中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080408

以圖形分層遞降方式探討整數分割方法數

學校名稱：高雄市苓雅區四維國民小學

作者：	指導老師：
小四 陳泓嘉	辛綺秀 歐志昌

關鍵詞：整數分割、圖形分層遞降、遞迴關係式

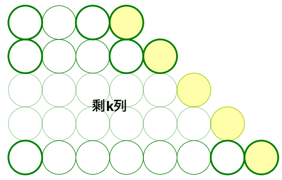
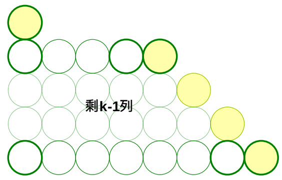
摘　　要

從圖形分層遞降觀點找**硬幣排列**與**方塊堆疊**的**遞迴關係式**，可用**流程圖**找方法數。

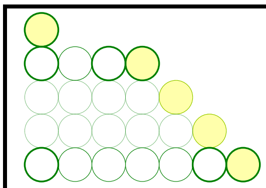
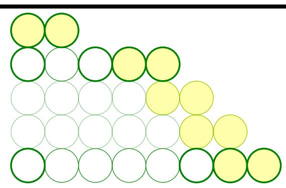
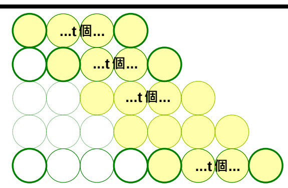
一、將 n 個硬幣排成 k 列排法 $B_k(n)$ 種，共 $A(n)$ 種

(一) 找出 $B_1(n)=1$，$B_2(n)=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$，$B_3(n)$。

(二) 從圖形解釋 $B_k(n)=B_k(n-k)+B_{k-1}(n-k)$：

	最上方大於 1 個， 每列移走 1 個， 剩 $n-k$ 個分 k 列 $\therefore$ 排法 $B_k(n-k)$		最上方只有 1 個， 每列移走 1 個，剩 $n-k$ 個分 $k-1$ 列 $\therefore$ 排法 $B_{k-1}(n-k)$

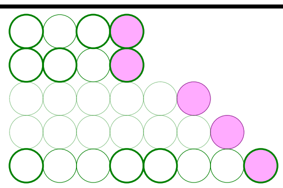
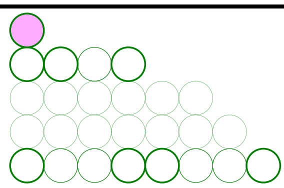
(三) $B_k(n)$ 拆為 $k-1$ 列的關係式：$B_k(n)=B_{k-1}(n-k)+B_{k-1}(n-2k)+\cdots+B_{k-1}(n-tk)$

		· · ·	

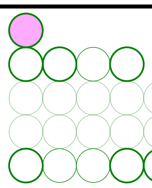
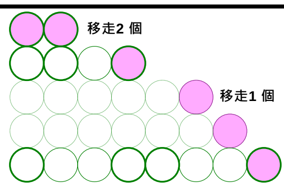
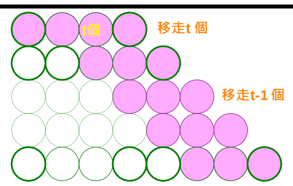
二、將 n 個硬幣遞減排成 k 列排法 $Q_k(n)$ 種，共 $P(n)$ 種

(一) 找出 $Q_1(n)=1$，$Q_2(n)=\left[\dfrac{n}{2}\right]$，$Q_3(n)$。

(二) 從圖形解釋 $Q_k(n)=Q_k(n-k)+Q_{k-1}(n-1)$：

	最上方大於 1 個， 每列移走 1 個， 剩 $n-k$ 個分 k 列， $\therefore$ 排法 $Q_k(n-k)$		最上方只有 1 個， 取走後，剩 $n-1$ 個分 $k-1$ 列， $\therefore$ 排法 $Q_{k-1}(n-1)$

(三) $Q_k(n)$ 拆為 $k-1$ 列關係式：$Q_k(n)=Q_{k-1}(n-1)+Q_{k-1}(n-1-k)+\cdots+Q_{k-1}\big(n-1-(t-1)k\big)$

		· · ·	

三、將 n 個方塊堆成 k 柱排法 $T_k(n)$ 種，共 $S(n)$ 種

(一) $T_1(n)=1$，$T_2(n)=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$。

(二) 從圖形解釋 $T_k(n)=T_k(n-k)+T_{k-1}(n-k)+T_{k-2}(n-k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-k)$，每柱取走 1 個：

最低柱為大於 1 層時，剩 $n-k$ 個堆成 k 柱，排法 $T_k(n-k)$ 種

最低柱為 1 層且有 $t-1$ 柱，剩 $n-k$ 個堆成 $k-t+1$ 柱，排法 $T_{k-t+1}(n-k)$

(三) $T_k(n)$ 降為少於 k 柱關係式

$$T_k(n)=\left[T_{k-1}(n-k)+T_{k-2}(n-k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-k)\right]+\left[T_{k-1}(n-2k)+T_{k-2}(n-2k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-2k)\right]$$
$$+\cdots+\left[T_{k-1}(n-rk)+T_{k-2}(n-rk)+\cdots+T_{k-t+1}(n-rk)\right]$$

(四) 新發現 $S(n)$ 數列。

壹、研究動機

電影「天才無限家」描述數學家 Ramanujan 的真實勵志人生，內容有提到「**整數分割**」(partition number)的問題。常見的整數分割是將數字拆解成數個**可重複**的數字之方法數。我嘗試「將 N 個硬幣排成數列，每列的個數皆『**不同**』之方法數有幾種？」當我動手操作時，發現可以從「**圖形分層**」的方向著手，找出規律性來處理整數分割的問題。

貳、研究目的與問題

一、探討 n 個硬幣排成 k 列的方法數？

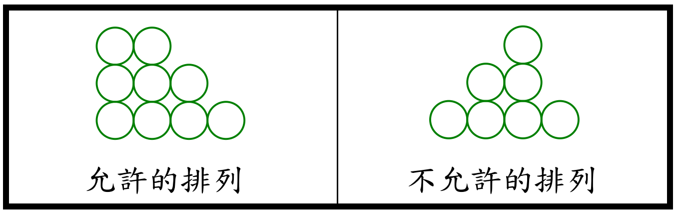
二、探討 n 個硬幣的排法是否有規律性？

參、排列規則與符號定義

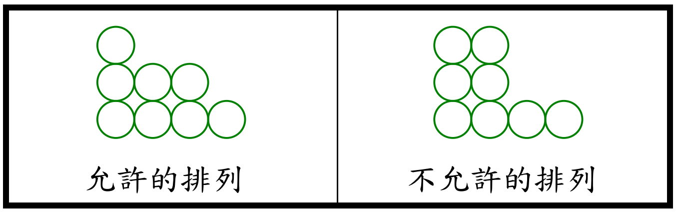
一、硬幣排列規則

將 n 個硬幣排成數列，規定

(一) 每列的硬幣皆從相同位置開始放置。



(二) 上列的硬幣數需「**小於**」下列的硬幣數。



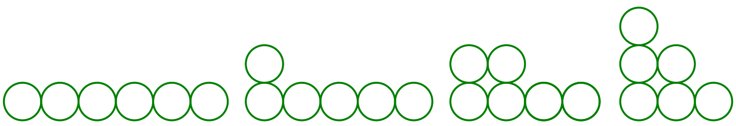
二、符號定義

將 n 個硬幣排成 k 列，則排法有 $B_k(n)$ 種，共有 $A(n)=B_1(n)+B_2(n)+\cdots+B_k(n)$ 種。

例如：將 6 個硬幣排列，排成一列有 1 種，所以 $B_1(6)=1$。

排成兩列有 2 種，所以 $B_2(6)=2$。

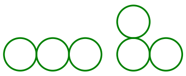
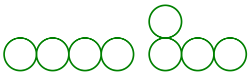
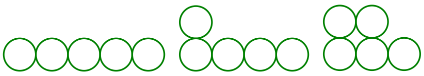
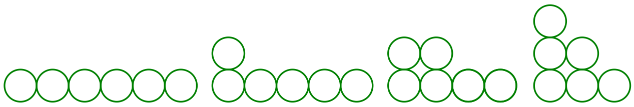
排成三列有 1 種，所以 $B_3(6)=1$。



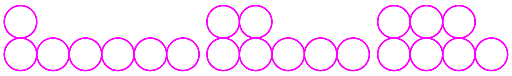
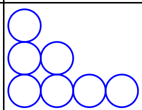
因此，$A(6)=B_1(6)+B_2(6)+B_3(6)$=1+2+1=4。

肆、研究過程

一、討論「硬幣堆疊的排法」

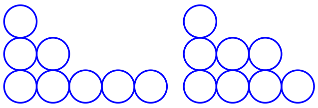
	將 n 個硬幣排成數列	排法
$n=1$	 1	$A(1)=1$
$n=2$	 2	$A(2)=1$
$n=3$	 3　＝2+1	$A(3)=2$
$n=4$	 4　＝3+1	$A(4)=2$
$n=5$	 5　＝4+1　＝3+2	$A(5)=3$
$n=6$	 6　＝5+1　＝4+2　＝3+2+1	$A(6)=4$

當 $n=7$ 時，

一列	二列	三列
7	 ＝6+1　＝5+2　＝4+3	 ＝4+2+1
$B_1(7)=1$	$B_2(7)=3$	$B_3(7)=1$

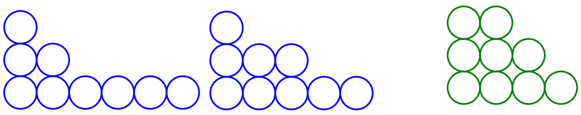
$\therefore A(7)=B_1(7)+B_2(7)+B_3(7)=1+3+1=5$ 。

當 $n=8$ 時，

一列	二列	三列
8	＝7+1 ＝6+2 ＝5+3	＝5+2+1 ＝4+3+1 
$B_1(8)=1$	$B_2(8)=3$	$B_3(8)=2$

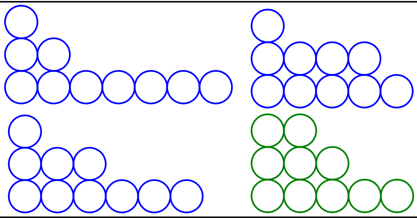
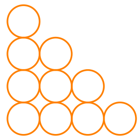
$\therefore A(8)=B_1(8)+B_2(8)+B_3(8)=1+3+2=6$ 。

當 $n=9$ 時，

一列	二列	三列
9	＝8+1 ＝7+2 ＝6+3 ＝5+4	＝6+2+1　＝5+3+1　＝4+3+2 
$B_1(9)=1$	$B_2(9)=4$	$B_3(9)=3$

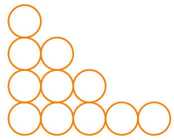
$\therefore A(9)=B_1(9)+B_2(9)+B_3(9)=1+4+3=8$ 。

當 $n=10$ 時，

一列	二列	三列	四列
10	＝9+1 ＝8+2 ＝7+3 ＝6+4	＝7+2+1 ＝6+3+1 ＝5+4+1 ＝5+3+2 	＝4+3+2+1 
$B_1(10)=1$	$B_2(10)=4$	$B_3(10)=4$	$B_4(10)=1$

$\therefore A(10)=B_1(10)+B_2(10)+B_3(10)+B_4(10)=1+4+4+1=10$ 。

當 $n=11$ 時，

一列	二列	三列	四列
11	＝10+1 ＝9+2 ＝8+3 ＝7+4 ＝6+5	＝8+2+1 ＝7+3+1 ＝6+4+1 ＝6+3+2 ＝5+4+2	＝5+3+2+1 
$B_1(11)=1$	$B_2(11)=5$	$B_3(11)=5$	$B_4(11)=1$

$\therefore A(11)=B_1(11)+B_2(11)+B_3(11)+B_4(11)=1+5+5+1=12$ 。

當 $n=12$ 時，

一列	二列	三列	四列
12	＝11+1 ＝10+2 ＝9+3 ＝8+4 ＝7+5 發現有 $\left[\frac{12-1}{2}\right]$ 個	＝9+2+1 ＝8+3+1 ＝7+4+1 ＝6+5+1 $\left[\frac{12-4}{2}\right]=4$ 個 ＝7+3+2 ＝6+4+2 $\left[\frac{12-7}{2}\right]=2$ 個 ＝5+4+3 1 個	＝6+3+2+1 ＝5+4+2+1
$B_1(12)=1$	$B_2(12)=5$	$B_3(12)=7$	$B_4(12)=2$

$\therefore A(12)=B_1(12)+B_2(12)+B_3(12)+B_4(12)=1+5+7+2=15$ 。

當 $n=13$ 時，

一列	二列	三列	四列
13	＝12+1 ＝11+2 ＝10+3 ＝9+4 ＝8+5 ＝7+6 發現有 $\left[\frac{13-1}{2}\right]$ 個	＝10+2+1 ＝9+3+1 ＝8+4+1 ＝7+5+1 $\left[\frac{13-4}{2}\right]=4$ 個 ＝8+3+2 ＝7+4+2 ＝6+5+2 $\left[\frac{13-7}{2}\right]=3$ 個 ＝6+4+3 $\left[\frac{13-10}{2}\right]=1$ 個	＝7+3+2+1 ＝6+4+2+1 ＝5+4+3+1
$B_1(13)=1$	$B_2(13)=6$	$B_3(13)=8$	$B_4(13)=3$

$\therefore A(13)=B_1(13)+B_2(13)+B_3(13)+B_4(13)=1+6+8+3=18$ 。

當 $n=14$ 時，

一列	二列	三列	四列
14	＝13+1 ＝12+2 ＝11+3 ＝10+4 ＝9+5 ＝8+6 發現有 $\left[\frac{14-1}{2}\right]$ 個	＝11+2+1 ＝10+3+1 ＝9+4+1 ＝8+5+1 ＝7+6+1 $\left[\frac{14-4}{2}\right]=5$ 個 --- ＝9+3+2 ＝8+4+2 ＝7+5+2 $\left[\frac{14-7}{2}\right]=3$ 個 --- ＝7+4+3 ＝6+5+3 $\left[\frac{14-10}{2}\right]=2$ 個	＝8+3+2+1 ＝7+4+2+1 ＝6+5+2+1 ＝6+4+3+1 ＝5+4+3+2
$B_1(14)=1$	$B_2(14)=6$	$B_3(14)=10$	$B_4(14)=5$

$\therefore A(14)=B_1(14)+B_2(14)+B_3(14)+B_4(14)=1+6+10+5=22$ 。

當 $n=15$ 時，

一列	二列	三列	四列	五列
15	＝14+1 ＝13+2 ＝12+3 ＝11+4 ＝10+5 ＝9+6 ＝8+7 有 $\left[\frac{15-1}{2}\right]$ 個	＝12+2+1 ＝11+3+1 ＝10+4+1 ＝9+5+1 ＝8+6+1 $\left[\frac{15-4}{2}\right]=5$ --- ＝10+3+2 ＝9+4+2 ＝8+5+2 ＝7+6+2 $\left[\frac{15-7}{2}\right]=4$ --- ＝8+4+3 ＝7+5+3 $\left[\frac{15-10}{2}\right]=2$ --- ＝6+5+4 $\left[\frac{15-13}{2}\right]=1$	＝9+3+2+1 ＝8+4+2+1 ＝7+5+2+1 ＝7+4+3+1 ＝6+5+3+1 ＝6+4+3+2	＝5+4+3+2+1
$B_1(15)=1$	$B_2(15)=7$	$B_3(15)=12$	$B_4(15)=6$	$B_5(15)=1$

$\therefore A(15)=B_1(15)+B_2(15)+B_3(15)+B_4(15)+B_5(15)=1+7+12+6+1=27$ 。

當 $n=16$ 時，

一列	二列	三列	四列	五列
16	＝15+1 ＝14+2 ＝13+3 ＝12+4 ＝11+5 ＝10+6	＝13+2+1 ＝12+3+1 ＝11+4+1 ＝10+5+1 ＝9+6+1 ＝8+7+1 $\left[\frac{16-4}{2}\right]=6$	＝10+3+2+1 ＝9+4+2+1 ＝8+5+2+1 ＝7+6+2+1 ＝8+4+3+1 ＝7+5+3+1	＝6+4+3+2+1

	＝9+7 有$\left[\frac{16-1}{2}\right]$個	＝11+3+2 ＝10+4+2 ＝9+5+2 ＝8+6+2 $\left[\frac{16-7}{2}\right]=4$ ＝9+4+3 ＝8+5+3 ＝7+6+3 $\left[\frac{16-10}{2}\right]=3$ ＝7+5+4 $\left[\frac{16-13}{2}\right]=1$	＝6+5+4+1 ＝7+4+3+2 ＝6+5+3+2	
$B_1(16)=1$	$B_2(16)=7$	$B_3(16)=14$	$B_4(16)=9$	$B_5(16)=1$

$\therefore A(16)=B_1(16)+B_2(16)+B_3(16)+B_4(16)+B_5(16)=1+7+14+9+1=32$ 。

當 $n=17$ 時，

一列	二列	三列	四列	五列
17	＝16+1 ＝15+2 ＝14+3 ＝13+4 ＝12+5 ＝11+6 ＝10+7 ＝9+8 有$\left[\frac{17-1}{2}\right]$個	＝14+2+1 ＝13+3+1 ＝12+4+1 ＝11+5+1 ＝10+6+1 ＝9+7+1 $\left[\frac{17-4}{2}\right]=6$ ＝12+3+2 ＝11+4+2 ＝10+5+2 ＝9+6+2 ＝8+7+2 $\left[\frac{17-7}{2}\right]=5$ ＝10+4+3 ＝9+5+3 ＝8+6+3 $\left[\frac{17-10}{2}\right]=3$ ＝8+5+4 ＝7+6+4 $\left[\frac{17-13}{2}\right]=2$	＝11+3+2+1 ＝10+4+2+1 ＝9+5+2+1 ＝8+6+2+1 ＝9+4+3+1 ＝8+5+3+1 ＝7+6+3+1 ＝7+5+4+1 ＝8+4+3+2 ＝7+5+3+2 ＝6+5+4+2	＝7+4+3+2+1 ＝6+5+3+2+1
$B_1(17)=1$	$B_2(17)=8$	$B_3(17)=16$	$B_4(17)=11$	$B_5(17)=2$

$\therefore A(17)=B_1(17)+B_2(17)+B_3(17)+B_4(17)+B_5(17)=1+8+16+11+2=38$ 。

當 $n=18$ 時，

一列	二列	三列	四列	五列
18	＝17+1 ＝16+2 ＝15+3 ＝14+4 ＝13+5 ＝12+6 ＝11+7	＝15+2+1 ＝14+3+1 ＝13+4+1 ＝12+5+1 ＝11+6+1 ＝10+7+1 ＝9+8+1 $\left[\frac{18-4}{2}\right]=7$	＝12+3+2+1 ＝11+4+2+1 ＝10+5+2+1 ＝9+6+2+1 ＝8+7+2+1 ＝10+4+3+1 ＝9+5+3+1	＝8+4+3+2+1 ＝7+5+3+2+1 ＝6+5+4+2+1

	＝10+8 有$\left[\frac{18-1}{2}\right]$個	＝13+3+2 ＝12+4+2 ＝11+5+2 ＝10+6+2 ＝9+7+2 $\quad \left[\frac{18-7}{2}\right]=5$ ＝11+4+3 ＝10+5+3 ＝9+6+3 ＝8+7+3 $\quad \left[\frac{18-10}{2}\right]=4$ ＝9+5+4 ＝8+6+4 $\quad \left[\frac{18-13}{2}\right]=2$ ＝7+6+5 $\quad \left[\frac{18-16}{2}\right]=1$	＝8+6+3+1 ＝8+5+4+1 ＝7+6+4+1 ＝9+4+3+2 ＝8+5+3+2 ＝7+6+3+2 ＝7+5+4+2 ＝6+5+4+3	
$B_1(18)=1$	$B_2(18)=8$	$B_3(18)=19$	$B_4(18)=15$	$B_5(18)=3$

$\therefore A(18)=B_1(18)+B_2(18)+B_3(18)+B_4(18)+B_5(18)=1+8+19+15+3=46$ 。

當 $n=19$ 時，

一列	二列	三列	四列	五列
19	＝18+1 ＝17+2 ＝16+3 ＝15+4 ＝14+5 ＝13+6 ＝12+7 ＝11+8 ＝10+9 有$\left[\frac{19-1}{2}\right]$個	＝16+2+1 ＝15+3+1 ＝14+4+1 ＝13+5+1 ＝12+6+1 ＝11+7+1 ＝10+8+1 $\quad \left[\frac{19-4}{2}\right]=7$ ＝14+3+2 ＝13+4+2 ＝12+5+2 ＝11+6+2 ＝10+7+2 ＝9+8+2 $\quad \left[\frac{19-7}{2}\right]=6$ ＝12+4+3 ＝11+5+3 ＝10+6+3 ＝9+7+3 $\quad \left[\frac{19-10}{2}\right]=4$ ＝10+5+4 ＝9+6+4 ＝8+7+4 $\quad \left[\frac{19-13}{2}\right]=3$ ＝8+6+5 $\quad \left[\frac{19-16}{2}\right]=1$	＝13+3+2+1 ＝12+4+2+1 ＝11+5+2+1 ＝10+6+2+1 ＝9+7+2+1 ＝11+4+3+1 ＝10+5+3+1 ＝9+6+3+1 ＝8+7+3+1 ＝9+5+4+1 ＝8+6+4+1 ＝7+6+5+1 ＝10+4+3+2 ＝9+5+3+2 ＝8+6+3+2 ＝8+5+4+2 ＝7+6+4+2 ＝7+5+4+3	＝9+4+3+2+1 ＝8+5+3+2+1 ＝7+6+3+2+1 ＝7+5+4+2+1 ＝6+5+4+3+1
$B_1(19)=1$	$B_2(19)=9$	$B_3(19)=21$	$B_4(19)=18$	$B_5(19)=5$

$\therefore A(19)=B_1(19)+B_2(19)+B_3(19)+B_4(19)+B_5(19)=1+9+21+18+5=54$ 。

當 $n=20$ 時，

一列	二列	三列	四列	五列
20	＝19+1 ＝18+2 ＝17+3 ＝16+4 ＝15+5 ＝14+6 ＝13+7 ＝12+8 ＝11+9 有 $\left[\frac{20-1}{2}\right]$ 個	＝17+2+1 ＝16+3+1 ＝15+4+1 ＝14+5+1 ＝13+6+1 ＝12+7+1 ＝11+8+1 ＝10+9+1 $\left[\frac{20-4}{2}\right]=8$ －－－－－ ＝15+3+2 ＝14+4+2 ＝13+5+2 ＝12+6+2 ＝11+7+2 ＝10+8+2 $\left[\frac{20-7}{2}\right]=6$ －－－－－ ＝13+4+3 ＝12+5+3 ＝11+6+3 ＝10+7+3 ＝9+8+3 $\left[\frac{20-10}{2}\right]=5$ －－－－－ ＝11+5+4 ＝10+6+4 ＝9+7+4 $\left[\frac{20-13}{2}\right]=3$ －－－－－ ＝9+6+5 ＝8+7+5 $\left[\frac{20-16}{2}\right]=2$	＝14+3+2+1 ＝13+4+2+1 ＝12+5+2+1 ＝11+6+2+1 ＝10+7+2+1 ＝9+8+2+1 ＝12+4+3+1 ＝11+5+3+1 ＝10+6+3+1 ＝9+7+3+1 ＝10+5+4+1 ＝9+6+4+1 ＝8+7+4+1 ＝8+6+5+1 ＝11+4+3+2 ＝10+5+3+2 ＝9+6+3+2 ＝8+7+3+2 ＝9+5+4+2 ＝8+6+4+2 ＝7+6+5+2 ＝8+5+4+3 ＝7+6+4+3	＝10+4+3+2+1 ＝9+5+3+2+1 ＝8+6+3+2+1 ＝8+5+4+2+1 ＝7+6+4+2+1 ＝7+5+4+3+1 ＝6+5+4+3+2
$B_1(20)=1$	$B_2(20)=9$	$B_3(20)=24$	$B_4(20)=23$	$B_5(20)=7$

$\therefore A(20)=B_1(20)+B_2(20)+B_3(20)+B_4(20)+B_5(20)=1+9+24+23+7=64$ 。

整理出下表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$B_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$B_2(n)$			1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
$B_3(n)$						1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24
$B_4(n)$										1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23
$B_5(n)$															1	1	2	3	5	7
$B_6(n)$																				
$A(n)$	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64

二、討論「將 n 個硬幣排成 k 列的排法，即 $B_k(n)$」

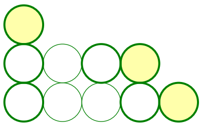
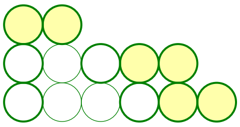
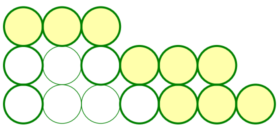
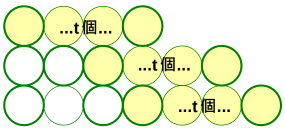
1. 將 n 個硬幣排成一列的排法有 1 種　　$\therefore B_1(n)=1$。

2. 將 n 個硬幣排成兩列，其中 $n\geq 3$

若 n 為奇數，	若 n 為偶數，
$n=(n-1)+1=(n-2)+2=\cdots$ $=\left(\frac{n+1}{2}\right)+\left(\frac{n-1}{2}\right)$　$\therefore$ 排法 $\frac{n-1}{2}$ 種	$n=(n-1)+1=(n-2)+2=\cdots$ $=\left(\frac{n}{2}+1\right)+\left(\frac{n}{2}-1\right)$　$\therefore$ 排法 $\frac{n}{2}-1$ 種

$$\therefore B_2(n)=\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

3. 將 n 個硬幣排成三列，其中 $n\geq 6$

	若最上方(第三列)有 1 個，先每列移走 1 個，再將剩下 $n-3$ 個分成兩列，則排法 $\left[\frac{(n-3)-1}{2}\right]=\left[\frac{n-4}{2}\right]$ 種
	若最上方(第三列)有 2 個，先每列移走 2 個，再將剩下 $n-6$ 個分成兩列，則排法 $\left[\frac{(n-6)-1}{2}\right]=\left[\frac{n-7}{2}\right]$ 種
	若最上方(第三列)有 3 個，先每列移走 3 個，再將剩下 $n-9$ 個分成兩列，則排法 $\left[\frac{(n-9)-1}{2}\right]=\left[\frac{n-10}{2}\right]$ 種
・・・・・・	
	若最上方(第三列)有 t 個，先每列移走 t 個，再將剩下 $n-3t$ 個分成兩列，則排法 $\left[\frac{(n-3t)-1}{2}\right]=\left[\frac{n-(3t+1)}{2}\right]$ 種

$$\therefore B_3(n)=\left[\frac{n-4}{2}\right]+\left[\frac{n-7}{2}\right]+\left[\frac{n-10}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-(3t+1)}{2}\right]$$，其中 $0<n-3t\leq 3$，$t\in N$

★心得 1

1. 將 n 個硬幣排成**一列**，其中 $n\in N$，排法有 $B_1(n)=1$ 種。
2. 將 n 個硬幣排成**兩列**，其中 $n\geq 3$，排法有 $B_2(n)=\left[\frac{n-1}{2}\right]$ 種。
3. 將 n 個硬幣排成**三列**，其中 $n\geq 6$，排法有
$B_3(n)=\left[\frac{n-4}{2}\right]+\left[\frac{n-7}{2}\right]+\left[\frac{n-10}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-(3t+1)}{2}\right]$ 種，其中 $0<n-3t\leq 3$，$t\in N$。

4. 化簡 $B_3(n)=\left[\frac{n-4}{2}\right]+\left[\frac{n-7}{2}\right]+\left[\frac{n-10}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-(3t+1)}{2}\right]$

分成 $n=6m,\ n=6m+1,\ n=6m+2,\ n=6m+3,\ n=6m+4,\ n=6m+5$ 討論

(1)當 $n=6m$ 時，

$$\begin{aligned}B_3(6m)&=\left[\frac{6m-4}{2}\right]+\left[\frac{6m-7}{2}\right]+\left[\frac{6m-10}{2}\right]+\left[\frac{6m-13}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{6m-(3t+1)}{2}\right]\\&=\left[3m-2\right]+\left[3m-\frac{7}{2}\right]+\left[3m-5\right]+\left[3m-\frac{13}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{2}{2}\right]\\&=(3m-2)+(3m-4)+(3m-5)+(3m-7)+\cdots+1\\&=\left[1+2+3+\cdots+(3m-2)\right]-\left[3+6+\cdots+(3m-3)\right]\\&=\frac{(3m-1)(3m-2)}{2}-\frac{3m(m-1)}{2}=\frac{6m^2-6m+2}{2}=3m^2-3m+1\end{aligned}$$

(2)當 $n=6m+1$ 時，

$$\begin{aligned}B_3(6m+1)&=\left[\frac{(6m+1)-4}{2}\right]+\left[\frac{(6m+1)-7}{2}\right]+\left[\frac{(6m+1)-10}{2}\right]+\left[\frac{(6m+1)-13}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{(6m+1)-(3t+1)}{2}\right]\\&=\left[3m-\frac{3}{2}\right]+\left[3m-3\right]+\left[3m-\frac{9}{2}\right]+\left[3m-6\right]+\cdots+\left[\frac{3}{2}\right]+\left[0\right]\\&=(3m-2)+(3m-3)+(3m-5)+(3m-6)+\cdots+1+0\\&=\left[1+2+3+\cdots+(3m-2)\right]-\left[2+5+\cdots+(3m-4)\right]\\&=\frac{(3m-1)(3m-2)}{2}-\frac{(3m-2)(m-1)}{2}=\frac{6m^2-4m}{2}=3m^2-2m\end{aligned}$$

(3)當 $n=6m+2$ 時，

$$\begin{aligned}B_3(6m+2)&=\left[\frac{(6m+2)-4}{2}\right]+\left[\frac{(6m+2)-7}{2}\right]+\left[\frac{(6m+2)-10}{2}\right]+\left[\frac{(6m+2)-13}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{(6m+2)-(3t+1)}{2}\right]\\&=\left[3m-1\right]+\left[3m-\frac{5}{2}\right]+\left[3m-4\right]+\left[3m-\frac{11}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{4}{2}\right]+\left[\frac{1}{2}\right]\\&=(3m-1)+(3m-3)+(3m-4)+(3m-6)+\cdots+2+0\\&=\left[1+2+3+\cdots+(3m-1)\right]-\left[1+4+\cdots+(3m-2)\right]\\&=\frac{(3m)(3m-1)}{2}-\frac{(3m-1)(m)}{2}=\frac{6m^2-2m}{2}=3m^2-m\end{aligned}$$

(4)當 $n=6m+3$ 時，

$$\begin{aligned}B_3(6m+3)&=\left[\frac{(6m+3)-4}{2}\right]+\left[\frac{(6m+3)-7}{2}\right]+\left[\frac{(6m+3)-10}{2}\right]+\left[\frac{(6m+3)-13}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{(6m+3)-(3t+1)}{2}\right]\\&=\left[3m-\frac{1}{2}\right]+\left[3m-2\right]+\left[3m-\frac{7}{2}\right]+\left[3m-5\right]+\cdots+\left[\frac{5}{2}\right]+\left[1\right]\\&=(3m-1)+(3m-2)+(3m-4)+(3m-5)+\cdots+1\\&=\left[1+2+3+\cdots+(3m-1)\right]-\left[3+6+\cdots+(3m-3)\right]\\&=\frac{(3m)(3m-1)}{2}-\frac{(3m)(m-1)}{2}=\frac{6m^2}{2}=3m^2\end{aligned}$$

(5)當 $n=6m+4$ 時，

$$B_3(6m+4)=\left[\frac{(6m+4)-4}{2}\right]+\left[\frac{(6m+4)-7}{2}\right]+\left[\frac{(6m+4)-10}{2}\right]+\left[\frac{(6m+4)-13}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{(6m+4)-(3t+1)}{2}\right]$$

$$=\left[3m\right]+\left[3m-\frac{3}{2}\right]+\left[3m-3\right]+\left[3m-\frac{9}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{3}{2}\right]$$

$$=(3m)+(3m-2)+(3m-3)+(3m-5)+\cdots+1$$

$$=\left[1+2+3+\cdots+(3m)\right]-\left[2+5+\cdots+(3m-1)\right]$$

$$=\frac{(3m+1)(3m)}{2}-\frac{(3m+1)(m)}{2}=\frac{6m^2+2m}{2}=3m^2+m$$

(6)當 $n=6m+5$ 時，

$$B_3(6m+5)=\left[\frac{(6m+5)-4}{2}\right]+\left[\frac{(6m+5)-7}{2}\right]+\left[\frac{(6m+5)-10}{2}\right]+\left[\frac{(6m+5)-13}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{(6m+5)-(3t+1)}{2}\right]$$

$$=\left[3m+\frac{1}{2}\right]+\left[3m-1\right]+\left[3m-\frac{5}{2}\right]+\left[3m-4\right]+\cdots+\left[\frac{4}{2}\right]+\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$=(3m)+(3m-1)+(3m-3)+(3m-4)+\cdots+2$$

$$=\left[1+2+3+\cdots+(3m)\right]-\left[1+4+\cdots+(3m-2)\right]$$

$$=\frac{(3m+1)(3m)}{2}-\frac{(3m-1)(m)}{2}=\frac{6m^2+4m}{2}=3m^2+2m$$

★心得 2

將 n 個硬幣排成三列，其中 $n\geq 6$ ，排法有 $B_3(n)=\begin{cases}3m^2-3m+1 & ,當n=6m\\ 3m^2-2m & ,當n=6m+1\\ 3m^2-m & ,當n=6m+2\\ 3m^2 & ,當n=6m+3\\ 3m^2+m & ,當n=6m+4\\ 3m^2+2m & ,當n=6m+5\end{cases}$ 種。

三、觀察 $B_k(n)$ 的規律性

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$B_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$B_2(n)$			1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
$B_3(n)$						1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24
$B_4(n)$										1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23
$B_5(n)$															1	1	2	3	5	7
$B_6(n)$																				
$B_7(n)$																				
$A(n)$	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64

將 1 個硬幣排成兩列，排法有 0 種。將 2 個硬幣排成兩列，排法有 0 種。

$\therefore B_2(1)=B_2(2)=0$，而 $B_1(m)+B_2(m)$ 恰為 $B_2(m+2)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$B_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$B_2(n)$	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
$B_1(n)+B_2(n)$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10

將 3 個、4 個、5 個硬幣排成三列，排法有 0 種。

$\therefore B_3(3)=B_3(4)=B_3(5)=0$，而 $B_2(m)+B_3(m)$ 恰為 $B_3(m+3)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$B_2(n)$			1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
$B_3(n)$			0	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24
$B_2(n)+B_3(n)$			1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33

將 6 個、7 個、8 個、9 個硬幣排成四列，排法有 0 種。

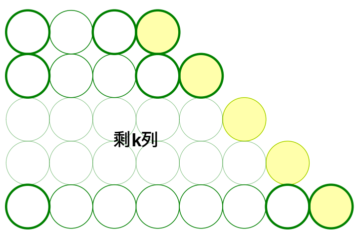
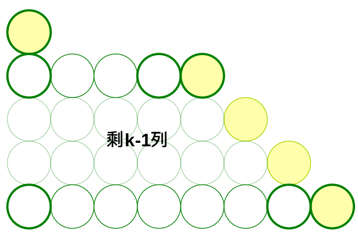
$\therefore B_4(6)=B_4(7)=B_4(8)=B_4(9)=0$，而 $B_3(m)+B_4(m)$ 恰為 $B_4(m+4)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$B_3(n)$						1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24
$B_4(n)$						0	0	0	0	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23
$B_3(n)+B_4(n)$						1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47

$\therefore$遞迴關係式$\begin{cases} B_1(n)=1\text{且}B_2(1)=B_2(2)=0 \\ B_k(n)=B_k(n-k)+B_{k-1}(n-k)\text{，其中}k\ge 2 \end{cases}$。

★觀察遞迴關係式的含意

將 n 個硬幣排成 k 列，可能有兩種類型：

	
若最上方大於 1 個，每列移走 1 個後，則剩下 $n-k$ 個分成 k 列$\therefore$排法 $B_k(n-k)$ 種。	若最上方只有 1 個，每列移走 1 個後，則剩下 $n-k$ 個分成 $k-1$列$\therefore$排法 $B_{k-1}(n-k)$ 種。

$B_k(n)=B_k(n-k)+B_{k-1}(n-k)$，其中$k\ge 2$

★心得 3

將 n 個硬幣排成 k 列的排法有 $B_k(n)$ 種。

遞迴關係式為 $\begin{cases} B_1(n)=1\text{且}B_2(1)=B_2(2)=0 \\ B_k(n)=B_k(n-k)+B_{k-1}(n-k)\text{，其中}k\ge 2 \end{cases}$。

將　$B_k(n)=B_k(n-k)+B_{k-1}(n-k)$

同理　$B_k(n-k)=B_k(n-2k)+B_{k-1}(n-2k)$

$B_k(n-2k)=B_k(n-3k)+B_{k-1}(n-3k)$

・・・・・・

$B_k(n-(t-1)k)=B_k(n-tk)+B_{k-1}(n-tk)$

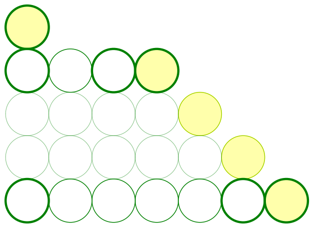
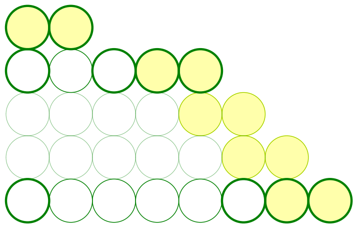
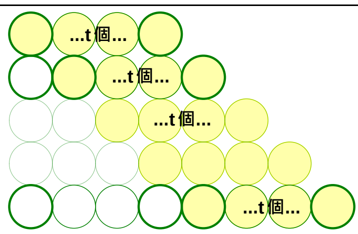
累加後　$\therefore B_k(n)=B_{k-1}(n-k)+B_{k-1}(n-2k)+B_{k-1}(n-3k)+\cdots+B_{k-1}(n-tk)+B_k(n-tk)$

若 $B_k(n-tk)=0$ 且 $B_{k-1}(n-tk)>0$

則 $1+2+\cdots+(k-1)\le n-tk<1+2+\cdots+k$ 且 $k\ge 2$　$\therefore \dfrac{k(k-1)}{2}\le n-tk<\dfrac{k(k+1)}{2}$

$\therefore B_k(n)=B_{k-1}(n-k)+B_{k-1}(n-2k)+\cdots+B_{k-1}(n-tk)$，其中 $\dfrac{k(k-1)}{2}\le n-tk<\dfrac{k(k+1)}{2}$，$t\in N$。

★觀察遞迴關係式的含意

<table>
<tr><td>將 n 個硬幣排成 k 列，若最上方(第 k 列)有 1 個，
先每列移走 1 個，再將剩下的 $n-k$ 個分成 $k-1$ 列，
$\therefore$ 排法有 $B_{k-1}(n-k)$ 種。</td><td></td></tr>
<tr><td>將 n 個硬幣排成 k 列，若最上方(第 k 列)有 2 個，
先每列移走 2 個，再將剩下的 $n-2k$ 個分成 $k-1$ 列，
$\therefore$ 排法有 $B_{k-1}(n-2k)$ 種。</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">・・・・・・</td></tr>
<tr><td>將 n 個硬幣排成 k 列，若最上方(第 k 列)有 t 個，
先每列移走 t 個，再將剩下的 $n-kt$ 個分成 $k-1$ 列，
$\therefore$ 排法有 $B_{k-1}(n-tk)$ 種。</td><td>
</td></tr>
</table>

$\therefore B_k(n)=B_{k-1}(n-k)+B_{k-1}(n-2k)+\cdots+B_{k-1}(n-tk)$，其中 $\dfrac{k(k-1)}{2}\le n-tk<\dfrac{k(k+1)}{2}$，$t\in N$。

★心得 4

將 n 個硬幣排成 k 列的排法有 $B_k(n)$ 種，遞迴關係式為

$B_k(n)=B_{k-1}(n-k)+B_{k-1}(n-2k)+\cdots+B_{k-1}(n-tk)$，其中 $\dfrac{k(k-1)}{2}\le n-tk<\dfrac{k(k+1)}{2}$, $t\in N$。

伍、研究結果

一、將 n 個硬幣排成 k 列的排法有 $B_k(n)$ 種，共有 $A(n)$ 種。整理出下表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$B_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$B_2(n)$			1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
$B_3(n)$						1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24
$B_4(n)$										1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23
$B_5(n)$															1	1	2	3	5	7
$A(n)$	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32	38	46	54	64

二、發現 $B_k(n)$ 的規律性

1. 將 n 個硬幣排成一列，其中 $n\in N$ ，排法有 $B_1(n)=1$ 種。

2. 將 n 個硬幣排成兩列，其中 $n\geq 3$ ，排法有 $B_2(n)=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 種。

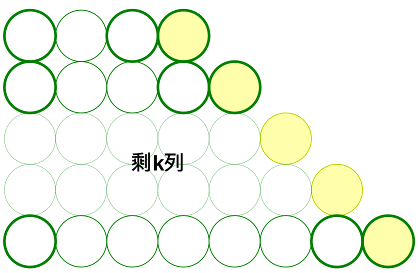
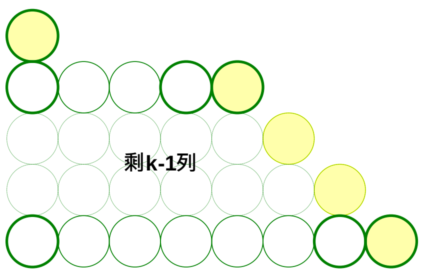
3. 將 n 個硬幣排成三列，其中 $n\geq 6$ ，排法有

$$B_3(n)=\left[\frac{n-4}{2}\right]+\left[\frac{n-7}{2}\right]+\left[\frac{n-10}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-(3t+1)}{2}\right]$$ 種，其中 $0<n-3t\leq 3$ ，$t\in N$ 。

並進一步整理出 $B_3(n)=\begin{cases}3m^2-3m+1 & ,當n=6m\\ 3m^2-2m & ,當n=6m+1\\ 3m^2-m & ,當n=6m+2\\ 3m^2 & ,當n=6m+3\\ 3m^2+m & ,當n=6m+4\\ 3m^2+2m & ,當n=6m+5\end{cases}$ 種。

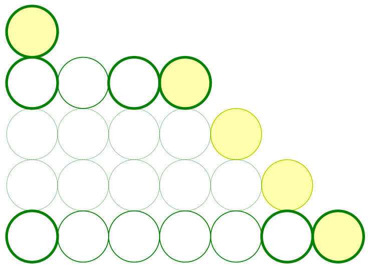
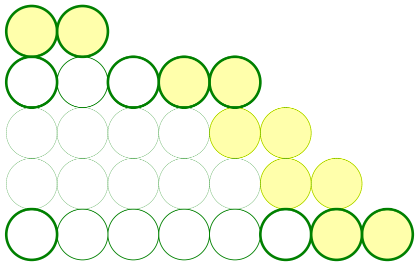
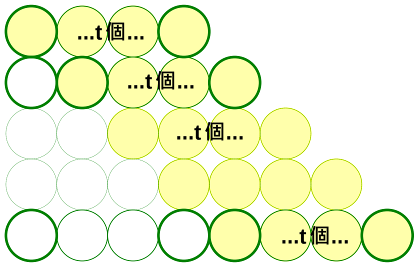
4. 將 n 個硬幣排成 k 列的排法有 $B_k(n)$ 種。

若將每列移走 1 個，則剩餘 $n-k$ 個硬幣，可能有兩種類型：

	
若最上方(第 k 列)大於 1 個，移走後， 則剩下的 $n-k$ 個分成 k 列， ∴排法有 $B_k(n-k)$ 種。	若最上方(第 k 列)有 1 個，移走後， 則剩下的 $n-k$ 個分成 $k-1$ 列， ∴排法有 $B_{k-1}(n-k)$ 種。

∴遞迴關係式為 $\begin{cases}B_1(n)=1且B_2(1)=B_2(2)=0\\ B_k(n)=B_k(n-k)+B_{k-1}(n-k)，其中k\geq 2\end{cases}$ 。

三、將 n 個硬幣排成 k 列的排法有 $B_k(n)$ 種，拆解為排成 $k-1$ 列的關係式：

將 n 個硬幣排成 k 列 若最上方(第 k 列)有 1 個， 先每列移走 1 個， 再將剩下的 $n-k$ 個分成 $k-1$ 列， $\therefore$ 排法有 $B_{k-1}(n-k)$ 種。	
將 n 個硬幣排成 k 列 若最上方(第 k 列)有 2 個， 先每列移走 2 個， 再將剩下的 $n-2k$ 個分成 $k-1$ 列， $\therefore$ 排法有 $B_{k-1}(n-2k)$ 種。	
．．．．．．．	
將 n 個硬幣排成 k 列 若最上方(第 k 列)有 t 個， 先每列移走 t 個， 再將剩下的 $n-kt$ 個分成 $k-1$ 列， $\therefore$ 排法有 $B_{k-1}(n-tk)$ 種。	

因此，遞迴關係式為

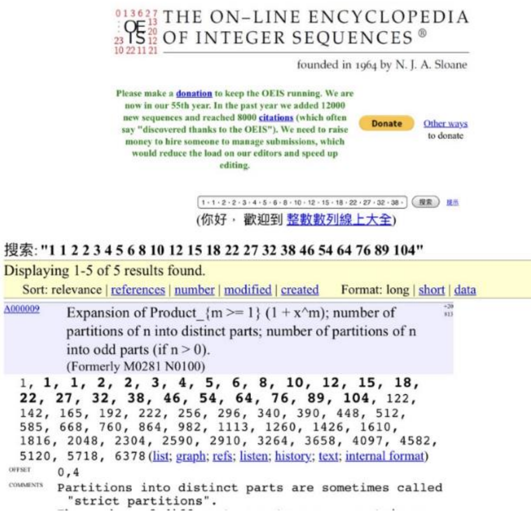
$$B_k(n)=B_{k-1}(n-k)+B_{k-1}(n-2k)+\cdots+B_{k-1}(n-tk)\text{，其中}\frac{k(k-1)}{2}\le n-tk<\frac{k(k+1)}{2}\text{，}t\in N\text{。}$$

四、上網查「整數數列線上大全」The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)，
發現 $A(n)$ 所成的數列 1,1,2,2,3,4,5,6,8,10,12,15,18,22,27,$\cdots$存在。
而且從「維基百科，自由的百科全書」發現 $A(n)$ 的生成函數為

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\cdots=1+1x+1x^2+2x^3+2x^4+3x^5+\cdots$$

$$=A(0)+A(1)x+A(2)x^2+A(3)x^3+A(4)x^4+A(5)x^5+\cdots$$

常見的「整數分割」問題是將數字拆解成數個可重複的數字，且利用「生成函數」處理問題。我是從「**圖形**」的觀點，採取「**分層**」**遞降**的方式，找出「**將整數 n 分成 k 個『相異』整數的方法數 $B_k(n)$ 」的遞迴關係式**，可以進一步找出「整數分割的方法數」。



五、求「將 n 個硬幣排列的方法數」之流程圖

步驟 1. 判斷 n 個硬幣最多可排成的列數 k，其中 $\frac{k(k+1)}{2} \le n < \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ 。

⬇

步驟 2. 分別計算出 $B_1(n)$，$B_2(n)$，・・・・，$B_k(n)$ 之值。

利用 $B_1(n)=1$，$B_2(n)=\left[\frac{n-1}{2}\right]$，$B_3(n)=\begin{cases} 3m^2-3m+1 & ,當 n=6m \\ 3m^2-2m & ,當 n=6m+1 \\ 3m^2-m & ,當 n=6m+2 \\ 3m^2 & ,當 n=6m+3 \\ 3m^2+m & ,當 n=6m+4 \\ 3m^2+2m & ,當 n=6m+5 \end{cases}$，及

遞迴關係式 $B_k(n)=B_{k-1}(n-k)+B_{k-1}(n-2k)+\cdots+B_{k-1}(n-tk)$ 。

⬇

步驟 3. 將 n 個硬幣排列的方法數有 $A(n)=B_1(n)+B_2(n)+\cdots+B_k(n)$ 種。

例如：求將 20 個硬幣排列的方法數

步驟 1. $\because \frac{5\times6}{2} \le 20 < \frac{6\times7}{2}$ $\therefore$**20 個硬幣最多可排成 5 列**

⬇

步驟 2. $\because B_1(20)=1$，$B_2(20)=\left[\frac{20-1}{2}\right]=9$

$\because 20=6\times3+2$，$\therefore B_3(20)=3\times3^2-3=24$

$$\begin{aligned}B_4(20)&=B_3(16)+B_3(12)+B_3(8)+B_3(4)\\&=B_3(6\times2+4)+B_3(6\times2+0)+B_3(6\times1+2)+B_3(6\times0+4)\\&=(3\times2^2+2)+(3\times2^2-3\times2+1)+(3\times1^2-1)+(3\times0^2+0)=14+7+2+0=23\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_5(20)&=B_4(15)+B_4(10)+B_4(5)\\&=\left[B_3(11)+B_3(7)+B_3(3)\right]+\left[B_3(6)+B_3(2)\right]+\left[B_3(1)\right]\\&=\left[B_3(6+5)+B_3(6+1)+B_3(3)\right]+\left[B_3(6+0)+B_3(2)\right]+\left[B_3(1)\right]\\&=\left[(3\cdot1^2+2\cdot1)+(3\cdot1^2-2\cdot1)+(3\cdot0^2)\right]+\left[(3\cdot1^2-3\cdot1+1)+(3\cdot0^2-0)\right]+\left[(3\cdot0^2-0)\right]\\&=(5+1+0)+(1+0)+0=7\end{aligned}$$

⬇

步驟 3. 將 n 個硬幣排列的方法數有

$A(20)=B_1(20)+B_2(20)+B_3(20)+B_4(20)+B_5(20)=1+9+24+23+7=64$ 種。

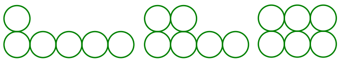
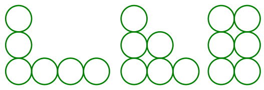
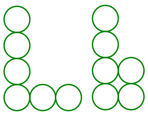
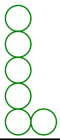
陸、討論

一、硬幣堆疊規則修改為「遞減」

(一) 堆疊規則： 將 n 個硬幣「**遞減**」排成數列，每列的硬幣皆從相同位置開始放置且上列的硬幣數需『**小於或等於**』下列的硬幣數。

符號定義： 將 n 個硬幣「**遞減**」排成 k 列，則排法有 $Q_k(n)$ 種，共有 $P(n)$ 種。

例如：將 6 個硬幣「**遞減**」排成數列。

排一列：6 $\therefore Q_1(6)=1$ 	排兩列：5+1＝4+2＝3+3 $\therefore Q_2(6)=3$ 	排三列：4+1+1＝3+2+1＝2+2+2 $\therefore Q_3(6)=3$ 
排四列：3+1+1+1＝2+2+1+1 $\therefore Q_4(6)=2$ 	排五列：2+1+1+1+1 $\therefore Q_5(6)=1$ 	排六列：1+1+1+1+1+1 $\therefore Q_6(6)=1$ 

所以，$P(6)=Q_1(6)+Q_2(6)+Q_3(6)+Q_4(6)+Q_5(6)+Q_6(6)=1+3+3+2+1+1=11$。

(二) 將 n 個硬幣「遞減」排成 k 列，則排法有 $Q_k(n)$ 種，共有 $P(n)$ 種。 整理出下表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$Q_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Q_2(n)$		1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10
$Q_3(n)$			1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33
$Q_4(n)$				1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64
$Q_5(n)$					1	1	2	3	5	7	10	13	18	23	30	37	47	57	70	84
$Q_6(n)$						1	1	2	3	5	7	11	14	20	26	35	44	58	71	90
$Q_7(n)$							1	1	2	3	5	7	11	15	21	28	38	49	65	82
$Q_8(n)$								1	1	2	3	5	7	11	15	22	29	40	52	70
$Q_9(n)$									1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	41	54
$Q_{10}(n)$										1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42
$Q_{11}(n)$											1	1	2	3	5	7	11	15	22	30
$Q_{12}(n)$												1	1	2	3	5	7	11	15	22
$Q_{13}(n)$													1	1	2	3	5	7	11	15
$Q_{14}(n)$														1	1	2	3	5	7	11
$Q_{15}(n)$															1	1	2	3	5	7
$Q_{16}(n)$																1	1	2	3	5
$Q_{17}(n)$																	1	1	2	3
$Q_{18}(n)$																		1	1	2
$Q_{19}(n)$																			1	1
$Q_{20}(n)$																				1
$P(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231	297	385	490	627

(三) 討論「將n個硬幣『遞減』排成k列的排法，即$Q_k(n)$」

1. 將n個硬幣「遞減」排成一列，其中$n \in N$，排法有$Q_1(n)=1$種。

2. 將n個硬幣「遞減」排成兩列，其中$n \geq 2$，排法有$Q_2(n)=\left[\dfrac{n}{2}\right]$種。

3. 將n個硬幣「遞減」排成三列，其中$n \geq 3$，排法有

$$Q_3(n)=\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n-4}{2}\right]+\left[\frac{n-7}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-(3t-2)}{2}\right]$$種，其中$0<n-3t+2\leq 3$，$t \in N$。

4. 化簡$Q_3(n)=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]+\left[\dfrac{n-4}{2}\right]+\left[\dfrac{n-7}{2}\right]+\cdots+\left[\dfrac{n-(3t-2)}{2}\right]$種，其中$0<n-3t+2\leq 3$，

$t \in N$。分成$n=6m,\ n=6m+1,\ n=6m+2,\ n=6m+3,\ n=6m+4,\ n=6m+5$討論。

(1)當$n=6m$時，

$$\begin{aligned}Q_3(6m)&=\left[\frac{6m-1}{2}\right]+\left[\frac{6m-4}{2}\right]+\left[\frac{6m-7}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{6m-(3t-2)}{2}\right]\\&=\left[3m-\frac{1}{2}\right]+\left[3m-2\right]+\left[3m-\frac{7}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{5}{2}\right]+[1]\\&=(3m-1)+(3m-2)+(3m-4)+(3m-5)+\cdots+2+1\\&=\left[1+2+3+\cdots+(3m-1)\right]-\left[3+6+\cdots+(3m-3)\right]\\&=\frac{(3m)(3m-1)}{2}-\frac{(3m)(m-1)}{2}=\frac{6m^2}{2}=3m^2\end{aligned}$$

(2)當$n=6m+1$時，

$$\begin{aligned}Q_3(6m+1)&=\left[\frac{(6m+1)-1}{2}\right]+\left[\frac{(6m+1)-4}{2}\right]+\left[\frac{(6m+1)-7}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{(6m+1)-(3t-2)}{2}\right]\\&=[3m]+\left[3m-\frac{3}{2}\right]+[3m-3]+\left[3m-\frac{9}{2}\right]+\cdots+[3]+\left[\frac{3}{2}\right]\\&=(3m)+(3m-2)+(3m-3)+(3m-5)+\cdots+3+1\\&=\left[1+2+3+\cdots+(3m)\right]-\left[2+5+\cdots+(3m-1)\right]\\&=\frac{(3m+1)(3m)}{2}-\frac{(3m+1)(m)}{2}=\frac{6m^2+2m}{2}=3m^2+m\end{aligned}$$

(3)當$n=6m+2$時，

$$\begin{aligned}Q_3(6m+2)&=\left[\frac{(6m+2)-1}{2}\right]+\left[\frac{(6m+2)-4}{2}\right]+\left[\frac{(6m+2)-7}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{(6m+2)-(3t-2)}{2}\right]\\&=\left[3m+\frac{1}{2}\right]+[3m-1]+\left[3m-\frac{5}{2}\right]+[3m-4]+\cdots+[2]+\left[\frac{1}{2}\right]\\&=(3m)+(3m-1)+(3m-3)+(3m-4)+(3m-6)+\cdots+2+0\\&=\left[1+2+3+\cdots+(3m)\right]-\left[1+4+\cdots+(3m-2)\right]\\&=\frac{(3m+1)(3m)}{2}-\frac{(3m-1)(m)}{2}=\frac{6m^2+4m}{2}=3m^2+2m\end{aligned}$$

(4)當 $n=6m+3$時，

$$Q_3(6m+3)=\left[\frac{(6m+3)-1}{2}\right]+\left[\frac{(6m+3)-4}{2}\right]+\left[\frac{(6m+3)-7}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{(6m+3)-(3t-2)}{2}\right]$$
$$=[3m+1]+\left[3m-\frac{1}{2}\right]+[3m-2]+\left[3m-\frac{7}{2}\right]+[3m-5]+\cdots+\left[\frac{5}{2}\right]+[1]$$
$$=(3m+1)+(3m-1)+(3m-2)+(3m-4)+\cdots+1$$
$$=[1+2+3+\cdots+(3m+1)]-[3+6+\cdots+(3m)]$$
$$=\frac{(3m+2)(3m+1)}{2}-\frac{(3m+3)(m)}{2}=\frac{6m^2+6m+2}{2}=3m^2+3m+1$$

(5)當 $n=6m+4$時，

$$Q_3(6m+4)=\left[\frac{(6m+4)-1}{2}\right]+\left[\frac{(6m+4)-4}{2}\right]+\left[\frac{(6m+4)-7}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{(6m+4)-(3t-2)}{2}\right]$$
$$=\left[3m+\frac{3}{2}\right]+[3m]+\left[3m-\frac{3}{2}\right]+[3m-3]+\cdots+\left[\frac{3}{2}\right]$$
$$=(3m+1)+(3m)+(3m-2)+(3m-3)+(3m-5)+\cdots+3+1$$
$$=[1+2+3+\cdots+(3m+1)]-[2+5+\cdots+(3m-1)]$$
$$=\frac{(3m+2)(3m+1)}{2}-\frac{(3m+1)(m)}{2}=\frac{6m^2+8m+2}{2}=3m^2+4m+1$$

(6)當 $n=6m+5$時，

$$Q_3(6m+5)=\left[\frac{(6m+5)-1}{2}\right]+\left[\frac{(6m+5)-4}{2}\right]+\left[\frac{(6m+5)-7}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{(6m+5)-(3t-2)}{2}\right]$$
$$=[3m+2]+\left[3m+\frac{1}{2}\right]+[3m-1]+\left[3m-\frac{5}{2}\right]+[3m-4]+\cdots+\left[\frac{4}{2}\right]+\left[\frac{1}{2}\right]$$
$$=(3m+2)+(3m)+(3m-1)+(3m-3)+\cdots+2$$
$$=[1+2+3+\cdots+(3m+2)]-[1+4+\cdots+(3m+1)]$$
$$=\frac{(3m+3)(3m+2)}{2}-\frac{(3m+2)(m+1)}{2}=\frac{6m^2+10m+4}{2}=3m^2+5m+2$$

因此，排法有 $Q_3(n)=\begin{cases}3m^2 & ,當n=6m\\ 3m^2+m & ,當n=6m+1\\ 3m^2+2m & ,當n=6m+2\\ 3m^2+3m+1 & ,當n=6m+3\\ 3m^2+4m+1 & ,當n=6m+4\\ 3m^2+5m+2 & ,當n=6m+5\end{cases}$ 種。

(四) 發現 $Q_k(n)$ 的規律性

1. 將 1 個硬幣排成兩列，排法有 0 種。將 2 個硬幣排成兩列，排法有 1 種。

$\therefore Q_2(1)=0$ 且 $Q_2(2)=1$，而 $Q_1(m)+Q_2(m-1)$ 恰為 $Q_2(m+1)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$Q_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Q_2(n)$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10
$Q_1(n)+Q_2(n-1)$		1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	

2. 將 1 個、2 個硬幣排成三列，排法有 0 種。將 3 個硬幣排成三列，排法有 1 種。

$\therefore Q_3(1)=Q_3(2)=0$，$Q_3(3)=1$，而 $Q_2(m)+Q_3(m-2)$ 恰為 $Q_3(m+1)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$Q_2(n)$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10
$Q_3(n)$	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33
$Q_2(n)+Q_3(n-2)$			1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33	

3. 將 1 個、2 個、3 個硬幣排成四列，排法有 0 種。將 4 個硬幣排成四列，排法有 1 種。

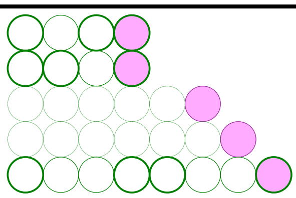
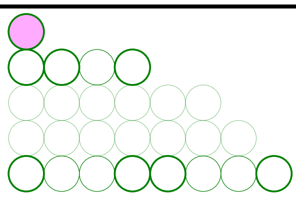
$\therefore Q_4(1)=Q_4(2)=Q_4(3)=0$，$Q_4(4)=1$，而 $Q_3(m)+Q_4(m-3)$ 恰為 $Q_4(m+1)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$Q_3(n)$	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30	33
$Q_4(n)$	0	0	0	1	1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64
$Q_3(n)+Q_4(n-3)$				1	2	3	5	6	9	11	15	18	23	27	34	39	47	54	64	

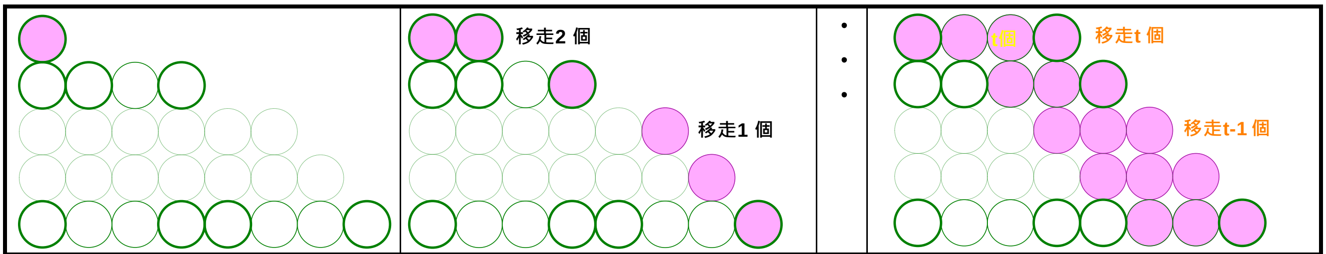
$\therefore$ 遞迴關係式為 $\begin{cases} Q_k(n)=Q_k(n-k)+Q_{k-1}(n-1)\text{，其中}k\ge 2 \\ Q_k(1)=Q_k(2)=\cdots=Q_k(k-1)=0\text{，其中}k\ge 2 \\ Q_k(k)=1 \end{cases}$。

4. 遞迴關係式為 $Q_k(n)=Q_k(n-k)+Q_{k-1}(n-1)$，其中 $k\ge 2$ 的含意

將 n 個硬幣「**遞減**」排成 k 列的排法有 $Q_k(n)$ 種。可能有兩種類型：

	
若最上方大於 1 個，則每列移走 1 個，共移走 k 個，剩下的 $n-k$ 個分成 k 列，$\therefore$ 排法有 $Q_k(n-k)$ 種。	若最上方只有 1 個，取走後，則剩下的 $n-1$ 個分成 $k-1$ 列，$\therefore$ 排法有 $Q_{k-1}(n-1)$ 種。

(五) 將 n 個硬幣「遞減」排成 k 列的排法有 $Q_k(n)$ 種，拆解為排成 $k-1$ 列的關係式：



若最上方只有 1 個， 取走後，則 剩下 $n-1$ 個分成 $k-1$ 列， $\therefore$ 排法 $Q_{k-1}(n-1)$ 種。	若最上方有 2 個，取走後， 其餘每列移走 1 個， 共移走 $k+1$ 個，再將 剩下 $n-1-k$ 個分成 $k-1$ 列 $\therefore$ 排法 $Q_{k-1}(n-1-k)$ 種。	$\vdots$	若最上方有 t 個，取走後， 其餘每列移走 $t-1$ 個， 共移走 $(t-1)k+1$ 個，再將 剩 $n-1-(t-1)k$ 個分 $k-1$ 列， $\therefore$ 排法 $Q_{k-1}\big(n-1-(t-1)k\big)$ 種。

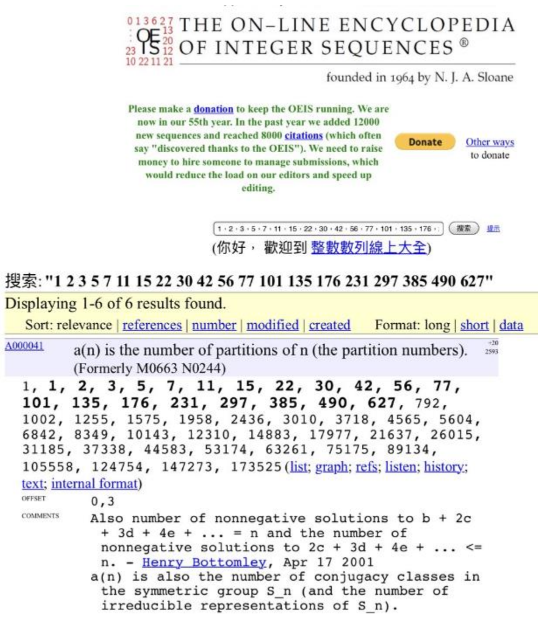
$\therefore$ 遞迴關係式 $Q_k(n)=Q_{k-1}(n-1)+Q_{k-1}(n-1-k)+Q_{k-1}(n-1-2k)+\cdots+Q_{k-1}\big(n-1-(t-1)k\big)$，

其中 $0\le n-tk<k$，$t\in N$。

(六) 上網查「整數數列線上大全」The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)，
發現 $P(n)$ 所成的數列 1,2,3,5,7,11,15,22,30,42, ⋯存在。
而且從「維基百科，自由的百科全書」發現 $P(n)$ 的生成函數為

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^k}\right)=\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\left(\frac{1}{1-x^4}\right)\cdots$$
$$=\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)\left(1+x^2+x^4+x^6+\cdots\right)\left(1+x^3+x^6+x^9+\cdots\right)\cdots$$
$$=1+1x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+\cdots$$
$$=P(0)+P(1)x+P(2)x^2+P(3)x^3+P(4)x^4+P(5)x^5+\cdots$$

此段討論是常見的「整數分割」問題，將數字拆解成數個**可重複**的數字。一般都利用「生成函數」處理整數分割問題。我是從「**圖形**」的觀點，採取「**分層**」**遞降**的方式，找出「**將整數 n 分成 k 個整數的方法數 $Q_k(n)$**」的遞迴關係式，進一步找出所有「整數分割的方法數」。


THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES ®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

Please make a donation to keep the OEIS running. We are now in our 55th year. In the past year we added 12000 new sequences and reached 8000 citations (which often say "discovered thanks to the OEIS"). We need to raise money to hire someone to manage submissions, which would reduce the load on our editors and speed up editing.

Donate | Other ways to donate

1 · 2 · 3 · 5 · 7 · 11 · 15 · 22 · 30 · 42 · 56 · 77 · 101 · 135 · 176 · 搜索 提示

(你好， 歡迎到 整數數列線上大全)

搜索: "1 2 3 5 7 11 15 22 30 42 56 77 101 135 176 231 297 385 490 627"

Displaying 1-6 of 6 results found.

Sort: relevance | references | number | modified | created Format: long | short | data

A000041 a(n) is the number of partitions of n (the partition numbers). (Formerly M0663 N0244) +20 2593

1, **1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, 42, 56, 77, 101, 135, 176, 231, 297, 385, 490, 627**, 792, 1002, 1255, 1575, 1958, 2436, 3010, 3718, 4565, 5604, 6842, 8349, 10143, 12310, 14883, 17977, 21637, 26015, 31185, 37338, 44583, 53174, 63261, 75175, 89134, 105558, 124754, 147273, 173525 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

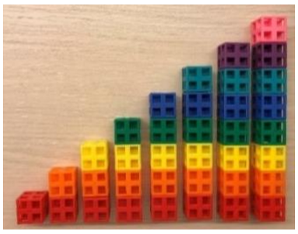
OFFSET 0,3

COMMENTS Also number of nonnegative solutions to b + 2c + 3d + 4e + ... = n and the number of nonnegative solutions to 2c + 3d + 4e + ... <= n. - Henry Bottomley, Apr 17 2001

a(n) is also the number of conjugacy classes in the symmetric group S_n (and the number of irreducible representations of S_n).

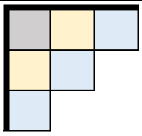
二、推廣至立體方塊堆疊

(一) 將 n 個方塊堆疊成柱的規定



1. 每柱的方塊數稱為「**層數**」，
   右圖由左而右依序為 1 層柱、2 層柱、⋯、7 層柱。
2. 方塊需從**左上方**角落開始堆疊，使用「**上視圖**」轉換表示圖形。
   若將「上視圖」標註每柱的層數，稱「**上視圖層數表示法**」。

上視圖



上視圖層數表示法

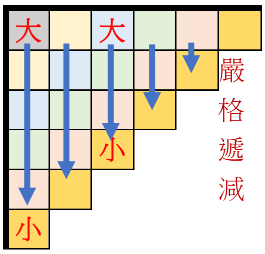
4	3	1
3	2	
2		

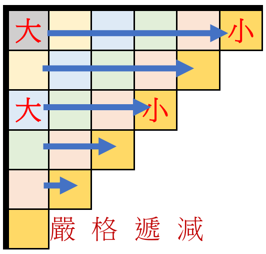
3. 定義：(m,n) 表示位於第 m 列第 n 行的位置。
   方塊柱的排列方式：(1) 依照 $m+n$ 值由小而大依序放置。
   (2) 若 $m+n$ 值相等時，則依照 n 值由小而大依序放置。
   因此，放置方塊柱的順序為 $(1,1)\to(2,1)\to(1,2)\to(3,1)\to(2,2)\to(1,3)\to(4,1)\to\cdot\cdot\cdot$

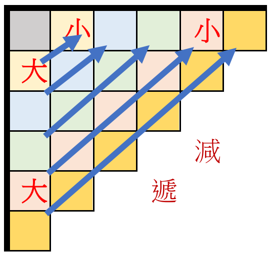
	第 1 行	第 2 行	第 3 行	第 4 行	第 5 行	第 6 行
第 1 列	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
第 2 列	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	
第 3 列	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$		
第 4 列	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$			
第 5 列	$(5,1)$	$(5,2)$				
第 6 列	$(6,1)$					

4. 定義：$P_{(m,n)}$ 表示位於第 m 列第 n 行的方塊柱的層數。

$P_{(1,1)}$	$P_{(1,2)}$	$P_{(1,3)}$	$P_{(1,4)}$	$P_{(1,5)}$	$P_{(1,6)}$
$P_{(2,1)}$	$P_{(2,2)}$	$P_{(2,3)}$	$P_{(2,4)}$	$P_{(2,5)}$	
$P_{(3,1)}$	$P_{(3,2)}$	$P_{(3,3)}$	$P_{(3,4)}$		
$P_{(4,1)}$	$P_{(4,2)}$	$P_{(4,3)}$			
$P_{(5,1)}$	$P_{(5,2)}$				
$P_{(6,1)}$					







規定 (1)**直行**的層數為**嚴格遞減**。即「n 固定時，若 $m_1<m_2$，則 $P_{(m_1,n)}>P_{(m_2,n)}$」。

(2)**橫列**的層數為**嚴格遞減**。即「m 固定時，若 $n_1<n_2$ 則 $P_{(m,n_1)}>P_{(m,n_2)}$」。

(3)**斜對角線**的層數為**遞減**。即「$m_1+n_1=m_2+n_2$ 時，若 $n_1<n_2$，則 $P_{(m_1,n_1)}\ge P_{(m_2,n_2)}$」。

例如：允許的堆疊

4	3	1
3	2	
2		

5	3	1
4	2	
3		

4	3	
3	1	
2		

例如：不允許的堆疊

4	3	
3	2	
1		

斜對角線的層數未遞減

4	3	1
3		
2		

斜對角線的角柱未依序放置

(二)符號與名詞定義

1.將 n 個方塊堆疊成 k 柱，則排法有 $T_k(n)$ 種，共有 $S(n)=T_1(n)+T_2(n)+\cdots+T_k(n)$ 種。

例如：將 10 個方塊堆疊成 k 柱，即 $n=10$

k 柱	上視圖層數表示法	排法 $T_k(n)$
$k=1$	10	$T_1(10)=1$
$k=2$	9, 1 / 8, 2 / 7, 3 / 6, 4	$T_2(10)=4$
$k=3$	8 1, 1 / 7 1, 2 / 6 1, 3 / 5 1, 4 / 6 2, 2 / 5 2, 3 / 4 3, 3	$T_3(10)=7$
$k=4$	6 1, 2, 1 / 5 2, 3, 1 / 5, 2, 1 / 4 2, 3, 1	$T_4(10)=4$
$k=5$	4 2, 2 1, 1	$T_5(10)=1$
$k=6$	3 2 1, 2 1, 1	$T_6(10)=1$

$\therefore S(10)=T_1(10)+T_2(10)+T_3(10)+T_4(10)+T_5(n)+T_6(10)=1+4+7+4+1+1=18$

2.**階數**：若遞迴關係式 $T_k(n)=T_k(n-k)+T_{k-1}(n-k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-k)$ ，

關係式中包含了連續 t 種方塊柱的分法，則稱 $T_k(n)$ 的階數為 t 。

例如：$T_5(n)=T_3(n-5)+T_4(n-5)+T_5(n-5)$ ，則稱 $T_5(n)$ 的階數為 3。

(三)討論方塊堆疊的排法

將 n 個方塊堆疊成 k 個方塊柱，則排法有 $T_k(n)$ 種，共有 $S(n)$ 種。整理出表格：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$T_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$T_2(n)$			1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
$T_3(n)$				1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30
$T_4(n)$							1	2	3	4	7	9	12	15	20	24	30	35	43	50
$T_5(n)$									1	1	2	4	6	9	12	17	23	30	38	48
$T_6(n)$										1	1	2	4	6	9	13	18	25	34	44
$T_7(n)$														1	2	4	6	10	15	22
$T_8(n)$																	1	2	3	6
$T_9(n)$																			1	1
$T_{10}(n)$																				1
$S(n)$	1	1	2	3	4	5	8	10	14	18	24	31	41	52	67	85	108	135	171	212

觀察表格，發現 $T_k(n)$ 規律性

1.將 n 個方塊堆疊成一柱的排法有 1 種。 $\therefore T_1(n)=1$。

2.將 n 個方塊堆疊成兩柱，其中 $n\geq 3$，排法有 $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ 種。$\therefore T_2(n)=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$T_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$T_2(n)$			1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
總和	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9		

$\therefore T_2(n)=T_1(n-2)+T_2(n-2)$ (二階)

3. 將 n 個方塊堆疊成三柱，其中 $n\geq 4$，

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$T_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$T_2(n)$			1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
$T_3(n)$				1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30
總和	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30			

$\therefore T_3(n)=T_1(n-3)+T_2(n-3)+T_3(n-3)$ (三階)

4. 將 n 個方塊堆疊成四柱，$T_4(n)=T_2(n-4)+T_3(n-4)+T_4(n-4)$ (三階)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$T_2(n)$			1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9
$T_3(n)$				1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21	24	27	30
$T_4(n)$							1	2	3	4	7	9	12	15	20	24	30	35	43	50
總和			1	2	3	4	7	9	12	15	20	24	30	35	43	50				

5. 將 n 個方塊堆疊成五柱、六柱、⋯、十柱，分別得到遞迴關係式

$T_5(n)=T_3(n-5)+T_4(n-5)+T_5(n-5)$ (三階)

$T_6(n)=T_3(n-6)+T_4(n-6)+T_5(n-6)+T_6(n-6)$ (四階)

$T_7(n)=T_4(n-7)+T_5(n-7)+T_6(n-7)+T_7(n-7)$ (四階)

$T_8(n)=T_5(n-8)+T_6(n-8)+T_7(n-8)+T_8(n-8)$ (四階)

$T_9(n)=T_6(n-9)+T_7(n-9)+T_8(n-9)+T_9(n-9)$ (四階)

$T_{10}(n)=T_6(n-10)+T_7(n-10)+T_8(n-10)+T_9(n-10)+T_{10}(n-10)$ (五階)

發現遞迴關係式 $T_3(n),\cdots,T_5(n)$ 變為三階， $T_6(n),\cdots,T_9(n)$ 變為四階， $T_{10}(n)$ 為五階。

階數變化時 $k=3,6,10$ 時，恰為 $k=1+2,1+2+3,1+2+3+4$ 。

因此，**遞迴關係式的階數變化與方塊柱恰填滿斜對角線時有關。**

(四) 遞迴關係式 $T_k(n)$ 的圖形含意

$T_k(n)=T_k(n-k)+T_{k-1}(n-k)+T_{k-2}(n-k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-k)$ (t 階)

將 n 個方塊堆疊成 k 柱，則排法有 $T_k(n)$ 種。若每柱取走 1 個方塊，可能有 t 種類型：

最低層柱為大於 1 層時，則剩下 $n-k$ 個方塊堆疊成 k 柱，排法有 $T_k(n-k)$ 種。

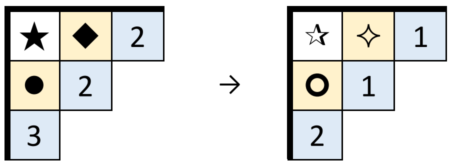
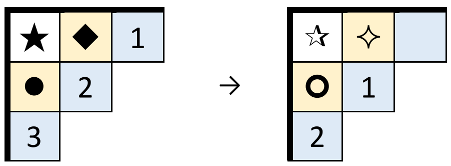
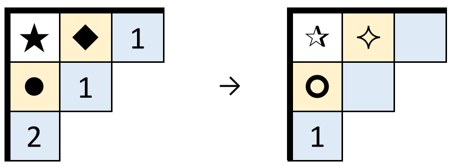
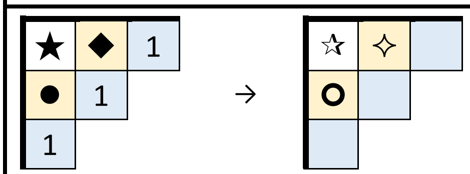
最低層柱為 1 層且有 1 柱時，則剩下 $n-k$ 個方塊堆疊成 $k-1$ 柱，排法有 $T_{k-1}(n-k)$ 種。

最低層柱為 1 層且有 2 柱時，則剩下 $n-k$ 個方塊堆疊成 $k-2$ 柱，排法有 $T_{k-2}(n-k)$ 種。

・・・・・

最低層柱為 1 層且有 $t-1$ 柱時，則剩下 $n-k$ 個方塊堆疊成 $k-t+1$ 柱，排法 $T_{k-t+1}(n-k)$ 種。

例如： $T_6(n)=T_3(n-6)+T_4(n-6)+T_5(n-6)+T_6(n-6)$ (四階)

	若最低層柱為大於 1 層時，每柱取走 1 個方塊， 則剩下 $n-6$ 個方塊堆疊成 6 柱，排法有 $T_6(n-6)$ 種。
	若最低層柱為 1 層且有 1 柱時，每柱取走 1 個方塊， 則剩下 $n-6$ 個方塊堆疊成 5 柱，排法有 $T_5(n-6)$ 種。
	若最低層柱為 1 層且有 2 柱時，每柱取走 1 個方塊， 則剩下 $n-6$ 個方塊堆疊成 4 柱，排法有 $T_4(n-6)$ 種。
	若最低層柱為 1 層且有 3 柱時，每柱取走 1 個方塊， 則剩下 $n-6$ 個方塊堆疊成 3 柱，排法有 $T_3(n-6)$ 種。

(五) $T_k(n)$ 完全降為少於 k 柱的遞迴關係式及圖形含意

$$T_k(n)=T_k(n-k)+T_{k-1}(n-k)+T_{k-2}(n-k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-k)$$
$$T_k(n-k)=T_k(n-2k)+T_{k-1}(n-2k)+T_{k-2}(n-2k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-2k)$$
$$T_k(n-2k)=T_k(n-3k)+T_{k-1}(n-3k)+T_{k-2}(n-3k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-3k)$$

‧ ‧ ‧ ‧ ‧

$$T_k(n-(r-1)k)=T_k(n-rk)+T_{k-1}(n-rk)+T_{k-2}(n-rk)+\cdots+T_{k-t+1}(n-rk)$$

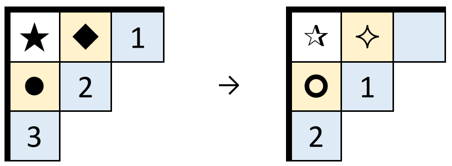
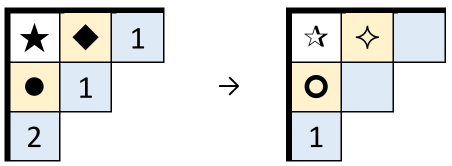
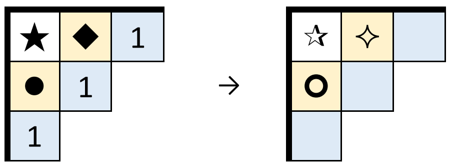
利用累加法

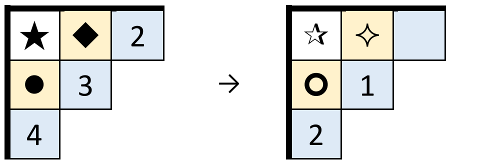
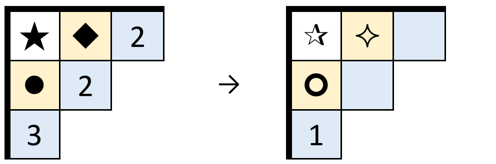
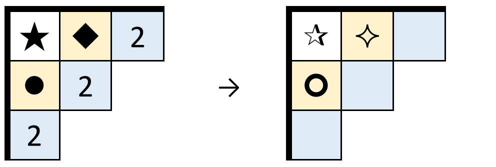
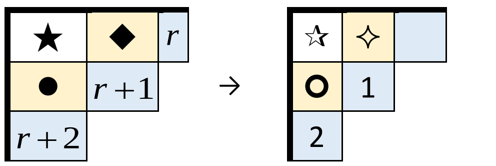
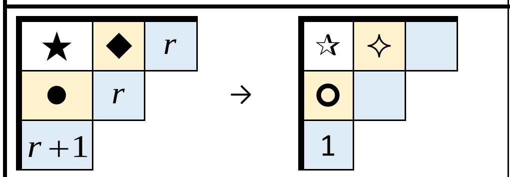
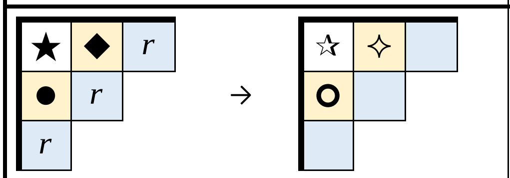
$$\therefore T_k(n)=\left[T_{k-1}(n-k)+T_{k-2}(n-k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-k)\right]+\left[T_{k-1}(n-2k)+T_{k-2}(n-2k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-2k)\right]$$
$$+\left[T_{k-1}(n-3k)+T_{k-2}(n-3k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-3k)\right]+\cdots+\left[T_{k-1}(n-rk)+T_{k-2}(n-rk)+\cdots+T_{k-t+1}(n-rk)\right]$$

◆**圖形含意：** $T_k(n)$ 表示將 n 個方塊堆疊成 k 柱，則排法有 $T_k(n)$ 種。可能類型有：

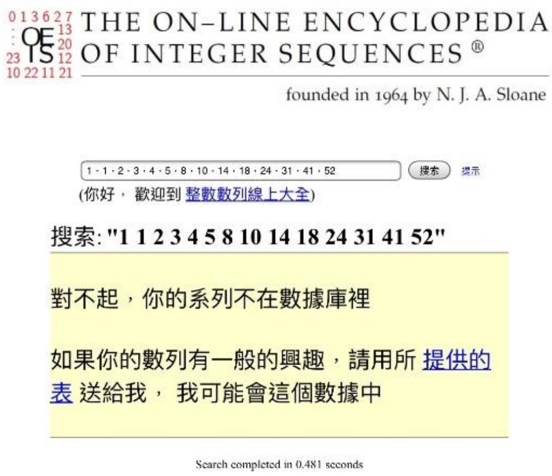
最低層柱為 1 層且有 1 柱時，每柱取走 1 個，剩 $n-k$ 個堆成 $k-1$ 柱，排法 $T_{k-1}(n-k)$ 種。 最低層柱為 1 層且有 2 柱時，每柱取走 1 個，剩 $n-k$ 個堆成 $k-2$ 柱，排法 $T_{k-2}(n-k)$ 種。 ‧ ‧ ‧ ‧ ‧ 最低層柱為 1 層且有 $t-1$ 柱時，每柱取走 1 個，剩 $n-k$ 個堆成 $k-t+1$ 柱，排法 $T_{k-t+1}(n-k)$ 種。
最低層柱為 2 層且有 1 柱時，每柱取走 2 個，剩 $n-2k$ 個堆成 $k-1$ 柱，排法 $T_{k-1}(n-2k)$ 種。 最低層柱為 2 層且有 2 柱時，每柱取走 2 個，剩 $n-2k$ 個堆成 $k-2$ 柱，排法 $T_{k-2}(n-2k)$ 種。 ‧ ‧ ‧ ‧ ‧ 最低層柱為 2 層且有 $t-1$ 柱時，每柱取走 2 個，剩 $n-2k$ 個堆成 $k-t+1$ 柱，排法 $T_{k-t+1}(n-2k)$ 種
‧ ‧ ‧ ‧ ‧
最低層柱為 r 層且有 1 柱時，每柱取走 r 個，剩 $n-rk$ 個堆成 $k-1$ 柱，排法 $T_{k-1}(n-rk)$ 種。 最低層柱為 r 層且有 2 柱時，每柱取走 r 個，剩 $n-rk$ 個堆成 $k-2$ 柱，排法 $T_{k-2}(n-rk)$ 種。 ‧ ‧ ‧ ‧ ‧ 最低層柱為 r 層且有 $t-1$ 柱時，每柱取走 r 個，剩 $n-rk$ 個堆成 $k-t+1$ 柱，排法 $T_{k-t+1}(n-rk)$ 種

例如： $T_6(n)=\left[T_3(n-6)+T_4(n-6)+T_5(n-6)\right]+\left[T_3(n-12)+T_4(n-12)+T_5(n-12)\right]$
$+\cdots+\left[T_3(n-6r)+T_4(n-6r)+T_5(n-6r)\right]$

	若最低層柱為 1 層且有 1 柱時，每柱取走 1 個方塊，則剩下 $n-6$ 個方塊堆疊成 5 柱，排法 $T_5(n-6)$ 種。
	若最低層柱為 1 層且有 2 柱時，每柱取走 1 個方塊，則剩下 $n-6$ 個方塊堆疊成 4 柱，排法 $T_4(n-6)$ 種。
	若最低層柱為 1 層且有 3 柱時，每柱取走 1 個方塊，則剩下 $n-6$ 個方塊堆疊成 3 柱，排法 $T_3(n-6)$ 種。

	若最低層柱為 2 層且有 1 柱時，每柱取走 2 個方塊，則剩下 $n-12$ 個方塊堆疊成 5 柱，排法 $T_5(n-12)$ 種。
	若最低層柱為 2 層且有 2 柱時，每柱取走 2 個方塊，則剩下 $n-12$ 個方塊堆疊成 4 柱，排法 $T_4(n-12)$ 種。
	若最低層柱為 2 層且有 3 柱時，每柱取走 2 個方塊，則剩下 $n-12$ 個方塊堆疊成 3 柱，排法 $T_3(n-12)$ 種。
. . . .	
	若最低層柱為 r 層且有 1 柱時，每柱取走 r 個方塊，剩下 $n-6r$ 個方塊堆疊成 5 柱，排法 $T_5(n-6r)$ 種。
	若最低層柱為 r 層且有 2 柱時，每柱取走 r 個方塊，剩下 $n-6r$ 個方塊堆疊成 4 柱，排法 $T_4(n-6r)$ 種。
	若最低層柱為 r 層且有 3 柱時，每柱取走 r 個方塊，剩下 $n-6r$ 個方塊堆疊成 3 柱，排法 $T_3(n-6r)$ 種。

(六)上網查「整數數列線上大全」The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)，發現 $S(n)$ 所成的數列 1,1,2,3,4,5,8,10,14,18,24,31,41,52, ⋯不存在。因此，$S(n)$ 是新發現的數列。

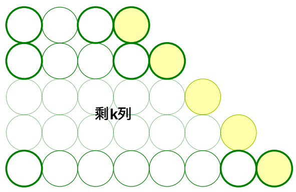
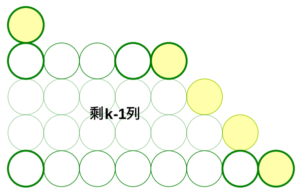


柒、結論

一、將 n 個硬幣排成 k 列的排法有 $B_k(n)$ 種，共有 $A(n)$ 種。發現 $B_k(n)$ 的規律性：

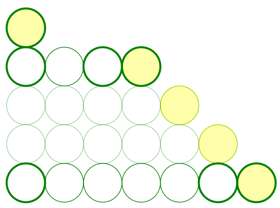
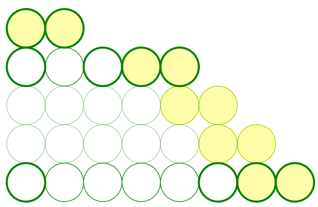
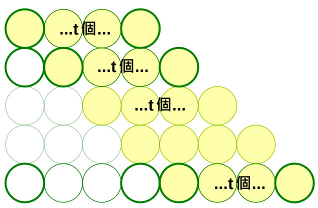
(一) $B_1(n)=1$。$B_2(n)=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$，其中 $n\geq 3$。$B_3(n)=\begin{cases}3m^2-3m+1 & ,\text{當}n=6m\\ 3m^2-2m & ,\text{當}n=6m+1\\ 3m^2-m & ,\text{當}n=6m+2\\ 3m^2 & ,\text{當}n=6m+3\\ 3m^2+m & ,\text{當}n=6m+4\\ 3m^2+2m & ,\text{當}n=6m+5\end{cases}$，其中 $n\geq 6$

(二)將 n 個硬幣排成 k 列的排法有 $B_k(n)$ 種。可能有兩種類型：

	若最上方大於 1 個，每列移走 1 個，則剩 $n-k$ 個分成 k 列 $\therefore$排法 $B_k(n-k)$ 種		若最上方只有 1 個，每列移走 1 個，則剩 $n-k$ 個分成 $k-1$列 $\therefore$排法 $B_{k-1}(n-k)$ 種

$\therefore$遞迴關係式為 $\begin{cases}B_1(n)=1\text{且}B_2(1)=B_2(2)=0\\ B_k(n)=B_k(n-k)+B_{k-1}(n-k)\text{，其中}k\geq 2\end{cases}$。

(三) 將 n 個硬幣排成 k 列的排法有 $B_k(n)$ 種，拆解為排成 $k-1$列的關係式：

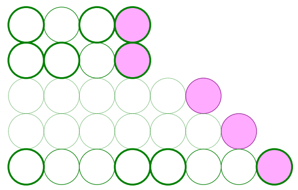
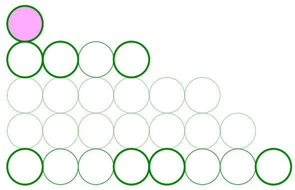
		⋮	
若最上方有 1 個， 每列移走 1 個，再將 剩下 $n-k$ 個分成 $k-1$列， $\therefore$排法 $B_{k-1}(n-k)$ 種。	若最上方有 2 個， 每列移走 2 個，再將 剩下 $n-2k$ 個分成 $k-1$列， $\therefore$排法有 $B_{k-1}(n-2k)$ 種。	⋮	若最上方有 t 個， 每列移走 t 個，再將 剩下 $n-kt$ 個分成 $k-1$列， $\therefore$排法有 $B_{k-1}(n-tk)$ 種。

$\therefore B_k(n)=B_{k-1}(n-k)+B_{k-1}(n-2k)+\cdots+B_{k-1}(n-tk)$，其中 $\dfrac{k(k-1)}{2}\leq n-tk<\dfrac{k(k+1)}{2}, t\in N$。

二、將 n 個硬幣「遞減」排成 k 列，則排法有 $Q_k(n)$ 種，共有 $P(n)$ 種。發現 $Q_k(n)$ 的規律性：

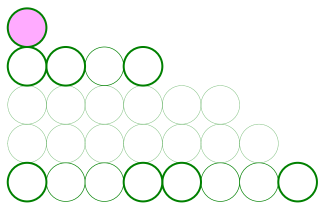
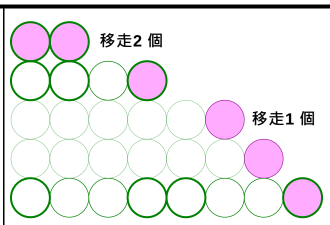
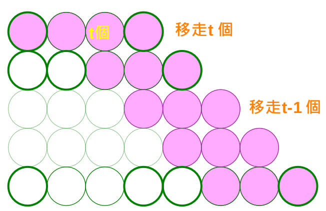
(一) $Q_1(n)=1$。$Q_2(n)=\left[\dfrac{n}{2}\right]$，其中 $n\geq 2$。$Q_3(n)=\begin{cases}3m^2 & ,\text{當}n=6m\\ 3m^2+m & ,\text{當}n=6m+1\\ 3m^2+2m & ,\text{當}n=6m+2\\ 3m^2+3m+1 & ,\text{當}n=6m+3\\ 3m^2+4m+1 & ,\text{當}n=6m+4\\ 3m^2+5m+2 & ,\text{當}n=6m+5\end{cases}$，其中 $n\geq 3$。

(二)將 n 個硬幣「**遞減**」排成 k 列的排法有 $Q_k(n)$ 種。有兩種類型：

	若最上方大於 1 個， 則每列移走 1 個， 共移走 k 個，剩下 $n-k$ 個分成 k 列， $\therefore$排法 $Q_k(n-k)$ 種。		若最上方只有 1 個， 取走後，則剩下 $n-1$ 個分成 $k-1$列， $\therefore$排法 $Q_{k-1}(n-1)$ 種。

$$\therefore\text{遞迴關係式為}\begin{cases} Q_k(n)=Q_k(n-k)+Q_{k-1}(n-1)\text{，其中}k\geq 2 \\ Q_k(1)=Q_k(2)=\cdots=Q_k(k-1)=0\text{，其中}k\geq 2\text{。} \\ Q_k(k)=1 \end{cases}$$

(三) 將 n 個硬幣「**遞減**」排成 k 列的排法有 $Q_k(n)$ 種，拆解為排成 $k-1$列的關係式：

	 	⋮	
若最上方只有 1 個， 取走後，則剩下 $n-1$個 分成 $k-1$列， $\therefore$排法 $Q_{k-1}(n-1)$ 種。	若最上方有 2 個，取走後， 其餘每列移走 1 個，共移走 $k+1$個，再將剩下 $n-1-k$ 個 分成 $k-1$列 $\therefore$排法 $Q_{k-1}(n-1-k)$ 種。	⋮	若最上方有 t 個，取走後， 其餘每列移走 $t-1$ 個，共移走 $(t-1)k+1$個，再將剩下 $n-1-(t-1)k$ 個分 $k-1$列， $\therefore$排法 $Q_{k-1}\left(n-1-(t-1)k\right)$ 種。

$\therefore Q_k(n)=Q_{k-1}(n-1)+Q_{k-1}(n-1-k)+\cdots+Q_{k-1}\left(n-1-(t-1)k\right)$，其中 $0\leq n-tk<k, t\in N$ 。

三、將 n 個方塊堆疊成 k 柱，則排法有 $T_k(n)$ 種，共有 $S(n)$ 種。發現 $T_k(n)$ 的規律性：

(一) $T_1(n)=1$ 。$T_2(n)=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ ，其中 $n\geq 3$ 。

(二) 將 n 個方塊堆疊成 k 柱，則排法有 $T_k(n)$ 種，若每柱取走 1 個方塊，可能有 t 種類型：

最低層柱為大於 1 層時，則剩下 $n-k$ 個方塊堆疊成 k 柱，排法有 $T_k(n-k)$ 種。
最低層柱為 1 層且有 1 柱時，則剩下 $n-k$ 個方塊堆疊成 $k-1$柱，排法有 $T_{k-1}(n-k)$ 種。
最低層柱為 1 層且有 2 柱時，則剩下 $n-k$ 個方塊堆疊成 $k-2$ 柱，排法有 $T_{k-2}(n-k)$ 種。

• • • • •

最低層柱為 1 層且有 $t-1$柱時，則剩下 $n-k$ 個方塊堆疊成 $k-t+1$柱，排法 $T_{k-t+1}(n-k)$ 種。

$\therefore T_k(n)=T_k(n-k)+T_{k-1}(n-k)+T_{k-2}(n-k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-k)$ （t 階）

(三) $T_k(n)$完全降為少於k柱的遞迴關係式

$$T_k(n)=\left[T_{k-1}(n-k)+T_{k-2}(n-k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-k)\right]+\left[T_{k-1}(n-2k)+T_{k-2}(n-2k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-2k)\right]$$
$$+\left[T_{k-1}(n-3k)+T_{k-2}(n-3k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-3k)\right]+\cdots+\left[T_{k-1}(n-rk)+T_{k-2}(n-rk)+\cdots+T_{k-t+1}(n-rk)\right]$$

◆**圖形含意：**$T_k(n)$表示將n個方塊堆疊成k柱，則排法有$T_k(n)$種。可能類型有：

最低層柱為 1 層且有 1 柱時，每柱取走 1 個，剩$n-k$個堆成$k-1$柱，排法$T_{k-1}(n-k)$種。 最低層柱為 1 層且有 2 柱時，每柱取走 1 個，剩$n-k$個堆成$k-2$柱，排法$T_{k-2}(n-k)$種。 ‧ ‧ ‧ ‧ ‧ 最低層柱為 1 層且有$t-1$柱時，每柱取走 1 個，剩$n-k$個堆成$k-t+1$柱，排法$T_{k-t+1}(n-k)$種。
最低層柱為 2 層且有 1 柱時，每柱取走 2 個，剩$n-2k$個堆成$k-1$柱，排法$T_{k-1}(n-2k)$種。 最低層柱為 2 層且有 2 柱時，每柱取走 2 個，剩$n-2k$個堆成$k-2$柱，排法$T_{k-2}(n-2k)$種。 ‧ ‧ ‧ ‧ ‧ 最低層柱為 2 層且有$t-1$柱時，每柱取走 2 個，剩$n-2k$個堆成$k-t+1$柱，排法$T_{k-t+1}(n-2k)$種
‧ ‧ ‧ ‧ ‧
最低層柱為r層且有 1 柱時，每柱取走r個，剩$n-rk$個堆成$k-1$柱，排法$T_{k-1}(n-rk)$種。 最低層柱為r層且有 2 柱時，每柱取走r個，剩$n-rk$個堆成$k-2$柱，排法$T_{k-2}(n-rk)$種。 ‧ ‧ ‧ ‧ ‧ 最低層柱為r層且有$t-1$柱時，每柱取走r個，剩$n-rk$個堆成$k-t+1$柱，排法$T_{k-t+1}(n-rk)$種

四、上網查「整數數列線上大全」The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)，發現$A(n)$和$P(n)$數列皆存在，但是$S(n)$數列不存在。因此，$S(n)$是新發現的數列。

五、常見的「整數分割」問題是將數字拆解成可重複的數字，且利用「生成函數」處理。本研究是從「**圖形**」的觀點，採取「**分層遞降**」的方式，找出「**硬幣排列**」與「**方塊堆疊**」的**遞迴關係式**，可進一步利用「**流程圖**」找出不同堆疊規則的方法數。

捌、參考資料

一、Crux Mathematicorum, Vol. 44(1), January 2018（8/ THE CONTEST CORNER）
二、國小數學第十二冊。怎樣解題。南一出版社。
三、「整數數列線上大全」http://oeis.org/Seis.html
四、維基百科，自由的百科全書 https://zh.wikipedia.org/zh-tw/整數分析。

【評語】080408

1. 本作品主要是從電影「天才無限家」數學家 Ramanujan 的真實勵志人生引發靈感，進行「整數分割」問題的討論，作者嘗試從圖形分層遞降觀點，尋找硬幣排列與方塊堆疊的遞迴關係式，以「量」的表徵方式來解決「數」的分割問題，用流程圖來找方法數，形成一個有趣的數學探究！
2. 該作品雖然利用硬幣排列使得國小學生得以觀察出遞迴關係進而完整窺探此題材的結果並推廣到柱狀排列，最後柱狀的排列也定義出適當的規則且有效的找出遞迴關係，將來可將此實務轉換成進一步的理論說明。

作品海報

壹、研究動機

電影「天才無限家」描述數學家 Ramanujan 的真實勵志人生，內容有提到「**整數分割**」(partition number)的問題。常見的整數分割是將數字拆解成數個**可重複**的數字之方法數。我嘗試「將 N 個硬幣排成數列，每列個數皆『**不同**』之方法數有幾種？」當我動手操作時，發現可以從「**圖形分層**」的方向著手，找出規律性來處理整數分割的問題。

貳、研究目的與問題

一、探討 n 個硬幣排成 k 列的方法數？

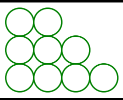
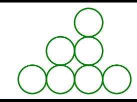
二、探討 n 個硬幣的排法是否有規律性？

參、排列規則與符號定義

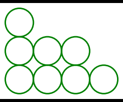
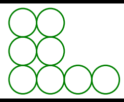
一、硬幣排列規則

將 n 個硬幣排成數列，規定

(一) 每列的硬幣皆從相同位置開始放置。

	允許的排列		不允許的排列

(二) 上列的硬幣數需「小於」下列的硬幣數。

	允許的排列		不允許的排列

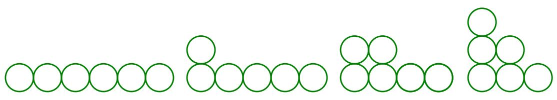
二、符號定義

將 n 個硬幣排成 k 列，則排法有 $B_k(n)$ 種，共有 $A(n)$ 種。

例如：將 6 個硬幣排列，排成一列有 1 種，所以 $B_1(6)=1$。

排成兩列有 2 種，所以 $B_2(6)=2$。

排成三列有 1 種，所以 $B_3(6)=1$。



因此，$A(6)=B_1(6)+B_2(6)+B_3(6)=1+2+1=4$。

肆、研究過程

一、討論「硬幣堆疊的排法」

	將 n 個硬幣排成數列	排法
$n=1$	1	$A(1)=1$
$n=2$	2	$A(2)=1$
$n=3$	3 ＝2+1	$A(3)=2$
$n=4$	4 ＝3+1	$A(4)=2$
$n=5$	5 ＝4+1 ＝3+2	$A(5)=3$
$n=6$	6 ＝5+1 ＝4+2 ＝3+2+1	$A(6)=4$

當 $n=7$ 時，

一列	二列	三列
7	＝6+1 ＝5+2 ＝4+3	＝4+2+1
$B_1(7)=1$	$B_2(7)=3$	$B_3(7)=1$

$\therefore A(7)=B_1(7)+B_2(7)+B_3(7)=1+3+1=5$。

當 $n=8$ 時，

一列	二列	三列
8	＝7+1 ＝6+2 ＝5+3	＝5+2+1 ＝4+3+1
$B_1(8)=1$	$B_2(8)=3$	$B_3(8)=2$

$\therefore A(8)=B_1(8)+B_2(8)+B_3(8)=1+3+2=6$。

依此類推，整理出表格

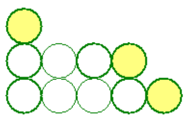
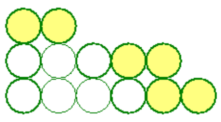
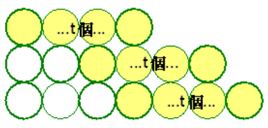
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$B_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$B_2(n)$			1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7
$B_3(n)$						1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14
$B_4(n)$										1	1	2	3	5	6	9
$B_5(n)$															1	1
$B_6(n)$																
$A(n)$	1	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	15	18	22	27	32

二、討論「將 n 個硬幣排成 k 列的排法，即 $B_k(n)$」

1. 將 n 個硬幣排成一列的排法有 1 種 $\therefore B_1(n)=1$。

2. 將 n 個硬幣排成兩列，其中 $n\ge 3$ $\therefore B_2(n)=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$

3. 將 n 個硬幣排成三列，其中 $n\ge 6$

若最上方有 1 個，每列移走 1 個， 剩 $n-3$ 個分兩列，排法有 $\left[\dfrac{(n-3)-1}{2}\right]$ 種	
若最上方有 2 個，先每列移走 2 個， 剩 $n-6$ 個分兩列，則排法有 $\left[\dfrac{(n-6)-1}{2}\right]$ 種	
．．．．．．	
若最上方有 t 個，先每列移走 t 個， 剩 $n-3t$ 個分兩列，排法 $\left[\dfrac{(n-3t)-1}{2}\right]$ 種	

$\therefore B_3(n)=\left[\dfrac{n-4}{2}\right]+\left[\dfrac{n-7}{2}\right]+\cdots+\left[\dfrac{n-(3t+1)}{2}\right]$，其中 $0<n-3t\le 3$

4. 化簡 $B_3(n)=\left[\dfrac{n-4}{2}\right]+\left[\dfrac{n-7}{2}\right]+\left[\dfrac{n-10}{2}\right]+\cdots+\left[\dfrac{n-(3t+1)}{2}\right]$

分成 $n=6m,6m+1,6m+2,6m+3,6m+4,6m+5$ 討論

(1)當 $n=6m$ 時，

$B_3(6m)=\left[\dfrac{6m-4}{2}\right]+\left[\dfrac{6m-7}{2}\right]+\left[\dfrac{6m-10}{2}\right]+\cdots+\left[\dfrac{6m-(3t+1)}{2}\right]$

$=(3m-2)+(3m-4)+(3m-5)+(3m-7)+\cdots+1=3m^2-3m+1$

(2)當 $n=6m+1$ 時，

$B_3(6m+1)=\left[\dfrac{(6m+1)-4}{2}\right]+\cdots+\left[\dfrac{(6m+1)-(3t+1)}{2}\right]$

$=(3m-2)+(3m-3)+(3m-5)+(3m-6)+\cdots+1+0=3m^2-2m$

(3)當 $n=6m+2$ 時，

$B_3(6m+2)=\left[\dfrac{(6m+2)-4}{2}\right]+\cdots+\left[\dfrac{(6m+2)-(3t+1)}{2}\right]$

$=(3m-1)+(3m-3)+(3m-4)+(3m-6)+\cdots+2+0=3m^2-m$

(4)當 $n=6m+3$ 時，

$B_3(6m+3)=\left[\dfrac{(6m+3)-4}{2}\right]+\cdots+\left[\dfrac{(6m+3)-(3t+1)}{2}\right]$

$=(3m-1)+(3m-2)+(3m-4)+(3m-5)+\cdots+1=3m^2$

(5)當 $n=6m+4$ 時，

$B_3(6m+4)=\left[\dfrac{(6m+4)-4}{2}\right]+\cdots+\left[\dfrac{(6m+4)-(3t+1)}{2}\right]=3m^2+m$

(6)當 $n=6m+5$ 時，

$B_3(6m+5)=\left[\dfrac{(6m+5)-4}{2}\right]+\cdots+\left[\dfrac{(6m+5)-(3t+1)}{2}\right]=3m^2+2m$

三、觀察 $B_k(n)$ 的規律性

$B_2(1)=B_2(2)=0$，而 $B_1(m)+B_2(m)$ 恰為 $B_2(m+2)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$B_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$B_2(n)$	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7
$B_1(n)+B_2(n)$	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8

$B_3(3)=B_3(4)=B_3(5)=0$，而 $B_2(m)+B_3(m)$ 恰為 $B_3(m+3)$

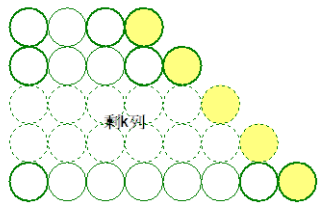
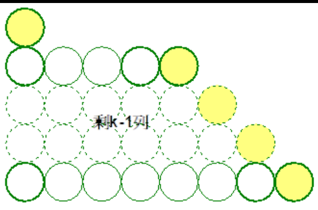
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$B_2(n)$			1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7
$B_3(n)$			0	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12
$B_2(n)+B_3(n)$			1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19

觀察規律性

$\therefore$ 遞迴關係式 $\begin{cases} B_1(n)=1 \text{且} B_2(1)=B_2(2)=0 \\ B_k(n)=B_k(n-k)+B_{k-1}(n-k)\text{，其中} k\ge 2 \end{cases}$

★觀察遞迴關係式的含意

將 n 個硬幣排成 k 列，可能有兩種類型：

	
若最上方(第 k 列)大於 1 個， 每列移走 1 個後， 則剩下 $n-k$ 個分成 k 列。 $\therefore$ 排法 $B_k(n-k)$ 種。	若最上方(第 k 列)只有 1 個， 每列移走 1 個後， 則剩下 $n-k$ 個分成 $k-1$ 列。 $\therefore$ 排法 $B_{k-1}(n-k)$ 種。

★將 $B_k(n)=B_k(n-k)+B_{k-1}(n-k)$

同理 $B_k(n-k)=B_k(n-2k)+B_{k-1}(n-2k)$

$\cdots\cdots$

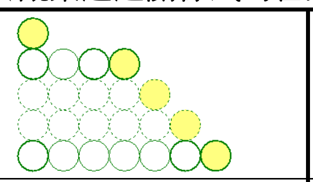
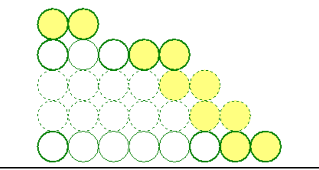
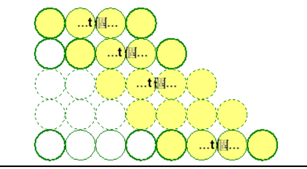
$B_k(n-(t-1)k)=B_k(n-tk)+B_{k-1}(n-tk)$，其中 $0<n-tk\le k$，$t\in N$

累加後 $\therefore B_k(n)=B_{k-1}(n-k)+B_{k-1}(n-2k)+\cdots+B_{k-1}(n-tk)+B_k(n-tk)$

若 $B_k(n-tk)=0$ 且 $B_{k-1}(n-tk)>0$，則 $1+2+\cdots+(k-1)\le n-tk<1+2+\cdots+k$

$B_k(n)=B_{k-1}(n-k)+B_{k-1}(n-2k)+\cdots+B_{k-1}(n-tk)$，$\dfrac{k(k-1)}{2}\le n-tk<\dfrac{k(k+1)}{2}$

★觀察遞迴關係式的含意：將 n 個硬幣排成 k 列，可能有這些類型：

		$\vdots$	
若最上方有 1 個，每列移走 1 個，剩 $n-k$ 個分 $k-1$ 列，$\therefore$排法 $B_{k-1}(n-k)$ 種。	若最上方有 2 個，每列移走 2 個，剩 $n-2k$ 個分 $k-1$ 列，$\therefore$排法 $B_{k-1}(n-2k)$ 種。	$\vdots$	若最上方有 t 個，每列移走 t 個，剩 $n-kt$ 個分 $k-1$ 列，$\therefore$排法 $B_{k-1}(n-tk)$ 種。

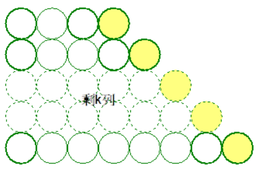
伍、研究結果

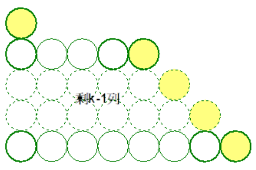
一、將 n 個硬幣排成 k 列的排法有 $B_k(n)$ 種，共有 $A(n)$ 種，整理出表格。

二、發現 $B_k(n)$ 的規律性

1. $B_1(n)=1$，其中 $n\in N$。$B_2(n)=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$，其中 $n\ge 3$。
2. $B_3(n)=\left[\dfrac{n-4}{2}\right]+\left[\dfrac{n-7}{2}\right]+\cdots+\left[\dfrac{n-(3t+1)}{2}\right]$，其中 $n\ge 6$，$0<n-3t\le 3$。

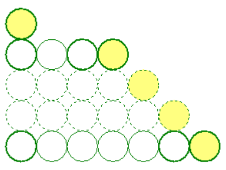
並整理出 $B_3(n)=\begin{cases}3m^2-3m+1 & ,\text{當}n=6m\\ 3m^2-2m & ,\text{當}n=6m+1\\ 3m^2-m & ,\text{當}n=6m+2\\ 3m^2 & ,\text{當}n=6m+3\\ 3m^2+m & ,\text{當}n=6m+4\\ 3m^2+2m & ,\text{當}n=6m+5\end{cases}$。

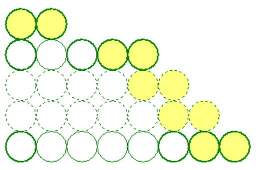




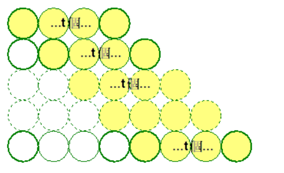
3. 遞迴關係式為 $\begin{cases}B_1(n)=1\text{且}B_2(1)=B_2(2)=0\\ B_k(n)=B_k(n-k)+B_{k-1}(n-k)\text{，其中}k\ge 2\end{cases}$

三、將 $B_k(n)$ 拆解為排成 $k-1$ 列的關係式：





$\cdots$



$B_k(n)=B_{k-1}(n-k)+B_{k-1}(n-2k)+\cdots+B_{k-1}(n-tk)$，$\dfrac{k(k-1)}{2}\le n-tk<\dfrac{k(k+1)}{2}$

四、上網查「整數數列線上大全」The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)發現 $A(n)$ 數列 1,1,2,2,3,4,5,6,8,10,12,15,18,22,…存在。從「維基百科，自由的百科全書」發現 $A(n)$ 的生成函數為

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)=1+1x+1x^2+2x^3+2x^4+\cdots=A(0)+A(1)x+A(2)x^2+A(3)x^3+\cdots$$

常見的「整數分割」問題是將數字拆解成數個可重複的數字，且利用「生成函數」處理問題。我從「**圖形**」的觀點，採取**分層遞降**的方式，找出**遞迴關係式**，可進一步找出整數分割的方法數。

五、求「將 n 個硬幣排列的方法數」之流程圖

步驟 1.判斷 n 個硬幣最多可排成的列數 k。

↓

步驟 2.計算出 $B_1(n)$，$B_2(n)$，…，$B_k(n)$ 之值。

利用 $B_1(n)=1$，$B_2(n)=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$，$B_3(n)=\begin{cases}3m^2-3m+1 & ,\text{當}n=6m\\ 3m^2-2m & ,\text{當}n=6m+1\\ 3m^2-m & ,\text{當}n=6m+2\\ 3m^2 & ,\text{當}n=6m+3\\ 3m^2+m & ,\text{當}n=6m+4\\ 3m^2+2m & ,\text{當}n=6m+5\end{cases}$

及遞迴關係式 $B_k(n)=B_{k-1}(n-k)+B_{k-1}(n-2k)+\cdots+B_{k-1}(n-tk)$。

↓

步驟 3.方法數有 $A(n)=B_1(n)+B_2(n)+\cdots+B_k(n)$ 種。

例如：求將 20 個硬幣排列的方法數

步驟 1. $\because \dfrac{5\times 6}{2}\le 20<\dfrac{6\times 7}{2}$ $\therefore$**20 個硬幣最多可排成 5 列**

↓

步驟 2. $B_1(20)=1$，$B_2(20)=\left[\dfrac{20-1}{2}\right]=9$，$B_3(20)=B_3(6\times 3+2)=24$

$B_4(20)=B_3(16)+B_3(12)+B_3(8)+B_3(4)$

$=B_3(6\times 2+4)+B_3(6\times 2+0)+B_3(6\times 1+2)+B_3(6\times 0+4)=23$

$B_5(20)=B_4(15)+B_4(10)+B_4(5)$

$=[B_3(11)+B_3(7)+B_3(3)]+[B_3(6)+B_3(2)]+[B_3(1)]=7$

↓

步驟 3.方法數 $A(20)=1+9+24+23+7=64$ 種。

陸、討論

一、修改硬幣堆疊規則為「遞減」

(一) 遞減堆疊規則：將 n 個硬幣排成數列，規定

(1)每列硬幣皆從相同位置開始放置

(2)上列硬幣數需「小於或等於」下列硬幣數

符號定義：將 n 個硬幣遞減排成 k 列，則排法有 $Q_k(n)$ 種，共有 $P(n)$ 種。

例如：將 6 個硬幣排成數列，討論如下：

排一列	排兩列	排三列	排四列	排五列	排六列
6	5+1 ＝4+2 ＝3+3	4+1+1 ＝3+2+1 ＝2+2+2	3+1+1+1 ＝2+2+1+1	2+1+1+1+1	1+1+1+1+1+1

$P(6)=Q_1(6)+Q_2(6)+Q_3(6)+Q_4(6)+Q_5(6)+Q_6(6)=1+3+3+2+1+1=11$。

(二)將 n 個硬幣遞減排成 k 列，排法有 $Q_k(n)$ 種，共 $P(n)$ 種。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$Q_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Q_2(n)$		1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
$Q_3(n)$			1	1	2	3	4	5	7	8	10	12
$Q_4(n)$				1	1	2	3	5	6	9	11	15
$Q_5(n)$					1	1	2	3	5	7	10	13
$Q_6(n)$						1	1	2	3	5	7	11
$Q_7(n)$							1	1	2	3	5	7
$P(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77

(三)討論「將 n 個硬幣遞減排成 k 列的排法，即 $Q_k(n)$」

1. n 個硬幣**遞減**排成一列，排法有 $Q_1(n)=1$ 種。
2. n 個硬幣**遞減**排成兩列，排法有 $Q_2(n)=\left[\dfrac{n}{2}\right]$ 種，$n\ge 2$。
3. n 個硬幣**遞減**排成三列，$n\ge 3$，排法有

$$Q_3(n)=\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n-4}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-(3t-2)}{2}\right]=\begin{cases}3m^2 & ,\text{當}n=6m\\ 3m^2+m & ,\text{當}n=6m+1\\ 3m^2+2m & ,\text{當}n=6m+2\\ 3m^2+3m+1 & ,\text{當}n=6m+3\\ 3m^2+4m+1 & ,\text{當}n=6m+4\\ 3m^2+5m+2 & ,\text{當}n=6m+5\end{cases}$$

(四)發現 $Q_k(n)$ 的規律性

$Q_2(1)=0$ 且 $Q_2(2)=1$，$Q_1(m)+Q_2(m-1)$ 恰為 $Q_2(m+1)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$Q_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$Q_2(n)$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6

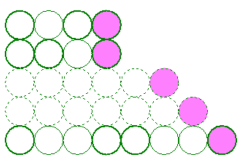
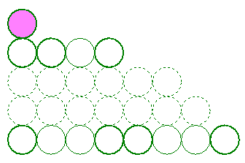
$Q_3(1)=Q_3(2)=0$ 且 $Q_3(3)=1$，$Q_2(m)+Q_3(m-2)$ 恰為 $Q_3(m+1)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$Q_2(n)$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
$Q_3(n)$	0	0	1	1	2	3	4	5	7	8	10	12

$\therefore$遞迴關係式 $\begin{cases}Q_k(n)=Q_k(n-k)+Q_{k-1}(n-1)\text{，其中}k\ge 2\\ Q_k(1)=Q_k(2)=\cdots=Q_k(k-1)=0\text{，其中}k\ge 2\text{，}Q_k(k)=1\end{cases}$。

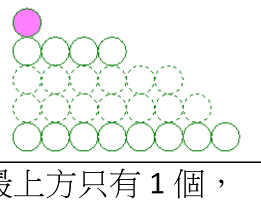
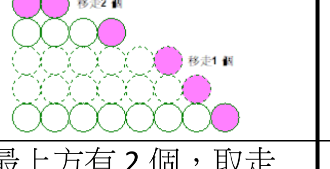
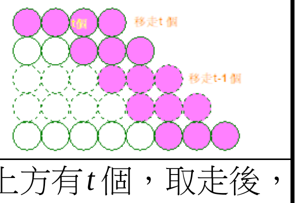
★觀察遞迴關係式的含意：

將 n 個硬幣遞減排成 k 列，有兩種類型：

	最上方大於 1 個，每列皆移走 1 個，剩 $n-k$ 個分 k 列 $\therefore$排法 $Q_k(n-k)$		最上方只有 1 個，取走後，剩下 $n-1$ 個分 $k-1$ 列 $\therefore$排法 $Q_{k-1}(n-1)$

(五)將 $Q_k(n)$ 拆解為排成 $k-1$ 列的關係式：

$Q_k(n)=Q_{k-1}(n-1)+Q_{k-1}(n-1-k)+\cdots+Q_{k-1}(n-1-(t-1)k)$，$0\le n-tk<k$。

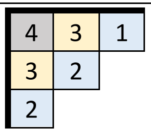
		$\vdots$	
最上方只有 1 個，取走後，剩 $n-1$ 個分 $k-1$ 列，$\therefore$排法 $Q_{k-1}(n-1)$ 種	最上方有 2 個，取走後，其餘每列移 1 個，共移走 $k+1$ 個，剩 $n-1-k$ 個分 $k-1$ 列 $\therefore$排法 $Q_{k-1}(n-1-k)$ 種	$\vdots$	最上方有 t 個，取走後，其餘每列移走 $t-1$ 個，共移走 $(t-1)k+1$ 個，剩 $n-1-(t-1)k$ 個分成 $k-1$ 列，則排法 $Q_{k-1}(n-1-(t-1)k)$

二、推廣至立體方塊堆疊

(一) 將 n 個方塊堆疊成柱的規定

1.方塊從左上方角落開始堆疊，使用「上視圖」轉換圖形。
若將上視圖標註每柱的層數，稱「上視圖層數表示法」。

上視圖層數表示法



(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	
(3,1)	(3,2)		
(4,1)			

(m,n)：第 m 列第 n 行位置

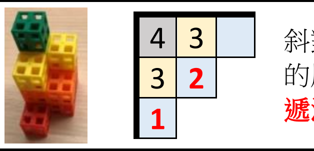
2.方塊柱排列方式：$(1,1)\to(2,1)\to(1,2)\to(3,1)\to(2,2)\to\ldots$
(1)依 $m+n$ 值由小而大。(2)若 $m+n$ 值相等，依 n 值由小而大。

3.定義：$P_{(m,n)}$ 表示位於第 m 列第 n 行的方塊柱的層數。

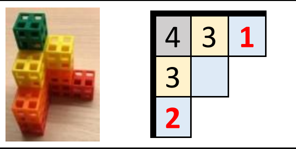
規定(1) n 固定，若 $m_1<m_2$ 則 $P_{(m_1,n)}>P_{(m_2,n)}$。嚴格遞減

(2) m 固定，若 $n_1<n_2$ 則 $P_{(m,n_1)}>P_{(m,n_2)}$。嚴格遞減

(3) $m_1+n_1=m_2+n_2$ 時，若 $n_1<n_2$ 則 $P_{(m_1,n_1)}\ge P_{(m_2,n_2)}$。遞減



斜對角線的層數未遞減

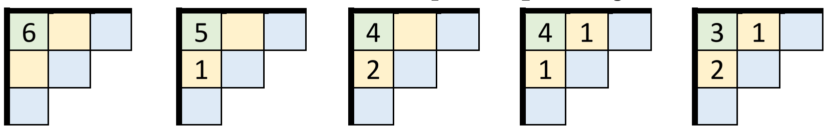


斜對角線的角柱未依序放置

(二)符號與名詞定義

1.將 n 個方塊堆疊成 k 柱的排法 $T_k(n)$ 種，共 $S(n)$ 種。

例：6 個方塊堆成 k 柱，$S(6)=T_1(6)+T_2(6)+T_3(6)=1+2+2=5$



2.階數：若 $T_k(n)=T_k(n-k)+T_{k-1}(n-k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-k)$，
關係式中包含連續 t 種方塊柱的分法，則稱 $T_k(n)$ 的階數為 t。

(三)討論方塊堆疊的排法

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T_1(n)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$T_2(n)$			1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7
$T_3(n)$				1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16
$T_4(n)$							1	2	3	4	7	9	12	15	20
$T_5(n)$									1	1	2	4	6	9	12
$T_6(n)$										1	1	2	4	6	9
$T_7(n)$														1	2
$S(n)$	1	1	2	3	4	5	8	10	14	18	24	31	41	52	67

1. 發現 $T_1(n)=1$。$T_2(n)=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$。

2. $T_2(n)=T_1(n-2)+T_2(n-2)$ (二階)

$T_3(n)=T_1(n-3)+T_2(n-3)+T_3(n-3)$ (三階)

$T_4(n)=T_2(n-4)+T_3(n-4)+T_4(n-4)$ (三階)

$T_5(n)=T_3(n-5)+T_4(n-5)+T_5(n-5)$ (三階)

$T_6(n)=T_3(n-6)+T_4(n-6)+T_5(n-6)+T_6(n-6)$ (四階)

$T_7(n)=T_4(n-7)+T_5(n-7)+T_6(n-7)+T_7(n-7)$ (四階)

$T_8(n)=T_5(n-8)+T_6(n-8)+T_7(n-8)+T_8(n-8)$ (四階)

$T_9(n)=T_6(n-9)+T_7(n-9)+T_8(n-9)+T_9(n-9)$ (四階)

$T_{10}(n)=T_6(n-10)+T_7(n-10)+\cdots+T_{10}(n-10)$ (五階)

發現遞迴關係式的階數變化與方塊柱恰填滿斜對角線時有關。

(四) 遞迴關係式 $T_k(n)$ 的圖形含意

$T_k(n)=T_k(n-k)+T_{k-1}(n-k)+T_{k-2}(n-k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-k)$ (t 階)

將 n 個方塊堆疊成 k 柱的排法 $T_k(n)$ 種。

若每柱取走 1 個方塊，有 t 種類型：

最低柱為大於 1 層時，剩 $n-k$ 個堆 k 柱，排法 $T_k(n-k)$ 種。
最低柱為 1 層且 1 柱，剩 $n-k$ 個堆 $k-1$ 柱，排法 $T_{k-1}(n-k)$ 種。
最低柱為 1 層且 2 柱，剩 $n-k$ 個堆 $k-2$ 柱，排法 $T_{k-2}(n-k)$ 種。
． ． ． ． ．
最低柱為 1 層且 $t-1$ 柱，剩 $n-k$ 個堆 $k-t+1$ 柱，排法 $T_{k-t+1}(n-k)$ 種。

(五) $T_k(n)$ 完全降為少於 k 柱的遞迴關係式及圖形含意

$$T_k(n)=\left[T_{k-1}(n-k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-k)\right]+\left[T_{k-1}(n-2k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-2k)\right]+\cdots+\left[T_{k-1}(n-rk)+\cdots+T_{k-t+1}(n-rk)\right]$$

◆圖形含意：將 n 個方塊堆疊成 k 柱，排法 $T_k(n)$ 種。可能類型：

最低柱 1 層且 1 柱,每柱取 1 個,剩 $n-k$ 個堆 $k-1$ 柱,排法 $T_{k-1}(n-k)$
最低柱 1 層且 2 柱,每柱取 1 個,剩 $n-k$ 個堆 $k-2$ 柱,排法 $T_{k-2}(n-k)$
． ． ． ． ．
最低柱 1 層且 $t-1$ 柱,每柱取 1 個剩 $n-k$ 個堆 $k-t+1$ 柱,排法 $T_{k-t+1}(n-k)$
最低柱 2 層且 1 柱,每柱取 2 個,剩 $n-2k$ 個堆 $k-1$ 柱,排法 $T_{k-1}(n-2k)$
． ． ． ． ．
最低柱 2 層 $t-1$ 柱,每柱取 2 個,剩 $n-2k$ 個堆 $k-t+1$ 柱,排法 $T_{k-t+1}(n-2k)$
． ． ． ． ．
最低柱 r 層且 1 柱,每柱取 r 個,剩 $n-rk$ 個堆 $k-1$ 柱,排法 $T_{k-1}(n-rk)$
． ． ． ． ．
最低柱 r 層 $t-1$ 柱,每柱取 r 個,剩 $n-rk$ 個堆 $k-t+1$ 柱,排法 $T_{k-t+1}(n-rk)$

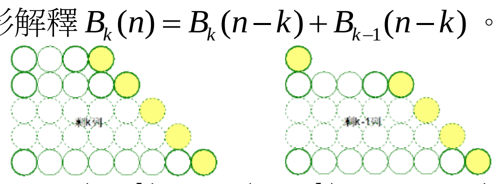
(六)上網查「整數數列線上大全」The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)，發現 $S(n)$ 所成的數列不存在。因此，$S(n)$ 是新發現的數列。

柒、結論

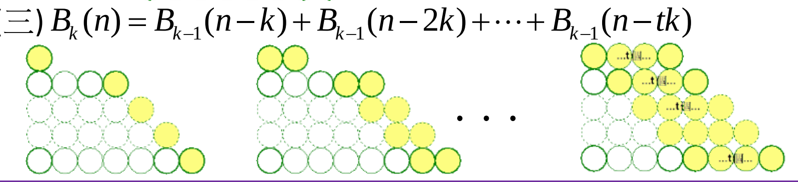
一、將 n 個硬幣排成 k 列的排法有 $B_k(n)$ 種，共 $A(n)$ 種。

(一)找出 $B_1(n)=1$。$B_2(n)=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$。$B_3(n)$ 的一般式。

(二)從圖形解釋 $B_k(n)=B_k(n-k)+B_{k-1}(n-k)$。



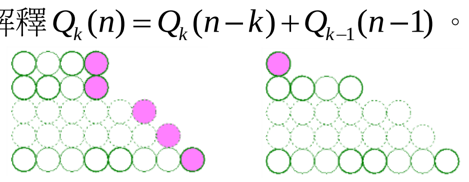
(三) $B_k(n)=B_{k-1}(n-k)+B_{k-1}(n-2k)+\cdots+B_{k-1}(n-tk)$



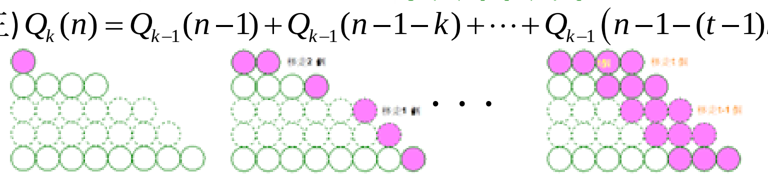
二、將 n 個硬幣遞減排成 k 列的排法有 $Q_k(n)$ 種，共 $P(n)$ 種。

(一)找出 $Q_1(n)=1$。$Q_2(n)=\left[\dfrac{n}{2}\right]$。$Q_3(n)$ 的一般式。

(二)從圖形解釋 $Q_k(n)=Q_k(n-k)+Q_{k-1}(n-1)$。

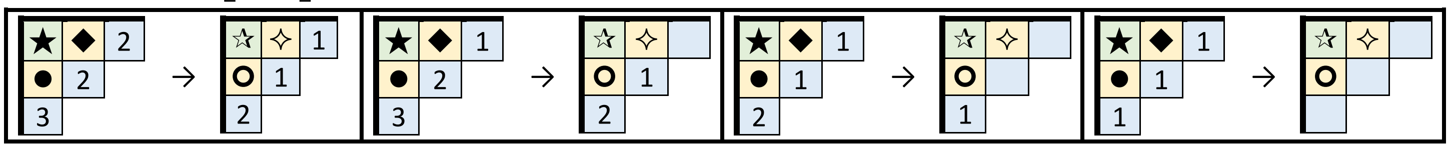


(三) $Q_k(n)=Q_{k-1}(n-1)+Q_{k-1}(n-1-k)+\cdots+Q_{k-1}\left(n-1-(t-1)k\right)$

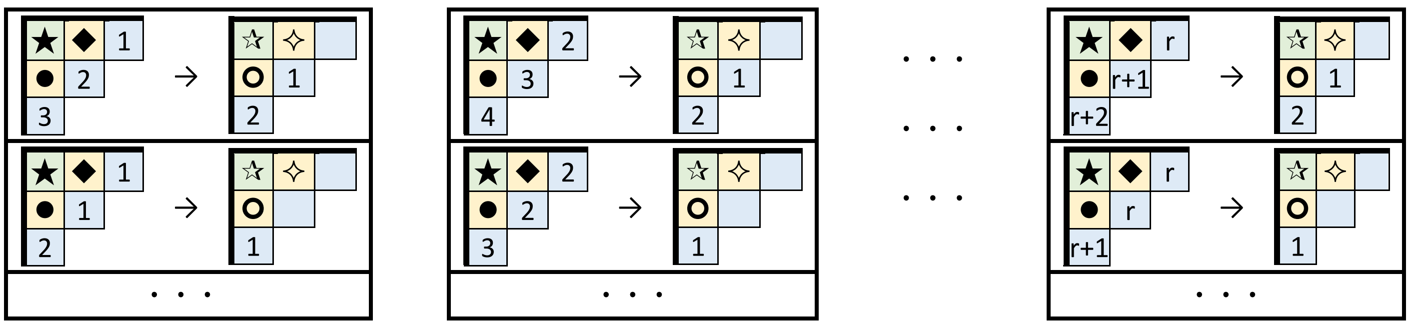


三、將 n 個方塊堆疊成 k 柱的排法有 $T_k(n)$ 種，共 $S(n)$ 種。

(一) 找出 $T_1(n)=1$。$T_2(n)=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$。遞迴關係式 $T_k(n)=T_k(n-k)+T_{k-1}(n-k)+T_{k-2}(n-k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-k)$ (t 階)，從圖形解釋



(二) $T_k(n)=\left[T_{k-1}(n-k)+T_{k-2}(n-k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-k)\right]+\left[T_{k-1}(n-2k)+\cdots+T_{k-t+1}(n-2k)\right]+\cdots+\left[T_{k-1}(n-rk)+\cdots+T_{k-t+1}(n-rk)\right]$



四、上網查「整數數列線上大全」發現 $A(n)$ 和 $P(n)$ 所成的數列皆存在。但是 $S(n)$ 數列不存在。因此，$S(n)$ 是新發現的數列。

五、我從圖形觀點，採取分層遞降方式，找出硬幣排列與方塊堆疊的遞迴關係式，可進一步利用流程圖找出不同堆疊規則方法數。

捌、參考資料

一、Crux Mathematicorum, Vol. 44(1), January 2018（8/ THE CONTEST CORNER）
二、國小數學第十二冊。怎樣解題。南一出版社。
三、「整數數列線上大全」http://oeis.org/Seis.html
四、維基百科，自由的百科全書 https://zh.wikipedia.org/zh-tw/整數分拆。