。

統整來說：每一次事件交換的次數不同、轉達訊息的人的數量相異，造成不同的最少輪數。

捌、未來展望

如果能學得更多的數學知識，希望能解決猜想 6。

經過這次的研究，也盼能學習更多處理最佳化問題的知識，以便應用在生活中。而對於複雜的問題，能解析成可以理解、能處理的部份，以及提出尚不能解的地方，以簡馭繁。

本研究探討的三種交換訊息方式雖然比不上廣告中名片 App 的交換速率，但我們主要學會用數學思維處理問題，尤其未來是 AI 的時代，要能自己解決問題。

玖、研究結論

一、一對一交換訊息，所需最少輪數理想值為：

$$\begin{cases} {R^*}_{1-1}(N) = N - 1 & \text{，若}N\text{為偶數，} \\ {R^*}_{1-1}(N) = N & \text{，若}N\text{為奇數。} \end{cases}$$

二、攜帶式交換訊息，所需最少輪數為：

若$2^m < N \leq 2^{m+1}$，則$Rb(N) = 2m - 1$。

三、分送式交換訊息，所需最少輪數為：

若 $F_0^{(n)} + F_1^{(n)} + F_2^{(n)} + F_3^{(n)} + \cdots + F_{k-1}^{(n)} < N \leq F_0^{(n)} + F_1^{(n)} + F_2^{(n)} + F_3^{(n)} + \cdots + F_k^{(n)}$，

則 $R_n(N) = k$。

其中$F_k^{(n)}$為費氏 n-步數列第 k 項。

四、交換訊息的最少輪數比較為

$R_n(N) < Rb(N) < {R^*}_{1-1}(N)$，當$N \geq 7$。

拾、引用文獻

一、Eight: Business Cards。2019/08/01。取自

https://www.youtube.com/watch?v=gpM_rnQBCr0。

二、整數數列線上大全。上 2019/08/01。取自 https://oeis.org/。

三、費氏數列前 40 項。2019/08/02。http://oeis.org/A000045/list。

四、費氏n-步數列。2019/09/01。取自：

http://mathworld.wolfram.com/Fibonaccin-StepNumber.html。

五、Fibonacci n-step number sequences。2019/09/01。取自：

https://rosettacode.org/wiki/Fibonacci_n-step_number_sequences。

六、南一文教事業教科書編輯委員會(民 108)怎樣列式。國民小學數學課本第十冊。臺南市。國家教育研究院。

七、南一文教事業教科書編輯委員會(民 108)等量公理。國民小學數學課本第十一冊。臺南市。國家教育研究院。

【評語】080415

本作品由三個活動組成，每個活動都假設有 N 人參與。第一個是在 N 人的情況下透過一對一的方式交換資訊，並估算經過多少輪可以完成所有人都能互相交換到訊息，第二個是改為用攜帶訊息替別人交換的方式進行，第三個活動是採用一人一次僅能通知一位沒有訊息的人，並假設從一個人開始傳送訊息，而且每個人最多只能通知 n 個人，接著嘗試找出這兩種活動所需的最少輪數。本作品的主題頗為有趣，研究的手法是依照所訂的規則輔以樹狀圖層次來紀錄次數，觀查其遞迴關係，並比較各種方式最少次數的關係，其中引入其他觀點（單淘汰賽）頗具適切性。但處理的方式稍嫌不夠深入，而且第三個活動的遊戲規則可以說明及交代得更清楚。至於各活動中如何進行才算是一輪，作品中可能要有更明確的界定，否則有些地方的說明不夠清楚。此外，部分說明可能需要用更嚴謹的方式來論證。建議作者可考慮分析各活動的數學結構，並探討各活動與其他遊戲的數學結構有何相似之處。

作品海報

壹、題目來源

《Eight: Business Cards》一來自日本的廣告，內容分別呈現了2人、3人、4人、5人、6人、9人、20人，各採用不同方式交換名片(見圖1─圖7)。最後為100人，100人使用手機的電子名片交換App──正是廣告主打的商品。

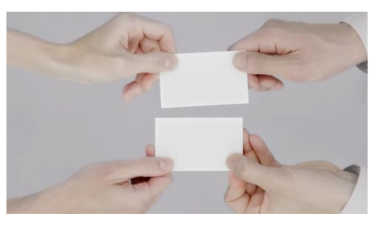


圖1. 2人交換名片

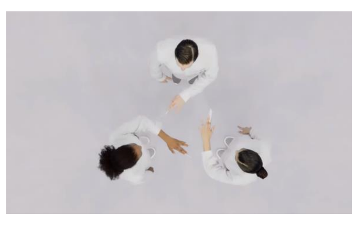


圖2. 3人交換名片


圖3. 4人交換名片

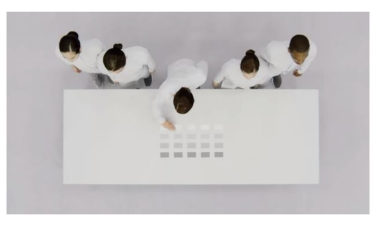


圖4. 5人交換名片


圖5. 6人交換名片

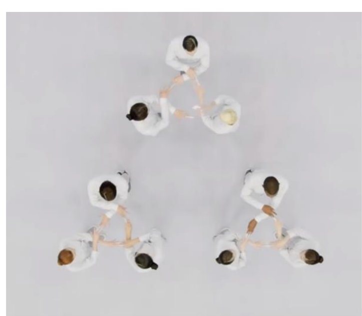


圖6. 9人交換名片

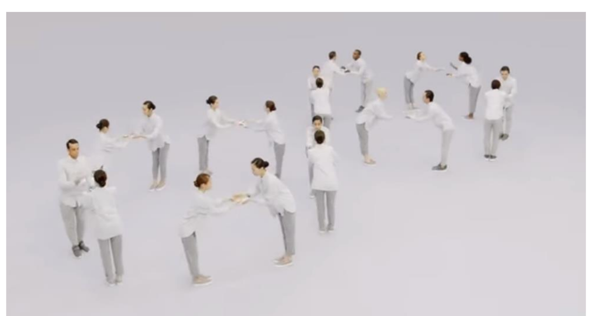


圖7. 20人交換名片

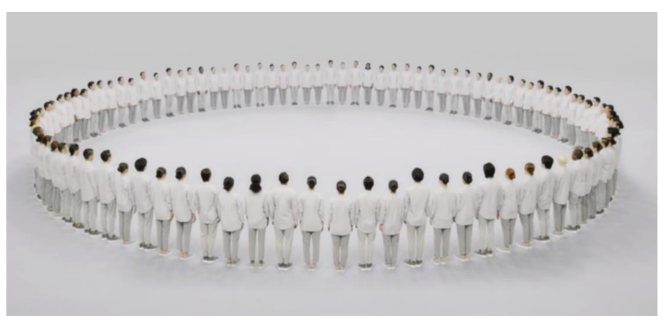


圖8. 100人交換名片

貳、研究目的

本作品探討在三種不同的條件下，全體共N人，若每一個人都分別與其他人交換訊息完畢，所需要的最少輪數；三種條件如下：

一、**一對一交換**：在一對一交換訊息的情況下；

二、**攜帶訊息**：若能攜帶訊息替別人交換訊息；

三、**分送訊息**：若一個人一次通知1個沒有訊息的人，至多通知訊息給n個人。

參、研究架構

交換名片app廣告

1對1 — 交換次數 — 最少輪數理想值

攜帶式 — 最少輪數理想值 — 單淘汰賽制 — 計算最少輪數

分送 — 路線圖 — 費氏n-步數列 — 計算最少輪數

三種方式最少輪數的比較

肆、研究過程與討論

名詞定義

符號2(1對1). $R_{1-1}(N)$ 記作在1對1的條件下，N人交換完訊息所需的最少輪數。

符號3(攜帶). $Rb(N)$記作在攜帶訊息的條件下，N人交換完訊息所需的最少輪數。

符號4(分送). $R_n(N)$記作一次通知1個人訊息，最多通知 個人的條件下，N人得到所有訊息所需的最少輪數。

一對一交換

交換事件次數

兩人交換一次訊息記作1次事件，5個人全部的交換事件如下：

AB BC CD DE

AC BD CE

AD BE

AE

5個人全體的交換次數共有

4＋3＋2＋1＝10

最少輪數

每一輪至多有2對交換訊息，也就是單一輪最多完成2次事件，因而至少需要的輪數為

10÷2＝5，

輪次	交換訊息的配對	未參與配對
1	BC DE	A
2	AD CE	B
3	AE BD	C
4	AC BE	D
5	AB CD	E

符號記作

$$R_{1-1}(5)=5。$$

當完成5人的安排，就能完成6人的安排。

一般化

N個人，兩兩交換完訊息的事件共有

$$(N-1)+(N-2)+\cdots+3+2+1=\frac{N\times(N-1)}{2}$$

以下分N為奇數和N為偶數。

1.當N為奇數，最少輪數的理想值：

每輪至多有$\frac{N-1}{2}$對交換名片，所以需要的最少輪數為

$$\frac{N\times(N-1)}{2}\div\frac{N-1}{2}=N$$

2. 當N為偶數，最少輪數的理想值

每輪至多有 $\frac{N}{2}$ 對交換訊息，所以需要的最少輪數為

$$\frac{N\times(N-1)}{2}\div\frac{N}{2}=N-1$$

猜想6. N為奇數，要將$\frac{N\times(N-1)}{2}$件事件全部呈現出來的最少輪數為N。

定義

$$R^{*}{}_{1-1}(N)$$

為$R_{1-1}(N)$的理想值。統整N分別為奇數和偶數的討論可得到：

$$\begin{cases}R^{*}{}_{1-1}(N)=N &，當N為奇數，\\ R^{*}{}_{1-1}(N)=N-1 &，當N為偶數。\end{cases}$$

攜帶式交換

方式

方式7(攜帶訊息). 兩人將訊息交給其中一方，交出訊息者等待。收到訊息的人繼續與未交出訊息者交換，同樣收訊息的人繼續與人交換，交出者等待。最終餘2人，再互換訊息，接著最終取得所有訊息的2人，分別依自己收訊息的過程，逆向交給那些等待的人，給他們還沒取得之訊息。直到每個人都到其他$N-1$人的訊息。

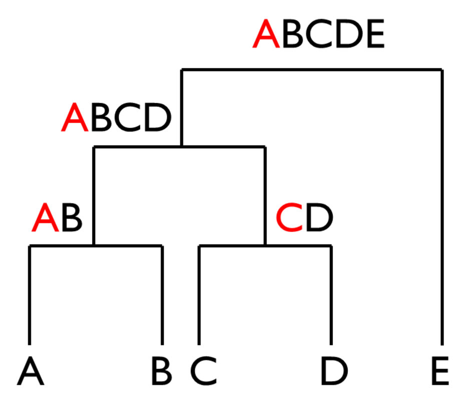


圖6. 5個人依攜帶訊息方式交換的流程

最少輪數的計算

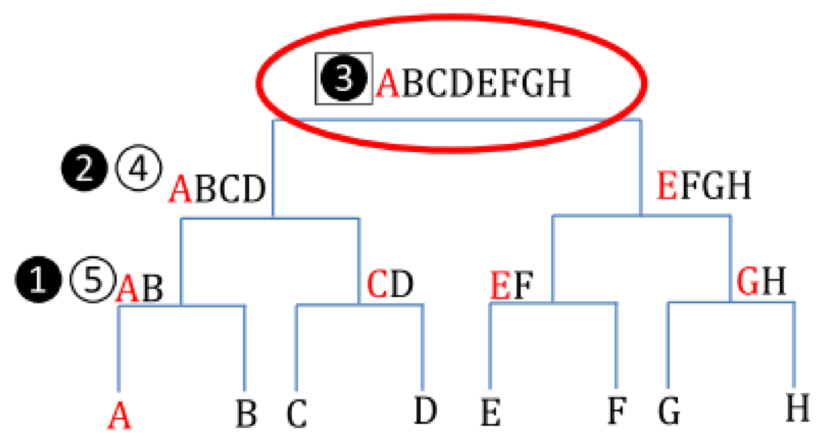


圖8. 8個人依攜帶訊息方式交換，計數輪數，紅圈表示只花1輪的時間

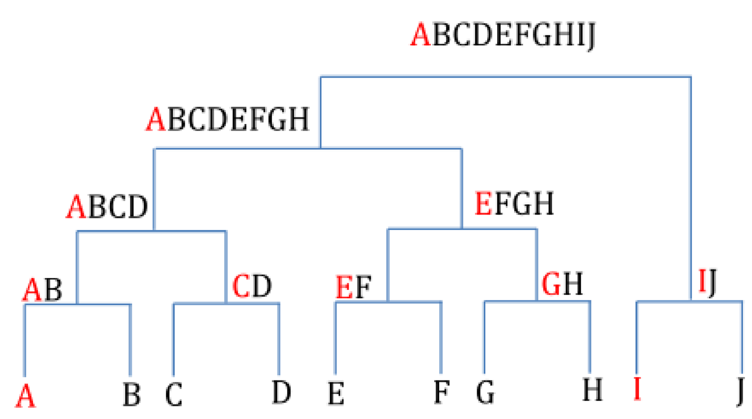


圖8.1. 10人，$Rb(10)=7$

一般式

表9. $Rb(N)$，$1 \le N \le 20$的統整

N(人數)	$Rb(N)$
1	0
2	1
3	3
4	3
5	5
6	5
7	5
8	5
9	7
10	7
11	7
12	7
13	7
14	7
15	7
16	7
17	9
18	9
19	9
20	9

(1) $Rb(2^m)=2m-1$，

輪數	每一輪最多拿走訊息的人數
1	$2^m \div 2 = 2^{m-1}$
2	$2^{m-1} \div 2 = 2^{m-2}$
3	$2^{m-2} \div 2 = 2^{m-3}$
⋮	⋮
$m-1$	$2^2 \div 2 = 2^1$
m	$2 \div 2 = 1$

最少輪數的理想值合計為

$$2 \times (m-1)+1 = 2m-1。$$

(2) 當$2^m+1 \le N < 2^{m+1}$，則有$Rb(N)=2m+1$。

說明(2)對任意正整數m成立. 對於$2^m+1 \le N \le 2^{m+1}$，總有$Rb(2^m+1) \le Rb(N) \le Rb(2^{m+1}) = 2m+1$。

$N=2^m+1$，第1輪最多帶走訊息的人數為

$[(2^m+1) \div 2] = 2^{m-1}$，其中[ ]為高斯符號，

單一輪最多收走訊息的人數

＝單一輪最多不再參與下一輪的交換訊息的人數。

推得第2輪最多要參與交換訊息的人數為

$$2^m+1-2^{m-1} = 2^{m-1}+1。$$

第2輪最多帶走訊息的人數為

$$[(2^{m-1}+1) \div 2] = 2^{m-2}，$$

$$\dots$$

$$[(2^1+1) \div 2] = 1，$$

$$2^1+1-1=2。$$

$$2 \div 2 = 1。$$

合計最少輪數的理想值為

$$2 \times m + 1。$$

同樣可藉由「**單淘汰賽制**」的過程安排，就能使用上述輪數完成訊息交換，故得到

$$Rb(2^m+1) = 2m+1，$$ □

分送式交換

方式

方式8(分送訊息). 第1個人拿到N則訊息後，接著規定一輪通知訊息給1個沒有訊息的人，取得訊息的人下一輪可以開始通知訊息，每個人至多發給n位，如同發作業一樣，直到每個人都取得其他 $N-1$人的訊息為止。

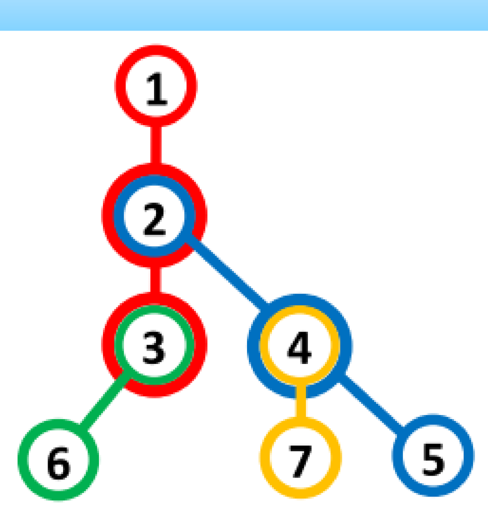


圖9. $N=7$，一種依方式8傳訊息的路線

◆圖9的詳細說明

1發訊息給2，1發訊息給3，

2發給4，2發給5，

3發給6，

4發給7。

費氏n-步數列

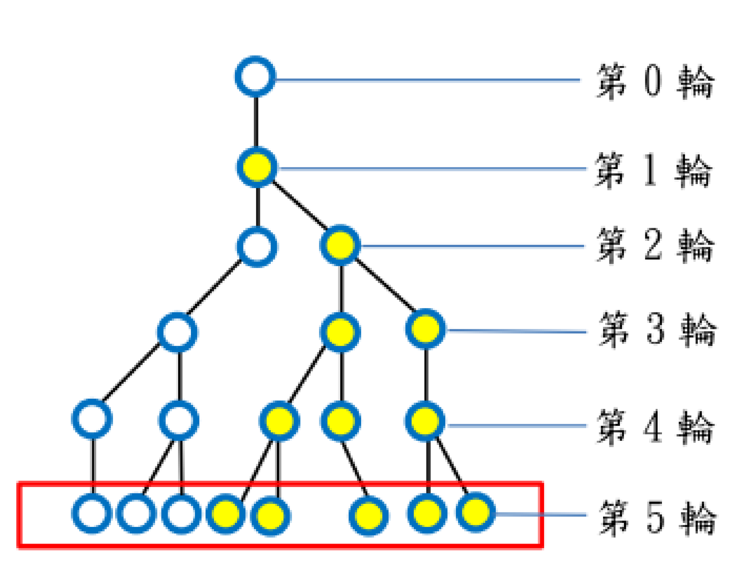


圖13. $n=2$，費氏數列，紅框那一輪的數量由前1項的數量和前2項的數量的和組成

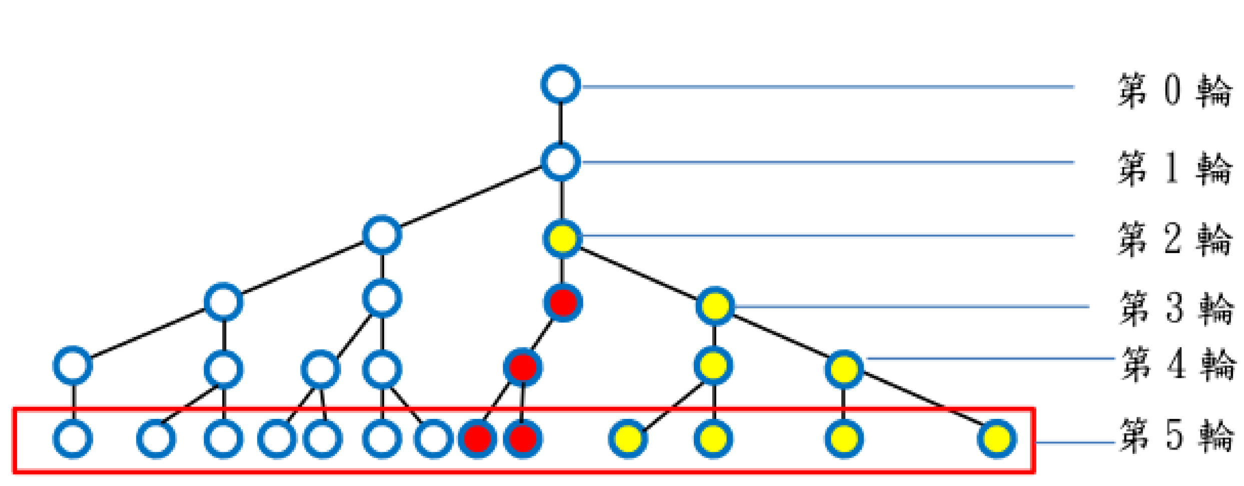


圖14. $n=3$，費氏3-步數列，紅框這一輪的值由前1項的數量、前2項的數量和前3項的數量的和組成

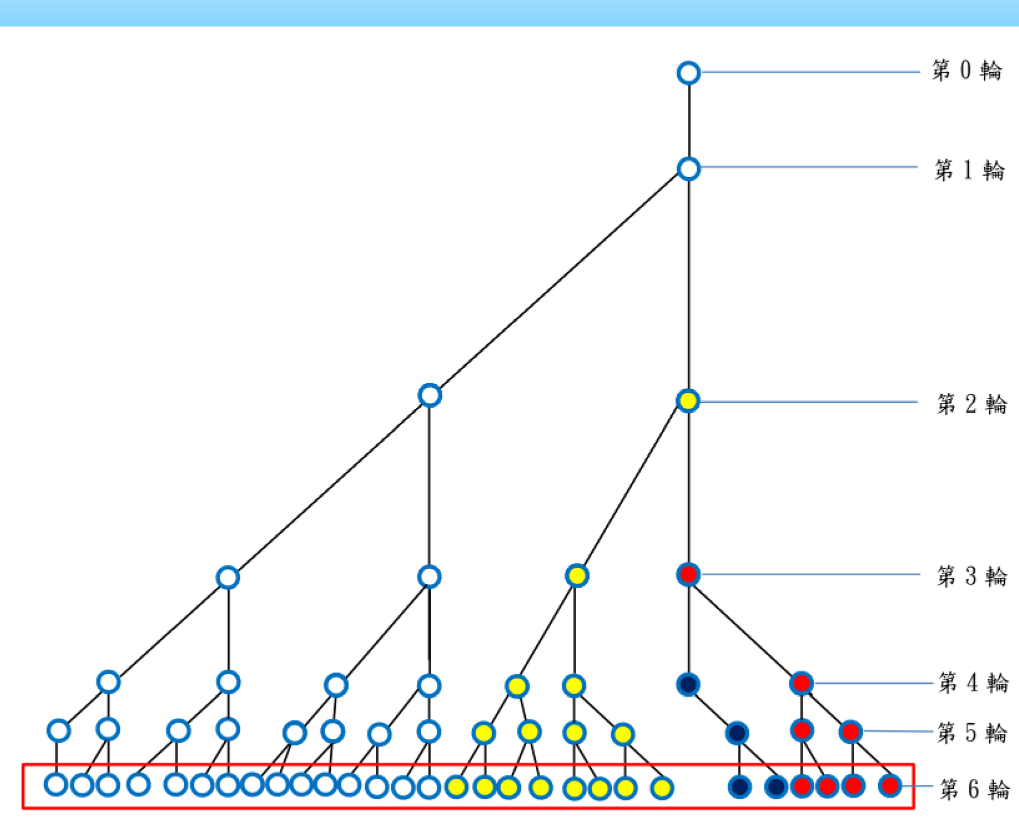


圖15. 費氏4-步數列，紅框處的人數由前1項的值、前2項的值、前3項和前4項的和組成

初始值

第2個拿到訊息的人在第2輪開始發放，所以第0輪和第1輪都是1，而從第1輪—第2輪起持續一分為二，**這一代的數量都是前一代的2倍**，直到第n輪為止，因為自第$n+1$輪起，第1個發訊息的人停止動作了。故第1輪到第n輪，各輪收到訊息人數分別為：

$$1、2、4、8、16、\dots、2^{n-1}，n \ge 1。$$

遞迴關係

第1個人發訊息的過程，會產生新的n個人，所以**第$n+1$輪起，會分別是收到這n個人發的訊息的人，而這n個人**，分別在第1輪、第2輪、第3輪、…、第n輪開始出現，各自發給了$F_{k-1}^{(n)}$、$F_{k-2}^{(n)}$、$F_{k-3}^{(n)}$、⋯、$F_{k-n}^{(n)}$個人，所以有

$$F_k^{(n)} = F_{k-1}^{(n)} + F_{k-2}^{(n)} + F_{k-3}^{(n)} + \cdots + F_{k-n}^{(n)}，k \ge n。$$

最少輪數

$$F_0^{(n)}+F_1^{(n)}+F_2^{(n)}+F_3^{(n)}+\cdots+F_{k-1}^{(n)}<N\leq F_0^{(n)}+F_1^{(n)}+F_2^{(n)}+F_3^{(n)}+\cdots+F_k^{(n)}$$

則

$$R_n(N)=k。$$

例11(求$N=200$，$n=5$依方式8交換名片所需的最少輪數). 分別考慮費式5-步數列前8項和前9項的和：

$$F_0^{(5)}+F_1^{(5)}+F_2^{(5)}+F_3^{(5)}+F_4^{(5)}+F_5^{(5)}+F_6^{(5)}+F_7^{(5)}$$
$$=1+1+2+4+8+16+31+61$$
$$=124$$
$$F_0^{(5)}+F_1^{(5)}+F_2^{(5)}+F_3^{(5)}+F_4^{(5)}+F_5^{(5)}+F_6^{(5)}+F_7^{(5)}+F_8^{(5)}$$
$$=1+1+2+4+8+16+31+61+120$$
$$=244$$
$$124<200<244$$

我們有

$$R_5(200)=8。$$

三種最少輪數的比較

大小關係

$$R_n(N)<Rb(N)<R^*{}_{1-1}(N)，N\geq 7。$$

$Rb(N)<R^*{}_{1-1}(N)$

$Rb(N)<R^*{}_{1-1}(N)$*的理由.* 觀察圖17，因為$R^*{}_{1-1}(N)$的值不是N就是$N-1$，因而N加2，輪數加1；而$Rb(N)$的N加上2的某次方(視目前輪數而定)，輪數才會+2，所以一對一需要輪數會比攜帶式來得多。

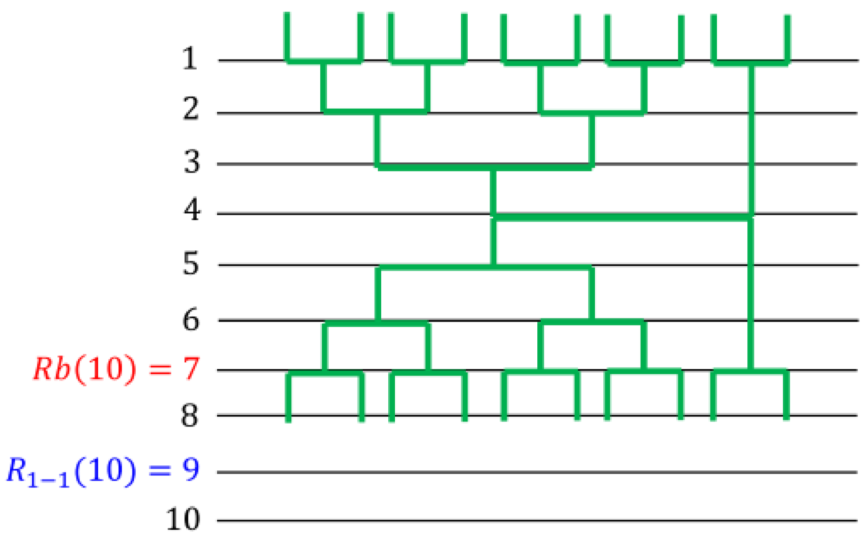


圖17. N=10的攜帶訊息輪數＜10

$R_n(N)<R_b(N)$

$$R_2(N)<Rb(N)$$
$$R_{n_1}(N)\leq R_{n_2}(N)，當n_1>n_2。$$

輪數同樣增加2輪，攜帶交換的數量最多增加$2^3=8$人(見圖18和圖19的藍圈數量差)；
分送訊息的人數量增加(即圖19的紅圈數量)

$$F_6+F_5=21。$$

結果12.

$$F_{2k-1}-2^k>F_{2k-2}，k\geq 7。$$

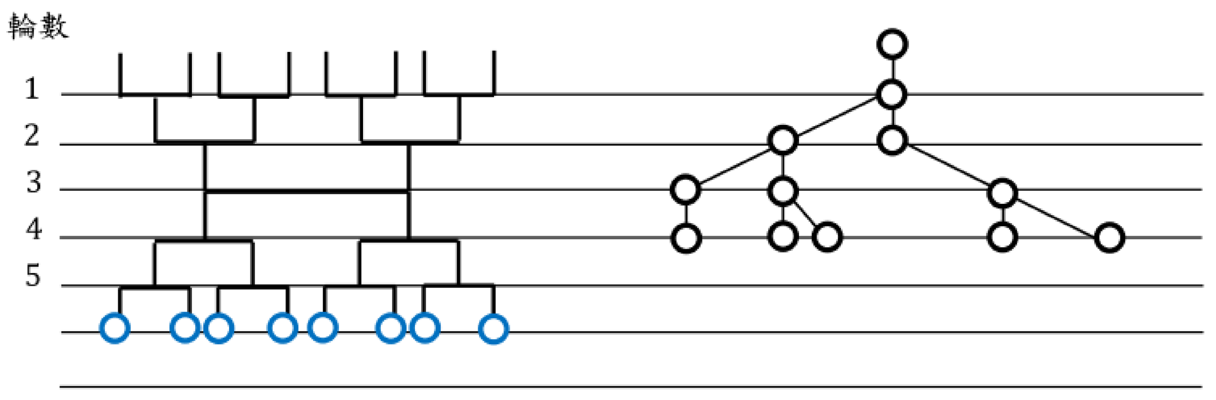


圖18. N=8的攜帶訊息輪數＞ N=12的分送訊息輪數

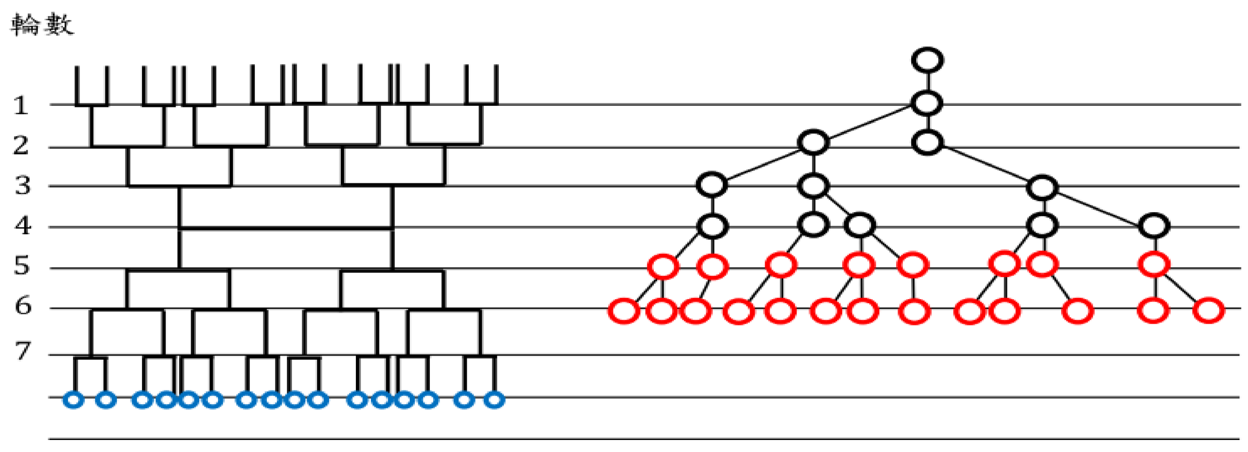


圖19. 和圖18比較，增加2輪，分送訊息能達傳的人更多

伍、討論

一、由於交換方式的不同，基於人力的分配相異，因而產生不一樣的最少輪數。
二、對於攜帶式交換和分送交換，我們給出適當的圖示表徵，得到最少輪數。

陸、結論

一、一對一交換訊息，所需最少輪數理想值為：

$$\begin{cases}R^*{}_{1-1}(N)=N & ，當N為奇數，\\ R^*{}_{1-1}(N)=N-1 & ，當N為偶數。\end{cases}$$

二、攜帶式交換訊息，所需最少輪數為：

$$若2^m<N\leq 2^{m+1}，則Rb(N)=2m-1。$$

三、分送式交換訊息，所需最少輪數為：

若$F_0^{(n)}+F_1^{(n)}+F_2^{(n)}+F_3^{(n)}+\cdots+F_{k-1}^{(n)}<N\leq F_0^{(n)}+F_1^{(n)}+F_2^{(n)}+F_3^{(n)}+\cdots+F_k^{(n)}$，
則

$$R_n(N)=k。$$

其中$F_k^{(n)}$為費氏n-步數列第k項。

四、交換訊息的最少輪數比較為

$$R_n(N)<Rb(N)<R^*{}_{1-1}(N)，當N\geq 7。$$

柒、未來展望

如果能學得更多的數學知識，希望能解決猜想6。雖然本作品採用的是理想模型，不過當我們學得愈多，就具備更多的知識，也更能分析和解決現實問題，應用的空間更寬廣。

捌、引用文獻

一、Eight: Business Cards。2019/08/01。取自https://www.youtube.com/watch?v=gpM_rnQBCr0。
二、整數數列線上大全。2019/08/01。取自https://oeis.org/。
三、費氏n-步數列。2019/09/01。取自：http://mathworld.wolfram.com/Fibonaccin-StepNumber.html。