中華民國第60屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

(鄉土)教材獎

080413

一筆成型-探討多面體最短步行數

學校名稱：臺東縣臺東市豐榮國民小學

作者：	指導老師：
小六 周思岑 小六 張銨穌 小六 范時愷	李佳玲

關鍵詞：立體多面體、一筆畫、最短步行

摘要

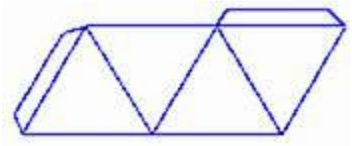
本研究以多面體的「邊」為思考主軸，探討各種多邊形如何利用最短的銅線長度才能串成立體模型及是否可能一筆畫描繪完成，並實際製作多邊形模型浸入泡泡水來討泡膜形狀，研究結果發現只有六面體和正八面體可以一筆畫描繪完成，而串成各多邊形立體模型最短的銅線長度只有角錐和角柱二種立體模型具有規律性並與最少邊重複次數的路徑有關係，而且由邊長推導出N角柱(或角錐)的最短步行長度等於以奇頂點數推導出N角柱(或角錐)的最短步行長度，我們也利用歐拉定理來證明我們的最短步行長度是正確的。

壹、研究動機

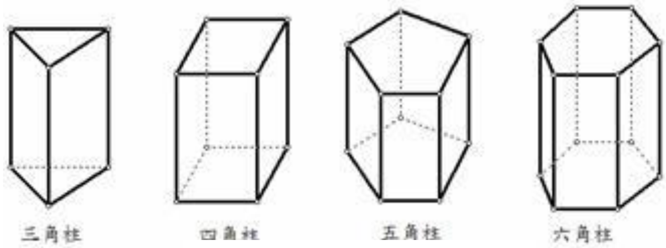
六年級的數學課老師讓我們認識多面體，當時我覺得多面體很抽象，課堂上老師又要我數邊、數頂點、數邊長，我覺得有點困擾，無法一時說出正確答案。有一次我們去台中科博館參觀時發現入口處就矗立一個巨大的正二十面體，更讓我嘆為觀止，我想有沒有可能用簡單的方式讓跟我有一樣困擾的學生，透過簡單的工具操作，完成各種多面體形狀的立體模型，把抽象化為具體，並發展出一些多面體趣味的活動，我相信一定能讓我們小學生對這一單元印象深刻。另外科博館內的數與形館有展示正四面體和正六面體的立體模型浸泡到泡泡水中出現漂亮的泡泡膜形狀，因此也引發我們想製作更多的多面體立體模型來實驗是否會出現意想不到的形狀出來。

貳、文獻探討

小六學習認識立體圖形(柱體、正角錐、角柱)時，都是透過平面摺紙(圖一)或課本呈現出來的立體圖形透視圖(圖二)的方式學習，在平面摺紙時容易發生黏貼處面容易鬆開，或者沒按照折線精準摺好時，容易變形，無法看出正確的立體模形；而後者觀看立體模形透視圖時只有一個方向，無法全面透視，在數邊時又容易重複數，如果有一種可以拿在手上任意翻轉各種角度的立體模形，既可以解決上述的問題又能讓我們更輕鬆學習。



圖一　平面摺紙



圖二 立體透視圖

我們在網路上找了很多相關的研究，例如在第 46 屆科展-柏拉圖的天空－正多面體展開圖之研究中，探討正六面體與正八面體展開圖中的特徵拆解關係，第 54 屆科展-滾動奇跡，探討多面體與多面體之間面的互繞旋轉軌跡長.，以上的前人研究著重在多面體面的探討，以多面體的面為發想研究，另外第 26 屆科展-怎樣一筆畫，主要是探討平面圖形如何才能完成一筆畫描繪；而本此研究將以多面體的「邊」為思考主軸，探討各種多邊形如何利用最短的銅線長度才能串成立體模型，並實際製作多邊形立體模型來討論。

參、研究目的

一、探討各多邊形如何以最短的銅線長度才能串成立體模型。

二、探討串成各多邊形立體模型最短的銅線長度是否具有規律性。

三、探討各多邊形是否可能以一筆畫串成立體模型。

四、各多邊形立體模型浸入泡泡水後會形成什麼形狀的泡泡膜。

五、探討各多邊形立體模型內泡泡膜的圖形和數量。

肆、研究設備及器材

名稱	尺	剪刀	數位相機
照片			
名稱	塑膠管	銅線	洗碗精
照片			

伍、研究過程及方法

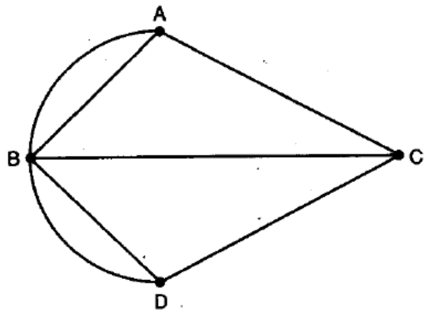
一、名詞解釋

(一) 頂點相鄰：所謂一個圖，就是有若干頂點(在平面或空間中)，在頂點之間有若干條邊連接著。如果兩個頂點 A 及 B 之間有邊連接，我們稱 A、B 兩頂點相鄰。兩個不同頂點之間允許有兩條以上(包含兩條)的邊連接。

(二) 重邊：當兩個頂點之間有兩條以上(包含兩條)的邊時，我們稱這些邊為重邊。

(三) 複圖：允許有重邊的圖我們稱之為複圖。

(四) 奇頂點與偶頂點：一個複圖中，附著於某頂點的邊數稱為該頂點的次數。次數為奇數的頂點稱為奇頂點，次數為偶數的頂點稱為偶頂點。例如以下的複圖，頂點 A 和頂點 B 之間就有兩條重邊連接著。頂點 A、C、D 的次數均為 3，而頂點 B 的次數為 5，它們皆為奇頂點。



(五) 圖論第一個定理：一個複圖所有頂點的次數總和恰為邊數的兩倍。

(六) 步行：因為頂點有重複出現，邊也重複出現，我們稱之為步行。

(七) 複圖的連通與不連通：複圖中的某一條 A-B 步行(walk)是指一條由某個起點 A 經由邊移動到另一個頂點，再經由邊移動到下一個頂點，依此步驟走動，最後停留在終點 B。該 A-B 步行的邊數即為其長度。如果 A = B，則稱該步行為閉步行，否則稱為開步行。如果一個複圖中的任意兩頂點 A、B 間都存在著一條 A-B 步行由 A 移動至 B，則我們稱該複圖是連通的(connected)，否則是不連通的(disconnected)。

(八) 歐拉公式：一個(凸)多面體恆有以下公式 (頂點數) – (邊數) + (面數) = 2

二、探討各多邊形如何以最短的銅線長度才能串成立體模型

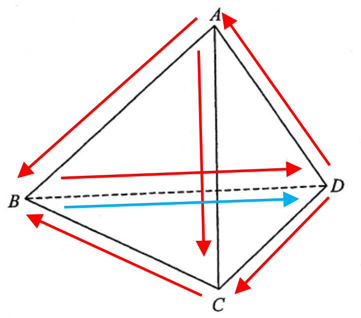
利用中空塑膠管剪裁固定長度(每段 4 公分)，再利用銅線把中空塑膠管串接起來，探討如何以最短的銅線長度才能串成立體模型，各多邊形串接情形如下：

(一) 三角錐(正四面體)：

串接說明：1.由 A 點為起始點，先串起一個三角形後在串成第二個三角形，經重複一次路徑後即能串起三角錐(正四面體)的立體模型。

2.最短步行 A→B→D→A→C→B→D→C (最短步行長度為 7 次，邊重複次數最少 1 次)。

圖三

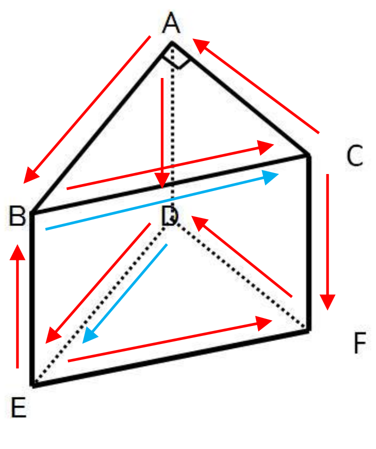


(二) 三角柱：

串接說明：1.由 A 點為起始點，先串起上面的三角形後，再往下串成第二個三角形，經重複一次路徑，再往上重複一次路徑，即能串起三角柱的立體模型。

2.最短步行 A→B→C→A→D→E→F→D→E→B→C→F(最短步行長度為 11 次，邊重複次數最少 2 次)。

圖四

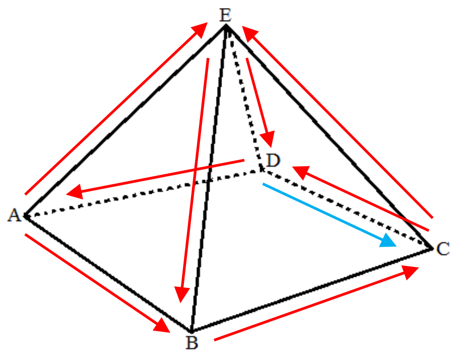


(三) 四角錐：

串接說明：1.由 A 點為起始點，先串起底面的四邊形，往上再往下並重複一次路徑後往上再往下，即能串起四角錐的立體模型。

2.最短步行 A→B→C→D→A→E→D→C→E→B(最短步行長度為 9 次，邊重複次數最少 1 次)。

圖五

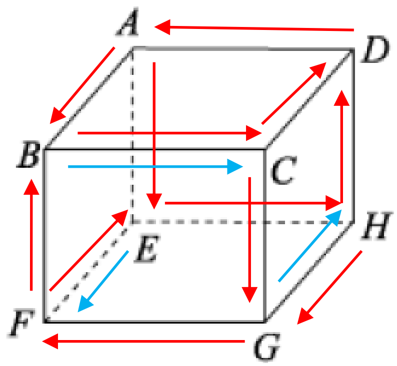


(四) 四角柱(正六面體)：

串接說明：1. 由 A 點為起始點，先串起上面的四邊形後，再往下串成第二個四邊形，經重複一次路徑後再往上再往右重複一次路徑，再往下再往右重複一次路徑後，往上即能串起四角柱(正六面體)的立體模型。

2. 最短步行 A→B→C→D→A→E→H→G→F→E→F→B→C→G→H→D(最短步行長度為 15 次，邊重複次數最少 3 次)。

圖六

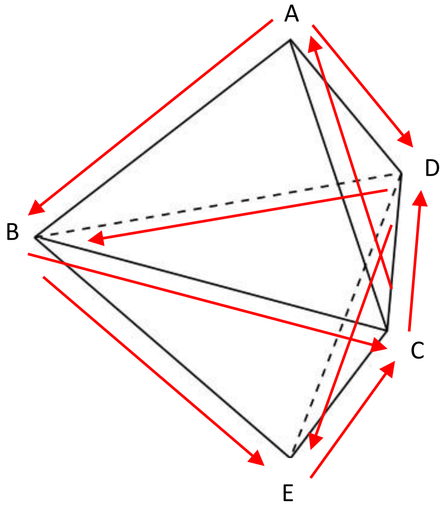


(五) 六面體

串接說明：1.由 A 點為起始點，串起中間的三邊形後，往下串起另一三角形，再往上串起另一三角形，往下即能串起六面體的立體模型。

2.最短步行 A→B→C→D→B→E→C→A→C→E(最短步行長度為 9 次，邊重複)。

圖七

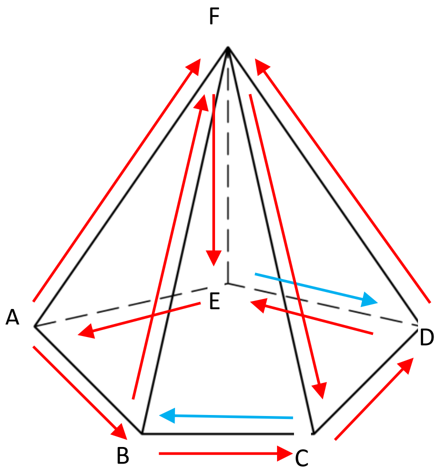


(六) 五角錐：

串接說明：1.由 A 點為起始點，先串起底面的五邊形，往上再往下並重複一次路，往上再往下再重複一次路徑後往上，即能串起五角錐的立體模型。

2.最短步行 A→B→C→D→E→A→F→E→D→F→C→B→F(最短步行長度為 12 次，邊重複次數最少 2 次)。

圖八

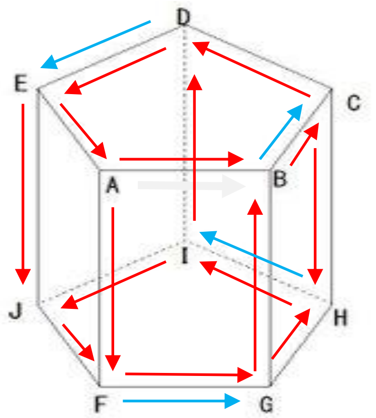


(七) 五角柱：

串接說明：1.由 A 點為起始點，先串起上面的五邊形，再往下串成第二個五邊形，往右重複一次路徑後再往上、再往右、重複一次路徑；再往下並重複一次路徑；再往上再往左重複一次路徑；後往下即能串起五角柱的立體模型。

2.最短步行 A→B→C→D→E→A→F→G→H→I→J→F→G→B→C→H→I→D→E→J(最短步行長度為 19 次，邊重複次數最少 4 次)。

圖九

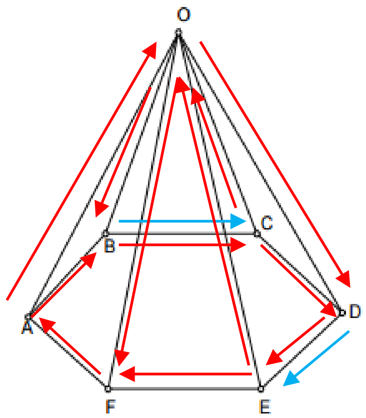


(八) 六角錐：

串接說明：1.由 A 點為起始點，先串起底面的六邊形，往上再往下並重複一次路徑，往上再往下再重複一次路徑，再往上即能串起六角錐的立體模型。

2.最短步行 A→B→C→D→E→F→A→O→B→C→O→D→E→O→F(最短步行長度為 14 次，邊重複次數最少 2 次)。

圖十

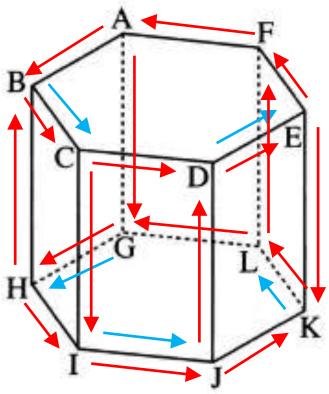


(九)、六角柱：

串接說明：1.由 A 點為起始點，先串起上面的六邊形，再往下串成第二個六邊形，往右重複一次路徑後，再往上再往右重複一次路徑，再往下並重複一次路徑，再往上再往右重複一次路徑後，往下再往右重複一次路徑後，往上即能串起六角柱的立體模型。

2.最短步行 A→B→C→D→E→F→A→G→H→I→J→K→L→G→H→B→C→I→J→D→E→K→L→F(最短步行長度為 23 次，邊重複次數最少 5 次)。

圖十一

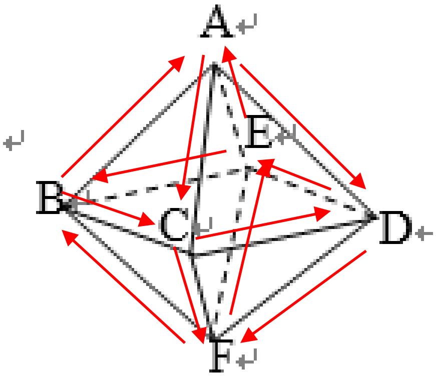


(十) 正八面體：

串接說明：1.由 B 點為起始點，先串起中間的ㄇ字形到 E 點後，往上到 A 點在往下到 C 點，再往下到 F 點再到 E 點後，再連接 B 點再往上到 A 點，再往下到 D 再到 F 再往上到 B，即能串起正八面體的立體模型。

2.最短步行 B→C→D→E→A→C→F→E→B→A→D→F→B(最短步行長度為 12 次，邊無重複)。

圖十二

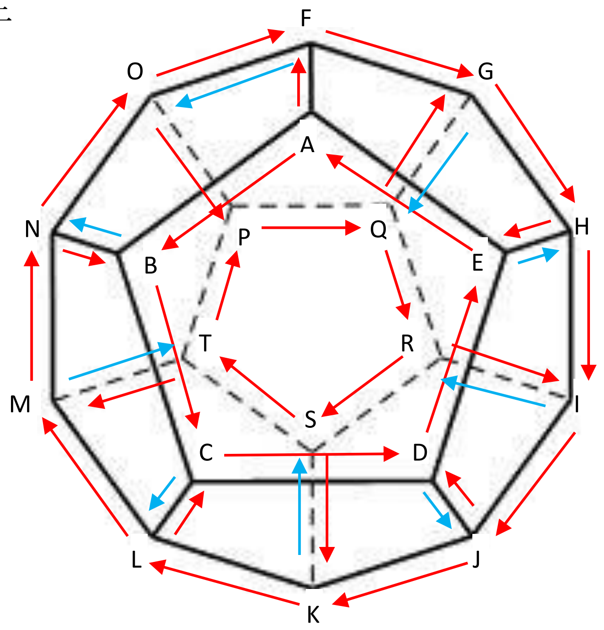


(十一) 正十二面體：

串接說明：1.由 A 點為起始點，先串起中間的五邊形，再往上依順時鐘(或逆時鐘)方向依序串起五個五邊形到 F 點，再順時鐘依序串起六個五邊形，即能製作正十二面體的立體模型。

2.最短步行長度 A→B→C→D→E→A→F→G→H→E→H→I→J→D→J→K→L→C→L→M→N→B→N→O→F→O→P→Q→G→Q→R→I→R→S→K→S→T→M→T→P(最短步行長度為 39 次，邊重複次數最少 9 次)。

圖十三

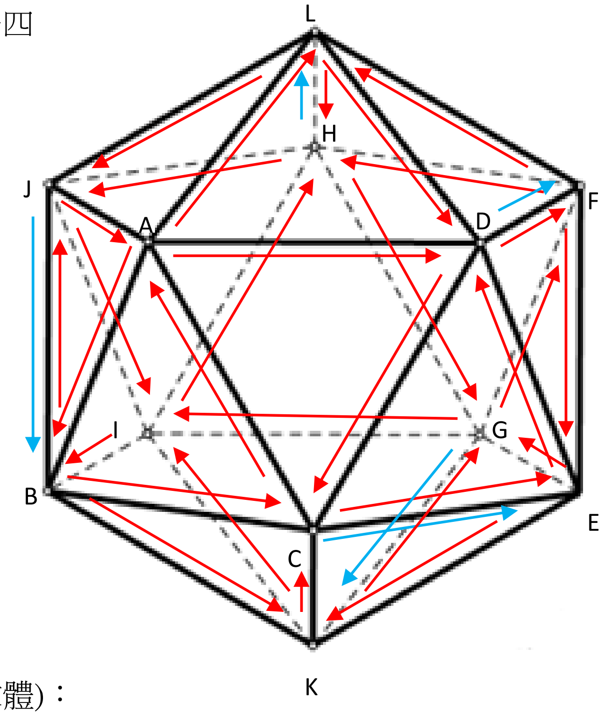


(十二)、正二十面體：

串接說明：1.由 A 點為起始點，先串起三角形，再依序往右串起十個三角形到 A 點，.再往上依序串起五個角形，再往下串起五個角形，即能製作正二十面體立體模型。

2.最短步行長度 A→B→C→A→D→C→E→D→F→E→G→F→H→G→I→H→J→I→B→J→A→L→D→F→L→H→L→J→B→K→C→E→K→G→K→I(最短步行長度為 35 次，邊重複次數最少 5 次)。

圖十四

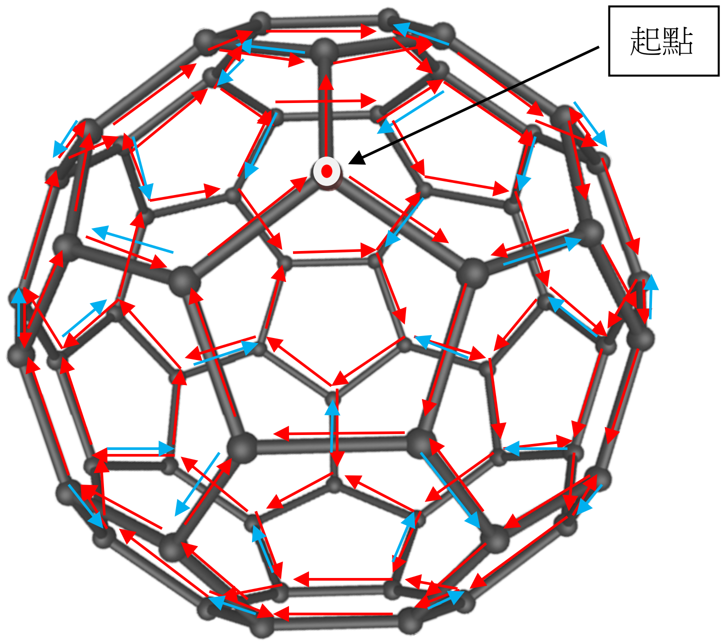


(十三) 三十二面體(足球體)：

串接說明：1.由中間的五邊形為起始點串起，再順時鐘依序串起五個六邊形，再串起五邊形後接六邊形共五組，再接續串起六邊形接五邊形共五組，最後再串起五個六邊形即能製作正三十二面體立體模型。

2.最短步行長度為 119 次，邊重複次數最少 29 次。

圖十五



二、探討各多邊形是否可能以一筆畫串成立體模型

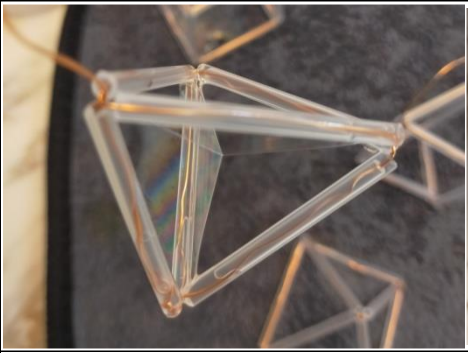
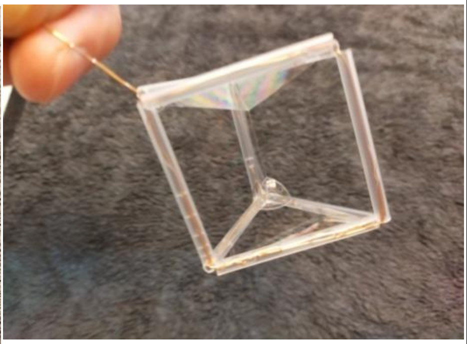
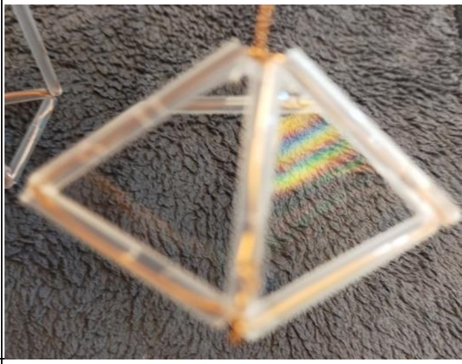
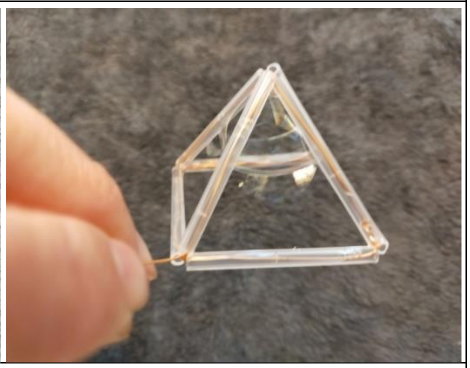
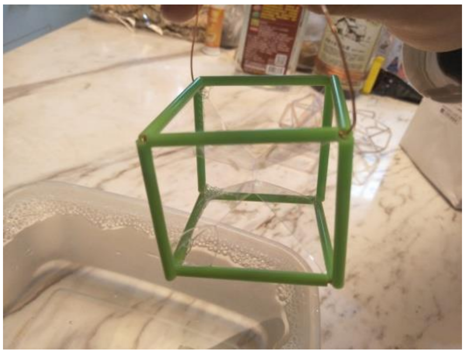
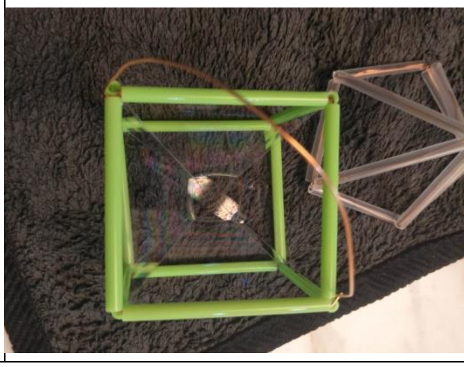
我們找了很多相關一筆畫的研究，發現並不是所有的圖形都可以一筆畫好，而且不論是平面的圖形或是立體的模型，要一筆畫畫好的圖形取決於各圖形的頂點數，而頂點又可分為奇頂點和偶頂點，奇頂點是由一條線或三條線或五條線所交接而成，偶頂點由二條線或四條線或六條線所交接而成。

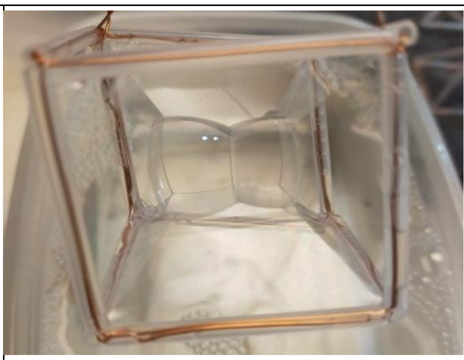
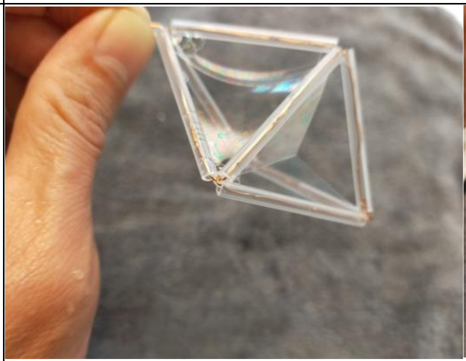
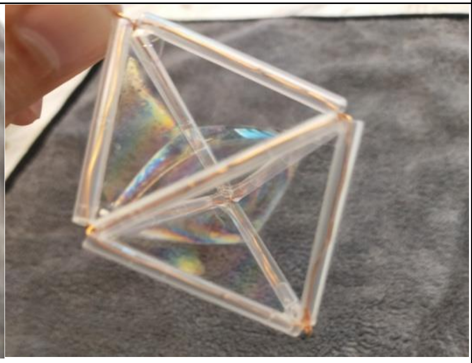
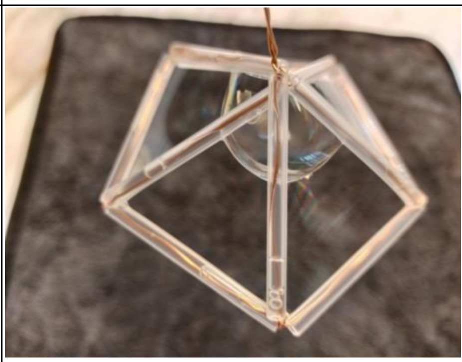
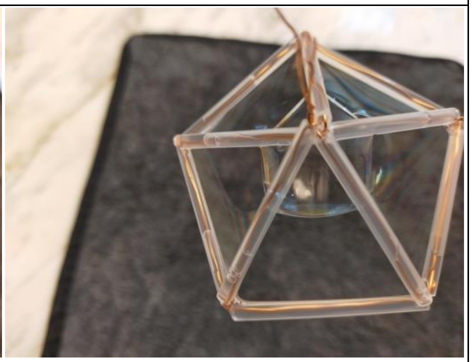
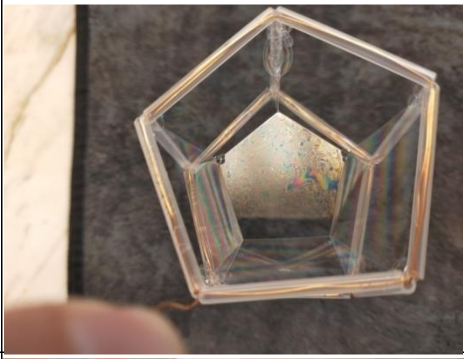
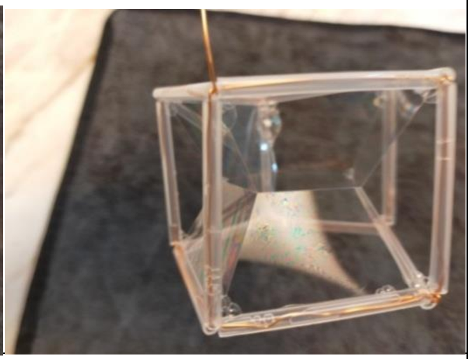
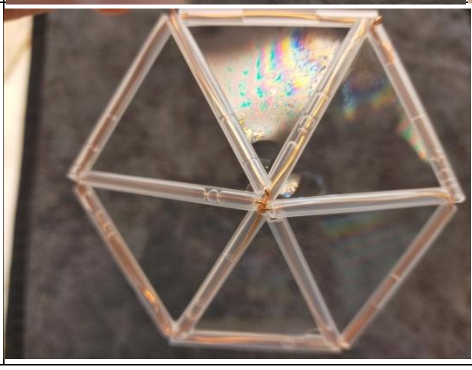
藉由檢視我們製作的立體模型結果，我們發現了以下結果：1. 每一個圖形的奇頂點個數必定是偶數。2. 若一個圖形可用一筆描繪，它必為一個連通的圖形。3. 至多有兩個奇頂點的圖形，必可以一筆描繪。4. 若某一個圖形恰有兩個奇頂點，在描繪此圖時，可用其中一個奇頂點做為起點、而以另一個奇頂點做為終點。5. 若某一個圖形所有的點都是偶頂點，在描繪此圖時，可用由任意頂點做為起點、而以原始頂點做為終點。6.若某一個圖形可用一筆描繪，只要我們掌握了起點，而且未走完的圖形仍然是連通圖形，這個圖就一定可以描繪完畢。

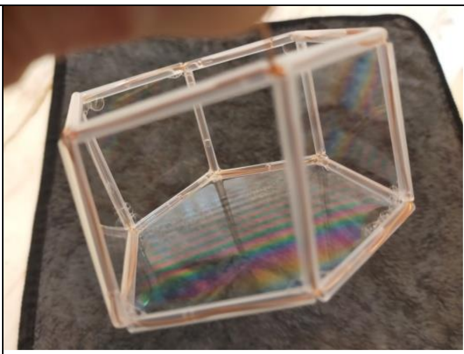
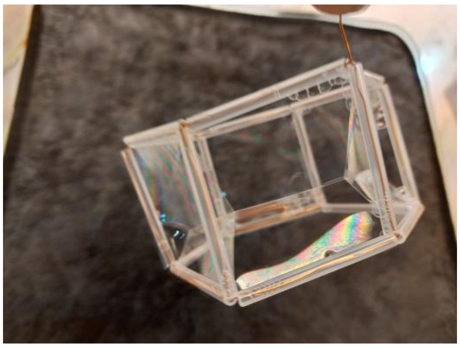
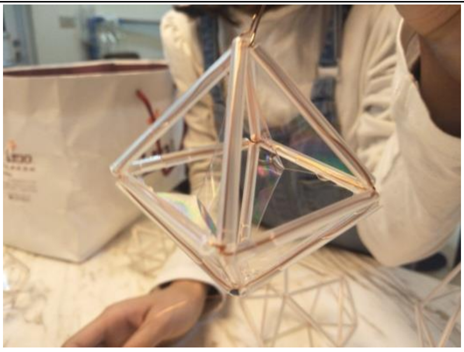
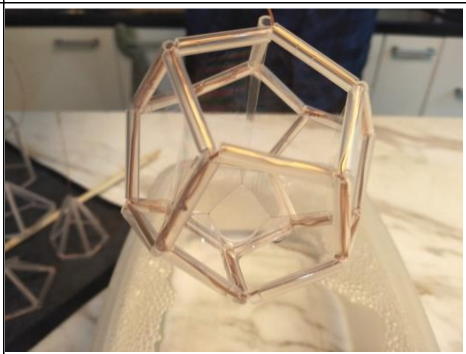
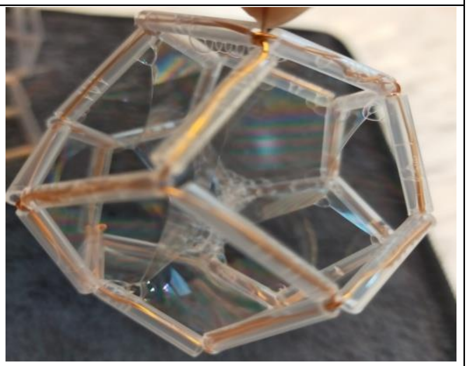
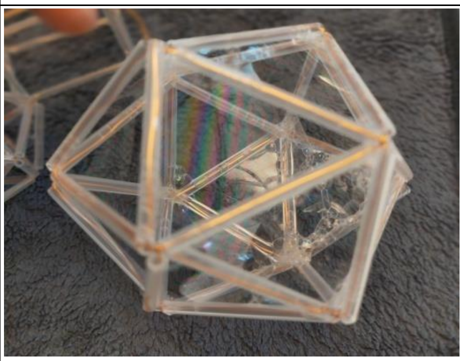
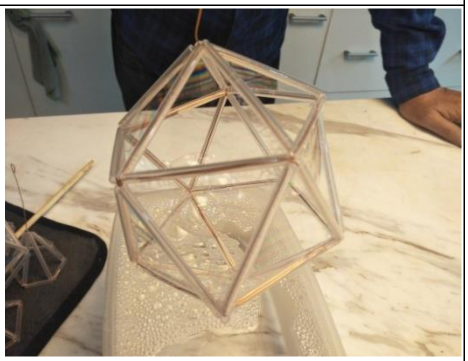
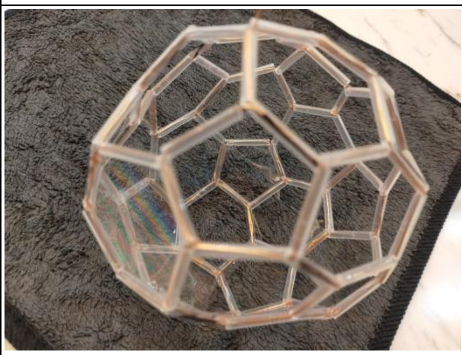
三、各多邊形立體模型浸入泡泡水後會形成什麼形狀的泡泡膜

要形成泡泡膜的條件，除了表面張力不能太大外，在空氣與液體之間必須形成穩定界面。清潔劑是一種穩定的高分子聚合物，可以作為界面活性劑，其分子組成，一端為親油性，一端為親水性，泡泡形成時，分子可在空氣與水之間形成穩定界面，當溶液濃度低於0.2%時，沒有足夠的分子作為界面活性劑，因此無法吹成泡泡。所以本研究選定一般市售的清潔劑作為實驗器材，水與清潔劑的比例約10：1來調製泡泡水。

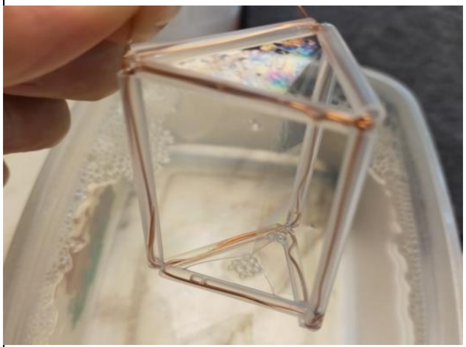
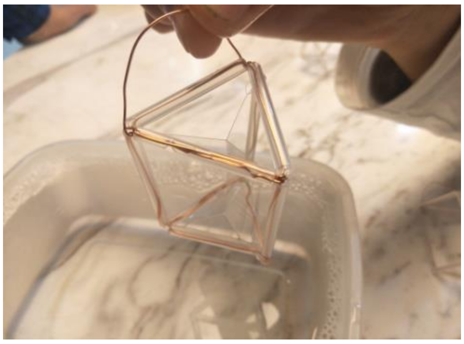
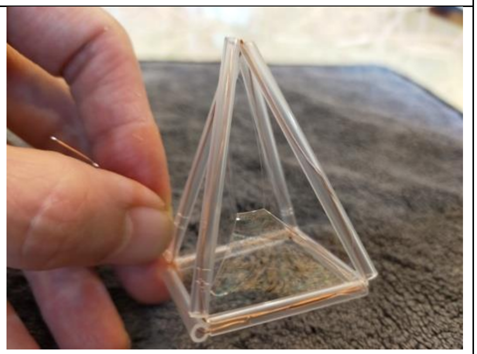
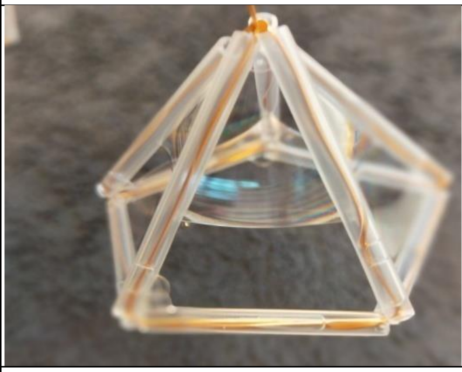
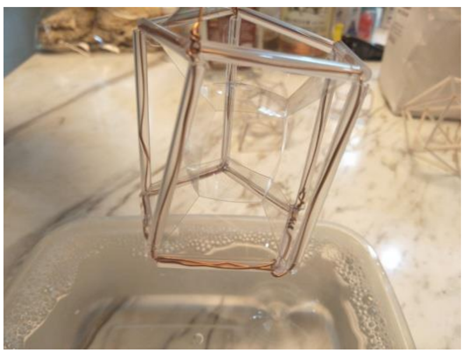
(一) 將製作好的立體模型(邊長 4 公分)，浸入調製好的泡泡水後拉起來，觀察在模型內會形成什麼形狀的泡泡膜，各立體模型浸入泡泡水後所形成的形狀如下：

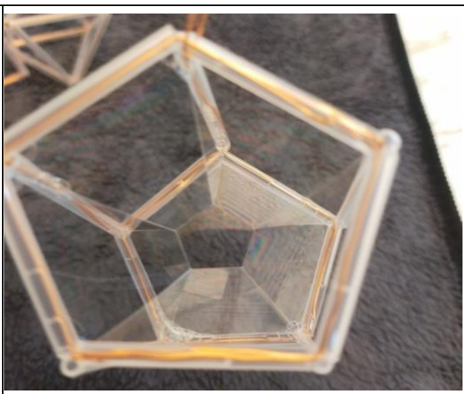
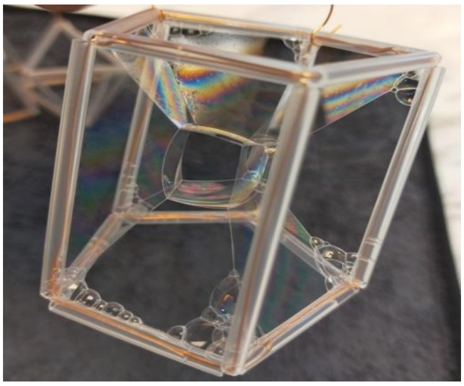
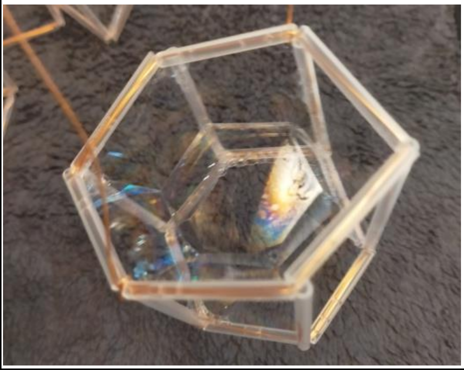
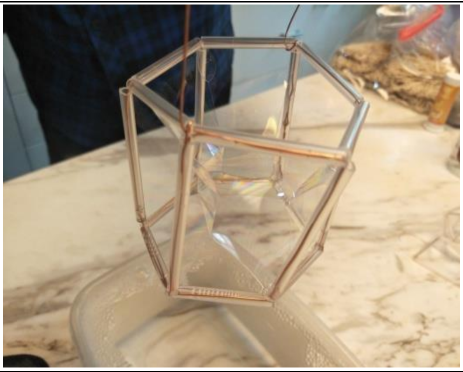
立體模型名稱	泡泡膜形狀照片(邊長 4 公分)
三角錐(正四面體)	 
三角柱	 
四角錐	 
四角柱(正六面體)	   

		
六面體		
五角錐		
五角柱		
六角錐		

六角柱		
正八面體		
正十二面體		
正二十面體		
三十二面體(足球體)		

研究發現：因實驗後發現，有些立體多邊形(角柱和角錐)因邊長一樣長而太扁平無法拉出泡泡膜，因此我們再發想出如果利用不同長度製作立體多邊型是否會出現不同的變化，各立體模型浸入泡泡水後所形成的形狀如下：

立體模型名稱	泡泡膜形狀照片(邊長 3 公、高 5 公分)	
三角柱		
四角錐		
五角錐		
五角柱		

五角柱	 
六角錐	 
六角柱	 

四、 探討各多邊形立體模型內泡泡膜的圖形和數量

由以上的實驗，我們綜合各多邊形立體模型拉出來的泡泡膜圖形和數量彙整如下表，另外我們也嘗試製作不同邊長的立體模型來探討泡泡膜的圖形和數量是否會改變，由研究結果發現，如果把角錐或角柱體的高變長，則泡泡膜出現的圖形和數量會越多樣化。

立體模型名稱	泡泡膜的圖形和數量
三角錐(正四面體)	表面：無
	內部：六個等腰三角形
三角柱	表面：無或三個長方形和二個正三角形

	內部 1：六個等腰三角形和三個梯形
	內部 2：四面體
四角錐	表面：四個正三角形和一個正方形
	內部 1：一個正方形
	內部 2：四個等腰梯形和四個三角形
四角柱(正六面體)	表面：六個正方形
	內部 1：一個正方形平面和八個等腰梯形和四個三角形
	內部 2：一個四角柱和十二個等腰梯形
	內部 3：二個四角柱和十二個等腰梯形
六面體	表面：六個正三角形
	內部：六個等腰三角形及一個六面體
五角錐	表面：五個正三角形和一個五邊形
	內部：一個五邊形
五角柱	表面：五個長方形和二個五邊形
	內部 1：一個五邊形和十個等腰梯形
	內部 2：一個五角柱和十五個等腰梯形
六角錐	表面：六個正三角形和一個六邊形
	內部：一個六邊形
六角柱	表面：六個長方形和二個六邊形
	內部 1：一個六邊形和十二個等腰梯形
	內部 2：一個六角柱和十八個等腰梯形
	內部 3：不規則形狀立方體
正八面體	表面：八個正三角形

	內部：一個菱形和二個等腰三角形和八個四邊形
正十二面體	表面：十二個五邊形
	內部：不規則四邊形和不規則立方體
正二十面體	表面：二十個正三角形
	內部：不規則六邊形和不規則立方體
三十二面體(足球體)	表面：十二個五邊形和二十個六邊形
	內部：不規則泡泡

陸、討論

一、探討各多邊形如何以最短的銅線長度才能串成立體模型

(一) 相同邊長的立體模型長度比較(以邊長 4 公分的立體模型為例)

立體模型名稱	頂點	邊	面	最短的銅線長度=邊長*最短步行長度
三角錐(正四面體)	4	6	4	邊長 4 公分，4*7=28 公分
三角柱	6	9	5	邊長 4 公分，4*11=44 公分
四角錐	5	8	5	邊長 4 公分，4*9=36 公分
四角柱(正六面體)	8	12	6	邊長 4 公分，4*15=60 公分
六面體	5	9	6	邊長 4 公分，4*9=36 公分
五角錐	6	10	6	邊長 4 公分，4*12=48 公分
五角柱	10	15	7	邊長 4 公分，4*19=76 公分
六角錐	7	12	7	邊長 4 公分，4*14=56 公分
六角柱	12	18	8	邊長 4 公分，4*23=92 公分
正八面體	6	12	8	邊長 4 公分，4*12=48 公分
正十二面體	20	30	12	邊長 4 公分，4*39=156 公分

正二十面體	12	30	20	邊長 4 公分，4*35=140 公分
三十二面體(足球體)	60	90	32	邊長 4 公分，4*119=476 公分

註：最短的銅線長度係為理論值，實際製作立體模型時因轉折點需要纏繞會多預留幾公分。

(二) 不同長度邊長的立體模型長度比較(以邊長 3 公分、高 5 公分的立體模型為例)

立體模型名稱	頂點	邊	面	最短的銅線長度=邊長*最短步行長度
三角錐(正四面體)	4	6	4	邊長 3 公分，3*4=12 高 5 公分，5*3=15 12+15=27 公分
				邊長 4 公分，4*7=28 公分
三角柱	6	9	5	邊長 3 公分，3*8=24 高 5 公分，5*3=15 24+15=39 公分
				邊長 4 公分，4*11=44 公分
四角錐	5	8	5	邊長 3 公分，3*5=15 高 5 公分，5*4=20 15+20=35 公分
				邊長 4 公分，4*9=36 公分
四角柱(正六面體)	8	12	6	邊長 3 公分，3*11=33 高 5 公分，5*4=20 33+20=53 公分
				邊長 4 公分，4*15=60 公分
五角錐	6	10	6	邊長 3 公分，3*7=21 高 5 公分，5*5=25 21+25=46 公分
				邊長 4 公分，4*12=48 公分
五角柱	10	15	7	邊長 3 公分，3*14=42 高 5 公分，5*5=25 42+25=67 公分
				邊長 4 公分，4*19=76 公分
六角錐	7	12	7	邊長 3 公分，3*8=24 高 5 公分，5*6=30 24+30=54 公分

				邊長 4 公分，4*14=56 公分
六角柱	12	18	8	邊長 3 公分，3*17=51 高 5 公分，5*6=30 51+30=81 公分
				邊長 4 公分，4*23=92 公分

註：最短的銅線長度係為理論值，實際製作立體模型時因轉折點需要纏繞會多預留幾公分。

二、探討組成各多邊形立體模型最短銅線長度的規律性

(一) 角錐

本實驗發現，要串成各多邊形立體模型最短的銅線長度都有共通性，均是由底部的面先串起來再連接高的部分才會有最短步行，以角錐而言，無論是邊長 4 公分或是不同長度的邊長(邊長 3 公分、高 5 公分)都具規律，即是與邊的最少重複的路徑有關，以三角錐和四角錐為例(圖三、圖五)，最短步行長度邊的重複次數最少為 1 次，因此都加 1，五角錐和六角錐最短步行長度邊的重複次數最少為 2 次(圖七、圖九)，因此都加 2，因此我們可以推論七角錐和八角錐最短步行長度邊的重複次數最少為 3 次，因此都加 3，九角錐和十角錐最短步行長度邊的重複次數最少為 4 次，因此都加 4，以下以此類推。

立體模型名稱	最短的銅線長度=邊長*最短步行長度
三角錐(正四面體)	模型一：邊長 4 公分，4*7=28 公分=4(3*2+1)
	模型二：邊長 3 公分，3*4=12 高 5 公分，5*3=15 12+15=27 公分
四角錐	模型一：邊長 4 公分，4*9=36 公分=4(4*2+1)
	模型二：邊長 3 公分，3*5=15 高 5 公分，5*4=20 15+20=35 公分
五角錐	模型一：邊長 4 公分，4*12=48 公分=4(5*2+2)
	模型二：邊長 3 公分，3*7=21 高 5 公分，5*5=25 21+25=46 公分
六角錐	模型一：邊長 4 公分，4*14=56 公分=4(6*2+2)

	模型二：邊長 3 公分，3*8=24 高 5 公分，5*6=30 } 24+30=54 公分
七角錐	邊長 4 公分，4*17=68 公分=4(7*2+3)
八角錐	邊長 4 公分，4*19=76 公分=4(8*2+3)
九角錐	邊長 4 公分，4*22=88 公分=4(9*2+4)
十角錐	邊長 4 公分，4*24=96 公分=4(10*2+4)

註：最短的銅線長度係為理論值，實際製作立體模型時因轉折點需要纏繞會多預留幾公分。

(三) 角柱

要串成各角柱多邊形立體模型最短的銅線長度也都有共通性，也是由底部的面先串起來再連接高的部分才會有對短步行，所以無論是邊長 4 公分或是不同長度的邊長也都具規律，都是與邊的最少重複的路徑有關，以三角柱為例，最短步行長度邊的重複次數最少為 2 次(圖四)，因此加 2，四角柱最短步行長度邊的重複次數最少為 3 次(圖六)，因此加 3，五角柱對短步行長度邊的重複次數最少為 4 次(圖八)，因此加 4，六角柱最短步行長度邊的重複次數最少為 5 次(圖十)，因此加 5；再以邊長來討論，我們發現邊長 3 公分(8 次)和高 5 公分(3 次)的銅線總路徑次數等於邊長 4 公分(11 次)的銅線總路徑次數，四角柱邊長 3 公分(11 次)和高 5 公分(4 次)的銅線總路徑次數等於邊長 4 公分(15 次)的銅線總路徑次數，而五角柱和六角柱也都有相同的規律性，因此我們可以推論到如果要串起 N 角柱的最短銅線長度應為邊長*[N*3+(N-1)]。

立體模型名稱	最短的銅線長度=邊長*最短步行長度
三角柱	模型一：邊長 4 公分，4*11=44 公分=4(3*3+2)
	模型二：邊長 3 公分，3*8=24 高 5 公分，5*3=15 } 24+15=39 公分
四角柱(正六面體)	模型一：邊長 4 公分，4*15=60 公分=4(4*3+3)

	模型二：邊長 3 公分，3*11=33 高 5 公分，5*4=20 33+20=53 公分
五角柱	模型一：邊長 4 公分，4*19=76 公分=4(5*3+4)
	模型二：邊長 3 公分，3*14=42 高 5 公分，5*5=25 42+25=67 公分
六角柱	模型一：邊長 4 公分，4*23=92 公分=4(6*3+5)
	模型二：邊長 3 公分，3*17=51 高 5 公分，5*6=30 51+30=81 公分
七角柱	邊長 4 公分，4*27=108 公分=4(7*3+6)
八角柱	邊長 4 公分，4*31=124 公分=4(8*3+7)
九角柱	邊長 4 公分，4*35=140 公分=4(9*3+8)
十角柱	邊長 4 公分，4*39=156 公分=4(10*3+9)
…	…
N 角柱	邊長 4 公分，邊長*[N*3+(N-1)]，N≧3

註：最短的銅線長度係為理論值，實際製作立體模型時因轉折點需要纏繞會多預留幾公分。

(三) 本實驗研究發現，要串成正多面體及三十二面體之立體模型的最短銅線長度無規律性。

立體模型名稱	最短的銅線長度=邊長*最短步行長度
三角錐(正四面體)	邊長 4 公分，4*7=28 公分
四角柱(正六面體)	邊長 4 公分，4*15=60 公分
六面體	邊長 4 公分，4*9=36 公分
正八面體	邊長 4 公分，4*12=48 公分
正十二面體	邊長 4 公分，4*39=156 公分

正二十面體	邊長 4 公分，4*35=140 公分
三十二面體(足球體)	邊長 4 公分，4*119=476 公分

註：最短的銅線長度係為理論值，實際製作立體模型時因轉擇點需要纏繞會多預留幾公分。

三、探討各立體多邊形是否可能以最短的一筆畫描繪路徑串成立體模型

(一) 本研究結果發現，我們製作的十三種立體模型中，只有六面體和正八面體可以一筆畫描繪路徑串成立體模型，因為六面體剛好有二個奇頂點數、而正八面體的頂點都是偶頂點，因此可以最短的一筆畫描繪路徑就組成立體模型，而其他的立體模型都是大於二的奇頂點數，因此無法以最短的一筆畫描繪路徑串成立體模型都會有重複的路徑出現，我們將個十三種立體模型的頂點數整理如下表：

立體模型名稱	奇頂點數	偶頂點數	可否一筆畫完成
三角錐(正四面體)	4	0	否
三角柱	6	0	否
四角錐	4	1	否
四角柱(正六面體)	8	0	否
六面體	2	3	可以
五角錐	6	0	否
五角柱	10	0	否
六角錐	6	1	否
六角柱	12	0	否
正八面體	0	6	可以
正十二面體	20	0	否
正二十面體	12	0	否
三十二面體(足球體)	60	0	否

(二) 我們也在研究中發現，奇頂點數與最短步行長度具有相關性，例如三角柱、四角柱、五角柱、六角柱的最短步行長度等於奇頂點數*2-1，所以我們也推算七角柱到十角

柱的最短步行長度也等於奇頂點數*2-1，因此可以推論出 N 角柱的最短步行長度等於 N*2*2-1，而且正十二面體和足球體的最短步行長度也等於頂點數*2-1(如下表)。

立體模型名稱	奇頂點數	偶頂點數	可否一筆畫完成	路徑次數	奇頂點數與最短步行長度的關係
三角柱	6	0	否	11	6*2-1=11
四角柱(正六面體)	8	0	否	15	8*2-1=15
五角柱	10	0	否	19	10*2-1=19
六角柱	12	0	否	23	12*2-1=23
七角柱	14	0	否	27	14*2-1=27
八角柱	16	0	否	31	16*2-1=31
九角柱	18	0	否	35	18*2-1=35
十角柱	20	0	否	39	20*2-1=39
…					
N 角柱	N*2	0	否	N*2*2-1	N*2*2-1
正十二面體	20	0	否	39	20*2-1=39
三十二面體(足球體)	60	0	否	119	60*2-1=119

(三) 而角錐的奇頂點數與最短步行長度也有相關性，可分為奇數角錐和偶數角錐來討論

1. 奇數角錐：三角錐的最短步行長度等於奇頂點數*2-1、五角錐的最短步行長度等於奇頂點數*2，我們推算到七角錐的最短步行長度等於奇頂點數*2+1、九角柱的最短步行長度等於奇頂點數*2+2，以下奇數角錐可依此類推。

立體模型名稱	奇頂點數	偶頂點數	可否一筆畫完成	路徑次數	奇頂點數與最短步行長度的關係
三角錐(正四面體)	4	0	否	7	4*2-1=7
五角錐	6	0	否	12	6*2=12
七角錐	8	0	否	17	8*2+1=17

九角錐	10	0	否	22	10*2+2=22

2. 偶數角錐：四角錐的最短步行長度等於奇頂點數*2+1、六角錐的最短步行長度等於奇頂點數*2+2，我們推算到八角錐的最短步行長度等於奇頂點數*2+3、十角柱的最短步行長度等於奇頂點數*2+4，以下偶數角錐可依此類推。

立體模型名稱	奇頂點數	偶頂點數	可否一筆畫完成	路徑次數	奇頂點數與最短步行長度的關係
四角錐	4	1	否	9	4*2+1=9
六角錐	6	1	否	14	6*2+2=14
八角錐	8	1	否	19	8*2+3=19
十角錐	10	1	否	24	10*2+4=24

(四) 製作立體模型的最短銅線長度就是計算最短的路徑次數，經由以上二、三的討論結果我們發現邊長與頂點具有相關性，也可以透過推導出來的公式來相互驗證，我們分別以角柱和角錐來討論：

1. 角柱：(1) 以邊長推導出 N 角柱的最短步行長度是 N*3+(N-1) = 4N-1

   (2) 以奇頂點數推導出 N 角柱的最短步行長度是 N*2*2-1 = 4N-1

   (3) 以邊長推導出 N 角柱的最短步行長度=以奇頂點數推導出 N 角柱的最短步行長度，因此可以推論我們計算出來角柱的最短步行長度應該是正確的。

2. 角錐：(1) 以邊長推導出三角錐的最短步行長度是 3*2+1 = 7

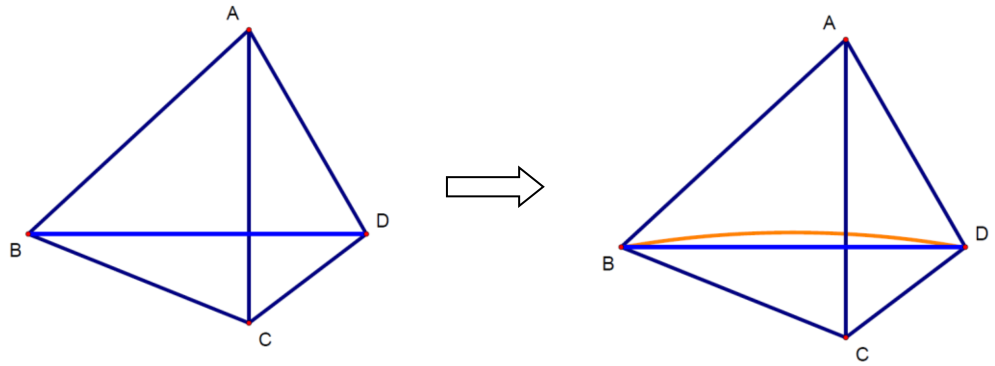
   (2) 以奇頂點數推導出三角錐的最短步行長度是 4*2-1 = 7

   (3) 以邊長推導出三角錐的最短步行長度=以奇頂點數推導出三角錐的最短步行長度，因此可以推論我們計算出來角錐的最短步行長度應該是正確的。

3. 驗證：透過以上 1 和 2 的結論，可以推論我們計算出來角柱(錐)的最短步行長度應該是正確的。

(五) 驗證最短步行數：

1. 我們後來發現可以利用歐拉定理來證明我們的最短步行長度是正確的，以三角錐(正四面體)為例，最短的步行長度為 7 次(總共走了 7 條邊)，其中 BD 重複一次，因此可以想成原來正四面體的頂點 B 與 D 之間加一條橘色重邊，進而形成一個複圖如下，因為原來的正四面體有 4 個奇頂點，藉由歐拉定理可知無法一筆畫通過所有的六條邊，但加入重複邊 DB 後，使得奇頂點只剩下 A、C 兩個頂點，B、D 之間必通過二次，因此可以證明最短步行長度是 7 次。



2. 由前述的結果可得知，如要產生一筆畫的結果，必定只能有二個奇頂點，所以最好的方法就是在兩個相鄰的奇頂點間加上一條重邊，就可以減少 2 個奇頂點。因為奇頂點必為偶數，所以假設有 2K 個奇頂點(K≧2)，且其中有 2(K-1)個頂點可以配對成 K-1 對兩兩相鄰，此時依序加入 K-1 條邊後，就會恰好剩下 2 個奇頂點，再藉由歐拉的定理就可以找到一條步行(一筆畫)通過所有的邊，而且恰好有 K-1 條邊重複。最重要的是，此時加入 K-1 條邊一定是最短的步行長度，因為如果少加一條重邊，就至少剩下 4 個奇頂點，就無法一筆畫完成。我們再以正十二面體為例，共有 20 個奇頂點，且可以找到 18 個分別配成 9 對兩兩相鄰，因此加入 9 條重邊後就會剩下 2 個奇頂點，就必定可以一筆畫完成，找到的步行中恰有 9 條邊重複，此時一定是最佳的情形，也就是最短步行長度為 30+9=39，我們把 12 種立體模型的關係彙整如下表：

立體模型名稱	頂點	邊	奇頂點 =2K	邊重複次數 =K-1	最短步行長度 =邊+邊重複次數
三角錐(正四面體)	4	6	4=2*2，K=2	2-1=1	6+1=7
三角柱	6	9	6=2*3，K=3	3-1=2	9+2=11
四角錐	5	8	4=2*2，K=2	2-1=1	8+1=9
四角柱(正六面體)	8	12	8=2*4，K=4	4-1=3	12+3=15
六面體	5	9	2=2*1，K=1	1-1=0	9+0=9
五角錐	6	10	6=2*3，K=3	3-1=2	10+2=12
五角柱	10	15	10=2*5，K=5	5-1=4	15+4=19
六角錐	7	12	6=2*3，K=3	3-1=2	12+2=14
六角柱	12	18	12=2*6，K=6	6-1=5	18+5=23
正八面體	6	12	0	0	12+0=12
正十二面體	20	30	20=2*10，K=10	10-1=9	30+9=39
正二十面體	12	30	12=2*6，K=6	6-1=5	30+5=35
三十二面體(足球體)	60	90	60=2*30，K=30	30-1=29	90+29=119

四、 各多邊形立體模型浸入泡泡水後會形成什麼形狀的泡泡膜

泡泡是一層薄薄的泡泡膜包著空氣所構成的，泡泡膜是一層薄膜，由清潔劑分子包圍住水，所形成的一層薄膜。因為表面張力的關係，所以泡泡的形狀一般都是球體形狀的。泡泡的結構具有很大的表面積，但體積卻很小；由能量的觀點，立體模型裡面的泡泡膜是非常不穩定的。泡泡膜形成的原因有三：1. 泡泡膜是由兩層肥皂分子夾少量的水溶液構成；肥皂分子成層狀排列，親水端向溶液，疏水端向外。因此肥皂能幫助保持膜維持較大的厚度。2. 泡泡膜上的肥皂分子層可以減緩內部液體的蒸發，避免泡泡太快變薄。3. 肥皂分子和水分之間的吸引力比水分子之間的吸引力小，所以肥皂水溶液的表面張力大約只有純水的三分之一。當泡泡膜表面受到擾動而擴張時，表面的肥皂分子間的距離加大，水補充進來，使局部泡泡膜的表面張力變大。增大的表面張力會使局部表面內縮，幫助泡泡膜回復原來的形狀，有利於穩定泡泡膜。

本研究發現，泡泡膜不只會形成在立體模型表面而已，模型裡面的泡泡膜是會互相接觸著，尤其如各正四面體、正六面體和正八面體因具有上下對稱的形狀，所以內部所產生的泡泡膜多具有上下左右的對稱性，因此不同的立體模型會形成不同形狀的泡泡膜，我們通常以為泡泡膜只形成於框架的表面上，但實際上泡泡膜會傾向於形成具有最小表面積之形狀，所以泡泡膜的形成與最小表面積有關，這是因為系統能量會傾向於最小化。

五、探討各多邊形立體模型內泡泡膜的圖形和數量

由本研究發現到泡泡膜的形成必須是在一封閉區域，如角柱的立體模型是一個對稱且封閉的圖框，所以可以組成多樣式的泡泡膜，而角錐的立體模型是上下不對稱且開放式的圖框，所以無法組成多樣化的泡泡膜。正多邊形及三十二面體則會隨著面體越來越多而無法形成泡泡膜。我們也嘗試製作不同邊長的立體模型來探討泡泡膜的圖形和數量是否會改變，由研究結果發現，如果把角錐或角柱體的高變長，則泡泡膜出現的圖形和數量會越多樣化。

柒、結論

一、本研究發現，要串成各多邊形立體模型最短的銅線長度都有共通性，均是由上面或底部的面先串起來再連接高的部分才會有最短的銅線長度。

二、 串成各多邊形立體模型最短的銅線長度只有角錐和角柱二種立體模型具有規律性，而且都是與最少重複次數的路徑有關係，正多面體及三十二面體則無規律性。

三、 研究結果發現我們製作的立體模型中，只有六面體和正八面體可以利用最短的一筆畫描繪路徑就組成立體模型，而其他的立體模型都是大於二的奇頂點數，無法以最短的一筆畫描繪路徑串成立體模型，我們也發現邊長推導出 N 角柱(或角錐)的最短步行長度=以奇頂點數推導出 N 角柱(或角錐)的最短步行長度，我們也利用歐拉定理來證明推算出最短步行長度是正確的。

四、泡泡膜不只會形成在立體模型表面而已，模型裡面的泡泡膜是會互相接觸著，而且不同的立體模型會形成不同形狀的泡泡膜，而泡泡膜的形成與最小表面積有關。

五、泡泡膜的形成必須是在一封閉區域，如角柱立體模型是一個對稱且封閉的圖框，則可以組成多樣式的泡泡膜，而角錐立體模型則是上下不對稱且開放式的圖框，則無法組成多

樣化的泡泡膜。正多邊形及三十二面體則因隨著面體越來越多且距離太長無法呈現一封閉圖框而無法形成泡泡膜。由研究結果也發現，如果把角錐或角柱體的高變長，則泡泡膜出現的圖形和數量會越多樣化。

捌、參考資料及其他

一、王雲五主編(1980)。肥皂泡的成因。台北市：臺灣商務印書館。

二、傅宗正、陳正平（2001）。冒泡的美。科學發展月刊，29（11），788-796。

三、徐力行（2003）。沒有數字的數學。台北：天下遠見出版。

四、許良榮、吳筱婷（2007）。科普活動設計：以「泡泡世界」為例。科學教育月刊，296，33-41。

【評語】080413

本作品透過實作的方式，嘗試探討不同多邊體是否可以用一筆劃描繪完成，以及如何利用最短長度的銅線做出不同的多邊體，並且還探討實作的多邊體模型放入泡泡水後所形成泡泡的形狀。閱讀該作品的報告，可以感受到作者在研究進行中所產生的樂趣，也可體會到數學本身蘊含的趣味元素，另外，也反映出學習數學可透過更多的實作方式來觀察結果，並歸納出一些有用的性質。然而，在實作之餘，宜進一步嘗試作嚴謹的証明。目前本作品過於著重實作的部分，日後可以考慮進行更多數學方面的探究，例如從圖論等數學的手法著手，並做更深入的探討。

作品海報

壹、研究動機

六年級的數學課老師讓我們認識多面體，當時我覺得多面體很抽象，課堂上老師又要我數邊、數頂點、數邊長，我覺得有點困擾，無法一時說出正確答案。有一次我們去台中科博館參觀時發現入口處就矗立一個巨大的正二十面體，更讓我嘆為觀止，我想有沒有可能用簡單的方式讓跟我有一樣困擾的學生，透過簡單的工具操作，完成各種多面體形狀的立體模型，把抽象化為具體，並發展出一些多面體趣味的活動，我相信一定能讓小學生對這一單元印象深刻。另外科博館內的數與形館有展示正四面體和正六面體的立體模型浸泡到泡泡水中出現漂亮的泡泡膜形狀，因此也引發我們想製作更多的多面體立體模型來實驗是否會出現意想不到的形狀出來。

貳、文獻探討

小六學習認識立體圖形(柱體、正角椎、角柱)時，都是透過平面摺紙或課本呈現出來的立體圖形透視圖的方式學習，在平面摺紙時容易發生黏貼處面容易鬆開，或者沒按照折線精準摺好時，容易變形，無法看出正確的立體模形；而後者觀看立體模形透視圖時只有一個方向，無法全面透視，在數邊時又容易重複數，如果有一種可以拿在手上任意翻轉各種角度的立體模形，既可以解決上述的問題又能讓我們更輕鬆學習。

第46屆科展-柏拉圖的天空－正多面體展開圖之研究中，探討正六面體與正八面體展開圖中的特徵拆解關係，第54屆科展滾動奇跡，探討多面體與多面體之間面的互繞最短路徑，前人研究著重在多面體面的探討，以多面體的面為發想研究，第26屆探討怎樣一筆畫，探討平面圖形一筆畫，而本此研究將以多面體的「邊」為思考主軸，探討各種多邊形如何利用最短的銅線長度才能串成立體模型，並實際製作多邊形模型來討論。

參、研究目的

一、探討各多邊形如何以最短的銅線長度才能串成立體模型。
二、探討串成各多邊形立體模型最短的銅線長度是否具有規律性。
三、探討各多邊形是否可能以一筆畫串成立體模型。
四、各多邊形立體模型浸入泡泡水後會形成什麼形狀的泡泡膜。
五、探討各多邊形立體模型內泡泡膜的圖形和數量。

肆、研究設備

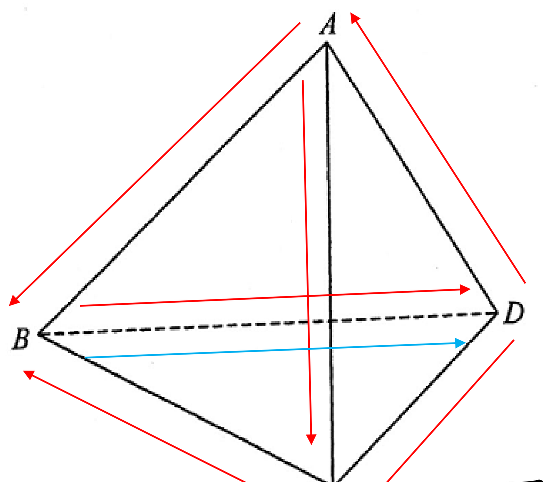
名稱	尺	剪刀	數位相機
	塑膠管	銅線	洗碗精

伍、研究過程

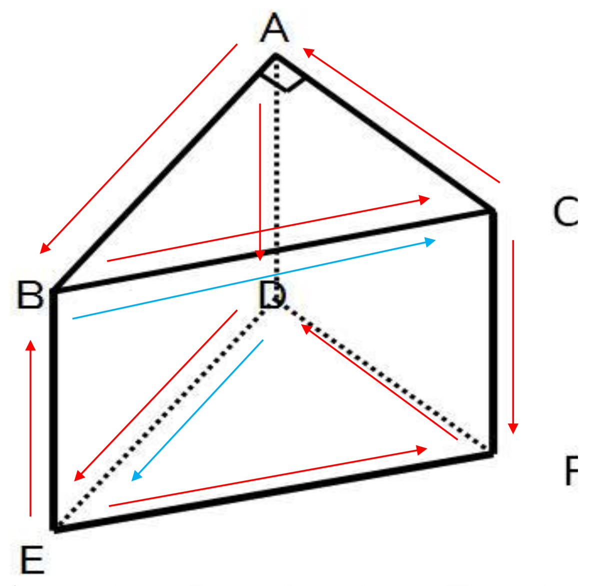
一、探討各多邊形如何以最短的銅線長度才能串成立體模型

利用中空塑膠管剪裁固定長度(每段4公分)，再利用銅線把中空塑膠管串接起來，探討如何以最短的銅線長度才能串成立體模型，各多邊形串接情形如下：

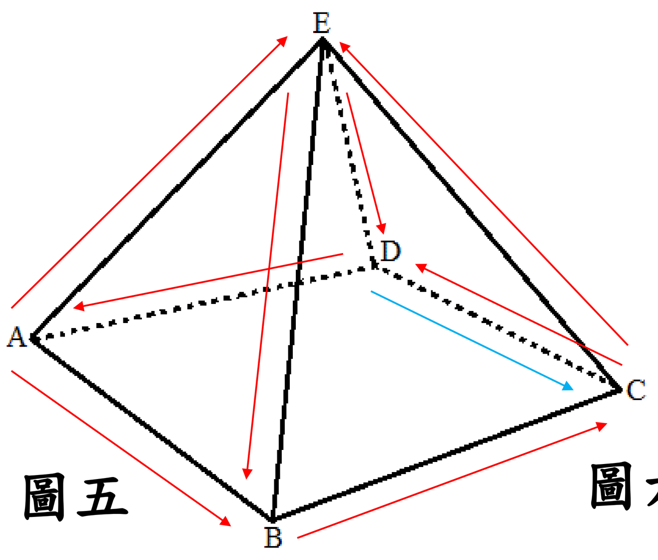
(一) 三角錐(正四面體)(圖三)：最短步行A→B→D→A→C→B→D→C (最短步行長度為7次，邊重複次數最少1次) 。
(二) 三角柱(圖四)：最短步行A→B→C→A→D→E→F→D→E→B→C→F(最短步行長度為11次，邊重複次數最少2次) 。
(三) 四角錐(圖五)：最短步行A→B→C→D→A→E→D→C→E→B(最短步行長度為9次，邊重複次數最少1次)。
(四) 四角柱(正六面體)(圖六)：最短步行A→B→C→D→A→E→H→G→F→E→F→B→C→G→H→D(最短步行長度為15次，邊重複次數最少3次)。
(五) 六面體(圖七)：最短步行A→B→C→D→B→E→C→A→C→E(最短步行長度為9次，邊無重複)。



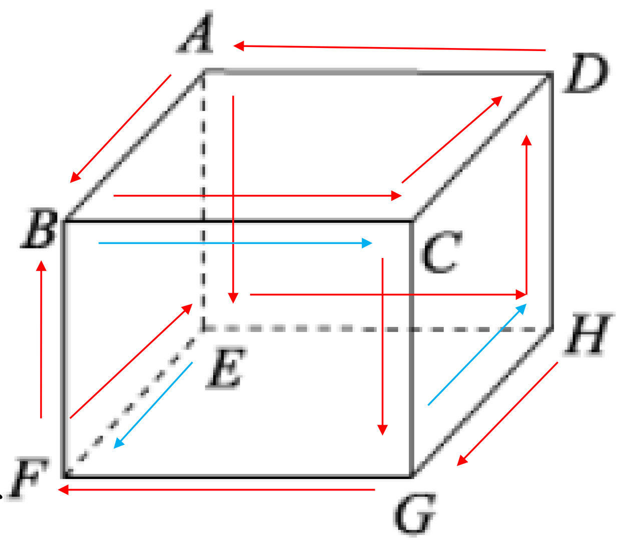
圖三



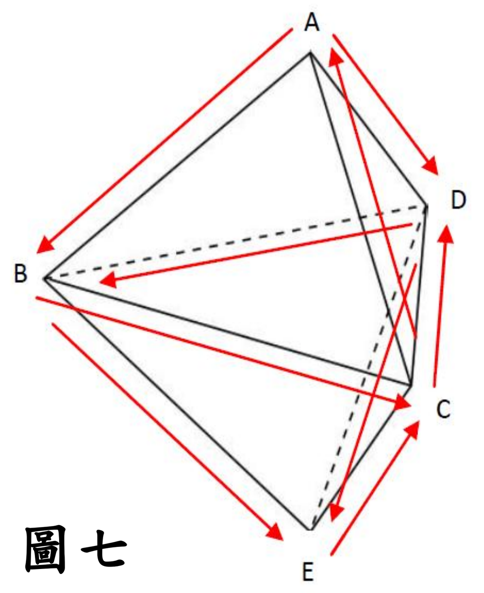
圖四



圖五

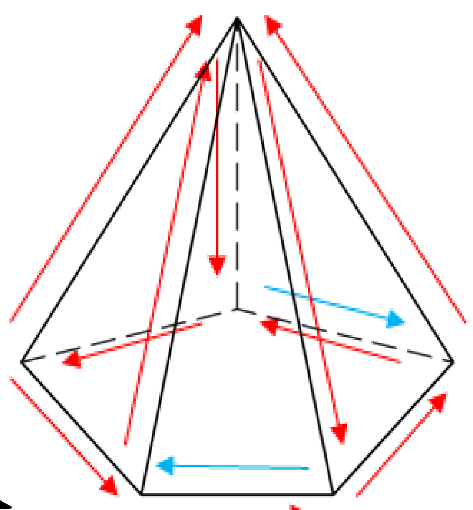


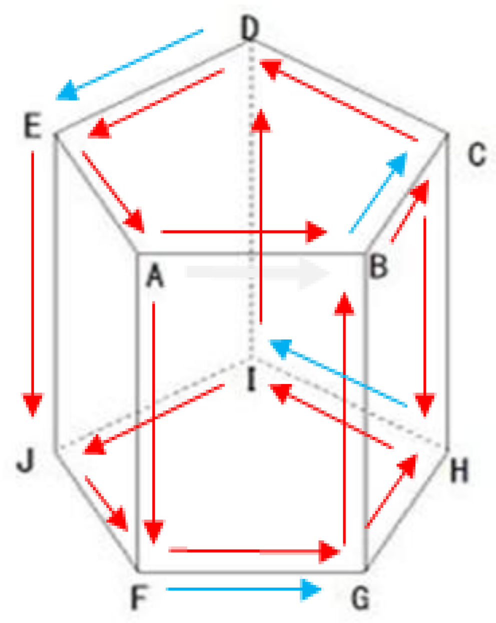
圖六



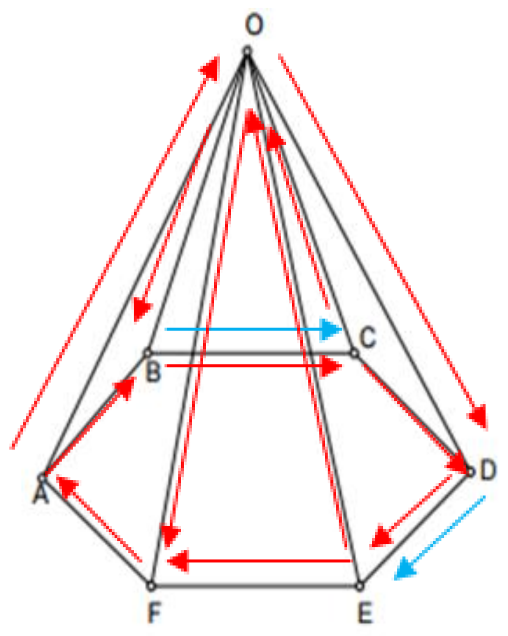
圖七

(六)五角錐(圖八)：最短步行A→B→C→D→E→A→F→E→D→F→C→B→F(最短步行長度為12次，邊重複次數最少2次)。
(七)五角柱(圖九)：最短步行A→B→C→D→E→A→F→G→H→I→J→F→G→B→C→H→I→D→E→J(最短步行長度為19次，邊重複次數最少4次)。
(八)六角錐(圖十)：最短步行A→B→C→D→E→F→A→O→B→C→O→D→E→O→F(最短步行長度為14次，邊重複次數最少2次)。
(九)六角柱(圖十一)：最短步行A→B→C→D→E→F→A→G→H→I→J→K→L→G→H→B→C→I→J→D→E→K→L→F(最短步行長度為23次，邊重複次數最少5次)。

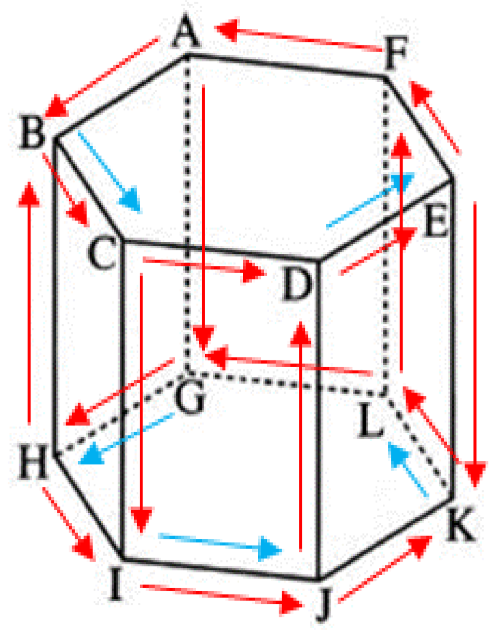

圖八



圖九

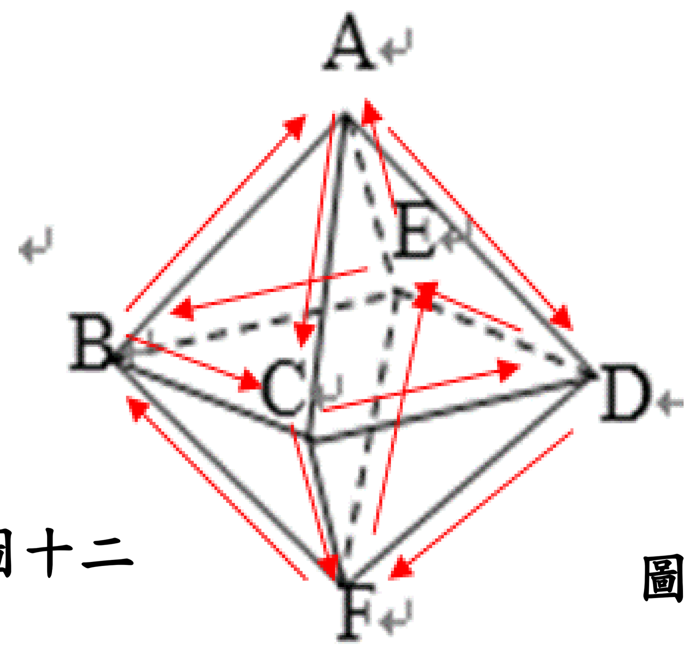


圖十

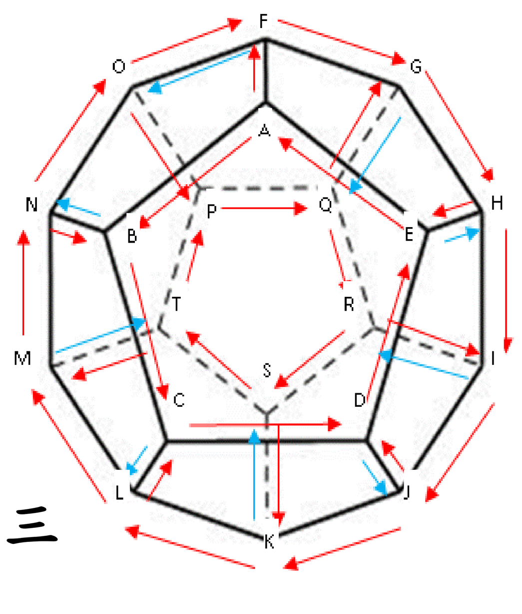


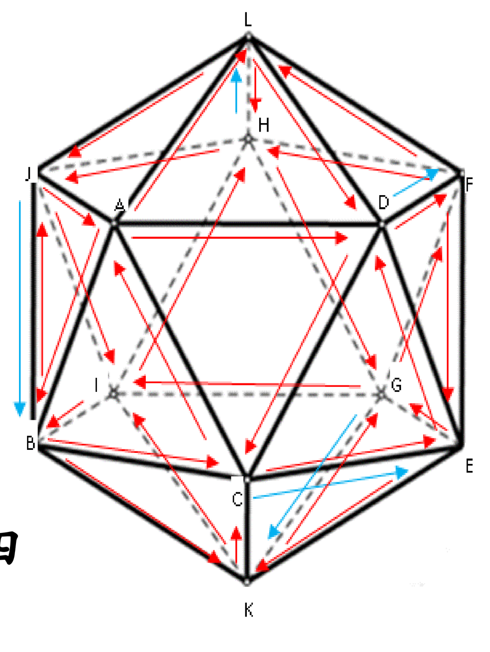
圖十一

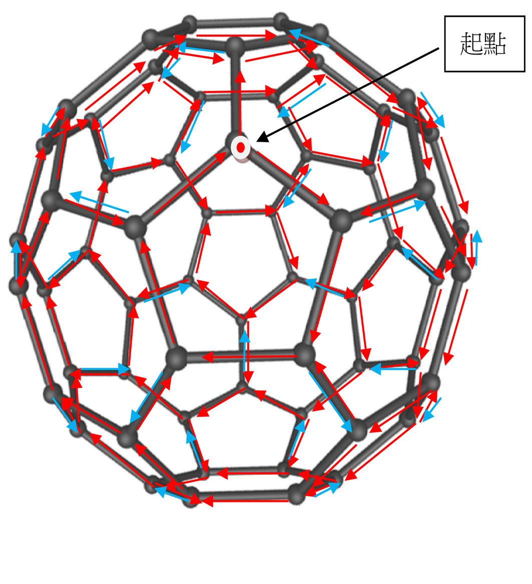
(十)正八面體(圖十二)：最短步行B→C→D→E→A→C→F→E→B→A→D→F→B(最短步行長度為12次，邊無重複)。
(十一)正十二面體(圖十三)：最短步行長度A→B→C→D→E→A→F→G→H→E→H→I→J→D→J→K→L→C→L→M→N→B→N→O→F→O→P→Q→G→Q→R→I→R→S→K→S→T→M→T→P(最短步行長度為39次，邊重複次數最少9次)。
(十二)正二十面體(圖十四)：最短步行長度A→B→C→A→D→C→E→D→F→E→G→F→H→G→I→H→J→I→B→J→A→L→D→F→L→H→L→J→B→K→C→E→K→G→K→I(最短步行長度為35次，邊重複次數最少5次)。
(十三)三十二面體(足球體)(圖十五)：最短步行長度為119次，邊重複次數最少29次。



圖十二


圖十三

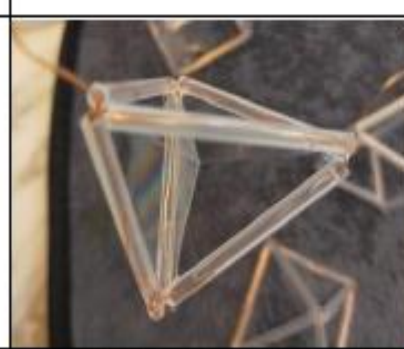
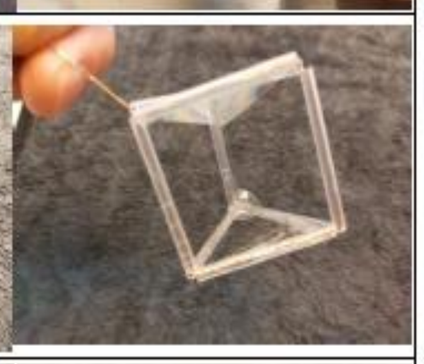
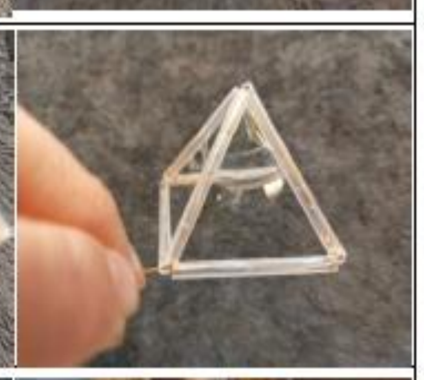
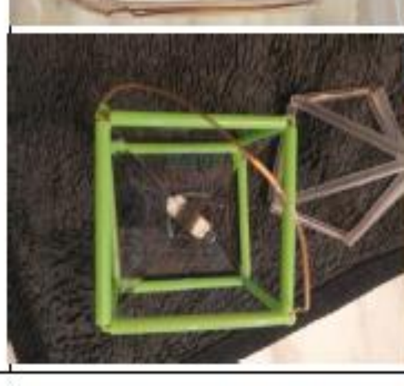

圖十四

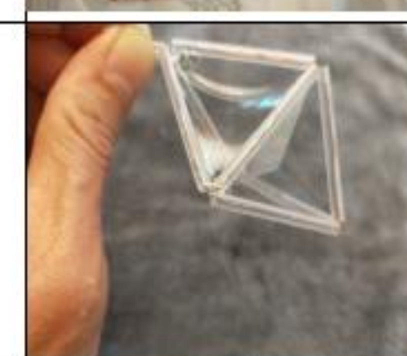
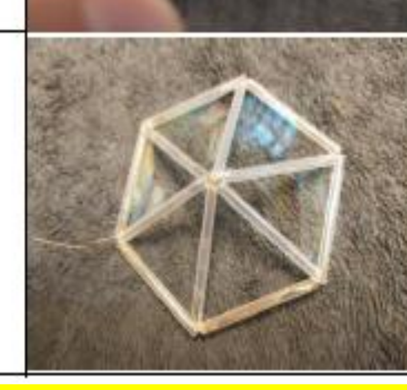
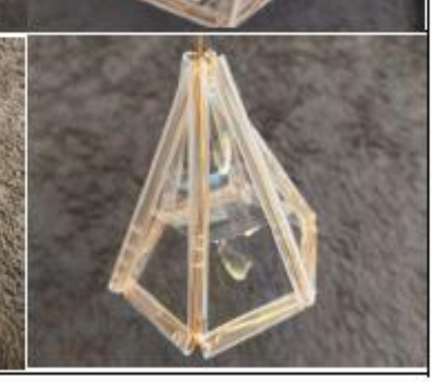


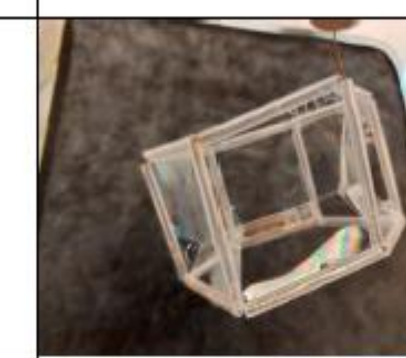
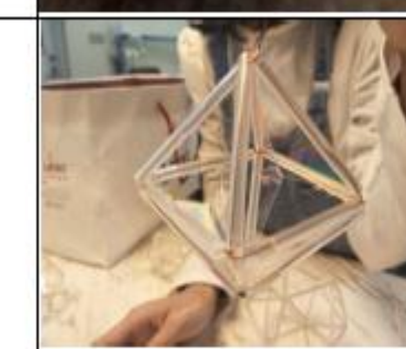
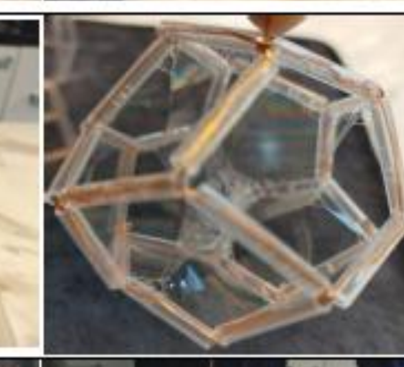
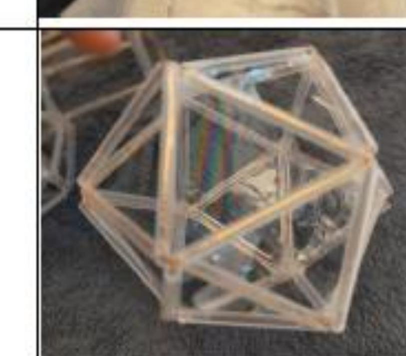
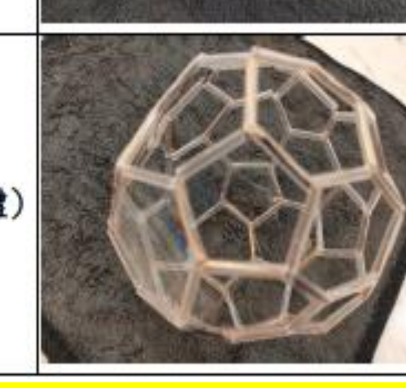
圖十五

二、各多邊形立體模型浸入泡泡水後會形成什麼形狀的泡泡膜

要形成泡泡膜的條件，除了表面張力不能太大外，在空氣與液體之間必須形成穩定界面。本研究選定一般市售的清潔劑作為實驗器材，水與清潔劑的比例約10：1來調製泡泡水，我們將製作好的立體模型浸入調製好的泡泡水後拉起來觀察，各立體模型浸入泡泡水後所形成的形狀如下，因實驗後發現，有些立體多邊形(角柱和角錐)因邊長一樣長而太扁平無法拉出泡泡膜，因此我們再發想出如果利用不同長度製作立體多邊型是否會出現不同的變化，由實驗結果發現，如果把角錐或角柱體的高變長，則泡泡膜出現的圖形和數量會越多樣化。

立體模型名稱	泡泡膜形狀照片
三角錐(正四面體)	 
三角柱	 
四角錐	 
四角柱(正六面體)	   

立體模型名稱	泡泡膜形狀照片
四角柱(正六面體)	 
六面體	 
五角錐	 
五角柱	 
六角錐	 

立體模型名稱	泡泡膜形狀照片
六角柱	 
正八面體	 
正十二面體	 
正二十面體	 
三十二面體(足球體)	 

陸、討論

一、探討各多邊形如何以最短的銅線長度才能串成立體模型

(一)、相同邊長的立體模型長度比較

（以邊長4公分的立體模型為例）

立體模型名稱	頂點	邊	面	最短的銅線長度=邊長*最短步行長度
三角錐(正四面體)	4	6	4	邊長4公分，4*7=28公分
三角柱	6	9	5	邊長4公分，4*11=44公分
四角錐	5	8	5	邊長4公分，4*9=36公分
四角柱(正六面體)	8	12	6	邊長4公分，4*15=60公分
六面體	5	9	6	邊長4公分，4*9=36公分
五角錐	6	10	6	邊長4公分，4*12=48公分
五角柱	10	15	7	邊長4公分，4*19=76公分
六角錐	7	12	7	邊長4公分，4*14=56公分
六角柱	12	18	8	邊長4公分，4*23=92公分
正八面體	6	12	8	邊長4公分，4*12=48公分
正十二面體	20	30	12	邊長4公分，4*39=156公分
正二十面體	12	30	20	邊長4公分，4*35=140公分
三十二面體(足球體)	60	90	32	邊長4公分，4*119=476公分

(二)、不同長度邊長的立體模型長度比較

（以邊長3公分、高5公分的立體模型為例）

立體模型名稱	頂點	邊	面	最短的銅線長度=邊長*最短步行長度
三角錐(正四面體)	4	6	4	邊長3公分，3*4=12 高5 公分，5*3=15 } 12+15=27公分
				邊長4公分，4*7=28公分
四角錐	5	8	5	邊長3公分，3*5=15 高5 公分，5*4=20 } 15+20=35公分
				邊長4公分，4*9=36公分
五角錐	6	10	6	邊長3公分，3*7=21 高5 公分，5*5=25 } 21+25=46公分
				邊長4公分，4*12=48公分
六角錐	7	12	7	邊長3公分，3*8=24 高5 公分，5*6=30 } 24+30=54公分
				邊長4公分，4*14=56公分

立體模型名稱	頂點	邊	面	最短的銅線長度=邊長*最短步行長度
三角柱	6	9	5	邊長3公分，3*8=24 高5 公分，5*3=15 } 24+15=39公分
				邊長4公分，4*11=44公分
四角柱(正六面體)	8	12	6	邊長3公分，3*11=33 高5 公分，5*4=20 } 33+20=53公分
				邊長4公分，4*15=60公分
五角柱	10	15	7	邊長3公分，3*14=42 高5 公分，5*5=25 } 42+25=67公分
				邊長4公分，4*19=76公分
六角柱	12	18	8	邊長3公分，3*17=51 高5 公分，5*6=30 } 51+30=81公分
				邊長4公分，4*23=92公分

二、 探討組成各多邊形立體模型最短銅線長度的規律性

（一）角錐

本實驗發現，要串成各多邊形立體模型最短的銅線長度都有共通性，均是由底部的面先串起來再連接高的部分才會有最短長度，以角錐而言，無論是邊長4公分或是不同長度的邊長(邊長3公分、高5公分)都具規律，即是與最少重複的路徑有關，以三角錐和四角椎為例(圖三、圖五)，最短路徑重複次數最少為1次，因此都加1，五角錐和六角椎最短路徑重複次數最少為2次(圖七、圖九)，因此都加2，因此我們可以推論七角錐和八角椎最短路徑重複次數最少為3次，因此都加3，九角錐和十角椎最短路徑重複次數最少為4次，因此都加4，以下以此類推。

（二）角柱

要串成各角柱多邊形立體模型最短的銅線長度也都有共通性，也是由底部的面先串起來再連接高的部分才會有最短長度，所以無論是邊長4公分或是不同長度的邊長也都具規律，都是與最少重複的路徑有關，以三角柱為例，最短路徑重複次數最少為2次(圖四)，因此加2，四角柱最短路徑重複次數最少為3次(圖六)，因此加3，五角柱最短路徑重複次數最少為4次(圖八)，因此加4，六角柱最短路徑重複次數最少為5次(圖十)，因此加5；再以邊長來討論，我們發現邊長3公分(8次)和高5公分(3次)的銅線總路徑次數等於邊長4公分(11次)的銅線總路徑次數，四角柱邊長3公分(11次)和高5公分(4次)的銅線總路徑次數等於邊長4公分(15次)的銅線總路徑次數，而五角柱和六角柱也都有相同的規律性，因此我們可以推論到如果要串起n角柱的最短銅線長度應為邊長*[n*3+(n-1)]。

立體模型名稱	最短的銅線長度
三角錐(正四面體)	模型一：邊長 4 公分，4*7=28 公分=4(3*2+1)
	模型二：邊長 3 公分，3*4=12 高 5 公分，5*3=15 } 12+15=27 公分
四角錐	模型一：邊長 4 公分，4*9=36 公分=4(4*2+1)
	模型二：邊長 3 公分，3*5=15 高 5 公分，5*4=20 } 15+20=35 公分
五角椎	模型一：邊長 4 公分，4*12=48 公分=4(5*2+2)
	模型二：邊長 3 公分，3*7=21 高 5 公分，5*5=25 } 21+25=46 公分

立體模型名稱	最短的銅線長度
六角椎	模型一：邊長 4 公分，4*14=56 公分=4(6*2+2)
	模型二：邊長 3 公分，3*8=24 高 5 公分，5*6=30 } 24+30=54 公分
七角椎	邊長 4 公分，4*17=68 公分=4(7*2+3)
八角椎	邊長 4 公分，4*19=76 公分=4(8*2+3)
九角椎	邊長 4 公分，4*22=88 公分=4(9*2+4)
十角椎	邊長 4 公分，4*24=96 公分=4(10*2+4)

立體模型名稱	最短的銅線長度
三角柱	模型一：邊長 3 公分，3*8=24 高 5 公分，5*3=15 } 24+15=39 公分
	模型二：邊長 4 公分，4*11=44 公分=4(3*3+2)
四角柱(正六面體)	模型一：邊長 3 公分，3*11=33 高 5 公分，5*4=20 } 33+20=53 公分
	模型二：邊長 4 公分，4*15=60 公分=4(4*3+3)
五角柱	模型一：邊長 3 公分，3*14=42 高 5 公分，5*5=25 } 42+25=67 公分
	模型二：邊長 4 公分，4*19=76 公分=4(5*3+4)

立體模型名稱	最短的銅線長度
六角柱	模型一：邊長 3 公分，3*17=51 高 5 公分，5*6=30 } 51+30=81公分
	模型二：邊長 4 公分，4*23=92 公分=4(6*3+5)
七角柱	邊長 4 公分，4*27=108 公分=4(7*3+6)
八角柱	邊長 4 公分，4*31=124 公分=4(8*3+7)
九角柱	邊長 4 公分，4*35=140 公分=4(9*3+8)
十角柱	邊長 4 公分，4*39=156 公分=4(10*3+9)
…	…
n 角柱	邊長 4 公分，邊長*[n*3+(n-1)]，n≧3

（三）本實驗研究發現，要串成正多面體及三十二面體之立體模型的最短銅線長度無規律性。

三、探討各立體多邊形是否可能以最短的一筆畫描繪路徑串成立體模型

(一)本研究結果發現，我們製作的十三種立體模型中，只有六面體和正八面體可以一筆畫描繪路徑串成立體模型，因為六面體剛好有二個奇頂點數、而正八面體的頂點都是偶頂點，因此可以最短的一筆畫描繪路徑就組成立體模型，而其他的立體模型都是大於二的奇頂點數，因此無法以最短的一筆畫描繪路徑串成立體模型都會有重複的路徑出現。

立體模型名稱	奇頂點數	偶頂點數	可否一筆畫完成
三角錐(正四面體)	4	0	否
三角柱	6	0	否
四角錐	4	1	否
四角柱(正六面體)	8	0	否
六面體	2	3	可以
五角錐	6	0	否
五角柱	10	0	否
六角錐	6	1	否
六角柱	12	0	否
正八面體	0	6	可以
正十二面體	20	0	否
正二十面體	12	0	否
三十二面體(足球體)	60	0	否

(二)我們也在研究中發現，奇頂點數與最短步行長度具有相關性，例如三角柱、四角柱、五角柱、六角柱的最短步行長度等於奇頂點數*2-1，所以我們也推算七角柱到十角柱的最短步行長度也等於奇頂點數*2-1，因此可以推論出N角柱的最短步行長度等於N*2*2-1，而且正十二面體和足球體的最短步行長度也等於**奇頂點數*2-1**。

立體模型名稱	奇頂點數	偶頂點數	可否一筆畫完成	路徑次數	奇頂點數與最短步行長度的關係
三角柱	6	0	否	11	6*2-1=11
四角柱(正六面體)	8	0	否	15	8*2-1=15
五角柱	10	0	否	19	10*2-1=19
六角柱	12	0	否	23	12*2-1=23
七角柱	14	0	否	27	14*2-1=27
八角柱	16	0	否	31	16*2-1=31
九角柱	18	0	否	35	18*2-1=35
十角柱	20	0	否	39	20*2-1=39
…					
N角柱	N*2	0	否	N*2*2-1	N*2*2-1
正十二面體	20	0	否	39	20*2-1=39
三十二面體(足球體)	60	0	否	119	60*2-1=119

(三)而角錐的奇頂點數與最短步行長度也有相關性，可分為奇數角錐和偶數角錐來討論

1. **奇數**角錐：三角錐的最短步行長度等於奇頂點數*2-1、五角錐的最短步行長度等於奇頂點數*2，我們推算到七角錐的最短步行長度等於奇頂點數*2+1、九角柱的最短步行長度等於奇頂點數*2+2，以下奇數角錐可依此類推。
2. **偶數**角錐：四角錐的最短步行長度等於奇頂點數*2+1、六角錐的最短步行長度等於奇頂點數*2+2，我們推算到八角錐的最短步行長度等於奇頂點數*2+3、十角柱的最短步行長度等於奇頂點數*2+4，以下偶數角錐可依此類推。

立體模型名稱	奇頂點數	偶頂點數	可否一筆畫完成	路徑次數	奇頂點數與最短步行長度的關係
三角錐(正四面體)	4	0	否	7	4*2-1=7
五角錐	6	0	否	12	6*2+0=12
七角錐	8	0	否	17	8*2+1=17
九角錐	10	0	否	22	10*2+2=22

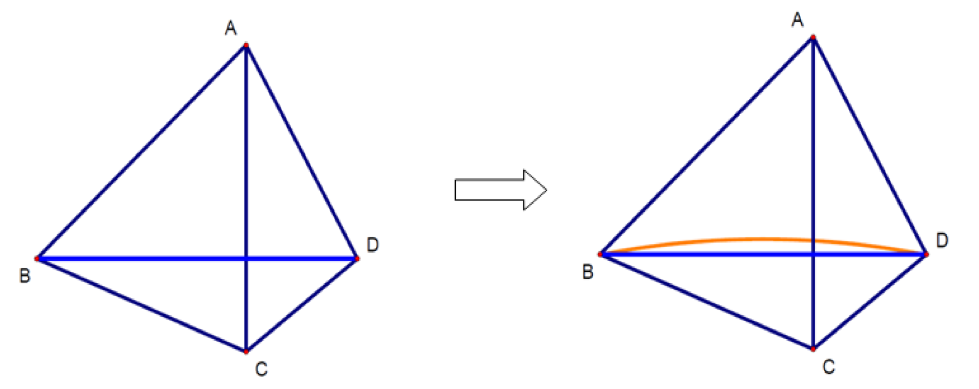
立體模型名稱	奇頂點數	偶頂點數	可否一筆畫完成	路徑次數	奇頂點數與最短步行長度的關係
四角錐	4	1	否	9	4*2+1=9
六角錐	6	1	否	14	6*2+2=14
八角錐	8	1	否	19	8*2+3=19
十角錐	10	1	否	24	10*2+4=24

(四)製作立體模型的最短銅線長度就是計算最短的路徑次數，經由以上(二)、(三)的討論結果我們發現**邊長**與**頂點**具有相關性，也可以透過推導出來的公式來相互驗證，我們分別以角柱和角錐來討論：

1. 角柱：(1)以邊長推導出N角柱的最短步行長度是N*3+(N-1) = 4N-1
   (2)以奇頂點數推導出N角柱的最短步行長度是N*2*2-1 = 4N-1
   (3)以邊長推導出N角柱的最短步行長度=以奇頂點數推導出N角柱的最短步行長度，因此可以推論我們計算出來角柱的最短步行長度應該是正確的。
2. 角錐：(1)以邊長推導出三角錐的最短步行長度是3*2+1 = 7
   (2)以奇頂點數推導出三角錐的最短步行長度是4*2-1 = 7
   (3)以邊長推導出三角錐的最短步行長度=以奇頂點數推導出三角錐的最短步行長度，因此可以推論我們計算出來角錐的最短步行長度應該是正確的。
3. 透過以上1和2的結論，可以推論我們計算出來角柱(錐)的最短步行長度應該是正確的。

(五)證明最短步行數：

1. 我們後來發現可以利用歐拉定理來證明我們的最短步行長度是正確的，以三角錐(正四面體)為例，最短的步行長度為7次(總共走了7條邊)，其中BD重複一次，因此可以想成原來正四面體的頂點B與D之間加一條橘色重邊，進而形成一個複圖如下，因為原來的正四面體有4個奇頂點，藉由歐拉定理可知無法一筆畫通過所有的六條邊，但加入重複邊DB後，使得奇頂點只剩下A、C兩個頂點，B、D之間必通過二次，因此可以證明最短步行長度是7次。



2. 由前述的結果可得知，如要產生一筆畫的結果，必定只能有二個奇頂點，所以為奇頂點必為偶數，所以假設有2K個奇頂點(K≧2)，且其中有2(K-1)個頂點可以配對成K-1對兩兩相鄰，此時依序加入K-1條邊後，就會恰好剩下2個奇頂點，再藉由歐拉的定理就可以找到一條步行(一筆畫)通過所有的邊，而且恰好有K-1條邊重複。最重要的是，此時加入K-1條邊一定是最短的步行長度，因為如果少加一條重邊，就至少剩下4個奇頂點，就無法一筆畫完成。我們再以正十二面體為例，共有20個奇頂點，且可以找到18個分別配成9對兩兩相鄰，因此加入9條重邊後就會剩下2個奇頂點，就必定可以一筆畫完成，找到的步行中恰有9條邊重複，此時一定是最佳的情形，也就是最短步行長度為30+9=39，我們把13種立體模型的關係彙整如右表：

立體模型名稱	頂點	邊	奇頂點=2K	邊重複次數=K-1	最短步行長度=邊+邊重複次數
三角錐(正四面體)	4	6	4=2*2，K=2	2-1=1	6+1=7
三角柱	6	9	6=2*3，K=3	3-1=2	9+2=11
四角錐	5	8	4=2*2，K=2	2-1=1	8+1=9
四角柱(正六面體)	8	12	8=2*4，K=4	4-1=3	12+3=15
六面體	5	9	2=2*1，K=1	1-1=0	9+0=9
五角錐	6	10	6=2*3，K=3	3-1=2	10+2=12
五角柱	10	15	10=2*5，K=5	5-1=4	15+4=19
六角錐	7	12	6=2*3，K=3	3-1=2	12+2=14
六角柱	12	18	12=2*6，K=6	6-1=5	18+5=23
正八面體	6	12	0	0	12+0=12
正十二面體	20	30	20=2*10，K=10	10-1=9	30+9=39
正二十面體	12	30	12=2*6，K=6	6-1=5	30+5=35
三十二面體(足球體)	60	90	60=2*30，K=30	30-1=29	90+29=119

柒、結論

一、本研究發現，要串成各多邊形立體模型最短的銅線長度都有共通性，均是由上面或底部的面先串起來再連接高的部分才會有最短的銅線長度。

二、串成各多邊形立體模型最短的銅線長度只有角錐和角柱二種立體模型具有規律性，而且都是與最少重複次數的路徑有關係，正多面體及三十二面體則無規律性。

三、研究結果發現我們製作的立體模型中，只有六面體和正八面體可以利用最短的一筆畫描繪路徑就組成立體模型，而其他的立體模型都是大於二的奇頂點數，無法以最短的一筆畫描繪路徑串成立體模型，我們也發現邊長推導出N角柱(或角錐)的最短步行長度=以奇頂點數推導出N角柱(或角錐)的最短步行長度，我們也利用歐拉定理來證明推算出最短步行長度是正確的。

四、泡泡膜不只會形成在立體模型表面而已，模型裡面的泡泡膜是會互相接觸著，而且不同的立體模型會形成不同形狀的泡泡膜，而泡泡膜的形成與最小表面積有關。

五、泡泡膜的形成必須是在一封閉區域，如角柱立體模型是一個對稱且封閉的圖框，則可以組成多樣式的泡泡膜，而角錐立體模型則是上下不對稱且開放式的圖框，則無法組成多樣化的泡泡膜。正多邊形及三十二面體則因隨著面體越來越多且距離太長無法呈現一封閉圖框而無法形成泡泡膜。由研究結果也發現，如果把角錐或角柱體的高變長，則泡泡膜出現的圖形和數量會越多樣化。