中華民國第60屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第一名

080405

「虛實」之間「旋轉」乾坤

學校名稱：臺北市私立靜心高級中學(國小部)

作者：	指導老師：
小六 陳宣叡	陳慧娟
小六 陳柏廷	謝智偉
小六 鄭稟瀚	
小六 方彥絜	
小六 蔡宜蕾	

關鍵詞：方轉、正n邊形、摺紙

得獎感言

豐收的一年

參加科展讓我們感到很開心，學到很多以前不曾接觸過的事物，付出很多時間，但讓我們滿載而歸，留下很深刻、美好的回憶。

在這個過程中，我們遇到許多困難，例如在研究四中，原本我們用來判定能否摺的條件，在這個研究中居然不合，於是我們花了好多心力想該怎麼解決這問題，我們也因這個研究學到好多數學知識，例如三角函數、高斯符號、反證法、全等三角形…等，在恍然大悟的那一刻，我們都覺得好神奇喔！

我們也學到團隊合作的重要性，透過不斷的溝通、分配工作、合作、解決問題，才有這美麗的成果出現，特別感謝陳慧娟老師從頭到尾一整年的指導與陪伴，讓我們突破難關，登上第一的高峰，小六這一年真是豐收的一年呀！

努力想、證明中。

全國科展在建中，我們來囉！

得全國第一耶！真開心！

摘　　要

我們延伸、拓展研究「方轉」摺紙，發現能摺出「N 轉」的條件為：1.$\angle\varphi+\angle\theta_i=180°$，2. $0<\theta_i<\alpha$，$\sum_{i=1}^{n} a_i sin\theta_i \leq 2A$，3.虛線要朝同一方向。我們也將實、虛線全平行的 n 個翼做線狀與網狀拼組，若 1.翼的實、虛線共用，2.連接的實線長度夠兩個正 n 邊形可壓平旋轉的空間，則能拼組「N 轉」，其樣貌取決於正 n 邊形的形狀、大小、θ_i角度、連接的實線長度，我們可以依此設計製作，呈現具有規律性的數學之美應用於生活中。

壹、研究動機

老師曾用摺紙方式做數學活動，其中「方轉」摺紙非常有趣，我們好奇為什麼它能轉動呢？在什麼條件下能成功摺出轉動的正 n 邊形呢？單一「方轉」能拼組成多個嗎?於是我們利用所學（南一版五上多邊形），想延伸、拓展「方轉」摺紙，創作出美麗的作品供生活應用。

貳、研究目的

單一「N 轉」的探討

一、n 個翼，實、虛線平行

研究一、探討摺紙技巧中「方轉」摺法的性質。

研究二、探討「方轉」摺法能否套用在其它正 n 邊形上。

研究三、探討正 n 邊形可摺出「N 轉」時，θ 的範圍。

二、n 個翼，實、虛線不全平行

研究四、探討正 n 邊形 n 個翼的實、虛線不全平行時，能摺出「N 轉」的條件。

多個「N 轉」的組合

研究五、探討正 n 邊形 n 個翼寬全相等，線狀拼組摺疊後，「N 轉」的樣貌。

研究六、探討正 n 邊形 n 個翼寬全相等，能否網狀拼組壓平摺疊。

參、研究設備及器材

筆、直尺、色紙、剪刀、影印紙、電腦、相機、列表機。

肆、研究方法

一、名詞解釋及符號定義

1.「**方轉**」：是一種摺紙技巧，在紙上畫一個正方形，將正方形的邊摺成山線，並在正方形的4 個頂點上，朝同一方向(順時針或逆時針)摺出山線與谷線，以旋轉正方形方式，將紙張壓平摺疊(如圖 1)。

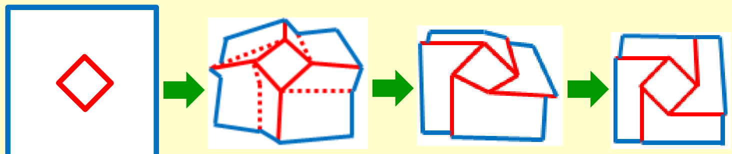


圖 1 方轉摺紙過程

2.「**N 轉**」：同「方轉」摺紙方式，只是將正方形改成正 n 邊形，如「三轉」就是在正三角形的3 個頂點上，朝同一方向以旋轉正三角形方式，將紙張壓平摺疊。「四轉」即「方轉」。

3.**正 n 邊形旋轉角度**：邊沿虛線摺疊後，正 n 邊形以其一頂點為旋轉中心所旋轉的角度(如圖 2)。

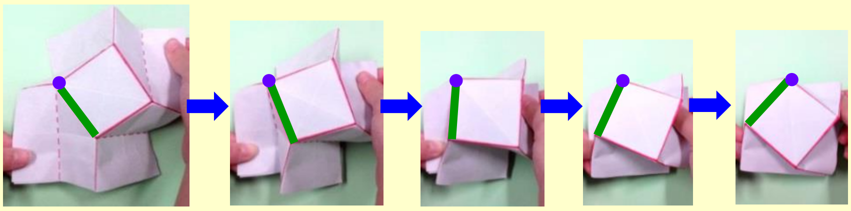


圖 2

4.**翼**：正 n 邊形每一邊外，皆有一組虛線與實線，形成一個翼，正 n 邊形有 n 個翼(如圖 3)。

5.**翼寬**：當 n 個翼的虛線與實線平行時，虛線與實線間的寬度稱為翼寬(如圖 4)，正三角形的翼寬即為紅線長度，當虛線與實線不平行時，則不探討翼寬。

6. $\boldsymbol{\theta_i}$(或θ)：正 n 邊形頂點上的虛線沿順時針方向與邊的夾角度數(如圖 5)。

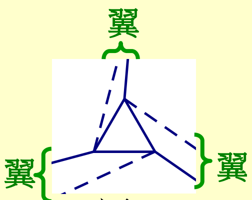


圖 3

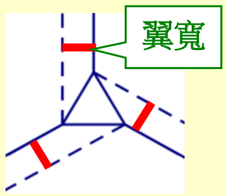


圖 4

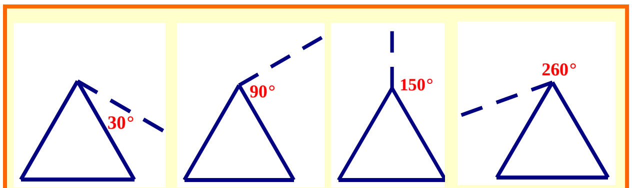


圖 5 正三角形的不同$\boldsymbol{\theta_i}$度數

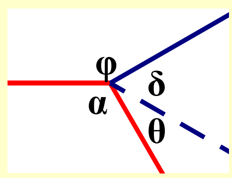
7. **α**：正 n 邊形一內角度數(如圖 6)。

8. $\boldsymbol{\varphi}$：正 n 邊形頂點上，實線與邊的夾角度數(如圖 6)。

9. $\boldsymbol{\delta}$：正 n 邊形頂點上，實線與虛線的夾角度數(如圖 6)。

10.**線狀拼組**：正 n 邊形 n 個翼中，只有兩個翼與其它正 n 邊形拼組。

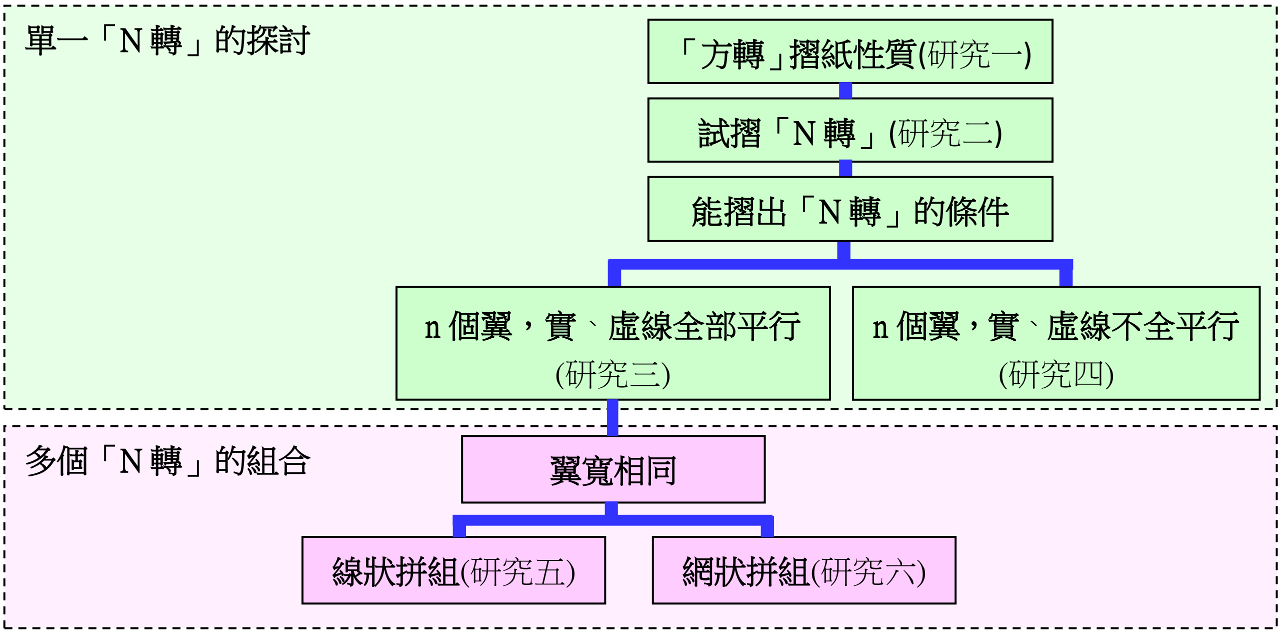
11.**網狀拼組**：正 n 邊形 n 個翼都要與其它正 n 邊形拼組。



紅線：正 n 邊形的邊

圖 6

二、研究架構圖



三、預備知識

前川定理：在單一點摺痕中，若紙張可沿摺痕壓平摺疊，則點上實、虛線數量相差為 2。

(參考資料〔4〕)

伍、研究過程與結果

研究一、探討摺紙技巧中「方轉」摺法的性質。

(一)製作過程

1.利用對摺方式，將色紙摺成 16 個大小相同的小方格(如圖 7)。

2.在摺痕線與交點上，用紅筆畫實線和虛線(如圖 8)，紅線部分則為摺痕展開圖。

3.實線為山線，虛線為谷線，按照摺痕摺好。

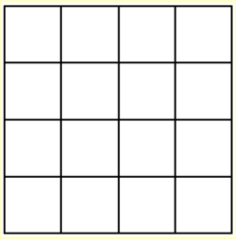


圖 7

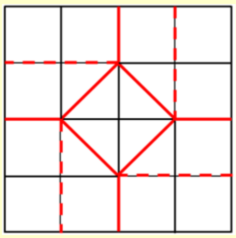


圖 8

(二)製作成果

正面

背面

(三)發現與歸納

1.觀察「摺痕展開圖」發現：

(1)有 4 個翼，翼的實、虛線全部平行，4 個翼的翼寬全相等，寬度為$\frac{1}{2}$對角線長。

(2)將 4 個頂點上的實線往正方形內部延伸，會交於正方形的中心點。

(3) $\theta = 45°$，4 個頂點上的虛線與實線夾角皆為 90°(如圖 9)。

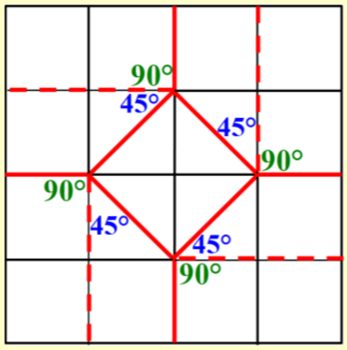


圖 9

2.在「摺疊過程」中發現：

主要靠虛線摺痕帶動正方形轉動，因 $\theta = 45°$，所以摺疊後，正方形會順時針旋轉 90°。

理由：如圖 10，假設以 F 點為正方形旋轉中心，$\overline{FG}$沿虛線摺疊後會與$\overline{FG'}$重疊，所以$\theta = \theta' = 45°$，$\angle GFG' = 90°$，$\overline{FG}$沿順時針方向旋轉$90°$至$\overline{FG'}$，故正方形會繞 F 點順時針旋轉$90°$。

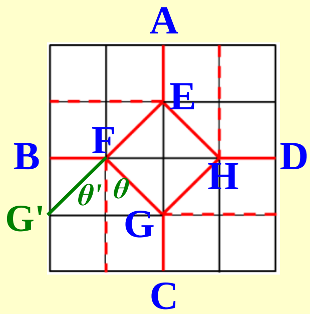
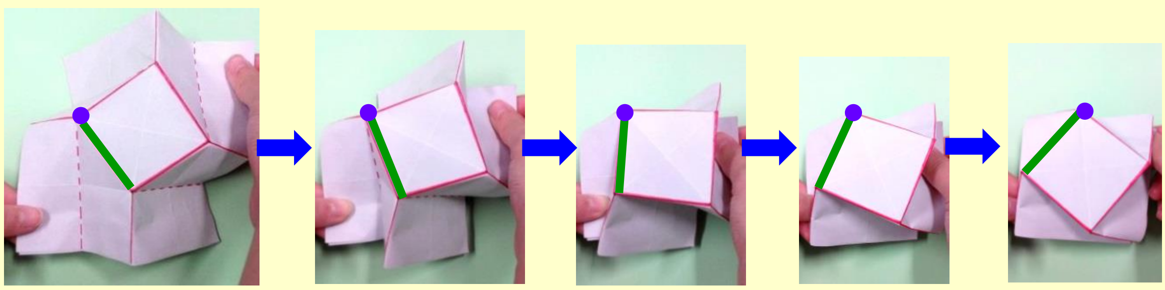


圖 10



3.觀察「摺疊後的樣子」發現：

(1)假設每一小方格面積為 $1cm^2$，原面積為 $16\ cm^2$，摺疊後面積為 $4cm^2$，縮小$\frac{1}{4}$(如圖 11)。

(2)摺疊後從正面看，呈現 2 個內接正方形(正方形 ABCD 與正方形 EFGH)。

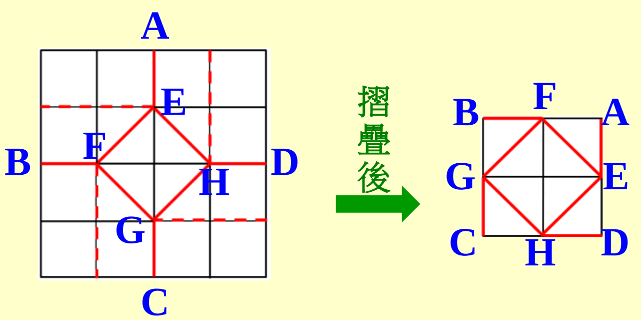


圖 11

(3)摺疊後從背面看，4 條虛線摺痕會交於中心點上。

理由：(如圖 12)

①假設以 F 點為正方形旋轉中心，

$\overline{FG}$沿虛線摺疊後會與$\overline{FG'}$重疊，

$\theta = \theta' = 45°$，

$\angle EFG = 90° = \angle GFG'$，

所以摺疊後虛線會與$\overline{FH}$重疊，

此為角平分線。

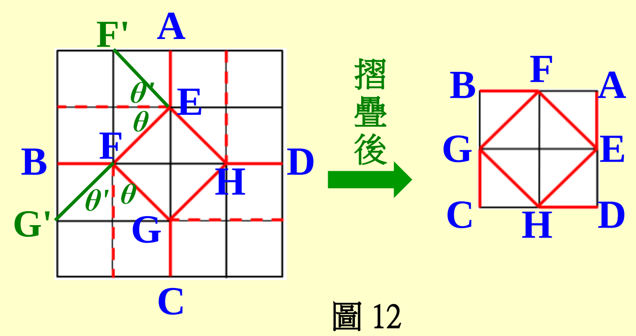


圖 12

②同理$\overline{EF}$沿虛線摺疊後會與$\overline{EF'}$重疊，$\angle HEF = 90° = \angle FEF'$，$\theta = \theta' = 45°$，所以摺疊後虛線會與$\overline{EG}$重疊，這也是角平分線。

③由①②知：兩條角平分線的交點，即為正方形的中心點。

研究二、探討「方轉」摺法能否套用在其它正 n 邊形上。

(一)猜想

由研究一發現的「方轉」摺法規則，推測正 n 邊形摺痕展開圖的畫法，整理成表一，想研究能否在摺疊過程中，形成「N 轉」。

表一：由「方轉」摺法推測「N 轉」摺痕展開圖的畫法

「方轉」摺法 發現的規則	「方轉」規則套用在正 n 邊形上
1.實線與虛線平行。	1.實線與虛線平行。
2.實線、虛線都畫在正方形頂點上。	2.實線、虛線都畫在正 n 邊形頂點上。
3.虛線與邊的夾角均為 $\theta = 45°$。	3.虛線與邊的夾角均為 $\boldsymbol{\theta = \frac{\alpha}{2}}$。
4.實線往正方形內部延伸，會交於正方形的中心點。	4.實線往正 n 邊形內部延伸，會交於正 n 邊形的中心點。

(二)製作過程

1.用 GSP 畫一正三角形，將 3 個邊畫成實線。

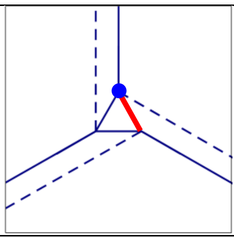
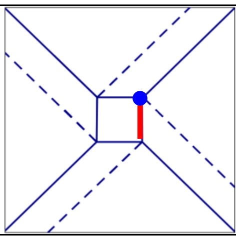
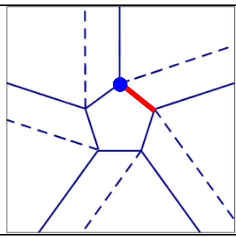
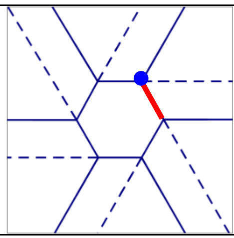
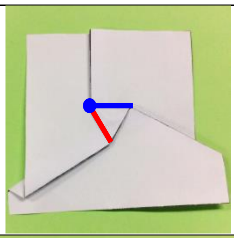
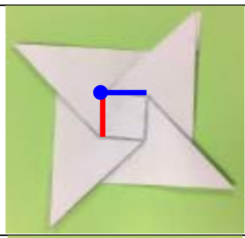
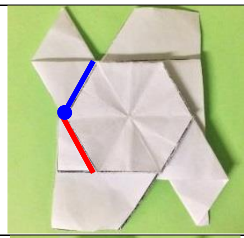
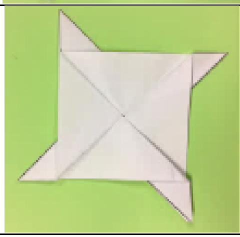
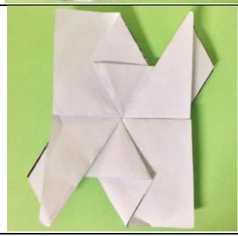
2.在每個頂點按同一旋轉方向畫虛線，設定$\theta = 30°$。

3.在每個頂點上畫與虛線平行的實線。

4.實線為山線，虛線為谷線，按照摺痕摺疊。

5.重複步驟 1.~4.，用 GSP 畫正方形、正五邊形、正六邊形的摺痕展開圖，設定$\theta = \frac{\alpha}{2}$。

(三)製作成果

正 n 邊形		正三角形	正方形	正五邊形	正六邊形
摺痕展開圖					
θ		30°	45°	54°	60°
摺疊後照片(藍線為摺痕展開圖中紅線摺疊後的新位置)	正面				
	背面				
正 n 邊形旋轉角度		逆時針轉 60°	逆時針轉 90°	逆時針轉 108°	逆時針轉 120°

(四)發現與歸納

1.將「方轉」摺法的規則套用在正 n 邊形上，能摺成「N 轉」，**旋轉角度為 2θ**。

理由：以 n＝4 為例，說明同研究一（三）2.，同理當 n≥3 時情況相同。

2.摺疊後從背面看，**n 條虛線摺痕都交在正 n 邊形的中心點上**。

理由：以 n＝4 為例，說明同研究一（三）3.(3)，同理當 n≥3 時情況相同。

研究三、探討正 n 邊形可摺出「N 轉」時，θ 的範圍。

(一)製作過程

1.用 GSP 畫一正三角形，將 3 個邊畫成實線，共有 3 組頂點與鄰邊。

2.在每一組的頂點上畫 $\theta=0°$。

3.在每個頂點上，畫與虛線平行的實線。

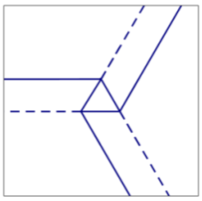
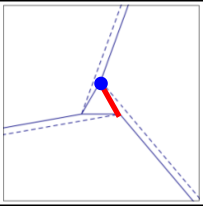
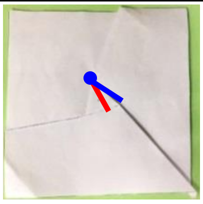
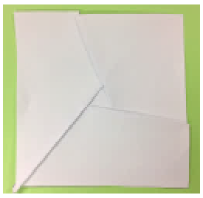
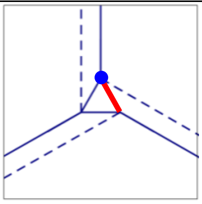
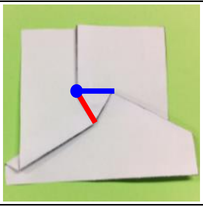
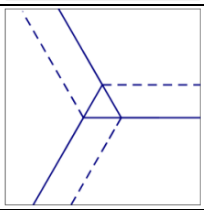
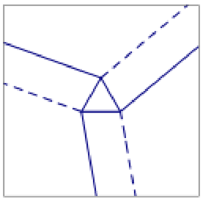
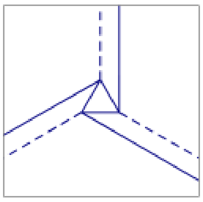
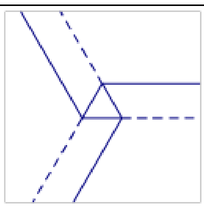
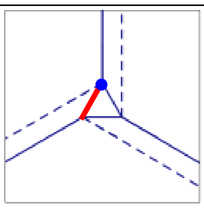
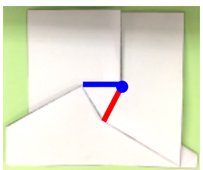
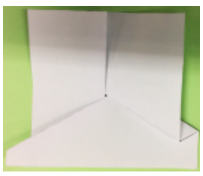
4.重覆步驟 1.~3.，將 2. θ分別改為 10°、30°、60°、100°、150°、180°、270°。

5.實線為山線，虛線為谷線，按照摺痕摺好。

6.重複步驟 1.~5.，畫正方形、正五邊形、正六邊形θ角度不同的摺痕展開圖，並沿摺痕摺疊。

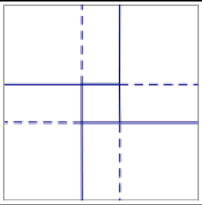
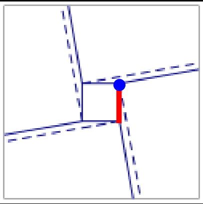
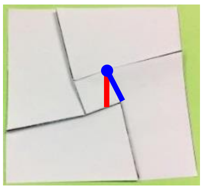
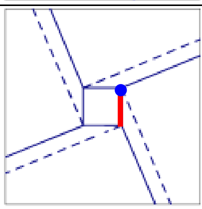
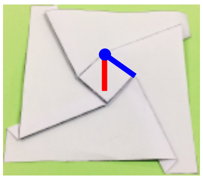
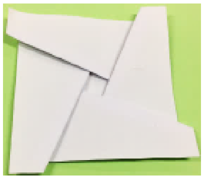
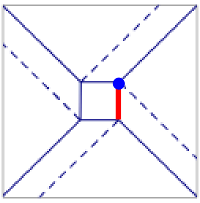
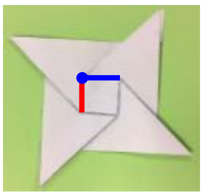
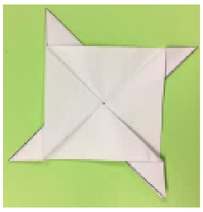
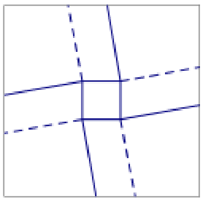
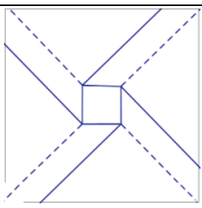
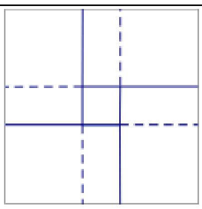
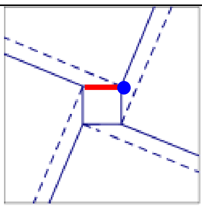
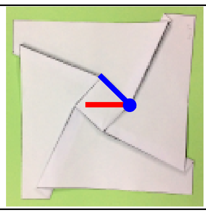
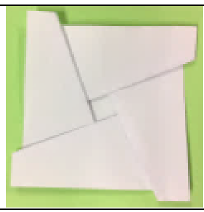
(二)製作成果

1.正三角形

編號	摺痕展開圖	θ	摺疊後照片		正三角形旋轉角度
			正面	背面	
三-3-1		0°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-3-2		10°			**逆時針轉 20°**
三-3-3		30°			**逆時針轉 60°**
三-3-4		60°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-3-5		100°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-3-6		150°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-3-7		180°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-3-8		270°			**順時針轉 60°**

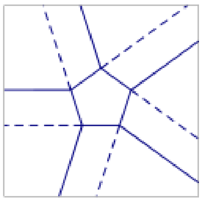
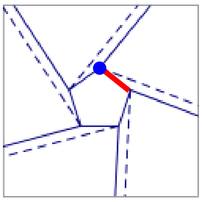
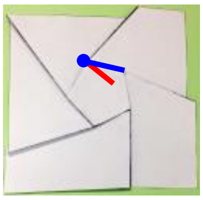
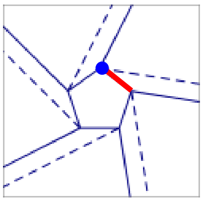
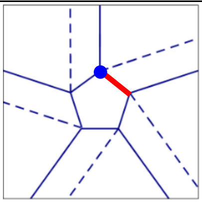
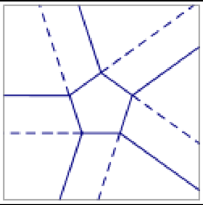
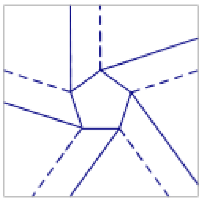
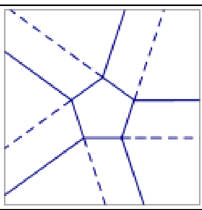
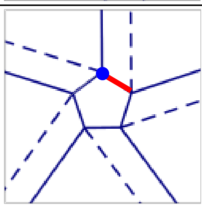
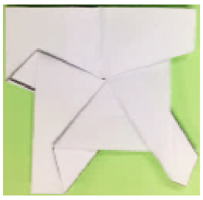
註：摺疊後照片中的藍線，為摺痕展開圖中紅線摺疊後的新位置。

2.正方形

編號	摺痕展開圖	θ	摺疊後照片		正方形旋轉角度
			正面	背面	
三-4-1		0°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-4-2		10°			**逆時針轉 20°**
三-4-3		22.5°			**逆時針轉 45°**
三-4-4		45°			**逆時針轉 90°**
三-4-5		100°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-4-6		135°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-4-7		180°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-4-8		247.5°			**順時針轉 45°**

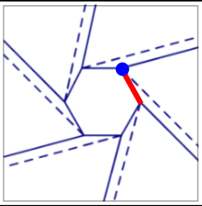
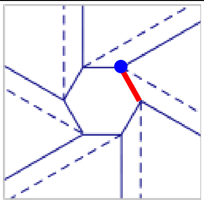
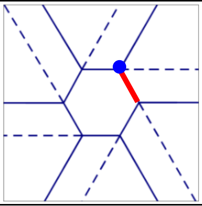
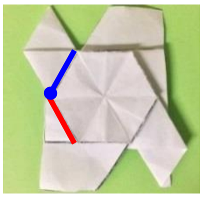
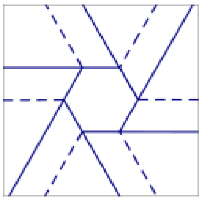
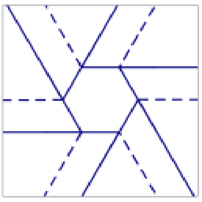
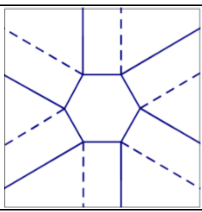
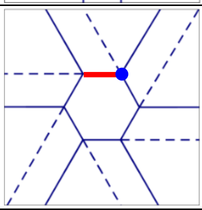
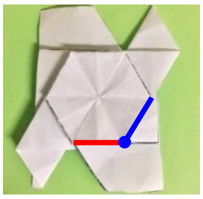
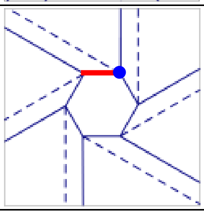
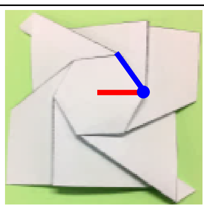
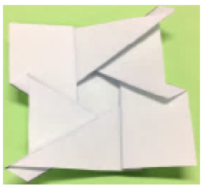
註：摺疊後照片中的藍線，為摺痕展開圖中紅線摺疊後的新位置。

3.正五邊形

編號	摺痕展開圖	θ	摺疊後照片		正五邊形旋轉角度
			正面	背面	
三-5-1		0°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-5-2		15°			**逆時針轉 30°**
三-5-3		27°			**逆時針轉 54°**
三-5-4		54°			**逆時針轉 108°**
三-5-5		72°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-5-6		126°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-5-7		180°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-5-8		198°			**順時針轉 108°**

註：摺疊後照片中的藍線，為摺痕展開圖中紅線摺疊後的新位置。

4.正六邊形

編號	摺痕展開圖	θ	摺疊後照片		正六邊形旋轉角度
			正面	背面	
三-6-1		15°			**逆時針轉 30°**
三-6-2		30°			**逆時針轉 60°**
三-6-3		60°			**逆時針轉 120°**
三-6-4		120°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-6-5		120°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-6-6		150°	×	×	無法沿摺痕壓平摺疊
三-6-7		180°			**順時針轉 120°**
三-6-8		210°			**順時針轉 60°**

註：摺疊後照片中的藍線，為摺痕展開圖中紅線摺疊後的新位置。

(三)發現與歸納

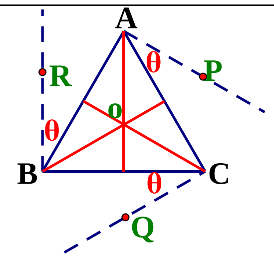
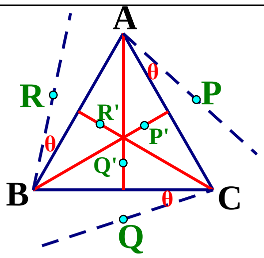
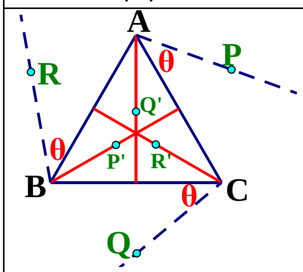
1.下表是能摺出「N 轉」θ 範圍與摺疊後正 n 邊形旋轉角度範圍，

正 n 邊形	α	可摺出「N 轉」θ 範圍	摺疊後 正 n 邊形旋轉角度(β)
正三角形	60°	$0° < \theta \le 30°$	逆時針轉 $0° < \beta \le 60°$
		$270° \le \theta < 300°$	順時針轉 $0° < \beta \le 60°$
正方形	90°	$0° < \theta \le 45°$	逆時針轉 $0° < \beta \le 90°$
		$225° \le \theta < 270°$	順時針轉 $0° < \beta \le 90°$
正五邊形	108°	$0° < \theta \le 54°$	逆時針轉 $0° < \beta \le 108°$
		$198° \le \theta < 252°$	順時針轉 $0° < \beta \le 108°$
正六邊形	120°	$0° < \theta \le 60°$	逆時針轉 $0° < \beta \le 120°$
		$180° \le \theta < 240°$	順時針轉 $0° < \beta \le 120°$
正 n 邊形	$\alpha = \frac{(n-2)\times 180°}{n}$	$0° < \theta \le \frac{\alpha}{2}$	**逆時針轉** $0° < \beta \le \alpha$
		$360° - \frac{3\alpha}{2} \le \theta < 360° - \alpha$	**順時針轉** $0° < \beta \le \alpha$

我們**發現**：

(1)當 $0° < \theta \le \frac{\alpha}{2}$ 或 $360° - \frac{3\alpha}{2} \le \theta < 360° - \alpha$ 時，能摺出「N 轉」。

理由：(觀察摺疊後背面，以 n＝3 且 $0° < \theta \le \frac{\alpha}{2}$ 做說明，同理，當 $360° - \frac{3\alpha}{2} \le \theta < 360° - \alpha$，n＞3 時情況相同)

 圖 13	若 $\theta = \frac{\alpha}{2}$ 時(如圖 13)，虛線上必找得到一點 P， 使得 P 點沿 $\overline{AC}$ 摺疊後，與中心點 O 重疊， 同理 Q、R 點分別沿 $\overline{CB}$、$\overline{BA}$ 摺疊後，也會與中心點 O 重疊， 故正三角形內部被摺疊後三個翼占滿， 三個翼會交錯摺疊摺痕交於中心點上。
 圖 14	若 $0° < \theta < \frac{\alpha}{2}$ 時(如圖 14)，虛線上必找得到一點 P， 使得 P 點沿 $\overline{AC}$ 摺疊後，與角平分線上的 P' 點重疊， 同理 Q、R 點分別沿 $\overline{CB}$、$\overline{BA}$ 摺疊後， 也會與角平分線上的 Q'、R' 重疊， 故正三角形內部有足夠的空間供三個翼壓平摺疊。
 圖 15	但若 $\frac{\alpha}{2} < \theta < \alpha$ 時(如圖 15)，虛線上必找得到一點 P， 使得 P 點沿 $\overline{AC}$ 摺疊後，與角平分線上的 P' 重疊， 同理 Q、R 點分別沿 $\overline{CB}$、$\overline{BA}$ 摺疊後， 也會與角平分線上的 Q'、R' 重疊， 三個翼會卡在一起，無法壓平摺疊。

(2)摺疊後，正 n 邊形的旋轉角度為 2θ ，最大旋轉角度為 **α**。〈理由同研究一（三）2.〉

(3)摺疊後，正 n 邊形的旋轉方向為

①當 $0° < \theta \le \frac{\alpha}{2}$ 時，正 n 邊形會逆時針旋轉。

②當 $360° - \frac{3\alpha}{2} \le \theta < 360° - \alpha$ 時，正 n 邊形會順時針旋轉。

2.觀察能摺出「N 轉」的背面，**發現：**

(1)當 $\theta = \frac{\alpha}{2}$ (或 $360° - \frac{3\alpha}{2}$)時，摺疊後背面摺痕會交於一點。

(2)當 $0° < \theta < \frac{\alpha}{2}$(或 $360° - \alpha$)時，摺疊後背面會有正 n 邊形的洞，θ 愈小，洞愈大。

理由：（以 n＝4 做說明，同理當 n＞4 時情況相同）

如圖 16，因 ABCD 為正方形，
所以∠3 = ∠4 = ∠5 = ∠6 = 90°－ θ ，
因∠7＝∠θ ＋∠3＝90° 、 ∠8＝∠θ ＋∠4＝90° 、
∠9＝∠θ ＋∠5＝90° 、 ∠10＝∠θ ＋∠6＝90° ，
所以∠7 = ∠8 = ∠9 = ∠10 = 90°……①
因$\Delta ABE \cong \Delta BCF \cong \Delta CDG \cong \Delta DAH$ (ASA)，
所以$\overline{BE} = \overline{CF} = \overline{DG} = \overline{AH}$ 、 $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH}$，
$\overline{EF} = \overline{BE} - \overline{BF}$ 、 $\overline{FG} = \overline{CF} - \overline{CG}$ 、
$\overline{GH} = \overline{DG} - \overline{DH}$、 $\overline{HE} = \overline{AH} - \overline{AE}$
$\rightarrow \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE}$……②
由①②知 EFGH 為正方形，
若θ 愈小，對邊$\overline{CG}$、$\overline{BF}$、$\overline{AE}$、$\overline{DH}$也會愈短，
則$\overline{FG}$、$\overline{EF}$、$\overline{HE}$、$\overline{GH}$會愈長，所以正方形的洞會愈大。

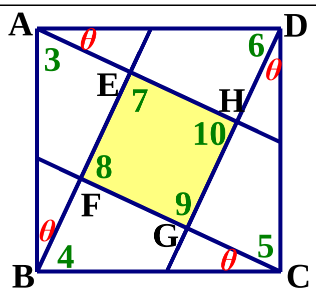


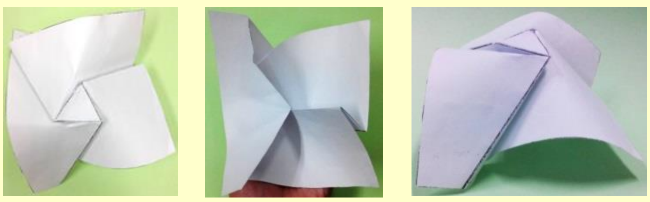
圖 16

(3)正 n 邊形洞是以中心點為旋轉中心，旋轉角度為 θ。

3.不能摺出「N 轉」有兩種情形：

(1)翼寬太寬，背面摺痕雖然會交於一點，但紙張會凸起，無法壓平摺疊(如圖 17)。

(2)每個頂點∠$\varphi \neq$∠δ＋∠α－∠θ (如圖 18)，∠φ沒有足夠的空間讓∠α沿虛線壓平摺疊。


正面　背面　側面
圖 17

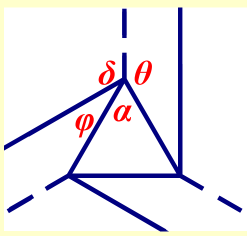


圖 18

註： 當 $0° < \theta \le \frac{\alpha}{2}$ 或 $360° - \frac{3\alpha}{2} \le \theta < 360° - \alpha$ 時，能摺出「N 轉」。之後為方便描述，皆以 $0° < \theta \le \frac{\alpha}{2}$ 做說明，同理當 $360° - \frac{3\alpha}{2} \le \theta < 360° - \alpha$ 時，情況相同。

研究四、探討正 n 邊形 n 個翼的實、虛線不全平行時，能摺出「N 轉」的條件。

(一)想法與發現

由研究三我們發現：在正 n 邊形中，n 個 θ 均滿足 $0° < \theta \le \frac{\alpha}{2}$，則能摺出「N 轉」，其中 $\theta < \frac{\alpha}{2}$ 時，背面會有正 n 邊形洞，這讓我們感覺似乎可以把翼不完全等寬的加粗，加粗到讓摺痕交於正 n 邊形內部一點，而讓翼加粗就是增大 θ 角度，所以我們發現當 n 個翼的實、虛線不全平行時，不完全相等的 $\boldsymbol{\theta_i}$，$\boldsymbol{i = 1, \ldots, n}$，其部分 $\boldsymbol{\theta_i > \frac{\alpha}{2}}$，也能摺出「N 轉」，例如圖 19。

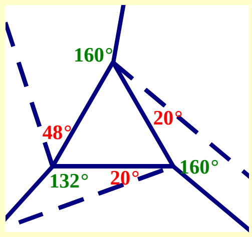


圖 19

(二)猜想

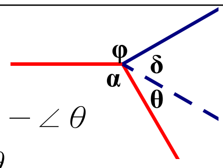
每個頂點都要符合 $\angle\varphi = \angle\alpha + \angle\delta - \angle\theta$（如下說明，得知 $\angle\varphi + \angle\theta = 180°$），才能壓平摺疊；當實、虛線全平行時，$\theta_i = \theta \le \frac{\alpha}{2}$，$i = 1, \ldots, n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \theta_i \le \frac{n\alpha}{2}$；虛線要朝同一方向（順或逆時針方向），才能摺出「N 轉」，所以我們**猜想** n 個翼的實、虛線不全平行時，

能摺出「N 轉」的條件是：

1. $\boldsymbol{\angle\varphi + \angle\theta_i = 180°}$，$\boldsymbol{i = 1, \ldots, n}$。
2. $\boldsymbol{0 < \theta_i < \alpha}$，$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} \theta_i \le \frac{n\alpha}{2}}$ (容許存在 $\boldsymbol{\theta_i > \frac{\alpha}{2}}$)。
3. **虛線朝同一方向。**

說明：

紅線是正 n 邊形的邊



$\angle\delta = 360° - \angle\varphi - \angle\alpha - \angle\theta$

$\angle\varphi = \angle\alpha + \angle\delta - \angle\theta$

$= \angle\alpha + (360° - \angle\varphi - \angle\alpha - \angle\theta) - \angle\theta$

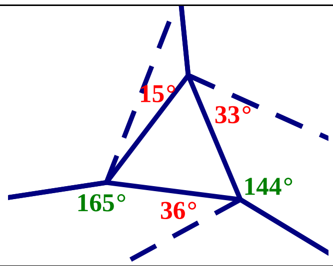
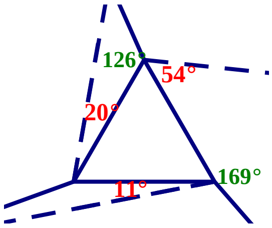
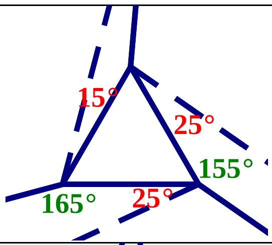
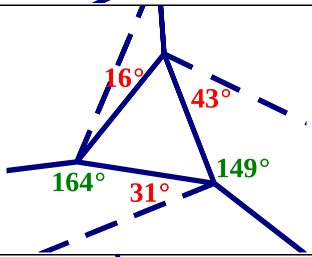
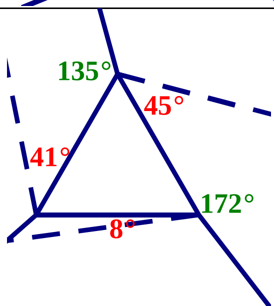
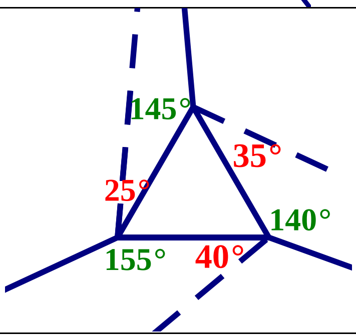
$\rightarrow \angle\varphi + \angle\theta = 180°$

(三)製作過程

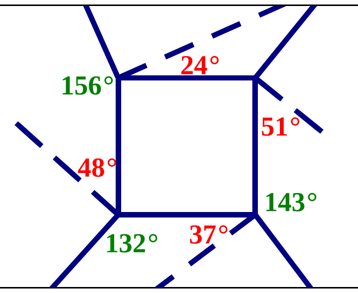
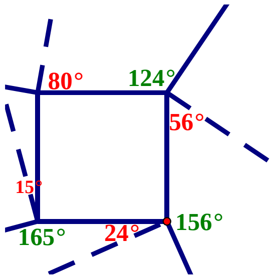
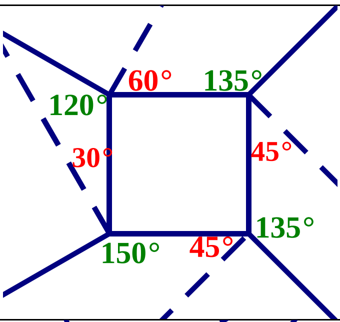
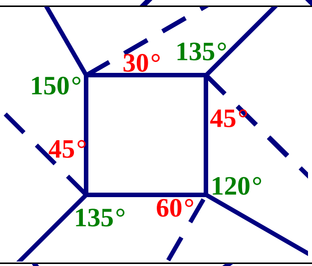
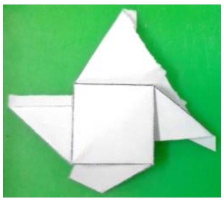
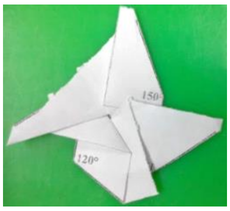
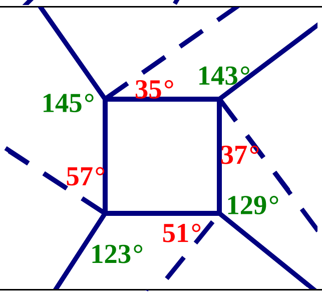
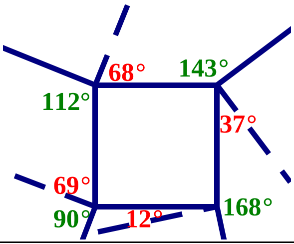
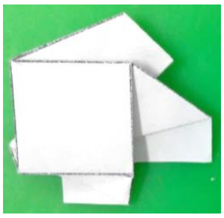
同研究三的製作過程，設定 $\angle\varphi + \angle\theta_i = 180°$，$0 < \theta_i < \alpha$，$\sum_{i=1}^{n} \theta_i < \frac{n\alpha}{2}$、$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = \frac{n\alpha}{2}$、或 $\sum_{i=1}^{n} \theta_i > \frac{n\alpha}{2}$，虛線要朝同一方向，虛線與實線不全平行，繪製正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形的摺痕展開圖，並沿摺痕摺疊。

(四)製作成果

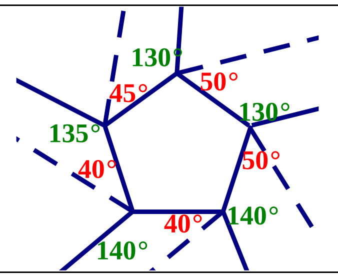
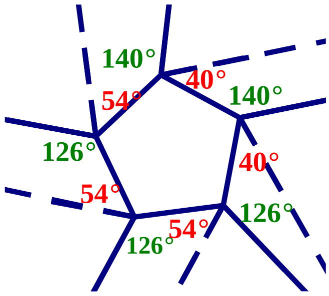
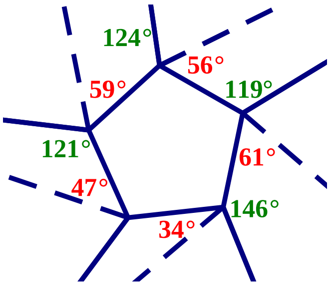
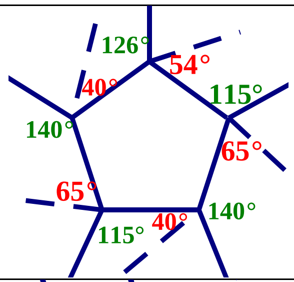
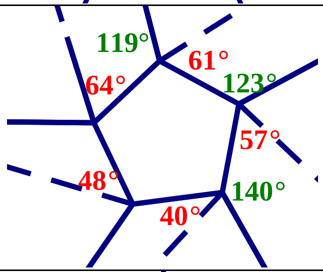
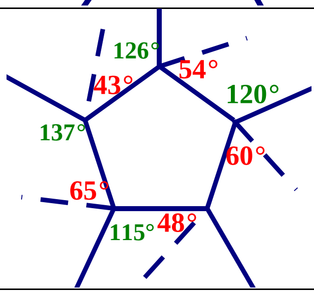
1.正三角形

<table>
<tr><th rowspan="2">編號</th><th rowspan="2">摺痕展開圖</th><th rowspan="2">$\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ 與 $\frac{n\alpha}{2}$ 關係</th><th colspan="2">摺疊後照片</th></tr>
<tr><th>正面</th><th>背面</th></tr>
<tr><td>四-3-1</td><td>
</td><td>$\sum_{i=1}^{3}\theta_i < 90°$</td><td></td><td>
有洞</td></tr>
<tr><td>四-3-2</td><td>
</td><td>$\sum_{i=1}^{3}\theta_i < 90°$</td><td></td><td>
交於一點</td></tr>
<tr><td>四-3-3</td><td>
</td><td>$\sum_{i=1}^{3}\theta_i < 90°$</td><td></td><td>
有洞</td></tr>
<tr><td>四-3-4</td><td>
</td><td>$\sum_{i=1}^{3}\theta_i = 90°$</td><td></td><td>
交於一點</td></tr>
<tr><td>四-3-5</td><td>
</td><td>$\sum_{i=1}^{3}\theta_i > 90°$</td><td></td><td>
交於一點</td></tr>
<tr><td>四-3-6</td><td>
</td><td>$\sum_{i=1}^{3}\theta_i > 90°$</td><td>無法沿摺痕
壓平摺疊</td><td>無法沿摺痕
壓平摺疊</td></tr>
</table>

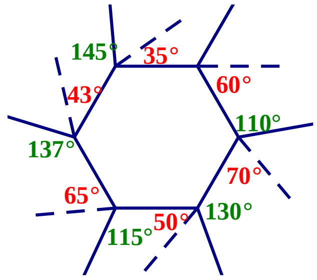
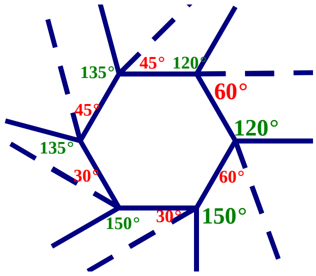
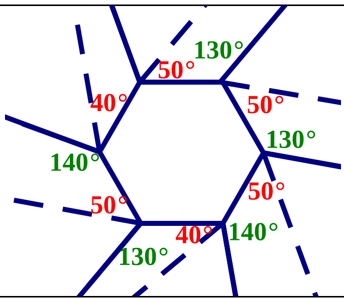
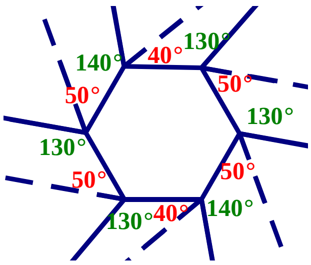
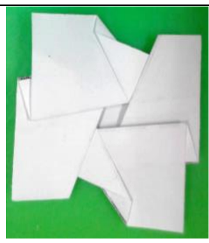
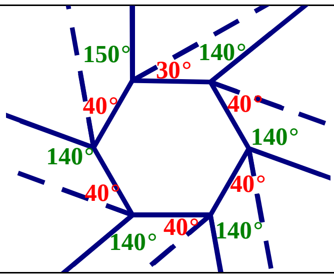
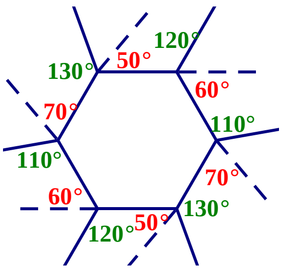
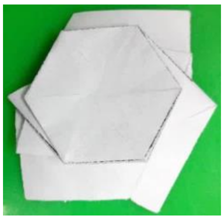
2.正方形

編號	摺痕展開圖	$\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ 與 $\frac{n\alpha}{2}$ 關係	摺疊後照片	
			正面	背面
四-4-1		$\sum_{i=1}^{4}\theta_i < 180°$		 有洞
四-4-2		$\sum_{i=1}^{4}\theta_i < 180°$		 交於一點
四-4-3		$\sum_{i=1}^{4}\theta_i = 180°$	無法沿摺痕壓平摺疊	無法沿摺痕壓平摺疊
四-4-4		$\sum_{i=1}^{4}\theta_i = 180°$		 交於一點
四-4-5		$\sum_{i=1}^{4}\theta_i = 180°$		 交於一點
四-4-6		$\sum_{i=1}^{4}\theta_i > 180°$		 交於一點

3.正五邊形

編號	摺痕展開圖	$\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ 與 $\frac{n\alpha}{2}$ 關係	摺疊後照片	
			正面	背面
四-5-1		$\sum_{i=1}^{5}\theta_i < 270°$		 有洞
四-5-2		$\sum_{i=1}^{5}\theta_i < 270°$		 有洞
四-5-3		$\sum_{i=1}^{5}\theta_i < 270°$		 無交於一點 也沒洞
四-5-4		$\sum_{i=1}^{5}\theta_i < 270°$	無法沿摺痕 壓平摺疊	無法沿摺痕 壓平摺疊
四-5-5		$\sum_{i=1}^{5}\theta_i = 270°$		 交於一點
四-5-6		$\sum_{i=1}^{5}\theta_i = 270°$	無法沿摺痕 壓平摺疊	無法沿摺痕 壓平摺疊

4.正六邊形

編號	摺痕展開圖	$\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ 與 $\frac{n\alpha}{2}$ 關係	摺疊後照片	
			正面	背面
四-6-1		$\sum_{i=1}^{6}\theta_i < 360°$		 無交於一點 也沒洞
四-6-2		$\sum_{i=1}^{6}\theta_i < 360°$		 有洞
四-6-3		$\sum_{i=1}^{6}\theta_i < 360°$		 有洞
四-6-4		$\sum_{i=1}^{6}\theta_i < 360°$		 有洞
四-6-5		$\sum_{i=1}^{6}\theta_i < 360°$		 有洞
四-6-6		$\sum_{i=1}^{6}\theta_i = 360°$		 交於一點

(五)察覺　由製作成果發現

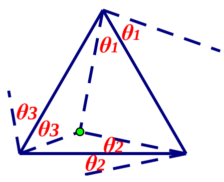
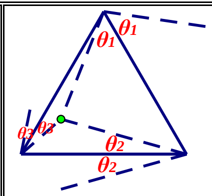
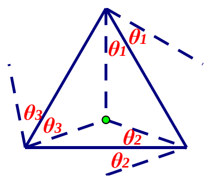
1.當$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\theta_i} > \frac{\boldsymbol{n\alpha}}{\mathbf{2}}$時，有時能摺出「N 轉」(如編號四-3-5)，有時不能(如編號四-3-6)。

2.當 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\theta_i} < \frac{\boldsymbol{n\alpha}}{\mathbf{2}}$時，有時背面有洞(如編號四-3-1)，有時會交於一點(如編號四-3-2)。

3.能摺出「N 轉」的背面之共通點：不論$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\theta_i}$是多少，當摺痕交於正 n 邊形內部一點時，是最粗的翼，再粗就無法壓平摺疊。

(六)分析

我們想找出 n 個翼的實、虛線不全平行時，能摺出「N 轉」的條件，因此我們嘗試用 GSP 繪圖，想找出摺痕共交一點時$\sum_{i=1}^{n}\theta_i$的特性，結果發現**當摺痕的交點交於正 n 邊形的對稱軸上時，$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\theta_i} = \frac{\boldsymbol{n\alpha}}{\mathbf{2}}$；當摺痕的交點交於非對稱軸上時，$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\theta_i}$並非為定值**(如下表，以 n=3 為例)，所以用$\sum_{i=1}^{n}\theta_i$分析能否「N 轉」有困難。

 $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ $=40.64°+11.71°+39.94°$ $=\mathbf{92.30}$	 $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ $=51.59°+15.66°+18.62°$ $=\mathbf{85.87}$	 $\theta_1+\theta_2+\theta_3$ $=30.00°+19.03°+40.97°$ $=\mathbf{90.00}$

(七)進一步發展

由於 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ 不為定值，但因正 n 邊形內部任一點與頂點相連，可將正 n 邊形切割成 n 個三角形，正 n 邊形面積與 n 個三角形面積總和相等，即**摺痕交點到正 n 邊形的各邊距離和為定值**，所以

設：正 n 邊形邊長為 1，面積為 A，$\mathbf{0} < \boldsymbol{\theta_i} < \boldsymbol{\alpha}$，

任意兩翼摺進正 n 邊形內部，會交於一點 $\boldsymbol{O}$，

$\boldsymbol{O}$分別對 n 邊做垂線，延伸垂線交虛線於$\mathbf{H}_{\boldsymbol{i}}$，

頂點到$\mathbf{H}_{\boldsymbol{i}}$的長度為$\boldsymbol{a_i}$，$\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{n}$，

(如圖 20，以 n=3 做說明，同理當 n>3 時情況相同)

說明：
AD 翼與 BE 翼摺進正 n 邊形內部，會交於一點 O，
O 分別對三邊做垂線，
延伸垂線交虛線於H_1、H_2、H_3，
令$\overline{\mathbf{AH_1}} = \boldsymbol{a_1}$，$\overline{\mathbf{BH_2}} = \boldsymbol{a_2}$，$\overline{\mathbf{CH_3}} = \boldsymbol{a_3}$。

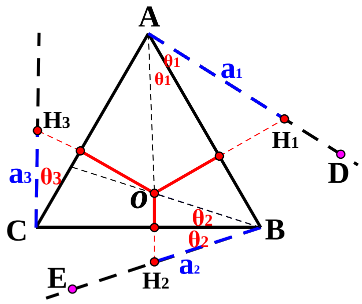


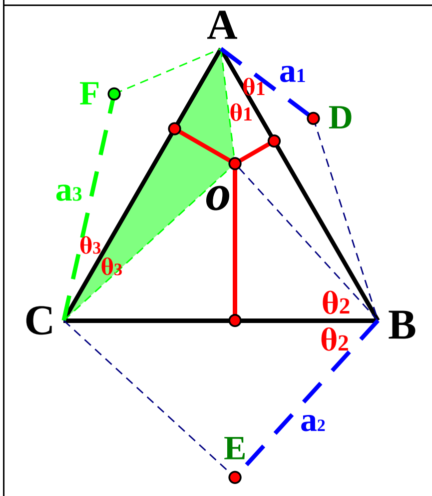
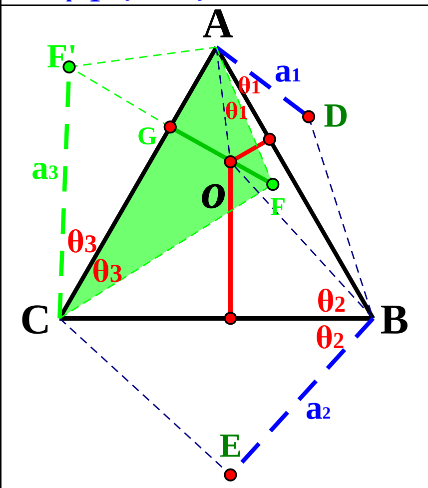
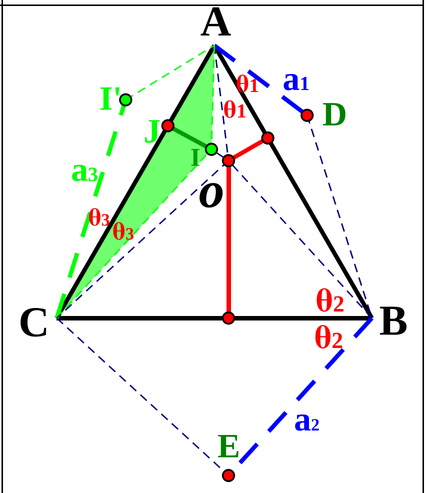
圖 20

因此內部一點到各邊的距離為 $\boldsymbol{a_i sin\theta_i}$，則 $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a_i sin\theta_i}$，

即 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a_i sin\theta_i} = \mathbf{2A}$，此為一定值。

(八)進一步分析

我們將摺疊後的情形分成三類(無法壓平摺疊、背面摺痕交於一點、其它)，**n 個翼中，若選其中兩翼，摺疊後摺痕交於一點 O，其它的翼如果摺痕也共交於 O(即$\sum_{i=1}^{n} a_i sin\theta_i = 2A$)，或摺疊後翼沒有覆蓋住 O(即 $\sum_{i=1}^{n} a_i sin\theta_i < 2A$)，則此摺痕展開圖能壓平摺疊形成「N 轉」**(說明如下)。

說明：（以 n＝3 為例，將摺疊後的情形分三類做說明，同理當 n＞3 時情況相同。）		
1.背面摺痕交於一點 (如圖 21) 若 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 摺疊後交於O， O以 $\overline{AC}$ 為對稱軸，對稱點為 F， 連接 $\overline{CF}$ ，其與邊的夾角為 θ_3， 若ΔABC邊長為 1，面積為 A， 則$\sum_{i=1}^{3} a_i sin\theta_i = 2A$。	2.無法壓平摺疊 (如圖 22) 若 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 摺疊後交於O， $\overline{FG}$ 為過O與 $\overline{AC}$ 垂直的線段， F以 $\overline{AC}$ 為對稱軸，對稱點為 F′， 連接 $\overline{CF'}$ ，其與邊的夾角為 θ_3， ΔAFC 會把O覆蓋住， 若ΔABC邊長為 1，面積為 A， 則$\sum_{i=1}^{3} a_i sin\theta_i > 2A$。	3.其它 (如圖 23) 若 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$ 摺疊後交於O， $\overline{OJ}$ 垂直 $\overline{AC}$，I 在 $\overline{OJ}$ 上， I 以 $\overline{AC}$ 為對稱軸，對稱點為 I′， 連接 $\overline{CI'}$ ，其與邊的夾角為 θ_3， 若ΔABC邊長為 1，面積為 A， 則$\sum_{i=1}^{3} a_i sin\theta_i < 2A$。
 圖 21	 圖 22	 圖 23

(九)發現與歸納

在「**$\angle\varphi + \angle\theta_i = 180°$，$0 < \theta_i < \alpha$，虛線朝同一方向，且 n 個翼實、虛線不全平行**」的條件下

1.**當 $\sum_{i=1}^{n} a_i sin\theta_i \leq 2A$ 時，才能摺出「N 轉」**。

理由：如圖 20~22 的分析方式與同研究一（三）2.。

2.**若以 θ_i 的頂點為旋轉中心時，則正 n 邊形旋轉角度為 $2\theta_i$**。

3.對於實、虛線形成的 n 個翼中，若要能摺出「N 轉」，其中

(1)**兩個實、虛線平行的翼，若翼寬不相等，則之間必有實、虛線不平行的翼。**

理由：(利用反證法來說明，如圖 24)

假設兩個翼寬不相等的翼之間沒有實、虛線不平行的翼，

因$\angle 1+\angle\theta=180°$、$\angle 2=180°-\angle\theta$、$\angle 2+\angle 3=180°$

所以$\angle 3=\angle\theta$；

因$\angle 3=\angle\theta$、$\angle CEB=\angle BDA=90°$、正 n 邊形的邊等長，

所以$\overline{AC}=\overline{BD}$（AAS），即翼寬相等（與已知矛盾）。

故兩個實、虛線平行的翼，若翼寬不相等，

則之間必有實、虛線不平行的翼。

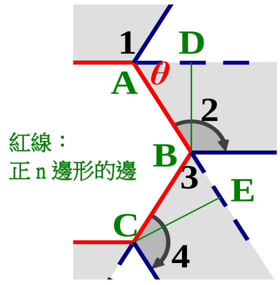


圖 24

(2)**兩個實、虛線平行的翼，若翼寬相等，則兩翼之間不可能只有一個實、虛線不平行的翼。**

理由：(利用反證法來說明，如圖 25)

假設第 1 個翼與第 3 個翼實、虛線皆平行且翼寬相等，

第 2 個翼實、虛線不平行，

因$\angle 1+\angle 2=180°$，$\angle 2+\angle 3=180°\rightarrow\angle 1=\angle 3$

$\angle 5+\angle 6=180°$，$\angle 4+\angle 5=180°\rightarrow\angle 4=\angle 6$

翼寬相等$\rightarrow\angle 1=\angle 5$，$\angle 2=\angle 6$

所以$\angle 3+\angle 4=\angle 1+\angle 6=\angle 1+\angle 2=180°$，

故第 2 個翼實、虛線平行（與假設矛盾），

即兩個實、虛線平行的翼，若翼寬相等，

則兩翼之間不可能只有一個實、虛線不平行的翼。

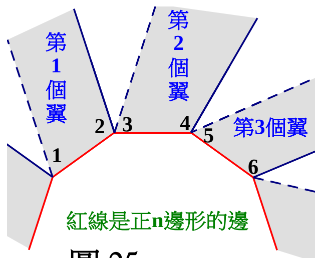


圖 25

(3)**若實、虛線為平行的翼，則最多有$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$種不相等的翼寬。**

理由：由(1)知兩個實、虛線平行的翼，若翼寬不相等，則之間必存在一個實、虛線不平行的翼，所以最多有$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$種不相等的翼寬。

(4)**若實、虛線為不平行的翼，則其個數不只一個。**

理由：(利用反證法來說明，如圖 26)

假設不平行的翼只有一個

a.當第 1~第 n-1 個翼的翼寬全相等時

第 n 個翼的實、虛線不平行，

因第 n 個翼頂點上的實、虛線皆可壓平摺疊，

所以$\angle 5+(180°-\angle\theta)=180°\rightarrow\angle 5=\angle\theta\cdots$①

$\angle 6+\angle\theta=180°\rightarrow\angle 6=180°-\angle\theta\cdots$②

由①②知第 n 個翼實、虛線也會平行(與假設矛盾)。

b.當第 1~第 n-1 個翼的翼寬不全相等時

由 3.(1)知必有不平行的翼。

因此實、虛線為不平行的翼，其個數不只一個。

故由 a.b.知實、虛線為不平行的翼，其個數不只一個。

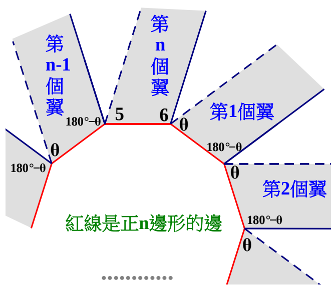


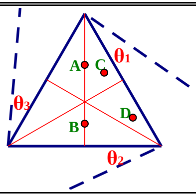
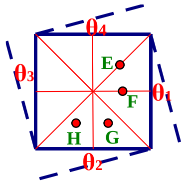
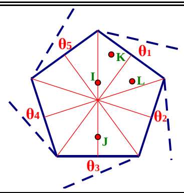
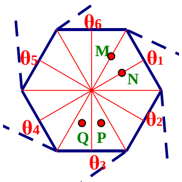
圖 26

4.能摺出「N轉」，$\frac{\alpha}{2} < \theta_i < \alpha$ (或 $360° - 2\alpha < \theta_i < 360° - \frac{3\alpha}{2}$)的數量與 θ_i 的位置有其限制。

說明：(以 $\frac{\alpha}{2} < \theta_i < \alpha$ 來說明，同理當$360° - 2\alpha < \theta_i < 360° - \frac{3\alpha}{2}$ 情況相同。)

n 個翼中，若選其中兩翼，摺疊後摺痕交於一點 O，其它翼摺疊後沒有覆蓋住 O，則能摺出「N 轉」，**當背面摺痕全交於 O時，此時各翼是最粗的翼，再粗翼就會覆蓋住 O，此時也是 $\frac{\alpha}{2} < \theta_i < \alpha$ 的最大數量**，所以我們探討θ_i與$\frac{\alpha}{2}$的關係，整理成下表：

(紅線為正 n 邊形的對稱軸)

圖 示	當背面摺痕全交於 O 時，θ_i 與 $\frac{\alpha}{2}$ 的 關 係	$\theta_i > \frac{\alpha}{2}$ 的數量
	O=A 時：$\theta_1 = \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 < \frac{\alpha}{2}$	1 個
	O=B 時：$\theta_1 = \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 > \frac{\alpha}{2}$	1 個
	O=C 時：$\theta_1 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 < \frac{\alpha}{2}$	1 個
	O=D 時：$\theta_1 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 > \frac{\alpha}{2}$	2 個
	O=E 時：$\theta_1 = \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 = \frac{\alpha}{2}$、$\theta_4 < \frac{\alpha}{2}$	1 個
	O=F 時：$\theta_1 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_4 < \frac{\alpha}{2}$	2 個
	O=G 時：$\theta_1 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_4 > \frac{\alpha}{2}$	2 個
	O=H 時：$\theta_1 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_4 > \frac{\alpha}{2}$	2 個
	O=I 時：$\theta_1 = \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_4 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_5 < \frac{\alpha}{2}$	2 個
	O=J 時：$\theta_1 = \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_4 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_5 > \frac{\alpha}{2}$	2 個
	O=K 時：$\theta_1 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_4 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_5 < \frac{\alpha}{2}$	2 個
	O=L 時：$\theta_1 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_4 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_5 < \frac{\alpha}{2}$	3 個
	O=M 時：$\theta_1 = \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_4 = \frac{\alpha}{2}$、$\theta_5 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_6 < \frac{\alpha}{2}$	2 個
	O=N 時：$\theta_1 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_4 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_5 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_6 < \frac{\alpha}{2}$	3 個
	O=P 時：$\theta_1 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_4 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_5 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_6 > \frac{\alpha}{2}$	3 個
	O=Q 時：$\theta_1 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_2 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_3 < \frac{\alpha}{2}$、$\theta_4 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_5 > \frac{\alpha}{2}$、$\theta_6 > \frac{\alpha}{2}$	3 個

發現：當背面摺痕全交於 O，O在正 n 邊形內部不同位置時

(1) $\frac{\alpha}{2} < \theta_i < \alpha$的最大數量如下表，若摺痕展開圖$\frac{\alpha}{2} < \theta_i < \alpha$的數量超過下表，則無法壓平摺疊。

O的位置	$\frac{\alpha}{2} < \theta_i < \alpha$ 的最大數量	原　因
在中心點上	0 個	全部的翼，$\theta_i = \frac{\alpha}{2}$。
在對稱軸上	n 是奇數：$\frac{n-1}{2}$個	對稱軸上有一翼，$\theta_i = \frac{\alpha}{2}$， 其它 n-1 個翼，平分在此對稱軸的異側。
	n 是偶數：$\frac{n-2}{2}$個或$\frac{n}{2}$個	**①對稱軸上有頂點** 頂點上的對稱軸有兩翼，$\theta_i = \frac{\alpha}{2}$， 其它 n-2 個翼，平分在此對稱軸的異側。 **②對稱軸上沒有頂點** 可以找到某一條對稱軸，在此對稱軸同一側， $0 < \theta_i < \frac{\alpha}{2}$，另一側，$\frac{\alpha}{2} < \theta_i < \alpha$。

O的位置	$\frac{\alpha}{2}<\theta_i<\alpha$ 的最大數量	原　因
在非對稱軸上	n是奇數：$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 或 $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ 個	可以找到某一條對稱軸， 在此對稱軸同一側，$0<\theta_i<\frac{\alpha}{2}$， 另一側，$\frac{\alpha}{2}<\theta_i<\alpha$。
	n是偶數：$\frac{n}{2}$ 個	可以找到某一條對稱軸， 在此對稱軸同一側，$0<\theta_i<\frac{\alpha}{2}$， 另一側，$\frac{\alpha}{2}<\theta_i<\alpha$。

(2) θ_i 的位置如下表，若摺痕展開圖 θ_i 的位置不符合下表，則無法壓平摺疊。

O的位置	θ_i 的位置
在對稱軸上	n是奇數：有一條對稱軸，翼的 $\theta_i=\frac{\alpha}{2}$，在此對稱軸同一側， 翼的 $0<\theta_i<\frac{\alpha}{2}$，另一側，翼的 $\frac{\alpha}{2}<\theta_i<\alpha$。
	n是偶數： ①對稱軸上有頂點 頂點上的對稱軸有兩翼，翼的 $\theta_i=\frac{\alpha}{2}$， 在此對稱軸同一側，翼的 $0<\theta_i<\frac{\alpha}{2}$，另一側，翼的 $\frac{\alpha}{2}<\theta_i<\alpha$。 ②對稱軸上沒有頂點 可以找到某一條對稱軸，在此對稱軸同一側，$0<\theta_i<\frac{\alpha}{2}$， 另一側，$\frac{\alpha}{2}<\theta_i<\alpha$。
在非對稱軸上	可以找到某一條對稱軸， 在此對稱軸同一側，$0<\theta_i<\frac{\alpha}{2}$，另一側，$\frac{\alpha}{2}<\theta_i<\alpha$。

(十)反思

研究一~研究三是研究四的特例，只是判斷方法改變，研究一~研究三是以角度($\sum_{i=1}^{n}\theta_i$)為定值去做思考，到研究四則轉換為長度($\sum_{i=1}^{n}a_i sin\theta_i$)為定值。

研究五、探討正 n 邊形 n 個翼寬全相等，線狀拼組摺疊後，「N 轉」的樣貌。

(一)想法

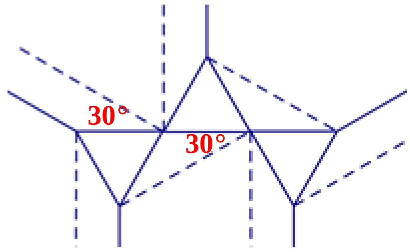
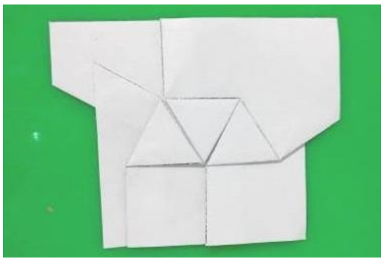
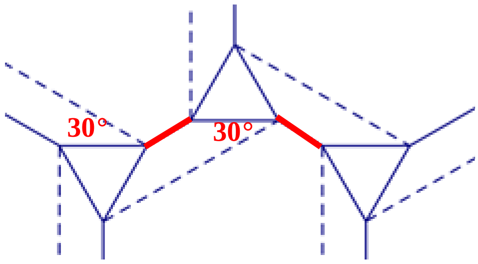
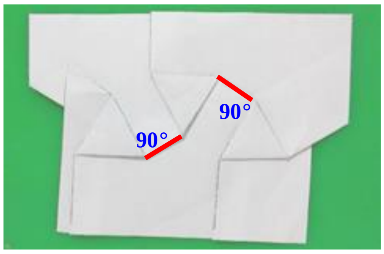
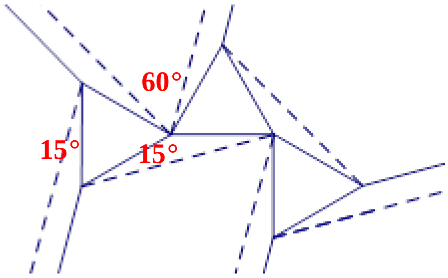
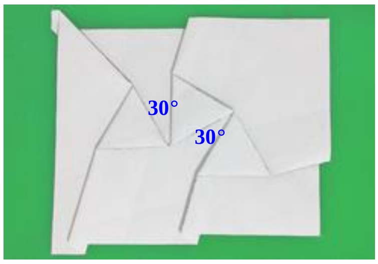
線狀拼組的條件是正 n 邊形與正 n 邊形**翼的實、虛線要共用**，**連接的實線長度要夠兩個正 n 邊形可壓平旋轉的空間**，於是我們畫不同大小的正 n 邊形、連接實線長度不同、θ角度不同的摺痕展開圖，探討線狀拼組摺疊後「N 轉」的樣貌。

(二)製作過程

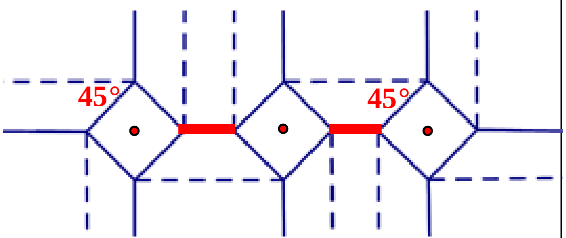
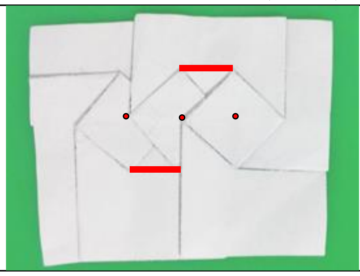
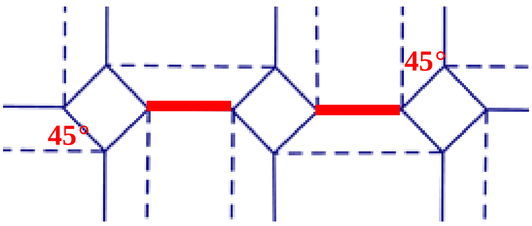
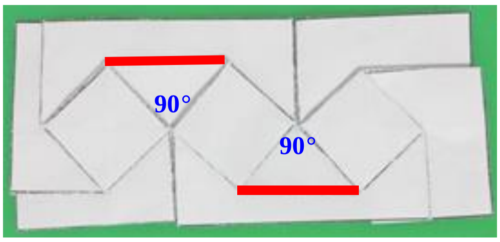
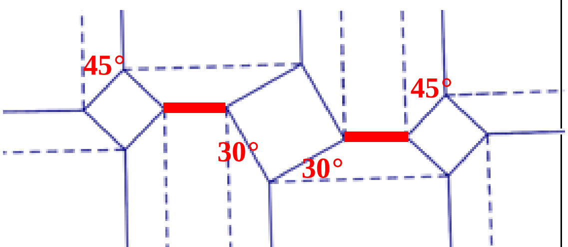
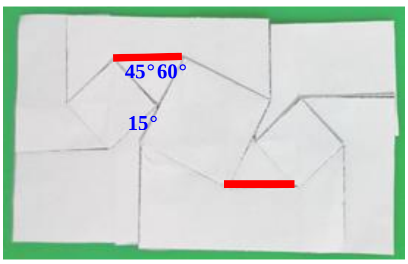
同研究三的製作過程，**設定 $0°<\theta\leq\frac{\alpha}{2}$，且 n 個翼寬全相等**，繪製**不同大小**、**連接實線長度不同**，**θ角度不同**的正 n 邊形線狀拼組摺痕展開圖，並沿摺痕壓平摺疊。

(三)製作成果

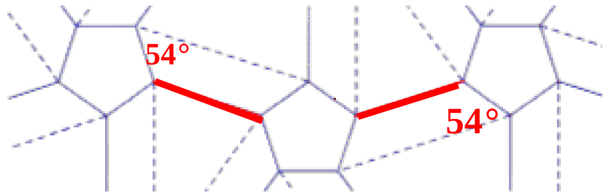
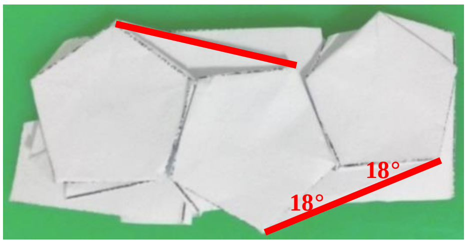
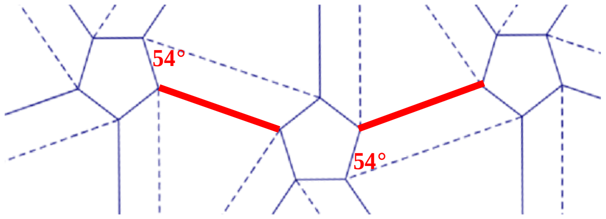
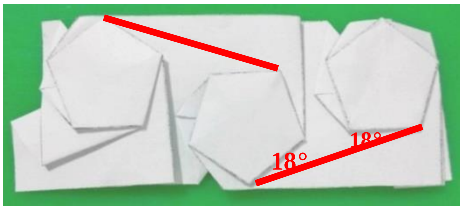
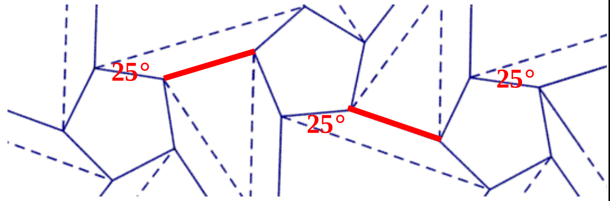
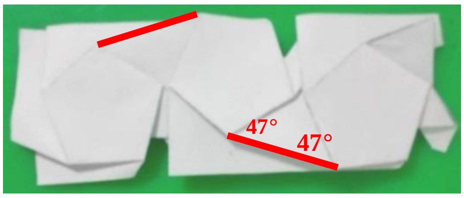
正三角形

編號	摺 痕 展 開 圖	摺 疊 後 照 片 (正面)
五-3-1		
五-3-2		
五-3-3		

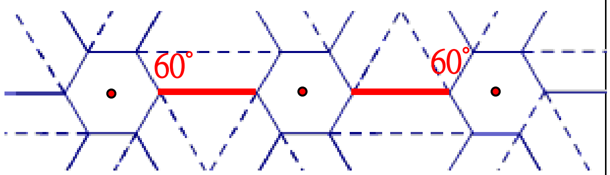
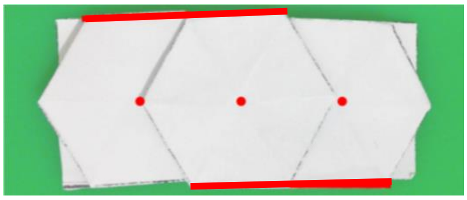
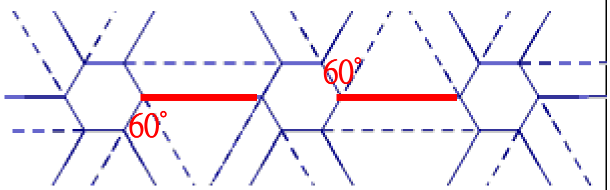
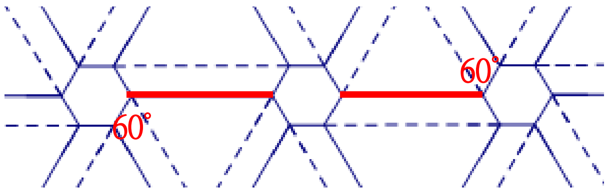
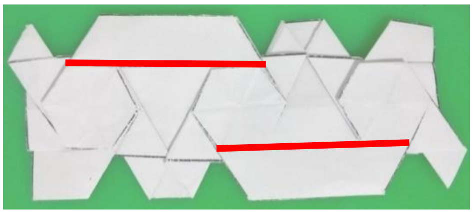
正方形

編號	摺 痕 展 開 圖	摺 疊 後 照 片 (正面)
五-4-1		
五-4-2		
五-4-3		

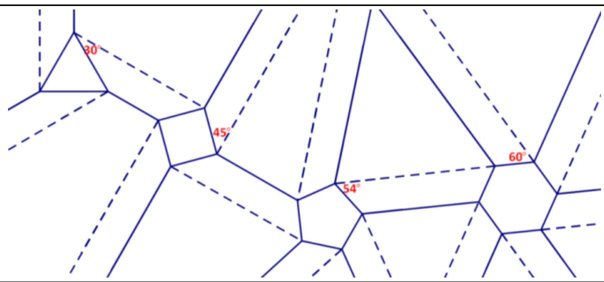
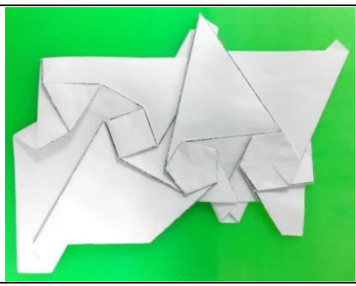
正五邊形

編號	摺 痕 展 開 圖	摺 疊 後 照 片 (正面)
五-5-1		
五-5-2		
五-5-3		

正六邊形

編號	摺 痕 展 開 圖	摺 疊 後 照 片 (正面)
五-6-1		
五-6-2		
五-6-3		

混合不同正 n 邊形

(四)發現與歸納

1.設：正 n 邊形邊長為 1，L$=\cos(180°-\alpha-\theta)+\cos(180°-\alpha'-\theta')$，

連接正 n 邊形最短實線長度為

(1)連接正三角形與正三角形最短實線長度為 0。

(2)連接正三角形與正 n 邊形($n=\mathbf{4}$、$\mathbf{5}$)最短實線長度為 0 或 L。

(3)連接正三角形與正 n 邊形($n>\mathbf{5}$)最短實線長度為 L。

(4)連接正方形與正方形最短實線長度為 $\sin \boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{max}\{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta'}\}$。

(5)連接正 n 邊形($n\geq 4$)與正 n′邊形($n>4$)最短實線長度為 L，

理由：(圖 24~26 紅線為正 n 邊形的邊)

① 假設連接正 n 邊形最短實線長度為 0 (如圖 27)

$\angle\gamma=180°-(\angle\theta+\angle\theta')$

若$\angle \mathbf{s}\geq\angle\boldsymbol{\theta}+\angle\boldsymbol{\theta'}$，**則兩正 n 邊形有足夠的空間供「N 轉」。**

$\angle\mathbf{s}=360°-\angle\gamma-(\angle\alpha+\angle\alpha')-(\angle\theta+\angle\theta')$

$=360°-180°+(\angle\theta+\angle\theta')-(\angle\alpha+\angle\alpha')-(\angle\theta+\angle\theta')$

$\mathbf{=180°-(\angle\boldsymbol{\alpha}+\angle\boldsymbol{\alpha'})}$

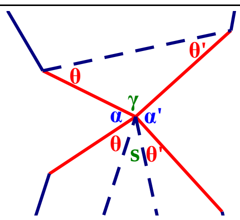


圖 27

② 假設連接正 n 邊形最短實線長度不為 0 (如圖 28)

$\angle\alpha+\angle OAB=180°$ $\qquad$ $\angle\alpha'+\angle OA'B'=180°$

$\angle s=\angle OAB-\angle\theta$ $\qquad$ $\angle s'=\angle OA'B'-\angle\theta'$

$=180°-\angle\alpha-\angle\theta$ $\qquad$ $=180°-\angle\alpha'-\angle\theta'$

所以$\overline{AO}=\cos(180°-\alpha-\theta)$ $\qquad$ $\overline{A'O}=\cos(180°-\alpha'-\theta')$

故**連接實線最短長度為 $\mathbf{cos(180°-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\theta})+cos(180°-\boldsymbol{\alpha'}-\boldsymbol{\theta'})}$**

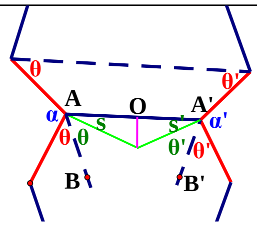


圖 28

③ 特殊例子 (如圖 29)

正方形與正方形拼組時，ABCD 4 條實、虛線會平行，

所以摺疊後 AB 翼會摺到 BC 翼內，

CD 翼也會摺到 BC 翼內，而θ愈大，翼寬愈粗，

所以**最短連接實線長度為 $\boldsymbol{p}$ 的翼寬，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{max}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\theta'})$，**

即為 $\sin\boldsymbol{p}$。

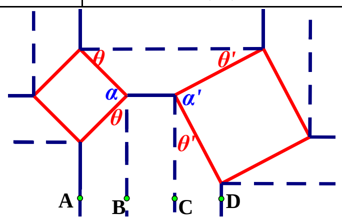


圖 29

所以由①②結果，將正 n 邊形做線狀拼組，連接所需最短實線長度如下表，當連接正 n 邊形(n ≥ 4)與正 n′邊形(n′ > 4)時，因 $\alpha+\alpha'>180°$，所以連接最短實線長度皆為 L。

線狀拼組 $\mathbf{n+n'}$	$\boldsymbol{\alpha+\alpha'}$	s	$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{\theta'}$	$\boldsymbol{\theta+\theta'}$	最短實線長度
三+三	$60°+60°$	$60°$	$0<\theta\leq 30°$	$0<\theta'\leq 30°$	$0<\theta+\theta'\leq 60°$	0
三+四	$60°+90°$	$30°$	$0<\theta\leq 30°$	$0<\theta'\leq 45°$	$0<\theta+\theta'\leq 30°$	0
					$30°<\theta+\theta'\leq 75°$	L
三+五	$60°+108°$	$12°$	$0<\theta\leq 30°$	$0<\theta'\leq 54°$	$0<\theta+\theta'\leq 12°$	0
					$12°<\theta+\theta'\leq 84°$	L
三+六	$60°+120°$	$0°$	$0<\theta\leq 30°$	$0<\theta'\leq 60°$	$0<\theta+\theta'\leq 90°$	L
四+四	$90°+90°$	$0°$				

2.線狀拼組形狀、大小都相同的正 n 邊形時，發現：

(1)當 **n 是奇數、$\theta=\frac{\alpha}{2}$、且連接實線最短時，摺疊後會呈現正 n 邊形邊靠邊緊密排列的樣貌**(如編號五-3-1、五-5-1)，**若連接的實線增長，原本緊密排列的邊，會相距一段距離（增長的長度）**(如編號五-3-2、五-5-2)。

(2)當 **n 是偶數、$\theta=\frac{\alpha}{2}$、且連接實線最短時，摺疊後會呈現正 n 邊形頂點靠中心點緊密排列的樣貌**(如編號五-4-1、五-6-1)，**若連接的實線增長，頂點與中心點會相距一段距離（增長的長度）**(如編號五-4-2、五-6-2、五-6-3)。

3.線狀拼組形狀相同、大小不同的正 n 邊形時，除了正三角形以外，其它皆無法摺疊出正 n 邊形頂點碰頂點、正 n 邊形與正 n 邊形間有三角形的樣貌（如圖 30）。

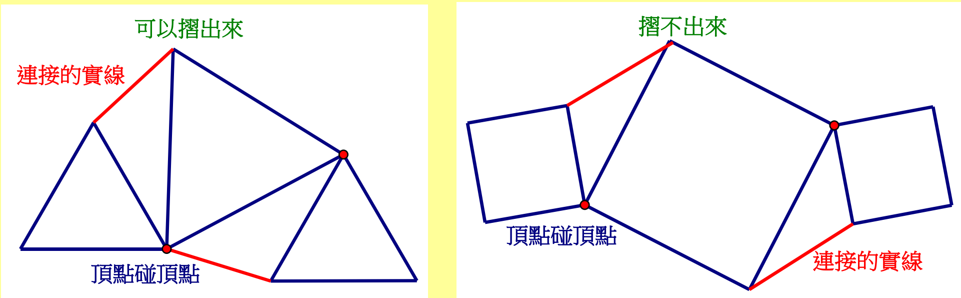


圖 30

理由：

(1) 因連接正三角形與正三角形最短實線長度為 0，所以兩個正三角形各有 1 個頂點相碰，由 1.的理由①得知兩虛線間的夾角 $s=180°-(60°+60°)=60°$(圖 24)，而正三角形 $\theta\leq 30°$，所以只要兩個正三角形 $\theta+\theta'<60°$，摺疊後就會出現頂點碰頂點、正三角形與正三角形間有三角形的樣貌。

(2)(利用反證法來說明，如圖 31)

若有 2 個形狀相同、大小不同的正 n 邊形甲、乙，

摺疊後$\overline{CE}$與$\overline{CG}$重疊，$\overline{DF}$與$\overline{DG}$重疊，

所以 E、F 相碰在 G 的位置，

假設甲<乙→ $\overline{AC}=\overline{CE}=\overline{CG}<\overline{BD}=\overline{DF}=\overline{DG}$…①

因甲、乙要共用一翼才能拼組，

且$\overline{AC}<\overline{BD}\rightarrow\angle\theta>\angle\gamma$

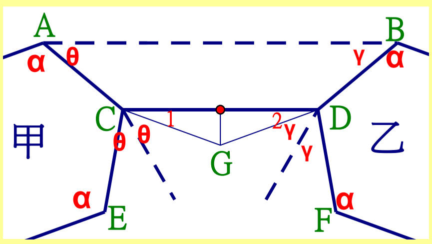


圖 31

$\angle 1=180°-\angle\alpha-\angle\theta$，$\angle 2=180°-\angle\alpha-\angle\gamma\rightarrow\angle 1<\angle 2\rightarrow\overline{DG}<\overline{CG}$ 與①假設矛盾，

同理假設甲＞乙，情況相同，所以若摺疊後 E、F 相碰在 G 的位置，則甲=乙。

故形狀相同、大小不同的正 n 邊形，無法摺出頂點碰頂點、正 n 邊形與正 n 邊形間有三角形的樣貌。

4.正 n 邊形選定哪 2 翼做線狀拼組，翼的連接方向要注意，若圍成一圈，最後的翼沒有拼接到（如下圖 32 紅圈部分），或圍成一圈，內部交點實、虛線數量相差不為 2 時(前川定理)，就無法壓平摺疊（如下圖 33 紅圈部分）。

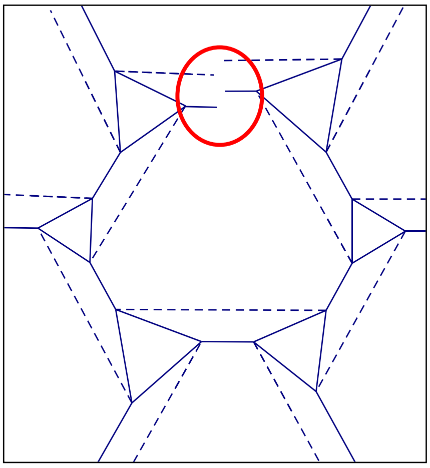


圖 32

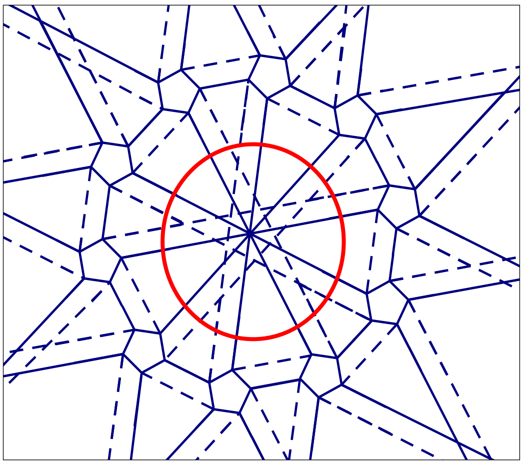


圖 33

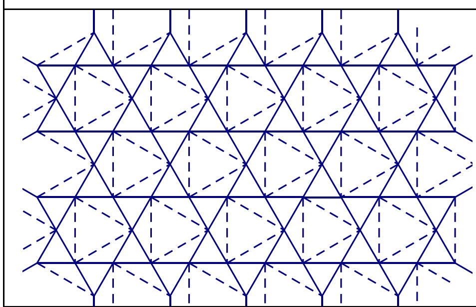
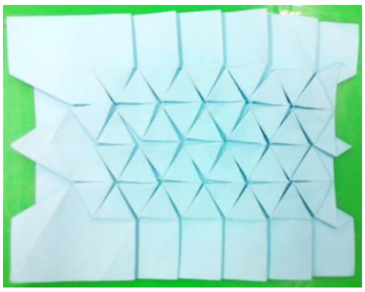
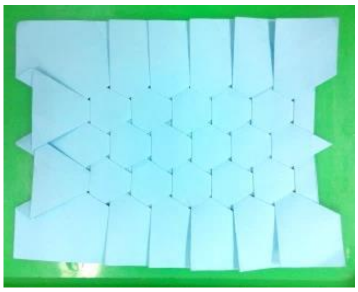
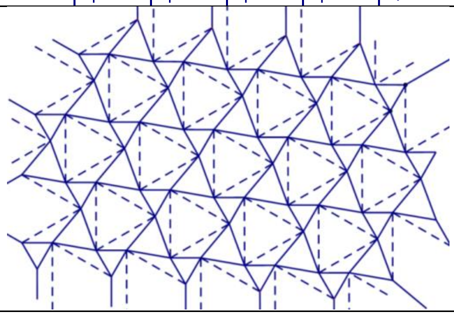
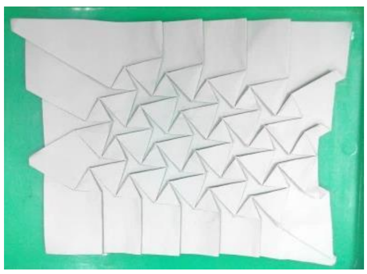
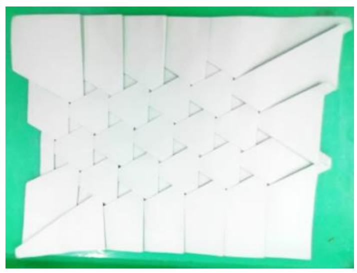
研究六、探討正 n 邊形 n 個翼寬全相等，能否網狀拼組壓平摺疊。

(一)製作過程

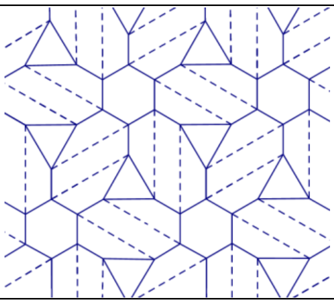
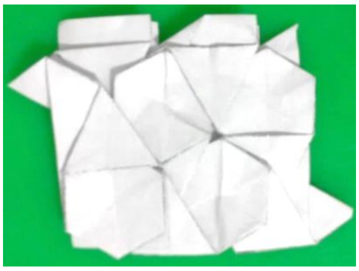
同研究五的製作過程，繪製正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形網狀拼組摺痕展開圖，並沿摺痕壓平摺疊。

(二)製作成果

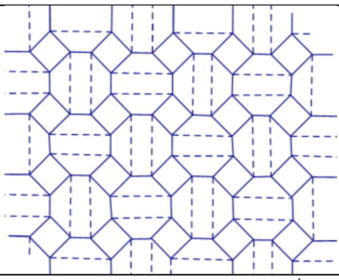
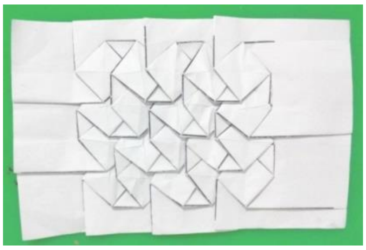
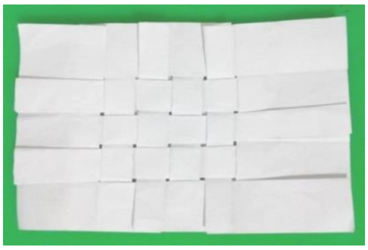
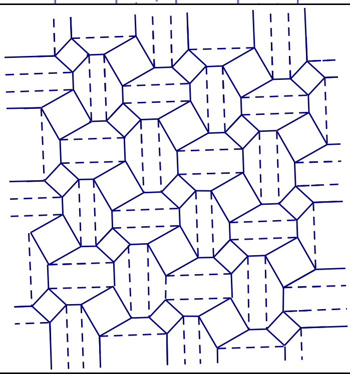
正三角形

摺 痕 展 開 圖	摺 疊 後 照 片	
	正面	背面
		
		

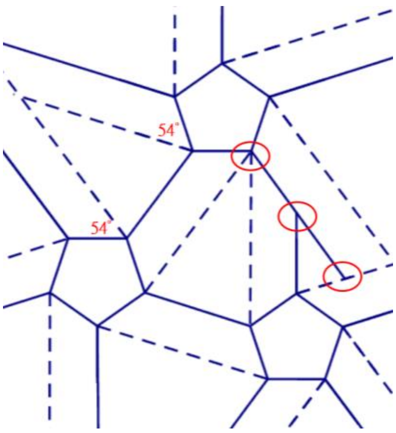
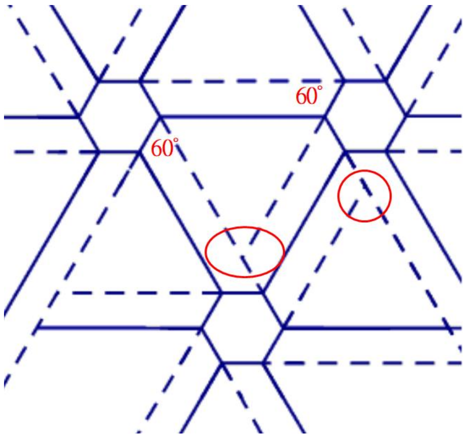
混合正三角形與正六邊形

摺 痕 展 開 圖	摺 疊 後 照 片	
	正面	背面
		

正方形

摺 痕 展 開 圖	摺 疊 後 照 片	
	正面	背面
		
		

其他

正 五 邊 形	正 六 邊 形
	
無共用一翼 且 紅圈部分無法壓平摺疊	無共用一翼 且 紅圈部分無法壓平摺疊

(三)發現與歸納

只有正三角形與正三角形、正方形與正方形、正三角形與正六邊形這 3 種情形能網狀拼組壓平摺疊。

理由：(如圖 34、35，紅線為正 n 邊形的邊)

(1)網狀拼組實線連接長度為 0 (如圖 34)

由研究五線狀拼組得知，只有正三角形與正三角形、正三角形與正方形、正三角形與正五邊形這 3 種情形，實線連接長度為 0 且 $s \geq 0$。

假設網狀拼組後，虛線圍成 Q 邊形(Q∈ N，Q≥ 3)

$[180° - (\theta + \theta')] + 60° + \alpha' + \theta + \theta' + s = 360$

$\rightarrow \boldsymbol{\alpha' + s = 120°}$

網狀拼組 三＋n′	α'	s	Q s = (Q − 2) × 180°
三+三	**60°**	**60°**	**Q × 60° = (Q − 2) × 180° → Q = 3**
三+四	90°	30°	Q × 90° = (Q − 2) × 180° → Q不是正整數
三+五	108°	12°	Q × 108° = (Q − 2) × 180° → Q不是正整數

所以只有正三角形與正三角形能網狀拼組壓平摺疊。

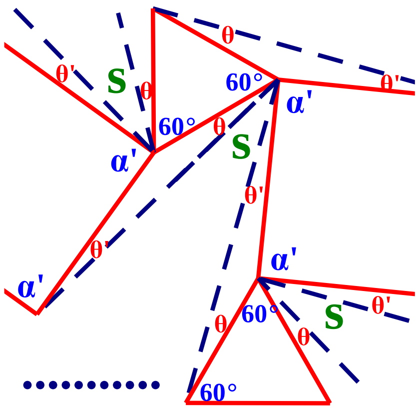


圖 34

(2)網狀拼組實線連接長度不為 0 (如圖 35)

假設網狀拼組後，實、虛線圍成 R 邊形

(R ∈ N，R 是偶數，R≥ 4)

$\frac{R}{2}(180° - \alpha) + \frac{R}{2}(180° - \alpha') = (R - 2) \times 180°$

$\rightarrow \frac{R}{2}(360° - \alpha - \alpha') = 180° \times R - 360°$

$\rightarrow (\alpha + \alpha')R = 720°$

網狀拼組 n＋n′	α + α′	R
三+三	60° + 60° = 120°	**6**
三+四	60° + 90° = 150°	不是正整數
三+五	60° + 108° = 168°	不是正整數
三+六	60° + 120° = 180°	**4**
四+四	90° + 90° = 180°	**4**
五+五	108° + 108° = 216°	不是正整數
六+六	120° + 120° = 240°	3 (不合 因 R≥ 4)

所以只有正三角形與正三角形、正方形與正方形、正三角形與正六邊形這 3 種情形能網狀拼組壓平摺疊。

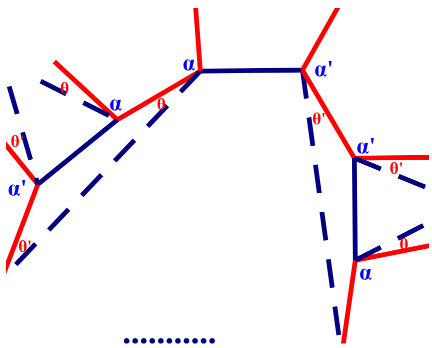
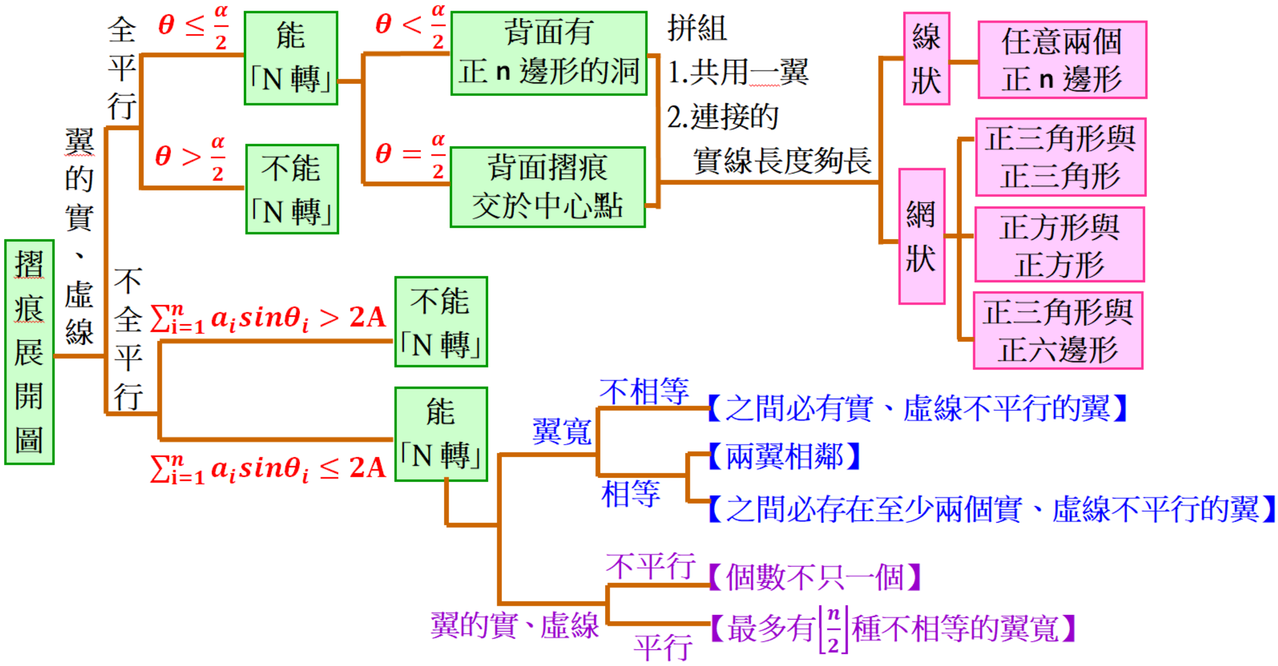


圖 35

陸、結論

在「$\angle\varphi+\angle\theta_i=180°$，$0<\theta_i<\alpha$，**虛線朝同一方向**」的條件下，我們將研究結果整理如下：



柒、未來展望

1.本研究探討出當摺痕交於正 n 邊形內部一點，$\sum_{i=1}^{n} a_i sin\theta_i \le 2A$ 時，能摺出「N 轉」，若摺痕交於正 n 邊形外部一點時，摺痕展開圖須符合何種條件，才能摺出「N 轉」。

2.本研究探討正 n 邊形(凸 n 邊形)能「N 轉」的繪圖條件，未來可以延伸探討凹 n 邊形(如星形、十字架形…等)應具備何種條件，才能透過摺紙方式讓該形狀轉動起來。

3.拼組「N 轉」的成果，正面、背面皆具有美麗、有規律性的排列樣貌，同時也有縮小面積、增加厚度的性質，可以將此特性應用在生活中，如杯墊、地墊、窗簾、服飾的設計…等。

捌、參考資料

1.湯瑪斯．赫爾(2018)。數學摺紙計畫－30 個課程活動探索。**方轉摺疊**(241-245 頁)。新北市：世茂。

2.李政憲(2019)。藝數摺學。**摺紙數學初體驗－從鑲嵌摺紙談對稱的應用**(22-34 頁)。臺北市：臉譜。

3.蘇卓英、李政憲(2017)。從鑲嵌摺紙到正多邊形應用。**科學研習月刊，56(5)**，42-47。

4.**前川定理**(2019 年 9 月 29 日)。維基百科。取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%89%8D%E5%B7%9D%E5%AE%9A%E7%90%86

【評語】080405

1. 本研究探討如何透過摺紙的摺痕將紙上的幾何圖形做旋轉，使得旋轉後可以沿著摺痕將所有幾何圖形壓平在紙張上，而不會出現拱起的情況，研究十分有趣並嘗試針對「單一『N 轉』」以及「多個『N 轉』的組合」等問題進行討論，最後並根據研究發現設計製作成品，將具有規律性的數學之美應用於生活之中！是一份兼具數學與美學的作品。

2. 本研究內容頗為豐富，雖然摺紙具可操作性但其中過程的變化複雜稍有變化及牽動全部，但研究者不畏艱難，根據實際摺紙後作品的性質做相關幾何證明，極盡所能刻畫壓平的圖形進而反推回未摺紙前其折線的性質，從而研發正多邊形可 N 轉摺紙的條件，其研究精神可嘉。

作品海報

壹、研　究　動　機

老師曾用摺紙方式做數學活動，其中「方轉」摺紙非常有趣，我們好奇為什麼它能轉動呢？在什麼條件下能成功摺出轉動的正 n 邊形呢？單一「方轉」能拼組成多個嗎?於是我們利用所學（南一版五上多邊形），想延伸、拓展「方轉」摺紙，創作出美麗的作品供生活應用。

貳、研　究　目　的

單一「N 轉」的探討

一、n 個翼，實、虛線平行

研究一、探討摺紙技巧中「方轉」摺法的性質。

研究二、探討「方轉」摺法能否套用在其它正 n 邊形上。

研究三、探討正 n 邊形可摺出「N 轉」時，θ的範圍。

二、n 個翼，實、虛線不全平行

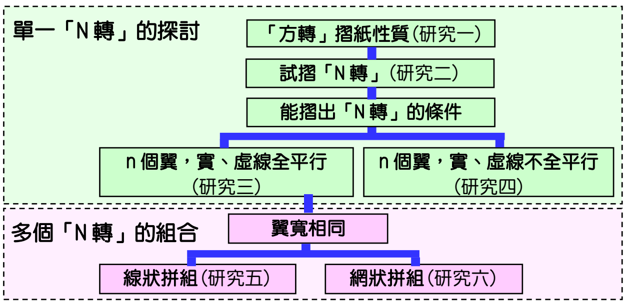
研究四、探討正 n 邊形 n 個翼的實、虛線不全平行時，能摺出「N 轉」的條件。

多個「N 轉」的組合

研究五、探討正 n 邊形 n 個翼寬全相等，線狀拼組摺疊後，「N 轉」的樣貌。

研究六、探討正 n 邊形 n 個翼寬全相等，能否網狀拼組壓平摺疊。

研究架構圖



參、研　究　方　法

一、名詞解釋及符號定義

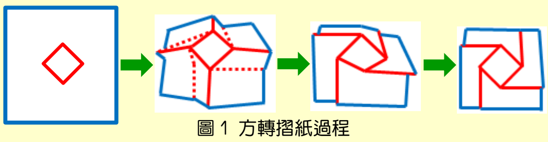


圖 1 方轉摺紙過程

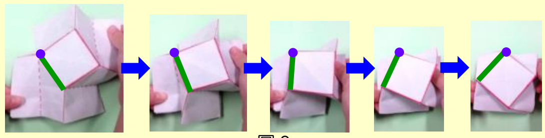


圖 2

1. **「方轉」**：是一種摺紙技巧，在紙上畫一個正方形，將正方形的邊摺成山線，並在正方形的 4 個頂點上，朝同一方向(順時針或逆時針)摺出山線與谷線，以旋轉正方形方式，將紙張壓平摺疊(如圖 1)。
2. **「N 轉」**：同「方轉」摺紙方式，只是將正方形改成正 n 邊形，如「三轉」就是在正三角形的 3 個頂點上，朝同一方向以旋轉正三角形方式，將紙張壓平摺疊。「四轉」即「方轉」。
3. **實線、虛線**：分別代表摺紙過程中的山線與谷線。
4. **正 n 邊形旋轉角度**：邊沿虛線摺疊後，正 n 邊形以其一頂點為旋轉中心所旋轉的角度(如圖 2)。
5. **翼**：正 n 邊形每一邊外皆有一組實、虛線，形成一個翼，正 n 邊形有 n 個翼(如圖 3)。
6. **翼寬**：當 n 個翼的虛線與實線平行時，虛線與實線間的寬度稱為翼寬(如圖 4)，正三角形的翼寬即為紅線長度，當虛線與實線不平行時，則不探討翼寬。
7. α：正 n 邊形一內角度數(如圖 5)。
8. φ：正 n 邊形頂點上，實線與邊的夾角度數(如圖 5)。
9. δ：正 n 邊形頂點上，實線與虛線的夾角度數(如圖 5)。
10. θ_i(或θ)：正 n 邊形頂點上的虛線沿順時針方向與邊的夾角度數(如圖 6)。
11. **線狀拼組**：正 n 邊形 n 個翼中，只有兩個翼與其它正 n 邊形拼組。
12. **網狀拼組**：正 n 邊形 n 個翼都要與其它正 n 邊形拼組。

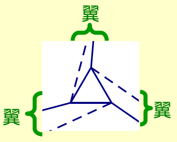


圖 3

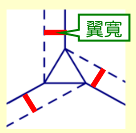


圖 4

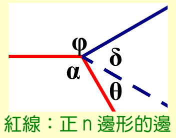


圖 5

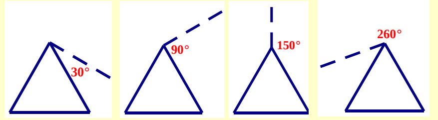


圖 6 正三角形的不同θ_i度數

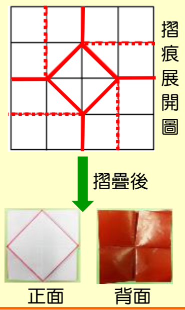
二、預備知識

前川定理：在單一點摺痕中，若紙張可沿摺痕壓平摺疊，則點上實、虛線數量相差為 2。(參考資料〔4〕)

肆、研　究　過　程　與　結　果

研究一、探討摺紙技巧中「方轉」摺法的性質。

(一)製作成果



(二)發現與歸納

1. 觀察「摺痕展開圖」發現：

(1)有 4 個翼，翼的實、虛線全部平行，4 個翼的翼寬全相等。

(2)將 4 個頂點上的實線往正方形內部延伸，會交於正方形的中心點。

(3) $\theta = 45°$，4 個頂點上的虛線與實線夾角皆為 90°。

2. 在「摺疊過程」中發現：

主要靠虛線摺痕帶動正方形轉動，因 $\theta = 45°$，所以摺疊後，正方形會順時針旋轉 90°。

3. 觀察「摺疊後的樣子」發現：

(1)假設每一小方格面積為 $1cm^2$，原面積為 $16\,cm^2$，摺疊後面積為 $4cm^2$，縮小$\frac{1}{4}$(如圖 7)。

(2)摺疊後從正面看，呈現 2 個內接正方形(正方形 ABCD 與正方形 EFGH)。

(3)摺疊後從背面看，4 條虛線摺痕會交於中心點上。

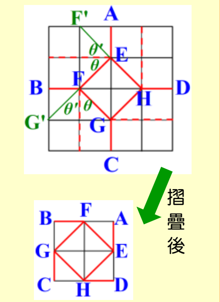


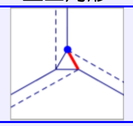
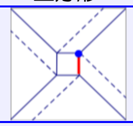
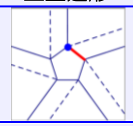
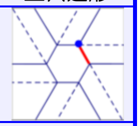
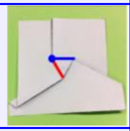
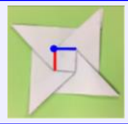
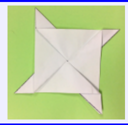
圖 7

研究二、探討「方轉」摺法能否套用在其它正 n 邊形上。

(一)猜想

由「方轉」摺法推測「N 轉」摺痕展開圖的畫法	
「方轉」摺法 發現的規則	「方轉」規則套用在正 n 邊形上
1. 實線與虛線平行。	1. 實線與虛線平行。
2. 實線、虛線都畫在正方形頂點上。	2. 實線、虛線都畫在正 n 邊形頂點上。
3. 虛線與邊的夾角均為 $\theta = 45°$。	3. 虛線與邊的夾角均為 $\theta = \frac{\alpha}{2}$。
4. 實線往正方形內部延伸，會交於正方形的中心點。	4. 實線往正 n 邊形內部延伸，會交於正 n 邊形的中心點。

(二)製作成果

正 n 邊形		正三角形	正方形	正五邊形	正六邊形
摺痕展開圖					
θ		30°	45°	54°	60°
摺疊後照片	正面				
藍線為紅線摺疊後的新位置	背面				
正 n 邊形旋轉角度		逆時針轉 60°	逆時針轉 90°	逆時針轉 108°	逆時針轉 120°

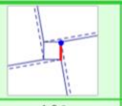
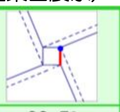
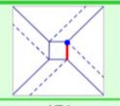
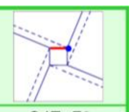
(三)發現與歸納

1. 將「方轉」摺法的規則套用在正 n 邊形上，能摺成「N 轉」，**旋轉角度為 2θ**。
2. 摺疊後從背面看，**n 條虛線摺痕都交在正 n 邊形的中心點上**。

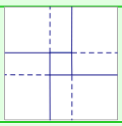
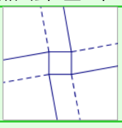
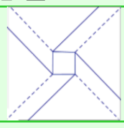
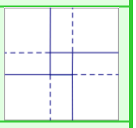
研究三、探討正 n 邊形可摺出「N 轉」時，θ的範圍。

(一)製作成果

(以 n=4 為例，其餘放置桌面展示)

摺痕展開圖					
θ		10°	22.5°	45°	247.5°
摺疊後照片	正面				
	背面				
旋轉角度		逆時針轉 20°	逆時針轉 45°	逆時針轉 90°	順時針轉 45°

註：摺疊後照片中的藍線，為摺痕展開圖中紅線摺疊後的新位置。

無 法 壓 平 摺 疊				
摺痕展開圖				
θ	0°	100°	135°	180°

(二)發現與歸納

1. 若 $0° < \theta \le \frac{\alpha}{2}$ 或 $360° - \frac{3\alpha}{2} \le \theta < 360° - \alpha$ 時，則能摺出「N 轉」。

2. **摺疊後，正 n 邊形的旋轉角度為 2θ，最大旋轉角度為 α，**

(1)若 $0°<\theta\le\frac{\alpha}{2}$，則正 n 邊形會逆時針旋轉。

(2)若 $360°-\frac{3\alpha}{2}\le\theta<360°-\alpha$，則正 n 邊形會順時針旋轉。

3. 觀察能摺出「N 轉」的背面，發現：

(1)若 $\theta=\frac{\alpha}{2}$，則摺疊後背面摺痕會交於一點。

(2)若 $0°<\theta<\frac{\alpha}{2}$，則摺疊後背面會有正 n 邊形的洞，$\theta$ 愈小，洞愈大。

理由：(如右框，以 n=4 做說明，同理當 n>4 時情況相同)

(3)正 n 邊形洞是以中心點為旋轉中心，旋轉角度為 θ。

4. 能摺出「N 轉」，若 n 個翼實、虛線全平行，則 n 個 θ 全相同(n 個翼寬全相同)，即不存在不同翼寬的翼。

如圖 8，因 ABCD 為正方形，所以∠3 =∠4 =∠5 =∠6 = 90°− θ，
因∠7＝∠θ＋∠3=90°、 ∠8＝∠θ＋∠4=90°、
∠9＝∠θ＋∠5=90°、 ∠10＝∠θ＋∠6=90°，
所以∠7 =∠8 =∠9 =∠10 = 90° ……①
因$\Delta ABE\cong\Delta BCF\cong\Delta CDG\cong\Delta DAH$(ASA)，
所以$\overline{BE}=\overline{CF}=\overline{DG}=\overline{AH}$、 $\overline{AE}=\overline{BF}=\overline{CG}=\overline{DH}$，
$\overline{EF}=\overline{BE}-\overline{BF}$、 $\overline{FG}=\overline{CF}-\overline{CG}$、 $\overline{GH}=\overline{DG}-\overline{DH}$、 $\overline{HE}=\overline{AH}-\overline{AE}$
→ $\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{GH}=\overline{HE}$……②
由①②知 EFGH 為正方形，若 θ 愈小，對邊$\overline{CG}$、$\overline{BF}$、$\overline{AE}$、$\overline{DH}$也會愈短，
則$\overline{FG}$、$\overline{EF}$、$\overline{HE}$、$\overline{GH}$會愈長，所以正方形的洞會愈大。

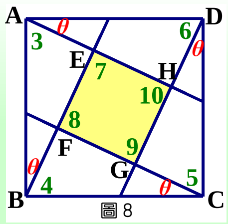


圖 8

註：為方便描述，皆以 $0°<\theta\le\frac{\alpha}{2}$ 做說明，同理當 $360°-\frac{3\alpha}{2}\le\theta<360°-\alpha$ 時，情況相同。

研究四、探討正 n 邊形 n 個翼的實、虛線不全平行時，能摺出「N 轉」的條件。

(一)想法與發現

由研究三我們發現：在正 n 邊形中，n 個 θ 均滿足 $0°<\theta\le\frac{\alpha}{2}$，則能摺出「N 轉」，其中 $\theta<\frac{\alpha}{2}$ 時，背面會有正 n 邊形洞，這讓我們感覺似乎可以把翼不完全等寬的加粗，加粗到讓摺痕交於正 n 邊形內部一點，而讓翼加粗就是增大 θ 角度，所以我們發現當 n 個翼的實、虛線不全平行時，不完全相等的 θ_i，$i=1,\dots,n$，其部分 $\theta_i>\frac{\alpha}{2}$，也能摺出「N 轉」，例如圖 9。

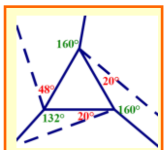
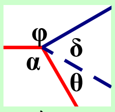


圖 9

說明：
紅線是正 n 邊形的邊
∠δ＝360°－∠φ－∠α－∠θ
∠φ＝∠α＋∠δ－∠θ
＝∠α＋(360°－∠φ－∠α－∠θ)－∠θ
→∠φ＋∠θ＝180°



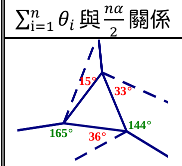
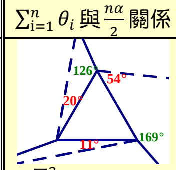
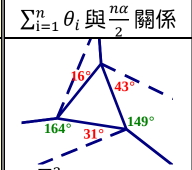
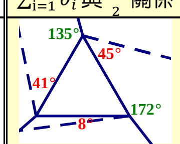
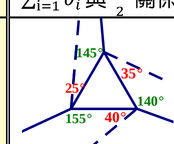
(二)猜想

能摺出「N 轉」的條件是：1. $\angle\varphi+\angle\theta_i=180°$，$i=1,\dots,n$。(如右說明) 2. $0°<\theta_i<\alpha$，$\sum_{i=1}^{n}\theta_i\le\frac{n\alpha}{2}$(容許存在 $\theta_i>\frac{\alpha}{2}$)。 3. 虛線朝同一方向。

(三)製作過程

設定 $\angle\varphi+\angle\theta_i=180°$，$0°<\theta_i<\alpha$，$\sum_{i=1}^{n}\theta_i<\frac{n\alpha}{2}$、$\sum_{i=1}^{n}\theta_i=\frac{n\alpha}{2}$、或 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i>\frac{n\alpha}{2}$，虛線要朝同一方向，虛線與實線不全平行，繪製正三角形、正方形、正五邊形、正六邊形的摺痕展開圖，並沿摺痕摺疊。

(四)製作成果 (以 n=3 為例，其餘放置桌面展示)

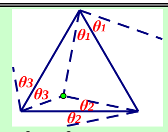
摺痕展開圖 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ 與 $\frac{n\alpha}{2}$ 關係	摺疊後背面照片	摺痕展開圖 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ 與 $\frac{n\alpha}{2}$ 關係	摺疊後背面照片	摺痕展開圖 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ 與 $\frac{n\alpha}{2}$ 關係	摺疊後背面照片	摺痕展開圖 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ 與 $\frac{n\alpha}{2}$ 關係	摺疊後背面照片	摺痕展開圖 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ 與 $\frac{n\alpha}{2}$ 關係	摺疊後背面照片
 $\sum_{i=1}^{3}\theta_i<90°$	 有洞	 $\sum_{i=1}^{3}\theta_i<90°$	 交於一點	 $\sum_{i=1}^{3}\theta_i=90°$	 交於一點	 $\sum_{i=1}^{3}\theta_i>90°$	 交於一點	 $\sum_{i=1}^{3}\theta_i>90°$	無法沿摺痕壓平摺疊

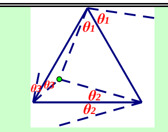
(五)察覺 由製作成果發現

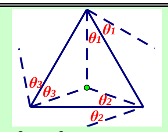
1. 當 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i>\frac{n\alpha}{2}$ 時，有時能摺出「N 轉」，有時不能。

2. 當 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i<\frac{n\alpha}{2}$ 時，有時背面有洞，有時會交於一點。

3. 能摺出「N 轉」的背面之共通點：不論 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ 是多少，當摺痕交於正 n 邊形內部一點時，是最粗的翼，再粗就無法壓平摺疊。


$\theta_1+\theta_2+\theta_3$
$=40.64°+11.71°+39.94$
$=92.30°$


$\theta_1+\theta_2+\theta_3$
$=51.59°+15.66°+18.62°$
$=85.87°$


$\theta_1+\theta_2+\theta_3$
$=30.00°+19.03°+40.97°$
$=90.00°$

(六)分析

我們想找出 n 個翼的實、虛線不全平行時，能摺出「N 轉」的條件，因此我們嘗試用 GSP 繪圖，想找出摺痕共交一點時 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ 的特性，結果發現當摺痕的交點交於正 n 邊形的對稱軸上時，$\sum_{i=1}^{n}\theta_i=\frac{n\alpha}{2}$；當摺痕的交點交於非對稱軸上時，$\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ 並非為定值(如上表，以 n=3 為例)，所以用 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ 分析能否「N 轉」有困難。

(七)進一步發展

由於 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i$ 不為定值，但因正 n 邊形內部任一點與頂點相連，可將正 n 邊形切割成 n 個三角形，正 n 邊形面積與 n 個三角形面積總和相等，即摺痕交點到正 n 邊形的各邊距離和為定值，所以設：正 n 邊形邊長為 1，面積為 A，$0°<\theta_i<\alpha$，任意兩翼摺進正 n 邊形內部，會交於一點 O，O 分別對 n 邊做垂線，延伸垂線交虛線於 H_i，頂點到 H_i 的長度為 a_i，$i=1,\dots,n$，(如圖 10，以 n=3 做說明，同理當 n>3 時情況相同)，因此內部一點到各邊的距離為 $a_i sin\theta_i$，則 $A=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i sin\theta_i$，即 $\sum_{i=1}^{n}a_i sin\theta_i=2A$，此為一定值。

說明：
AD 翼與 BE 翼摺進正 n 邊形內部，
會交於一點 O，
O 分別對三邊做垂線，
延伸垂線交虛線於 H_1、H_2、H_3，
令 $\overline{AH_1}=a_1$，$\overline{BH_2}=a_2$，$\overline{CH_3}=a_3$。

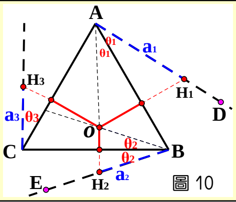
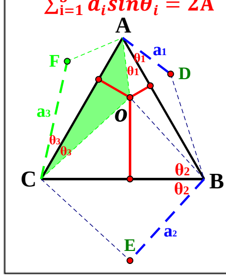
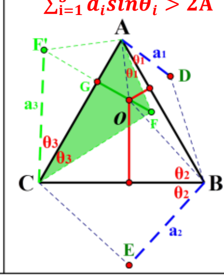
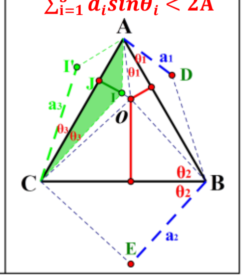


圖 10

(八)進一步分析

我們將摺疊後的情形分成三類(無法壓平摺疊、背面摺痕交於一點、其它)(如右表，以 n=3 為例，同理當 n>3 時情況相同)，n 個翼中，若選其中兩翼，摺疊後摺痕交於一點 O，其它的翼如果摺痕也共交於 O (即 $\sum_{i=1}^{n}a_i sin\theta_i=2A$)，或摺疊後翼沒有覆蓋住 O (即 $\sum_{i=1}^{n}a_i sin\theta_i<2A$)，則此摺痕展開圖能壓平摺疊形成「N 轉」。

1. 背面摺痕交於一點	2. 無法壓平摺疊	3. 其它
$\sum_{i=1}^{3}a_i sin\theta_i=2A$	$\sum_{i=1}^{3}a_i sin\theta_i>2A$	$\sum_{i=1}^{3}a_i sin\theta_i<2A$
		

(九)發現與歸納

在「$\angle\varphi+\angle\theta_i=180°$，$0°<\theta_i<\alpha$，虛線朝同一方向，且 n 個翼實、虛線不全平行」的條件下

1. 若 $\sum_{i=1}^{n}a_i sin\theta_i\le 2A$，則能摺出「N 轉」。

2. 若以 θ_i 的頂點為旋轉中心，則正 n 邊形旋轉角度為 $2\theta_i$。

3. 對於實、虛線形成的 n 個翼中，若要能摺出「N 轉」，我們發現以下性質：

性質(1)：兩個實、虛線平行的翼，若翼寬不相等，則之間必有實、虛線不平行的翼。

理由：(利用反證法來說明，如圖 11)

假設兩個翼寬不相等的翼之間沒有實、虛線不平行的翼，
因∠1＋∠θ＝180°、∠2＝180°－∠θ、∠2＋∠3＝180°
所以∠3＝∠θ；
因∠3＝∠θ、∠CEB＝∠BDA＝90°、正 n 邊形的邊等長，
所以$\overline{CE}=\overline{BD}$ (AAS)，即翼寬相等(與已知矛盾)。
故兩個實、虛線平行的翼，若翼寬不相等，則之間必有實、虛線不平行的翼。

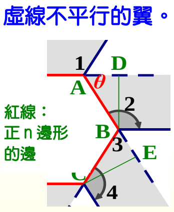


圖 11

性質(2)：兩個實、虛線平行的翼，設翼寬相等，若兩翼之間存在實、虛線不平行的翼，則其個數不只一個。

理由：(利用反證法來說明，如圖 12)

假設第 1 個翼與第 3 個翼實、虛線皆平行且翼寬相等，
第 2 個翼實、虛線不平行，
因∠1＋∠2＝180°，∠2＋∠3＝180° →∠1＝∠3
∠5＋∠6＝180°，∠4＋∠5＝180° →∠4＝∠6
翼寬相等 →∠1＝∠5，∠2＝∠6
所以∠3＋∠4＝∠1＋∠6＝∠1＋∠2＝180°，
故第 2 個翼實、虛線平行(與假設矛盾)，
即兩個實、虛線平行的翼，若翼寬相等，
則兩翼之間不可能只有一個實、虛線不平行的翼。

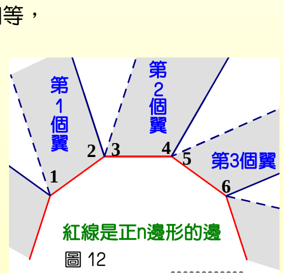


圖 12

性質(3)：若實、虛線為平行的翼，則最多有 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 種不相等的翼寬。[ ]為高斯符號。

理由：由(1)知兩個實、虛線平行的翼，若翼寬不相等，
則之間必存在一個實、虛不平行的翼，所以最多有 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 種不相等的翼寬。

性質(4)：若實、虛線為不平行的翼，則其個數不只一個。

理由：(利用反證法來說明，如圖 13)

假設不平行的翼只有一個

a. 當第 1~第 n-1 個翼的翼寬全相等時

第 n 個翼的實、虛線不平行，
因第 n 個翼頂點上的實、虛線皆可壓平摺疊，
所以∠5＋(180° −∠θ)＝180°
→∠5＝∠θ…①
∠6＋∠θ ＝180°
→∠6＝180° − ∠θ…②
由①②知第 n 個翼實、虛線也會平行(與假設矛盾)。

b. 當第 1~n-1 個翼的翼寬不全相等時

由 3.(1)知必有不平行的翼。因此實、虛線為不平行的翼，其個數不只一個。
故由 a.b. 知實、虛線為不平行的翼，其個數不只一個。

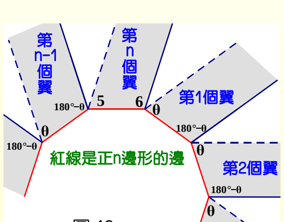
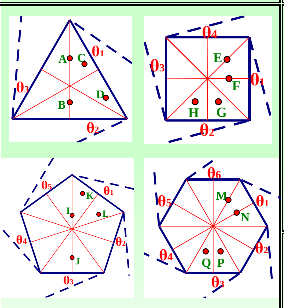


圖 13

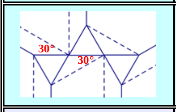
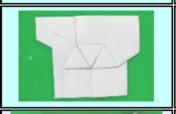
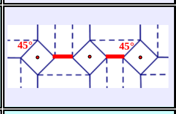
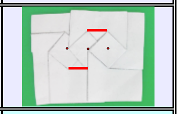
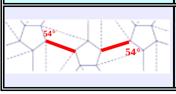
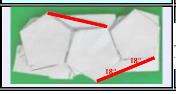
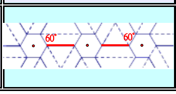
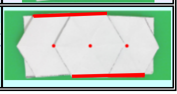
4. 能摺出「N 轉」，當背面摺痕全交於 O，O在正 n 邊形內部不同位置時，$\frac{\alpha}{2}<\theta_i<\alpha$ (或 $360°-2\alpha<\theta_i<360°-\frac{3\alpha}{2}$)的數量與 θ_i 的位置如下表所示。

<table>
<tr><th>圖　示</th><th>O的位置</th><th>n</th><th>$\frac{\alpha}{2}<\theta_i<\alpha$ 的最大數量</th><th>θ_i 的位置</th></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="2">在對稱軸上</td><td>奇數</td><td>$\frac{n-1}{2}$ 個</td><td>有一條對稱軸，翼的 $\theta_i=\frac{\alpha}{2}$，在此對稱軸同一側，翼的 $0°<\theta_i<\frac{\alpha}{2}$，另一側，翼的 $\frac{\alpha}{2}<\theta_i<\alpha$。</td></tr>
<tr><td>偶數</td><td>$\frac{n-2}{2}$ 或 $\frac{n}{2}$ 個</td><td>①對稱軸上有頂點
頂點上的對稱軸有兩翼，翼的 $\theta_i=\frac{\alpha}{2}$，在此對稱軸同一側，翼的 $0°<\theta_i<\frac{\alpha}{2}$，另一側，翼的 $\frac{\alpha}{2}<\theta_i<\alpha$。
②對稱軸上沒有頂點
可以找到某一條對稱軸，在此對稱軸同一側，$0°<\theta_i<\frac{\alpha}{2}$，另一側，$\frac{\alpha}{2}<\theta_i<\alpha$。</td></tr>
<tr><td rowspan="2">在非對稱軸上</td><td>奇數</td><td>$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ 或 $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ 個</td><td rowspan="2">可以找到某一條對稱軸，在此對稱軸同一側，$0°<\theta_i<\frac{\alpha}{2}$，另一側，$\frac{\alpha}{2}<\theta_i<\alpha$。</td></tr>
<tr><td>偶數</td><td>$\frac{n}{2}$ 個</td></tr>
</table>

(十)反思 研究一~三是研究四的特例，只是判斷方法改變，研究一~三是以角度($\sum_{i=1}^{n}\theta_i$)為定值去做思考，到研究四則轉換為長度($\sum_{i=1}^{n}a_i sin\theta_i$)為定值。

研究五、探討正 n 邊形 n 個翼寬全相等，線狀拼組摺疊後，「N 轉」的樣貌。

(一)製作成果 (以下列 4 個摺痕展開圖為例，其餘放置桌面展示)

摺痕展開圖	摺疊後(正面)	摺痕展開圖	摺疊後(正面)
			
			

(二)發現與歸納

設：正 n 邊形邊長為 1，L= $\cos(180°-\alpha-\theta)+\cos(180°-\alpha'-\theta')$，

連接正 n 邊形最短實線長度為

(1)連接正三角形與正三角形最短實線長度為 0。

(2)連接正三角形與正 n 邊形(n = 4、5)最短實線長度為 0 或 L。

(3)連接正三角形與正 n 邊形(n > 5)最短實線長度為 L。

(4)連接正方形與正方形最短實線長度為 $\sin p$，$p=max\{\theta,\theta'\}$。

(5)連接正 n 邊形(n≥ 4)與正 n′邊形(n > 4)最短實線長度為 L。

理由：(圖 14~16 紅線為正 n 邊形的邊)

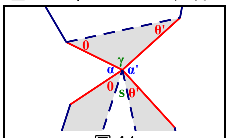


圖 14

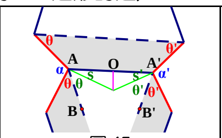


圖 15

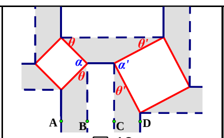


圖 16

①假設連接正 n 邊形最短實線長度為 0 (如圖 14)

$\angle\gamma=180°-(\angle\theta+\angle\theta')$

若$\angle s\geq\angle\theta+\angle\theta'$，則兩正 n 邊形有足夠的空間供「N 轉」。

$\angle s=360°-\angle\gamma-(\angle\alpha+\angle\alpha')-(\angle\theta+\angle\theta')$

$=360°-180°+(\angle\theta+\angle\theta')-(\angle\alpha+\angle\alpha')-(\angle\theta+\angle\theta')$

$=\mathbf{180°-(\angle\alpha+\angle\alpha')}$

②假設連接正 n 邊形最短實線長度不為 0 (如圖 15)

$\angle\alpha+\angle OAB=180°$　　$\angle\alpha'+\angle OA'B'=180°$

$\angle s=\angle OAB-\angle\theta$　　$\angle s'=\angle OA'B'-\angle\theta'$

$=180°-\angle\alpha-\angle\theta$　　$=180°-\angle\alpha'-\angle\theta'$

所以$\overline{AO}=\cos(180°-\alpha-\theta)$　　$\overline{A'O}=\cos(180°-\alpha'-\theta')$

故連接實線最短長度為 $\cos(180°-\alpha-\theta)+\cos(180°-\alpha'-\theta')$

所以由①②結果，將正 n 邊形做線狀拼組，連接所需最短實線長度如下表，當連接正 n 邊形(n ≥ 4)與正 n′邊形(n′ > 4)時，因 $\alpha+\alpha'>180°$，所以連接最短實線長度皆為 L。

線狀拼組 $n+n'$	$\alpha+\alpha'$	s	θ	θ'	$\theta+\theta'$	最短實線長度
三+三	$60°+60°$	60°	$0°<\theta\leq30°$	$0°<\theta'\leq30°$	$0°<\theta+\theta'\leq60°$	0
三+四	$60°+90°$	30°	$0°<\theta\leq30°$	$0°<\theta'\leq45°$	$0°<\theta+\theta'\leq30°$	0
					$30°<\theta+\theta'\leq75°$	L
三+五	$60°+108°$	12°	$0°<\theta\leq30°$	$0°<\theta'\leq54°$	$0°<\theta+\theta'\leq12°$	0
					$12°<\theta+\theta'\leq84°$	L
三+六	$60°+120°$	0°	$0°<\theta\leq30°$	$0°<\theta'\leq60°$	$0°<\theta+\theta'\leq90°$	L
四+四	$90°+90°$	0°				

③特殊例子 (如圖 16)

正方形與正方形拼組時，ABCD 4 條實、虛線會平行，

所以摺疊後 AB 翼會摺到 BC 翼內，

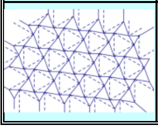
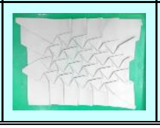
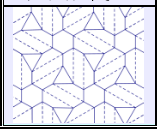
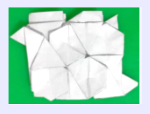
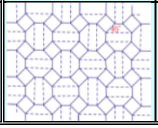
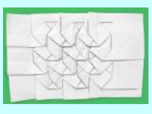
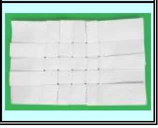
CD 翼也會摺到 BC 翼內，而θ愈大，翼寬愈粗，

所以**最短連接實線長度為 p 的翼寬，$p=max\{\theta,\theta'\}$，**

即為 $\sin p$。

研究六、探討正 n 邊形 n 個翼寬全相等，能否網狀拼組壓平摺疊。

(一)製作成果 (以下列 3 個摺痕展開圖為例，其餘放置桌面展示)

摺痕展開圖	摺疊後(正面)	摺疊後(背面)	摺痕展開圖	摺疊後(正面)	摺疊後(背面)	摺痕展開圖	摺疊後(正面)	摺疊後(背面)
								

(二)發現與歸納 **只有正三角形與正三角形、正方形與正方形、正三角形與正六邊形這 3 種情形能網狀拼組壓平摺疊。**

理由：(如圖 34、35，紅線為正 n 邊形的邊)

(1)網狀拼組實線連接長度為 0 (如圖 17)

由研究五線狀拼組得知，只有正三角形與正三角形、正三角形與正方形、正三角形與正五邊形這 3 種情形，實線連接長度為 0 且 $s\geq0$。

假設網狀拼組後，虛線圍成 Q 邊形(Q∈ N，Q≥ 3)

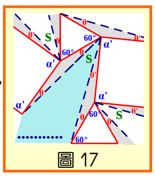


圖 17

$[180°-(\theta+\theta')]+60°+\alpha'+\theta+\theta'+s=360°\rightarrow\boldsymbol{\alpha'+s=120°}$

網狀拼組 三+n′	α'	s	$Q\,s=(Q-2)\times180°$
三+三	**60°**	**60°**	$\mathbf{Q\times60°=(Q-2)\times180°\rightarrow Q=3}$
三+四	90°	30°	$Q\times30°=(Q-2)\times180°\rightarrow$ Q不是正整數
三+五	108°	12°	$Q\times12°=(Q-2)\times180°\rightarrow$ Q不是正整數

所以**只有正三角形與正三角形能網狀拼組壓平摺疊。**

(2)網狀拼組實線連接長度不為 0 (如圖 18)

假設網狀拼組後，實、虛線圍成 R 邊形(R∈ N，R 是偶數，R≥ 4)

$\frac{R}{2}(180°-\alpha)+\frac{R}{2}(180°-\alpha')=(R-2)\times180°$

$\rightarrow\frac{R}{2}(360°-\alpha-\alpha')=180°\times R-360°\ \rightarrow(\alpha+\alpha')R=720°$

網狀拼組 $n+n'$	$\alpha+\alpha'$	R
三+三	$60°+60°=120°$	6
三+四	$60°+90°=150°$	不是正整數
三+五	$60°+108°=168°$	不是正整數
三+六	$60°+120°=180°$	4
四+四	$90°+90°=180°$	4
五+五	$108°+108°=216°$	不是正整數
六+六	$120°+120°=240°$	3 (不合)

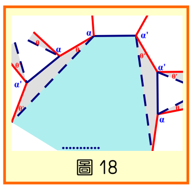
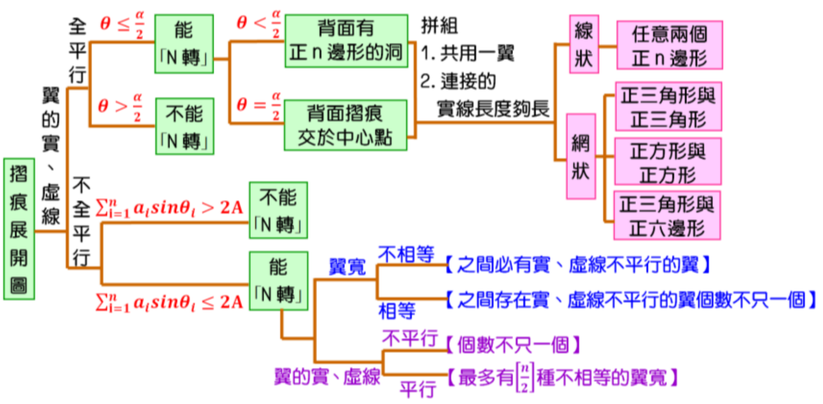


圖 18

所以**只有正三角形與正三角形、正方形與正方形、正三角形與正六邊形這 3 種情形能網狀拼組壓平摺疊。**

伍、結　論

在「**$\angle\varphi+\angle\theta_i=180°$，$0°<\theta_i<\alpha$，虛線朝同一方向**」的條件下，研究結果整理如下：



陸、未來展望

1. 本研究探討出當摺痕交於正 n 邊形內部一點，$\sum_{i=1}^{n}a_i sin\theta_i\leq2A$ 時，能摺出「N 轉」，若摺痕交於正 n 邊形外部一點時，摺痕展開圖須符合何種條件，才能摺出「N 轉」。
2. 本研究探討正 n 邊形(凸 n 邊形)能「N 轉」的繪圖條件，未來可以延伸探討凹 n 邊形(如星形、十字架形…等)應具備何種條件，才能透過摺紙方式讓該形狀轉動起來。
3. 拼組「N 轉」的成果，正面、背面皆具有美麗、有規律性的排列樣貌，同時也有縮小面積、增加厚度的性質，可以將此特性應用在生活中，如杯墊、地墊、窗簾、服飾的設計…等。

柒、參考資料

1. 湯瑪斯．赫爾(2018)。數學摺紙計畫 - 30 個課程活動探索。**方轉摺疊**(241-245 頁)。新北市：世茂。
2. 蘇卓英、李政憲(2017)。從鑲嵌摺紙到正多邊形應用。**科學研習月刊，56(5)**，42-47。
3. 李政憲(2019)。藝數摺學。**摺紙數學初體驗 - 從鑲嵌摺紙談對稱的應用**(22-34 頁)。臺北市：臉譜。
4. **前川定理**(2019)。維基百科。取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%89%8D%E5%B7%9D%E5%AE%9A%E