

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國小組 數學科

探究精神獎

080404

星際任務

學校名稱：新北市樹林區文林國民小學

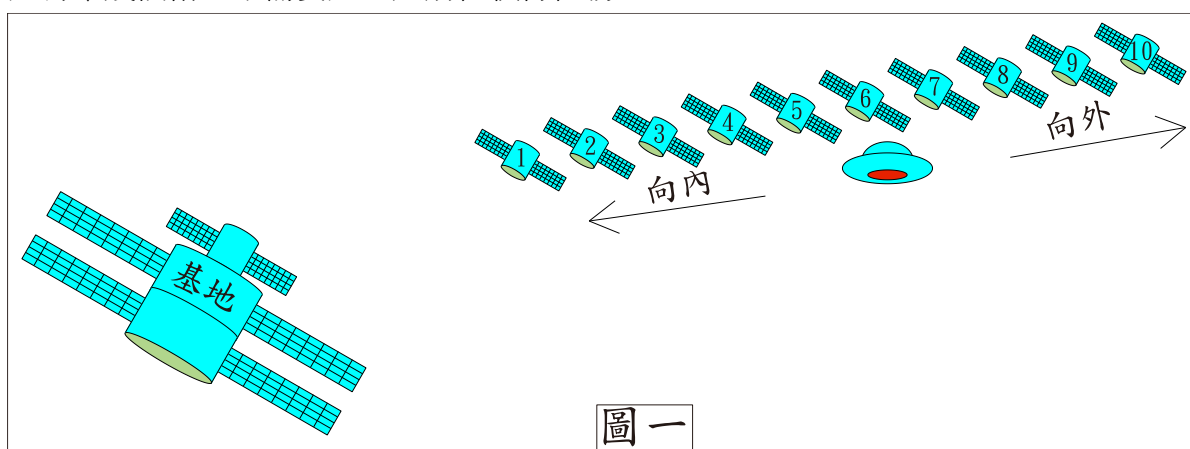
作者： 小六 周柏亨 小五 陳青宏 小四 廖翊淇	指導老師： 林忠正 王郁惠
-----------------------------------	---------------------

關鍵詞：節能、最小值

摘要

在一座太空基地外，有 10 個等距離的衛星站排成一列(如圖一)。現有 10 個太空人分別前往相異的衛星站執行任務，他們從基地搭乘飛行船一同前往，但飛行船只能降落一次，所以有些太空人還要再利用推進器才能抵達要到的衛星站。當太空人向外太空方向(向外)移動一個站距，推進器要耗能 5 根燃料棒；向基地方向(向內)移動一個站距，推進器要耗能 2 根燃料棒，那麼飛行船要降落在哪一個衛星站，才能使這 10 個太空人的總耗能最小？

我們將上述推進器向外、向內的耗能及衛星站一般化，並改變情境，亦即並非每個太空人都要搭飛行船抵達衛星站，也可以只靠推進器抵達；或者並非每個衛星站都有任務要執行，可以只有某幾個衛星站需要太空人前往執行任務。



壹、研究動機

本研究是在大家腦力激盪下，將建中通訊解題中的一道題目修改而來，修改後的題目如下：在一個遙遠的星際，有一座太空基地。基地外有 n 個等距離的衛星站排成一列(如圖一)，現在要派太空人前往執行任務。但基地的飛行船都去執行其他任務，只剩下一艘老舊的飛行船可以使用，而它的電池故障了，備用電池只能讓它啟動一次，因此飛行船只能選擇其中一個衛星站降落。現有 n 個太空人搭乘此飛行船從基地出發，他們分別到相異的衛星站執行任務，在飛行船降落後，太空人要依靠推進器才能抵達衛星站。因為引力的關係，太空人往基地方向(向內)移動一個衛星站距，要耗能 d 根燃料棒，往外太空方向(向外)移動一個衛星站距，要耗能 u 根燃料棒，此時飛行船要降落在哪一個衛星站，才可使得這 n 個太空人的總耗能最小？

究竟要降落在哪一個衛星站呢？這引起我們的興趣，於是開啟我們一連串的探討。

貳、研究目的

- 一、有 n 個衛星站、 n 個太空人，且這 n 個太空人都要搭飛行船到相異的衛星站執行任務。此時，太空人使用推進器向外移動一個站距要耗能 u 根燃料棒，向內移動一個站距要耗能 d 根燃料棒，若飛行船只能降落一次，那麼要降落在哪一個衛星站，才能使這 n 個太空人移動的總耗能最小？並找出其總耗能。
- 二、承一，但這 n 個太空人並非都要搭飛行船到相異的衛星站執行任務。那麼要降落在哪一個衛星站，才能使這 n 個太空人移動的總耗能最小？並找出其總耗能。
- 三、承一，但只有 m 個太空人($m < n$)，這 m 個太空人都要搭飛行船到相異的衛星站執行任務。那麼要降落在哪一個衛星站，才能使這 m 個太空人移動的總耗能最小？並找出其總耗能。

參、研究器材及設備

紙、筆、電腦、計算機。

肆、研究過程

一、文獻探討

- (一)以下是建中第 149 期通訊解題中的一道題目，我們根據此題目改編成我們探討的主題。
- (二)題目：一棟 33 層的舊倉儲大樓僅有一部貨梯停在第一層，受到功能限制它最多能容納 32 個貨物，而且每次只能在第 2 層至第 33 層選擇某一層停留一次，其餘每個貨物則需要往上或往下搬動，若往下搬動一層樓梯會需要用到 1 個人力，而往上走一層則需運用到 3 個人力。現有 32 個貨物在第一層，若要把這些貨物運送到第 2 層至第 33 層每層各一個，試問電梯停留在哪一層會使得整體人力運用到最少？又最少的人力需求為多少人次？（注意有些貨物可以不搭貨梯直接運用人力搬移）
- (三)此道通訊解題公布的解法是使用二元二次的配方法，而我們將情境改變並一般化後，以觀察、歸納、驗證的方式得到結果。

二、定義

(一)名詞解釋

1. 向外耗能 u ：太空人向外太空方向移動一個站距，推進器要消耗的燃料棒數，以 u 表示。
2. 向內耗能 d ：太空人向基地方向移動一個站距，推進器要消耗的燃料棒數，以 d 表示。
3. 站距：相鄰兩衛星站之間的距離為一個站距，連續三個衛星站之間有兩個站距。

(二)符號

1. s ：衛星站， $s=1$ 表示第 1 個衛星站， $s \in \mathbb{N}$ 。

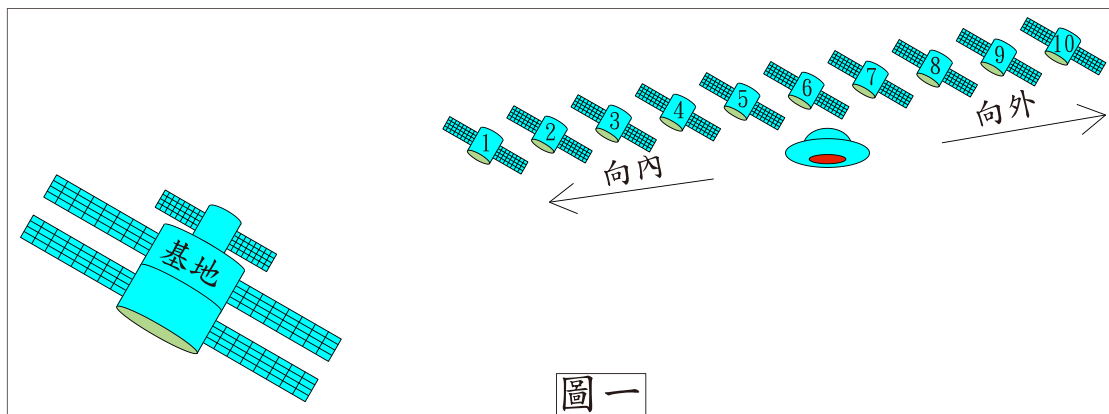
2. a_n : 太空人要抵達第 n 個衛星站的耗能, $a_n \in \mathbb{N}$ 。
3. A_s : 總耗能, 飛行船降落在第 s 個衛星站時, 所有太空人移動的耗能總和, $A_s \in \mathbb{N}$ 。

$$A_s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n$$

(三) $u > d$: 虛擬因引力關係, 使用推進器向外太空方向移動較耗能, 所以規定 $u > d$ 。

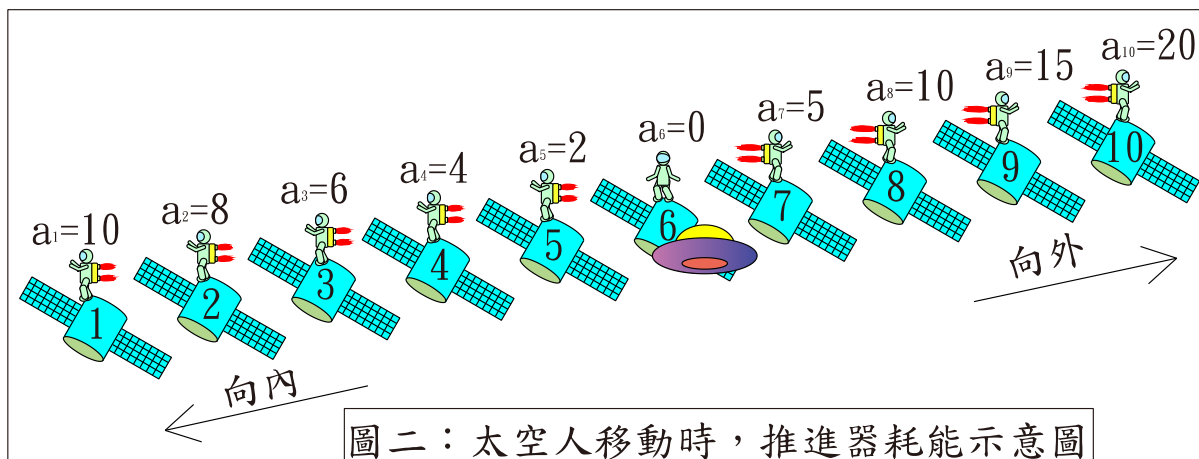
三、研究方法

研究一: 給定 n 個衛星站、 n 個太空人, 這 n 個太空人都搭飛行船, 太空人下船後, 向外移動一個站距, 推進器要耗能 u 根燃料棒; 向內移動一個站距, 推進器要耗能 d 根燃料棒, 探討飛行船降落在第 s 個衛星站時, 這 n 個太空人移動的總耗能(A_s), 並找出這 n 個太空人移動所需總耗能最小的衛星站。



A. 求飛行船降落在各衛星站時的總耗能 A_s

例一: 給定 10 個衛星站、10 個太空人, 且這 10 個太空人都搭飛行船, 若向外耗能 5、向內耗能 2, 飛行船降落在第 6 個衛星站時, A_6 是多少?



【解】：1.將飛行船降落在各衛星站，太空人移動的耗能情況整理成下表一。

2.飛行船降落在第 6 個衛星站，這 10 個太空人移動的總耗能

$$A_6=10+8+6+4+2+0+5+10+15+20=80。$$

表一 $n=10$ 、 $u=5$ 、 $d=2$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	A_s
$s=1$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	225
$s=2$	2	0	5	10	15	20	25	30	35	40	182
$s=3$	4	2	0	5	10	15	20	25	30	35	146
$s=4$	6	4	2	0	5	10	15	20	25	30	117
$s=5$	8	6	4	2	0	5	10	15	20	25	95
$s=6$	10	8	6	4	2	0	5	10	15	20	80
$s=7$	12	10	8	6	4	2	0	5	10	15	72
$s=8$	14	12	10	8	6	4	2	0	5	10	71
$s=9$	16	14	12	10	8	6	4	2	0	5	77
$s=10$	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	90

引理一：給定 n 個衛星站、 n 個太空人，且這 n 個太空人都搭飛行船，若向外耗能 5、向內耗能 2，則飛行船降落在第 s 個衛星站時，這 n 個太空人移動的總耗能

$$A_s = 5 \sum_{t=s+1}^n (t-s) + 2 \sum_{t=1}^{s-1} (s-t)$$

【說明】：1.在第 s 個衛星站下船後，分別要抵達第 $(s+1)$ 個衛星站、第 $(s+2)$ 個衛星站、……第 n 個衛星站的太空人，他們要往外太空方向移動。現在考慮其中一太空人要到第 t 個衛星站，則他身上的推進器要耗能 $5(t-s)$ 根燃料棒，故所有向外移動的太空人的總耗能 $= 5 \sum_{t=s+1}^n (t-s)$ 。

2.在第 s 個衛星站下船後，分別要抵達第 1 個衛星站、第 2 個衛星站、……第 $(s-1)$ 個衛星站的太空人，他們要往基地方向移動。現在考慮其中一太空人要到第 t 個衛星站，則他身上的推進器要耗能 $2(s-t)$ 根燃料棒，故所有向內移動的太空人的總耗能 $= 2 \sum_{t=1}^{s-1} (s-t)$ 。

3.由上述 1、2 知，飛行船降落在第 s 個衛星站時，

太空人移動的總耗能 = 太空人向外移動的總耗能 + 太空人向內移動的總耗能，即

$$A_s = 5 \sum_{t=s+1}^n (t-s) + 2 \sum_{t=1}^{s-1} (s-t)$$

定理一：給定 n 個衛星站、 n 個太空人，且這 n 個太空人都搭飛行船，若向外耗能 u 、向內耗能 d ，則飛行船降落在第 s 個衛星站時，這 n 個太空人移動的總耗能

$$A_s = u \sum_{t=s+1}^n (t-s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (s-t)$$

【說明】：由引理一的說明知，若向外耗能 5 換成 u ，向內耗能 2 換成 d ，同樣可推得飛行船降落在第 s 個衛星站時，這 n 個太空人移動的總耗能

$$A_s = u \sum_{t=s+1}^n (t-s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (s-t)$$

B. **比較**相鄰兩衛星站，太空人移動的總耗能關係，求總耗能最小的衛星站

將衛星站的個數與太空人的人數**一般化**，整理成表二。

表二 $u=5$ 、 $d=2$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	...	a_n	A_s
$s=1$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	...	$5(n-1)$	A_1
$s=2$	2	0	5	10	15	20	25	30	35	...	$5(n-2)$	A_2
$s=3$	4	2	0	5	10	15	20	25	30	...	$5(n-3)$	A_3
$s=4$	6	4	2	0	5	10	15	20	25	...	$5(n-4)$	A_4
$s=5$	8	6	4	2	0	5	10	15	20	...	$5(n-5)$	A_5
$s=6$	10	8	6	4	2	0	5	10	15	...	$5(n-6)$	A_6
$s=7$	12	10	8	6	4	2	0	5	10	...	$5(n-7)$	A_7
$s=8$	14	12	10	8	6	4	2	0	5	...	$5(n-8)$	A_8
$s=9$	16	14	12	10	8	6	4	2	0	...	$5(n-9)$	A_9
...
$s=n$	$2(n-1)$	$2(n-2)$	$2(n-3)$	$2(n-4)$	$2(n-5)$	$2(n-6)$	$2(n-7)$	$2(n-8)$	$2(n-9)$...	0	A_n

【說明】：1. 觀察表二發現： $A_2 = A_1 - 5 \times (n-1) + 2 \times (2-1)$

$$A_3 = A_2 - 5 \times (n-2) + 2 \times (3-1)$$

$$A_4 = A_3 - 5 \times (n-3) + 2 \times (4-1)$$

$$A_5 = A_4 - 5 \times (n-4) + 2 \times (5-1)$$

$$A_6 = A_5 - 5 \times (n-5) + 2 \times (6-1)$$

$$A_7 = A_6 - 5 \times (n-6) + 2 \times (7-1)$$

$$A_8 = A_7 - 5 \times (n-7) + 2 \times (8-1)$$

...

$$A_s = A_{s-1} - 5 [n - (s-1)] + 2(s-1)$$

2. **結論**： n 個衛星站、 n 個太空人， $u=5$ 、 $d=2$ 時，比較相鄰兩衛星站，太空人移動

的總耗能關係為 $A_s = A_{s-1} - 5 [n-(s-1)] + 2(s-1)$

承表二，將向外耗能、向內耗能一般化，整理成表三。

表三 向外耗能 u、向內耗能 d

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	...	a_n	A_s
s=1	0	u	2u	3u	4u	5u	6u	7u	8u	...	$u(n-1)$	A_1
s=2	d	0	u	2u	3u	4u	5u	6u	7u	...	$u(n-2)$	A_2
s=3	2d	d	0	u	2u	3u	4u	5u	6u	...	$u(n-3)$	A_3
s=4	3d	2d	d	0	u	2u	3u	4u	5u	...	$u(n-4)$	A_4
s=5	4d	3d	2d	d	0	u	2u	3u	4u	...	$u(n-5)$	A_5
s=6	5d	4d	3d	2d	d	0	u	2u	3u	...	$u(n-6)$	A_6
s=7	6d	5d	4d	3d	2d	d	0	u	2u	...	$u(n-7)$	A_7
s=8	7d	6d	5d	4d	3d	2d	d	0	u	...	$u(n-8)$	A_8
s=9	8d	7d	6d	5d	4d	3d	2d	d	0	...	$u(n-9)$	A_9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
s=n	$d(n-1)$	$d(n-2)$	$d(n-3)$	$d(n-4)$	$d(n-5)$	$d(n-6)$	$d(n-7)$	$d(n-8)$	$d(n-9)$...	0	A_n

【說明】：1.觀察表三發現: $A_2 = A_1 - ux(n-1) + dx(2-1)$

$$A_3 = A_2 - ux(n-2) + dx(3-1)$$

$$A_4 = A_3 - ux(n-3) + dx(4-1)$$

$$A_5 = A_4 - ux(n-4) + dx(5-1)$$

$$A_6 = A_5 - ux(n-5) + dx(6-1)$$

$$A_7 = A_6 - ux(n-6) + dx(7-1)$$

$$A_8 = A_7 - ux(n-7) + dx(8-1)$$

⋮

$$A_s = A_{s-1} - u [n-(s-1)] + d(s-1)$$

2.【結論】：n 個衛星站、n 個太空人，向外耗能 u、向內耗能 d 時，比較相鄰兩衛星站，太空人移動的總耗能關係為 $A_s = A_{s-1} - u [n-(s-1)] + d(s-1)$

3.我們將上述 2 的結論稱作引理二。

4.分析許多表格，和推敲上述 2 的結論，找到“減掉的耗能”與“增加的耗能”，兩者間的關係由減多加少變成減少加多(或減與加相等)時，會有太空人移動所需總耗能最小的衛星站，如下表四的 s=8，將這關係寫成引理三。

引理二：給定 n 個衛星站、n 個太空人，且這 n 個太空人都搭飛行船，若向外耗能 u、向內耗能 d，則 $A_s = A_{s-1} - u [n-(s-1)] + d(s-1)$ 。

引理三：給定 n 個衛星站、 n 個太空人，且這 n 個太空人都搭飛行船，當向外耗能 u 、向內耗能 d 時，若 $u[n-(s-1)] > d(s-1)$ ，且 $u(n-s) \leq ds$ ，會有這 n 個太空人移動所需總耗能最小的衛星站。

【說明】：1.由引理二知， $A_s = A_{s-1} - u[n-(s-1)] + d(s-1)$

2.由表三知，從第 1 個衛星站到第 n 個衛星站，飛行船越往外太空降落，減掉“ $u[n-(s-1)]$ ”的值越來越小，而增加“ $d(s-1)$ ”的值越來越大。

3.當“減掉的耗能”與“增加的耗能”，兩者之間的關係由減多加少變成①減少加多或②減與加相等(“減掉的耗能”與“增加的耗能”相等)時，會有最小總耗能的衛星站(如下表四的第 8 個衛星站)。

4.由引理二的 $A_s = A_{s-1} - u[n-(s-1)] + d(s-1)$ ，可推得 $A_{s+1} = A_s - u(n-s) + ds$

5.由上述 3、4 知，當： $u[n-(s-1)] > d(s-1)$ ，且 $u(n-s) \leq ds$ 時，第 s 個衛星站為太空人移動所需總耗能最小的衛星站。

例二：給定 11 個衛星站、11 個太空人，且這 11 個太空人都搭飛行船，若 $u=5$ 、 $d=2$ ，則這 11 個太空人移動所需總耗能最小的衛星站為何？

【解】：1.由引理三知， $5[11-(s-1)] > 2(s-1)$ ，且 $5(11-s) \leq 2s$ ，可得 $7\frac{6}{7} \leq s < 8\frac{6}{7}$ ，

又 $s \in \mathbb{N}$ ，故 $s=8$ ，所以第 8 個衛星站為太空人移動所需總耗能最小的衛星站，如下表四所示。

表四 $n=11$ 、 $u=5$ 、 $d=2$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	A_s
$s=1$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	275
$s=2$	2	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	227
$s=3$	4	2	0	5	10	15	20	25	30	35	40	186
$s=4$	6	4	2	0	5	10	15	20	25	30	35	152
$s=5$	8	6	4	2	0	5	10	15	20	25	30	125
$s=6$	10	8	6	4	2	0	5	10	15	20	25	105
$s=7$	12	10	8	6	4	2	0	5	10	15	20	92
$s=8$	14	12	10	8	6	4	2	0	5	10	15	86
$s=9$	16	14	12	10	8	6	4	2	0	5	10	87
$s=10$	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	5	95
$s=11$	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	110

我們解引理三中的兩個不等式，得到 s 的範圍是 $\frac{un}{u+d} \leq s < \frac{un}{u+d} + 1$ ，將此結果稱作定理二。

定理二：給定 n 個衛星站、 n 個太空人，且這 n 個太空人都搭飛行船，若向外耗能 u 、向內耗能 d ，則這 n 個太空人移動所需總耗能最小的衛星站 s ，會介於 $\frac{un}{u+d}$ 和 $\frac{un}{u+d} + 1$ 之間，亦即 $\frac{un}{u+d} \leq s < \frac{un}{u+d} + 1$ 。

【說明一】：1. 由引理二知：

$$A_s = A_{s-1} - u [n - (s-1)] + d(s-1)$$

$$A_{s+1} = A_s - u(n-s) + ds$$

2. 由引理三知，當太空人移動總耗能的變化由減多加少變成①減少加多，或②減與加相等（“減掉的耗能”與“增加的耗能”相等）時，會有太空人移動所需總耗能最小的衛星站，即

$$u [n - (s-1)] > d(s-1) \quad , \quad \text{且} \quad u(n-s) \leq ds$$

3. 猜想第 s 個衛星站為太空人移動所需總耗能最小的衛星站，則由上述 1、2 可推

$$\text{知，①} u [n - (s-1)] > d(s-1) \Rightarrow \frac{un}{u+d} + 1 > s$$

$$\text{②} u(n-s) \leq ds \Rightarrow \frac{un}{u+d} \leq s$$

$$\text{③ 由上述①、②得} \frac{un}{u+d} \leq s < \frac{un}{u+d} + 1$$

④ 等號成立時， $A_s = A_{s+1}$ ，第 s 個衛星站和第 $s+1$ 個衛星站，同時為太空人移動所需總耗能最小的衛星站。

【說明二】：猜想飛行船降落在第 s 個衛星站，會有太空人移動所需最小總耗能，那麼飛行船降落在第 $(s-1)$ 個、第 $(s+1)$ 個衛星站時，太空人移動所需的總耗能，顯然會大於或等於降落在第 s 個衛星站時，太空人移動所需的總耗能，所以 $A_{s-1} - A_s > 0$ ， $A_{s+1} - A_s \geq 0$ 。

(1) $A_{s-1} - A_s$

$$\begin{aligned} &= u \sum_{t=s}^n [t - (s-1)] + d \sum_{t=1}^{s-2} [(s-1) - t] - u \sum_{t=s+1}^n (t-s) - d \sum_{t=1}^{s-1} (s-t) \\ &= \frac{(n-s+2)(n-s+1)}{2} \times u + \frac{(s-1)(s-2)}{2} \times d - \frac{(n-s+1)(n-s)}{2} \times u - \frac{s(s-1)}{2} \times d \\ &= u(n-s+1) - d(s-1) = un - us + u - ds + d \end{aligned}$$

因為 $A_{s-1} - A_s > 0$ ，所以 $(un - us + u - ds + d) > 0 \Rightarrow un + u + d > us + ds$ ，

可得 $s < \frac{un}{u+d} + 1$ 。

$$(2) A_{s+1} - A_s$$

$$= u \sum_{t=s+2}^n [t - (s+1)] + d \sum_{t=1}^s [(s+1) - t] - u \sum_{t=s+1}^n (t - s) - d \sum_{t=1}^{s-1} (s - t)$$

$$= \frac{(n-s-1)(n-s)}{2} \times u + \frac{s(s+1)}{2} \times d - \frac{(n-s+1)(n-s)}{2} \times u - \frac{s(s-1)}{2} \times d = us - un + ds$$

因為 $A_{s+1} - A_s \geq 0$ ，所以 $(us - un + ds) \geq 0 \Rightarrow us + ds \geq un$ ，可得 $s \geq \frac{un}{u+d}$

$$(3) \text{由(1)、(2)知 } \frac{un}{u+d} \leq s < \frac{un}{u+d} + 1。$$

C. 舉例說明定理一、定理二的應用

例三：給定 9 個衛星站、9 個太空人，且這 9 個太空人都搭飛行船，若 $u=4$ 、 $d=3$ ，則飛行船降落在哪一個衛星站，會使這 9 個太空人移動的總耗能最小？又此時的總耗能為何？

【解】：1. 由定理二知， $\frac{un}{u+d} \leq s < \frac{un}{u+d} + 1 \Rightarrow \frac{4 \times 9}{4+3} \leq s < \frac{4 \times 9}{4+3} + 1 \Rightarrow 5\frac{1}{7} \leq s < 6\frac{1}{7}$ ，又 $s \in \mathbb{N}$ ，

$\therefore s=6$ 。

2. 由定理一知，

$$A_s = u \sum_{t=s+1}^n (t - s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (s - t)$$

將 $s=6$ 帶入 $A_s \Rightarrow$

$$A_6 = 4 \sum_{t=6+1}^9 (t - 6) + 3 \sum_{t=1}^{6-1} (6 - t)$$

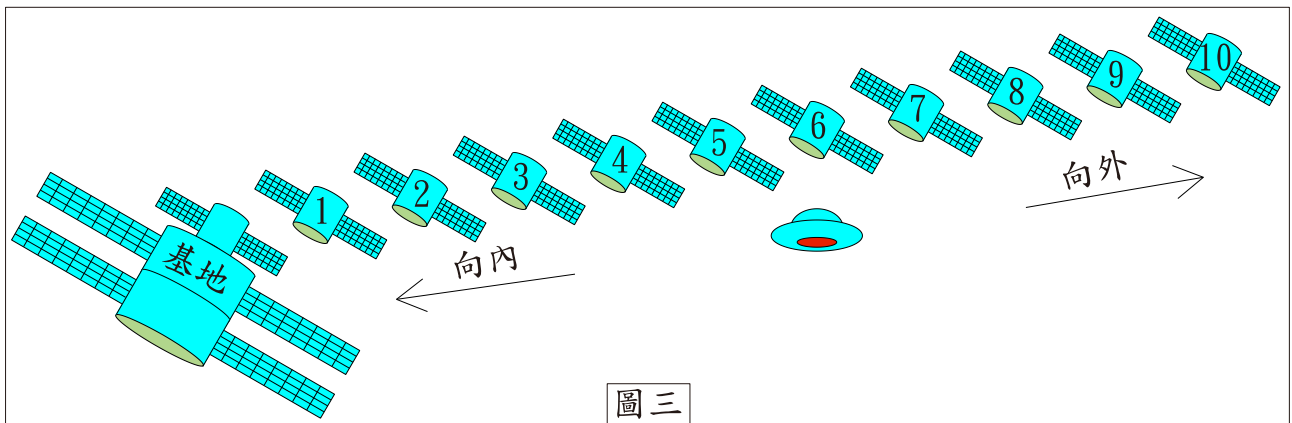
$$= 4 \times (1+2+3) + 3 \times (5+4+3+2+1) = 69$$

3. 下表五是 9 個衛星站、9 個太空人， $u=4$ 、 $d=3$ ，飛行船降落在每個衛星站，太空人移動的耗能情形。

表五 $n=9$ 、 $u=4$ 、 $d=3$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	A_s
$s=1$	0	4	8	12	16	20	24	28	32	144
$s=2$	3	0	4	8	12	16	20	24	28	115
$s=3$	6	3	0	4	8	12	16	20	24	93
$s=4$	9	6	3	0	4	8	12	16	20	78
$s=5$	12	9	6	3	0	4	8	12	16	70
$s=6$	15	12	9	6	3	0	4	8	12	69
$s=7$	18	15	12	9	6	3	0	4	8	75
$s=8$	21	18	15	12	9	6	3	0	4	88
$s=9$	24	21	18	15	12	9	6	3	0	108

研究二：給定 n 個衛星站、 n 個太空人，但這 n 個太空人並非都要搭飛行船(有些太空人可不搭飛行船，直接向外移動抵達衛星站)，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，探討飛行船降落在第 s 個衛星站時，這 n 個太空人移動的總耗能(A_s)，並找出這 n 個太空人移動所需總耗能最小的衛星站。



1. 第一個衛星站和太空基地間的距離恰好等於相鄰兩衛星站間的距離，所以有些太空人可不搭飛行船，直接靠推進器就可抵達衛星站執行任務。
2. 哪些太空人不搭飛行船？
 - (1) 若太空人不搭飛行船的耗能小於搭飛行船後的耗能，則太空人不搭飛行船。
 - (2) 對於要去第 s 個衛星站之前的太空人，假設他要去第 k 個衛星站(其中 $1 \leq k \leq s-1$)，他不搭飛行船的耗能為 uk ，搭飛行船的耗能 $d(s-k)$ ，因此當 $uk \leq d(s-k)$ 時，他不搭飛行船。

例四：給定 10 個衛星站、10 個太空人，但這 10 個太空人並非都要搭飛行船，若 $u=3$ 、 $d=2$ ，當飛行船降落在第 8 個衛星站時，要到第 3 個衛星站和第 4 個衛星站的太空人是否要搭飛行船？

【解】：1. 太空人由基地直接到第 3 個衛星站的耗能為 9；若搭飛行船到第 8 個衛星站後，再到第 3 個衛星站的耗能為 10，所以要到第 3 個衛星站的太空人不搭飛行船。

2. 太空人由基地直接到第 4 個衛星站的耗能為 12；若搭飛行船到第 8 個衛星站後，再到第 4 個衛星站的耗能為 8，所以要到第 4 個衛星站的太空人要搭飛行船。如下表六。

表六 $n=10, u=3, d=2$

A	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	A_s
$s=1$	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	135
$s=2$	$3/2$	0	3	6	9	12	15	18	21	24	110
$s=3$	$3/4$	2	0	3	6	9	12	15	18	21	89
$s=4$	$3/6$	$6/4$	2	0	3	6	9	12	15	18	72
$s=5$	$3/8$	$6/6$	4	2	0	3	6	9	12	15	60
$s=6$	$3/10$	$6/8$	$9/6$	4	2	0	3	6	9	12	51
$s=7$	$3/12$	$6/10$	$9/8$	$12/6$	4	2	0	3	6	9	47
$s=8$	$3/14$	$6/12$	$9/10$	$12/8$	6	4	2	0	3	6	47
$s=9$	$3/16$	$6/14$	$9/12$	$12/10$	8	6	4	2	0	3	51
$s=10$	$3/18$	$6/16$	$9/14$	$12/12$	$15/10$	8	6	4	2	0	60

【註】：表六中的 x/y ， x 表示不搭飛行船，直接到衛星站的耗能； y 表示搭飛行船到第 s 個衛星站後，再到欲抵達的衛星站的耗能。

D. 找出 k (要抵達第 k 個衛星站之前的太空人不搭飛行船)

引理四：給定 n 個衛星站、 n 個太空人，但這 n 個太空人並非都要搭飛行船，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，當飛行船降落在第 s 個衛星站時，要抵達第 k ($1 \leq k \leq s-1$) 個衛星站之前的太空人選擇不搭飛行船，那麼 $k = \left\lfloor \frac{ds}{u+d} \right\rfloor$ ，其中 $\left\lfloor \frac{ds}{u+d} \right\rfloor$ 為 $\frac{ds}{u+d}$ 取高斯。

【說明】：1. 要到第 k 個衛星站的太空人不搭飛行船的耗能為 uk ，搭飛行船的耗能為 $d(s-k)$ ，當 $uk \leq d(s-k)$ 時，他們不搭飛行船。

2. 由 $uk \leq d(s-k)$ ，可得 $k \leq \frac{ds}{u+d}$ ，但 k 為整數，故 $k = \left\lfloor \frac{ds}{u+d} \right\rfloor$ ，所以要到第 $1, 2, \dots, k$ 個衛星站的太空人選擇不搭飛行船，則 $k = \left\lfloor \frac{ds}{u+d} \right\rfloor$ 。

E. 有些太空人不搭飛行船，找出飛行船降落在各衛星站時，這 n 個太空人移動的總耗能 (A_s)

例五：給定 10 個衛星站、10 個太空人，但這 10 個太空人並非都要搭飛行船，若 $u=6, d=3$ ，則飛行船降落在第 7 個衛星站時，這 10 個太空人移動的總耗能為何？

【解】：1. 若 10 個太空人都搭飛行船， $A_7 = 6 \times (1+2+3) + 3 \times (6+5+4+3+2+1) = 99$ 。

2. 第 k 個衛星站之前(含第 k 站)的人不搭飛行船，則由引理三知 $k = \left\lfloor \frac{ds}{u+d} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3 \times 7}{6+3} \right\rfloor = 2$ ，所以要抵達第 1、2 個衛星站的人選擇不搭飛行船。

3. 上述 1. 中的 A_7 要減掉不搭飛行船的太空人向內的總耗能 $3 \times (6+5)$ ，再加不搭飛行船直

接抵達衛星站的總耗能 $6 \times (1+2)$ 。

4.由上述 1.2.3.知， A_7 =全部的太空人都搭飛行船的總耗能－不搭飛行船的太空人向內的總耗能＋不搭飛行船直接抵達衛星站的總耗能，亦即

$$A_7 = 6 \times (1+2+3) + 3 \times (6+5+4+3+2+1) - 3 \times (6+5) + 6 \times (1+2) = 84。$$

5.將上述 4 的關係，寫成定理三。

定理三：給定 n 個衛星站、 n 個太空人，但這 n 個太空人並非都要搭飛行船，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，則飛行船降落在第 s 個衛星站時，這 n 個太空人移動的總耗能

$$A_s = u \sum_{t=s+1}^n (t-s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (s-t) - d \sum_{t=1}^{\left\lfloor \frac{ds}{u+d} \right\rfloor} (s-t) + u \sum_{t=1}^{\left\lfloor \frac{ds}{u+d} \right\rfloor} t$$

【說明】：1.由引理四知，若第 k 個衛星站之前的太空人不搭飛行船，則 $k = \left\lfloor \frac{ds}{u+d} \right\rfloor$ 。

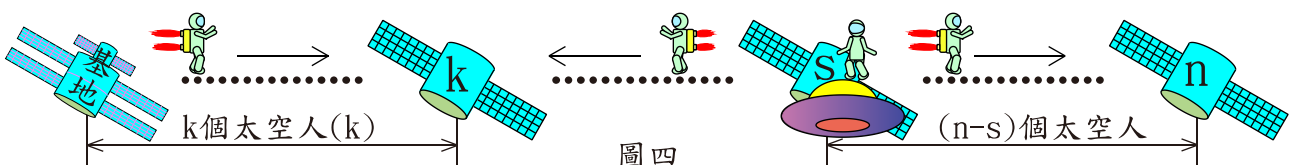
2. A_s = 全部的太空人都搭飛行船的總耗能－不搭飛行船的太空人向內的總耗能
＋不搭飛行船的太空人向外的總耗能

$$A_s = u \sum_{t=s+1}^n (t-s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (s-t) - d \sum_{t=1}^{\left\lfloor \frac{ds}{u+d} \right\rfloor} (s-t) + u \sum_{t=1}^{\left\lfloor \frac{ds}{u+d} \right\rfloor} t$$

3.若 $\left\lfloor \frac{ds}{u+d} \right\rfloor = 0$ ，表示全部的太空人都搭飛行船。

F. 找出太空人移動所需總耗能最小的衛星站

我們觀察很多表格(如例六中的表七)發現：當「不搭飛行船，只靠推進器向外移動抵達各衛星站的太空人數」(k)和「搭飛行船到第 s 個衛星站後，再向外移動抵達各衛星站的太空人數」($n-s$)相等，即 $k=n-s$ 時，第 s 個衛星站是太空人移動所需總耗能最小的衛星站(如圖四)。



例六:給定 15 個衛星站、15 個太空人，但這 15 個太空人並非都要搭飛行船，若向外耗能 4、向內耗能 3，則這 15 個太空人移動所需總耗能最小的衛星站為何？

【解】:1.依題意將飛行船降落在各衛星站時，太空人要抵達各衛星站的耗能填入表七中。

2.觀察表七發現：第 11 個衛星站為太空人移動所需總耗能最小的衛星站，即 $s=11$ 。

3.有 4 個太空人不搭飛行船 $\Rightarrow k=4$ ； $n-s=15-11=4 \Rightarrow k=n-s$ 。

4.觀察表七知， $A_{11} < A_{10}$ ， $A_{11} < A_{12}$ ，故我們猜想，若 $k=n-s$ 時，則(1) $A_s < A_{s-1}$ ，將此關係寫引理五；(2) $A_s < A_{s+1}$ ，將此關係寫引理六。

表七 $n=15$ 、 $u=4$ 、 $d=3$

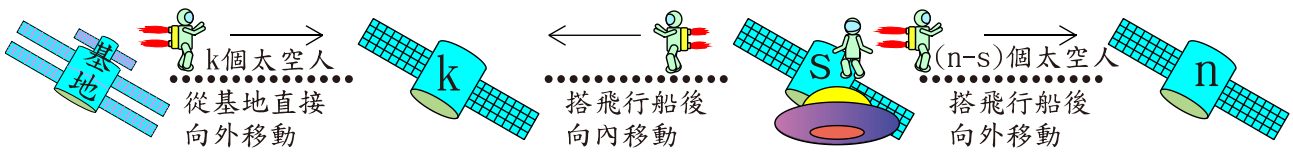
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	A_s
$s=1$	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	420
$s=2$	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	367
$s=3$	4	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	319
$s=4$	4	6	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	277
$s=5$	4	8	6	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	241
$s=6$	4	8	9	6	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	210
$s=7$	4	8	12	9	6	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	186
$s=8$	4	8	12	12	9	6	3	0	4	8	12	16	20	24	28	166
$s=9$	4	8	12	15	12	9	6	3	0	4	8	12	16	20	24	153
$s=10$	4	8	12	16	15	12	9	6	3	0	4	8	12	16	20	145
$s=11$	4	8	12	16	18	15	12	9	6	3	0	4	8	12	16	143
$s=12$	4	8	12	16	20	18	15	12	9	6	3	0	4	8	12	147
$s=13$	4	8	12	16	20	21	18	15	12	9	6	3	0	4	8	156
$s=14$	4	8	12	16	20	24	21	18	15	12	9	6	3	0	4	172
$s=15$	4	8	12	16	20	24	24	21	18	15	12	9	6	3	0	192

引理五：給定 n 個衛星站、 n 個太空人，但這 n 個太空人並非都要搭飛行船，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，當 $k=n-s$ 時， $A_{s-1} > A_s$ 。

【說明】：(1) 當 $k=n-s$ ，太空人向內、向外移動的情形如圖六，飛行船降落在第 s 個衛星站時，太空人移動的總耗能

$$A_s = a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{(k+1)} + a_{(k+2)} + \dots + a_{(s-1)} + a_s + a_{(s+1)} + a_{(s+2)} + \dots + a_n$$

$$= \underline{u + 2u + \dots + ku} + [s - (k+1)]d + [s - (k+2)]d + \dots + d + 0 + \underline{u + 2u + \dots + ku}$$



圖五

(2) 飛行船降落在第 $(s-1)$ 個衛星站的總耗能為

$$A_{s-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{(k+1)} + a_{(k+2)} + \dots + a_{(s-2)} + a_{(s-1)} + a_s + a_{(s+1)} + \dots + a_{(n-1)} + a_n$$

$$= u + 2u + \dots + ku + ((s-1) - (k+1))d + ((s-1) - (k+2))d + \dots + d + 0 + u + 2u + \dots + ku + (k+1)u$$

(3) 比較飛行船降落在第 s 個衛星站和第 $(s-1)$ 個衛星站的總耗能

$$A_{s-1} = u + 2u + \dots + ku + [s - (k+1)]d + [s - (k+2)]d + \dots + d + 0 + u + 2u + \dots + ku + (k+1)u$$

$$A_s = u + 2u + \dots + ku + [s - (k+1)]d + [s - (k+2)]d + \dots + d + 0 + u + 2u + \dots + ku$$

發現：① A_{s-1} 比 A_s 多一項 $(k+1)u$ 。

② A_s 比 A_{s-1} 多一項 $[s - (k+1)]d$ 。

推論： $(k+1)u > [s - (k+1)]d$ ，因為若 $(k+1)u \leq [s - (k+1)]d$ ，那麼要抵達第 $(k+1)$ 個衛星站的人不搭飛行船，這和猜想矛盾，所以 $(k+1)u > [s - (k+1)]d$ 。

結論： $A_{s-1} > A_s$ 。

引理六：給定 n 個衛星站、 n 個太空人，但這 n 個太空人並非都要搭飛行船，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，當 $k=n-s$ 時， $A_{s+1} \geq A_s$ 。

【說明】：(1)當 $k=n-s$ 時，飛行船降落在第 $(s+1)$ 個衛星站的總耗能為

$$A_{s+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{(k+1)} + a_{(k+2)} + \cdots + a_s + a_{(s+1)} + a_{(s+2)} + \cdots + a_n$$

$$= u + 2u + \cdots + ku + [(s+1)-(k+1)]d + [(s+1)-(k+2)]d + \cdots + d + 0 + u + \cdots + (k-1)u$$

(2)比較飛行船降落在第 s 個衛星站與第 $(s+1)$ 個衛星站的耗能

$$A_s = u + 2u + \cdots + ku + [s-(k+1)]d + [s-(k+2)]d + \cdots + d + 0 + u + 2u + \cdots + (k-1)u + ku$$

$$A_{s+1} = u + 2u + \cdots + ku + ((s+1)-(k+1))d + ((s+1)-(k+2))d + \cdots + d + 0 + u + 2u + \cdots + (k-1)u$$

【發現】：① A_s 比 A_{s+1} 多一項 ku 。

② A_{s+1} 比 A_s 多一項 $[(s+1)-(k+1)]d$ 。

【推論】： $[(s+1)-(k+1)]d = (s-k)d$ ， $(s-k)d \geq ku$ ，因為若 $(s-k)d < ku$ ，那麼要抵達第 k 個衛星站的人要搭飛行船，這和猜想矛盾，所以 $[(s+1)-(k+1)]d \geq ku$ 。

【結論】： $A_{s+1} \geq A_s$ ，當等號成立時，第 s 個衛星站和第 $(s+1)$ 個衛星站同為太空人移動所需總耗能最小的衛星站。

由引理五、引理六知：當 $k=n-s$ 時，第 s 個衛星站為太空人移動所需總耗能最小的衛星站，現在將引理四的 $k = \left\lfloor \frac{ds}{u+d} \right\rfloor$ 代入 $k=n-s$ 中，求出 s ，推得定理四。

定理四：給定 n 個衛星站、 n 個太空人，但這 n 個太空人並非都要搭飛行船，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，當 $k=n-s$ ，則這 n 個太空人移動所需總耗能最小的衛星站 s ，會介於 $\frac{u+d}{u+2d}n$ 和 $\frac{u+d}{u+2d}(n+1)$ 之間，即 $\frac{u+d}{u+2d}n \leq s < \frac{u+d}{u+2d}(n+1)$ 。(註：若 $k=0$ 則 $s=n$)

【說明】：1. 當 $k=n-s$ 時，若 $k=0$ ，則 $n=s$ 。

2. 若 $k \geq 1$ 時，由引理四知： $k = \left\lfloor \frac{ds}{u+d} \right\rfloor$ ，將 $k = \left\lfloor \frac{ds}{u+d} \right\rfloor$ 代入 $k=n-s$ ，得 $n-s+1 > \frac{ds}{u+d} \geq n-s$

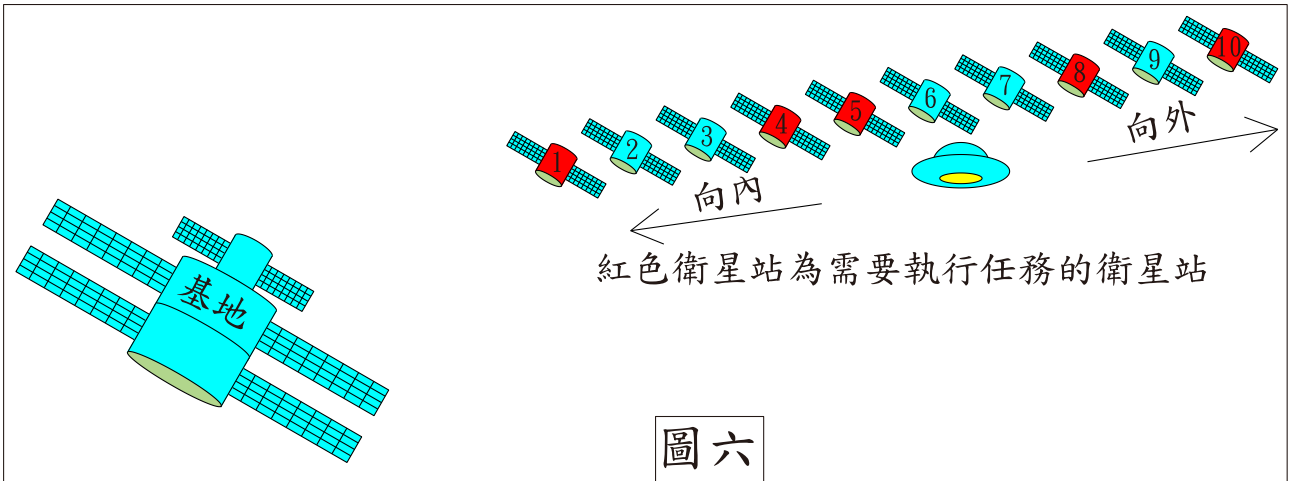
$$(1) n-s+1 > \frac{ds}{u+d} \Rightarrow \frac{u+d}{u+2d}(n+1) > s$$

$$(2) \frac{ds}{u+d} \geq n-s \Rightarrow \frac{u+d}{u+2d}n \leq s$$

$$(3) \text{由 1、2 得 } \frac{u+d}{u+2d}n \leq s < \frac{u+d}{u+2d}(n+1)$$

3. 等號成立時， $A_s = A_{s+1}$ ，第 s 個衛星站和第 $s+1$ 個衛星站，同時為太空人移動所需總耗能最小的衛星站。

研究三：給定 n 個衛星站、 m 個太空人 ($m < n$)，這 m 個太空人都搭飛行船，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，探討飛行船降落在第 s 個衛星站時，這 m 個太空人移動的總耗能 (A_{P_s})，並找出這 m 個太空人移動所需總耗能最小的衛星站。



1. 當只有部分衛星站需要太空人前往執行任務時，就相當於衛星站之間不等距，此時觀察不出規律。
2. 我們將這 m 個太空人要抵達的衛星站，按其先後順序重新編號為第 P_1 站、第 P_2 站、 \dots 、第 P_m 站，在新的編號下，找出飛行船降落在第 P_s 站時，這 m 個太空人移動的總耗能 (A_{P_s})。

定理五：給定 n 個衛星站， m 個太空人要搭飛行船，且分別要到第 P_1 站~第 P_m 站，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，飛行船降落第 P_s 個衛星站時，這 m 個太空人移動的總耗能

$$A_{P_s} = u \sum_{t=s+1}^m (P_t - P_s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (P_s - P_t)$$

【說明】:1. 太空人移動的總耗能 = 所有向外移動的總耗能 + 所有向內移動的總耗能，即

$$A_{P_s} = u \sum_{t=s+1}^m (P_t - P_s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (P_s - P_t)$$

2. $(P_t - P_s)$ 、 $(P_s - P_t)$ 要轉換成原來相對的序號，再計算。

例七：給定 10 個衛星站，只有 4 個太空人要搭飛行船，且分別要到第 2、第 5、第 7、第 10 個衛星站執行任務，若 $u=5$ 、 $d=2$ ，則飛行船降落在第 5 個衛星站時，這 4 個太空人移動的總耗能為何？

【解】： $A_{P_2} = 5 \sum_{t=2+1}^4 (P_t - P_2) + 2 \sum_{t=1}^{2-1} (P_2 - P_t)$
 $= 5(P_3 - P_2) + 5(P_4 - P_2) + 2(P_2 - P_1)$
 $= (7-5) + 5(10-5) + 2(5-2) = 6 + 10 + 25 = 41$ (如表八所示)

表八 $n=10$ 、 $m=4$ 、 $u=5$ 、 $d=2$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	A_s
$s=1$	0	5			20		30			45	100
$s=2(P_1)$		0			15		25			40	80
$s=3$		2	0		10		20			35	67
$s=4$		4		0	5		15			30	54
$s=5(P_2)$		6			0		10			25	41
$s=6$		8			2	0	5			20	35
$s=7(P_3)$		10			4		0			15	29
$s=8$		12			6		2	0		10	30
$s=9$		14			8		4		0	5	31
$s=10(P_4)$		16			10		6			0	32

G. 發現最小總耗能會落在第 P_1 站和第 P_m 站之間(包含第 P_1 和第 P_m 站)

我們觀察很多如表九的例子，發現：當飛行船降落在第 P_1 站之前的總耗能，都會比降落在第 P_1 站的總耗能大，且飛行船降落在第 P_m 站之後的總耗能都會比降落在第 P_m 站的總耗能大，我們將此關係寫成引理六。

表九 $n=10$ 、 $m=4$ 、 $u=4$ 、 $d=3$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	A_s
$s=1$	0		8	12	16		24				60
$s=2$		0	4	8	12		20				44
$s=3(P_1)$			0	4	8		16				28
$s=4(P_2)$			3	0	4		12				19
$s=5(P_3)$			6	3	0		8				17
$s=6$			9	6	3	0	4				22
$s=7(P_4)$			12	9	6		0				27
$s=8$			15	12	9		3	0			39
$s=9$			18	15	12		6		0		51
$s=10$			21	18	15		9			0	63

引理七：給定 n 個衛星站、 m 個太空人，這 m 個太空人都搭飛行船，且分別要到第 P_1 ~第 P_m 站，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，則這 m 個太空人移動所需總耗能最小的衛星站，會在第 P_1 到第 P_m 站之間。(含第 P_1 站及第 P_m 站)

【說明】：1.將這 m 個太空人要抵達的衛星站，按其先後順序重新編號為第 P_1 站、第 P_2 站、……第 P_m 站（沒有人要抵達的衛星站不編號）。

2.假設第 P_i 站到第 P_j 站($i < j$)，兩衛星站之間的站距為 $\Delta P_{(i,j)}$ ，則

①第 P_1 站到其他各站的總站距為 $(\Delta P_{(1,2)} + \Delta P_{(1,3)} + \dots + \Delta P_{(1,m)})$ ；

②第 P_m 站到其他各站的總站距為 $(\Delta P_{(m-1,m)} + \Delta P_{(m-2,m)} + \dots + \Delta P_{(1,m)})$ 。

3.飛行船降落在

①第 P_1 站的總耗能= $u \times (\Delta P_{(1,2)} + \Delta P_{(1,3)} + \dots + \Delta P_{(1,m)})$ ；

②第 P_{1-1} 站的總耗能= $u \times [(\Delta P_{(1,2)} + \Delta P_{(1,3)} + \dots + \Delta P_{(1,m)}) + m]$

③第 P_{1-2} 站的總耗能= $u \times [(\Delta P_{(1,2)} + \Delta P_{(1,3)} + \dots + \Delta P_{(1,m)}) + 2m]$

⋮

4.觀察上述 3 知，飛行船降落在第 P_1 站之前的總耗能，都會比降落在第 P_1 站的總耗能大。

5.飛行船降落在

①第 P_m 站的總耗能= $d \times (\Delta P_{(m-1,m)} + \Delta P_{(m-2,m)} + \dots + \Delta P_{(1,m)})$ ；

②第 P_{m+1} 站的總耗能= $d \times [(\Delta P_{(m-1,m)} + \Delta P_{(m-2,m)} + \dots + \Delta P_{(1,m)}) + m]$

③第 P_{m+2} 站的總耗能= $d \times [\Delta P_{(m-1,m)} + \Delta P_{(m-2,m)} + \dots + \Delta P_{(1,m)}) + 2m]$

⋮

6.觀察上述 5 知，飛行船降落在第 P_m 站之後的總耗能都會比降落在第 P_m 站的總耗能大。

7.由上述 4、6 知，太空人移動所需總耗能最小的衛星站，會在第 P_1 站到第 P_m 站之間(含第 P_1 站及第 P_m 站)。

H. 找出太空人移動所需總耗能最小的衛星站

定理六：給定 n 個衛星站、 m 個太空人，這 m 個太空人都搭飛行船且分別要到第 P_1 個~第 P_m 個衛星站，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，則這 m 個太空人移動所需總耗能最小的衛星站為第 $P_{m-\lfloor \frac{md}{u+d} \rfloor}$ 個衛星站。

- 【說明】：1.由引理七知，太空人移動所需總耗能最小的衛星站會在第 P_1 站到第 P_m 站之間(含第 P_1 站及第 P_m 站)。
- 2.猜想飛行船降落在第 P_m 站，此時若改為向前一個(數字較小)衛星站降落(第 P_{m-1} 站)，總耗能會增加 u ，減少 $(m-1)d$ ，而在第 P_m 站到第 P_{m-1} 站之間，相鄰兩衛星站都有這種情形。如果 $(m-1)d > u$ ，表示改為向前一個衛星站降落，可使總耗能降低，並可透過不斷改為向前一個衛星站降落，使得第 P_{m-1} 站，成為第 P_m 站到第 P_{m-1} 站之間，太空人移動所需總耗能最小的衛星站。
- 3.同上述 2，猜想飛行船降落在第 P_{m-1} 站，此時若改為向前一個衛星站降落，總耗能會增加 $2u$ ，減少 $(m-2)d$ ，而在第 P_{m-1} 站到第 P_{m-2} 站之間，相鄰兩衛星站都有這種情形。如果 $(m-2)d > 2u$ ，表示改為向前一個衛星站降落可使總耗能降低，並可透過不斷改為向前一個衛星站降落，使得第 P_{m-2} 個衛星站，成為第 P_{m-1} 站到第 P_{m-2} 站之間，太空人移動所需總耗能最小的衛星站。
- 4.從上述 2、3 中，不斷向前(數字較小)更改降落站的過程，不難推得以下三點結論：
- (1)若 $(m-t)d > tu$ ，則可由第 P_{m-t+1} 站往第 P_{m-t} 站移動更改降落站，找到第 P_{m-t} 站為第 P_{m-t+1} 站到第 P_{m-t} 站之間，太空人移動所需總耗能最小的衛星站。
 - (2)若 $(m-t)d = tu$ ，則第 P_{m-t+1} 站到第 P_{m-t} 站之間的各站，皆為太空人移動所需總耗能最小的衛星站(包含第 P_{m-t+1} 站與第 P_{m-t} 站)。
 - (3)若 $(m-t)d < tu$ ，則第 P_{m-t+1} 站是第 P_{m-t+1} 站到第 P_{m-t} 站之間，太空人移動所需總耗能最小的衛星站。
- 5.由上述 4 知，當 $(m-t)d \geq tu$ ，會有太空人移動所需總耗能最小的衛星站。
- 6.由 $(m-t)d \geq tu$ ，可得 $t \leq \frac{md}{u+d}$ ，又 $t \in \mathbb{N}$ ，所以 $t_{\max} = \left\lfloor \frac{md}{u+d} \right\rfloor$ 。
- 7.太空人移動所需總耗能最小的衛星站是第 $P_{m-\lfloor \frac{md}{u+d} \rfloor}$ 個衛星站。

例八：給定 10 個衛星站、4 個太空人，這 4 個太空人都搭飛行船，且分別要到第 3、第 4、第 5、第 7 個衛星站，此時 $u=4$ 、 $d=3$ ，則這 4 個太空人移動所需總耗能最小的衛星站為何？

【解】： $P_1=3$ 、 $P_2=4$ 、 $P_3=5$ 、 $P_4=7$ ，將 $u=4$ 、 $d=3$ 、 $m=4$ 帶入 $P_{m-\lfloor \frac{md}{u+d} \rfloor}$ 中，

得 $P_{4-\lfloor \frac{4 \times 3}{4+3} \rfloor} = P_{4-1} = P_3$ 為太空人移動所需總耗能最小的衛星站，如表十。

表十 $n=10$ 、 $m=4$ 、 $u=4$ 、 $d=3$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	A_s
$s=1$	0		8	12	16		24				60
$s=2$		0	4	8	12		20				44
$s=3(P_1)$			0	4	8		16				28
$s=4(P_2)$			3	0	4		12				19
$s=5(P_3)$			6	3	0		8				17
$s=6$			9	6	3	0	4				22
$s=7(P_4)$			12	9	6		0				27
$s=8$			15	12	9		3	0			39
$s=9$			18	15	12		6		0		51
$s=10$			21	18	15		9			0	63

伍、研究結果

我們列出幾個重要的研究結果，如下：

研究一

一、給定 n 個衛星站、 n 個太空人，且這 n 個太空人都搭飛行船，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，則飛行船降落在第 s 個衛星站時，這 n 個太空人移動的總耗能

$$A_s = u \sum_{t=s+1}^n (t-s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (s-t)$$

二、給定 n 個衛星站、 n 個太空人，且這 n 個太空人都搭飛行船，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，則太空人移動所需總耗能最小的衛星站 s ，會介於 $\frac{un}{u+d}$ 和 $\frac{un}{u+d} + 1$ 之間，

$$\text{即 } \frac{un}{u+d} \leq s \leq \frac{un}{u+d} + 1。$$

研究二

三、給定 n 個衛星站、 n 個太空人，但這 n 個太空人並非都要搭飛行船，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，則飛行船降落在第 s 個衛星站時，這 n 個太空人移動的總耗能

$$A_s = u \sum_{t=s+1}^n (t-s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (s-t) - d \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{ds}{u+d} \rfloor} (s-t) + u \sum_{t=1}^{\lfloor \frac{ds}{u+d} \rfloor} t$$

四、給定 n 個衛星站、 n 個太空人，但這 n 個太空人並非都要搭飛行船，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，當 $k=n-s$ ，則太空人移動所需總耗能最小的衛星站 s ，會介於 $\frac{u+d}{u+2d}n$ 和 $\frac{u+d}{u+2d}(n+1)$ 之間，即 $\frac{u+d}{u+2d}n \leq s \leq \frac{u+d}{u+2d}(n+1)$ 。

研究三

五、給定 n 個衛星站、 m 個太空人，這 m 個太空人都搭飛行船，且分別抵達第 P_1 個~第 P_m 個衛星站，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，則飛行船降落在第 P_s 個衛星站時，這 m 個太空人移動的總耗能

$$A_{P_s} = u \sum_{t=s+1}^m (P_t - P_s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (P_s - P_t)$$

六、給定 n 個衛星站、 m 個太空人，這 m 個太空人都搭飛行船，且分別抵達第 P_1 個~第 P_m 個衛星站，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，則太空人移動所需總耗能最小的衛星站為第 $P_{m - \lfloor \frac{md}{u+d} \rfloor}$ 站。

陸、討論

一、在研究一，我們嘗試用配方法求極值來找最小值，如下

例九：給定 n 個衛星站、 n 個太空人，且這 n 個太空人都搭飛行船，若 $u=3$ 、 $d=1$ ，則太空人移動所需總耗能最小的衛星站 $S = \left\lfloor \frac{3n+2}{4} \right\rfloor$ 或 $\left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil$ 。

【說明】：由定理一知，

$$\begin{aligned}
 A_s &= 3 \sum_{t=s+1}^n (t-s) + \sum_{t=1}^{s-1} (s-t) \\
 &= 3 \times \frac{(n-s)(n-s+1)}{2} + \frac{s(s-1)}{2} = \frac{1}{2} [3(n^2 - 2ns + s^2) + 3n - 3s + s^2 - s] \\
 &= \frac{3}{2}n^2 - 3ns + 2s^2 + \frac{3}{2}n - 2s = 2(s^2 - \frac{3}{2}ns - s) + \frac{3}{2}(n^2 + n) \\
 &= 2(s - \frac{3n+2}{4})^2 + \frac{3n^2-4}{8}, \text{ 因為 } s \in \mathbb{N}, \text{ 所以修正 } s = \left\lfloor \frac{3n+2}{4} \right\rfloor \text{ 或 } \left\lceil \frac{3n+2}{4} \right\rceil。
 \end{aligned}$$

例十：給定 n 個衛星站、 n 個太空人，且這 n 個太空人都搭飛行船，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，則太空人移動所需總耗能最小的衛星站 $S = \left\lfloor \frac{u+d+2un}{2(u+d)} \right\rfloor$ 或 $\left\lceil \frac{u+d+2un}{2(u+d)} \right\rceil$ 。

【說明】：由定理三知，

$$\begin{aligned}
 A_s &= u \sum_{t=s+1}^n (t-s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (s-t) \\
 &= u \times \frac{(n-s)(n-s+1)}{2} + d \times \frac{s(s-1)}{2} \\
 &= u \times \frac{(n-s)^2 + (n-s)}{2} + d \times \frac{s(s-1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} [u(n^2 - 2ns + s^2 + n - s) + d \times s \times (s-1)] \\
 &= \frac{1}{2} [(u+d)s^2 - (u+d+2un)s + un^2 + un] \\
 &= \frac{u+d}{2} (s - \frac{u+d+2un}{2(u+d)})^2 + \frac{1}{2}(un^2 + un) - \frac{(u+d+2un)^2}{8(u+d)} \\
 &\text{ 因為 } s \in \mathbb{N}, \text{ 所以修正 } s = \left\lfloor \frac{u+d+2un}{2(u+d)} \right\rfloor \text{ 或 } \left\lceil \frac{u+d+2un}{2(u+d)} \right\rceil。
 \end{aligned}$$

二、研究一中，太空人移動所需總耗能最小的衛星站 s ，會在 $\frac{un}{u+d}$ 和 $\frac{un}{u+d} + 1$ 之間，因為

$\frac{un}{u+d}$ 和 $\frac{un}{u+d} + 1$ 之間剛好相差 1，會有一個且只有一個整數解，而當 $\frac{un}{u+d}$ 是整數時，

$\frac{un}{u+d} + 1$ 也是整數，此時第 s 個衛星站與第 $s+1$ 個衛星站皆為太空人移動所需總耗能最小的衛星站。

三、在研究二中，尋找太空人移動所需總耗能最小的衛星站時，我們發現了兩種情形，而這兩種情形包含三種解答：

(一)當 $k=n-s$ 時：

1. 太空人移動所需總耗能最小的衛星站 s ，會在 $\frac{u+d}{u+2d}n \leq s \leq \frac{u+d}{u+2d}(n+1)$ 之間，找到第 s 站為太空人移動所需總耗能最小的衛星站。
2. 當 $(u+2d) \mid n$ ，上述不等式中的 $\frac{u+d}{u+2d}n$ 為整數，此時第 s 站與第 $s+1$ 站，同為太空人移動所需總耗能最小的衛星站。

(二) 當 $k=n-(s+1)$ 時：

3. 太空人移動所需總耗能最小的衛星站 s ，會在 $\frac{u+d}{u+2d}(n-1) \leq s < \frac{u+d}{u+2d}n$ 之間，此時第 s 站與第 $s+1$ 站，同為太空人移動所需總耗能最小的衛星站。

(三)上述(一)、(二)兩等式的使用時機

由給定的條件無法立即判別要使用(一)或(二)的等式，需要經過繁瑣的過程才能判別(詳見筆記)，而(一)與(二)的等式運算結果相連，因此，我們直接用 $k=n-s$ ，運算後修正，找出太空人移動所需總耗能最小的衛星站 s 。

(四) $k=n-s$ ， s 會在 $\frac{u+d}{u+2d}n \leq s \leq \frac{u+d}{u+2d}(n+1)$ 之間，若 $\frac{u+d}{u+2d}n \leq s \leq \frac{u+d}{u+2d}(n+1)$ 之間找不到整數 s ，則最接近 $\frac{u+d}{u+2d}n$ 及 $\frac{u+d}{u+2d}(n+1)$ 的兩整數即為所求。

(五)例如：給定 13 個衛星站、13 個太空人，這 13 個太空人並非全部都搭飛行船，若太空人向外耗能 4、向內耗能 3，則太空人移動所需總耗能最小的衛星站為何？將第一站、第二站、…、到第 13 站的耗能列表如表十一：

表十一 $n=13$ 、 $u=4$ 、 $d=3$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	A_s
$s=1$	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	312
$s=2$	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	267
$s=3$	4	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	227
$s=4$	4	6	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	193
$s=5$	4	8	6	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	165
$s=6$	4	8	9	6	3	0	4	8	12	16	20	24	28	142
$s=7$	4	8	12	9	6	3	0	4	8	12	16	20	24	126
$s=8$	4	8	12	12	9	6	3	0	4	8	12	16	20	114
$s=9$	4	8	12	15	12	9	6	3	0	4	8	12	16	109
$s=10$	4	8	12	16	15	12	9	6	3	0	4	8	12	109
$s=11$	4	8	12	16	18	15	12	9	6	3	0	4	8	115
$s=12$	4	8	12	16	20	18	15	12	9	6	3	0	4	127
$s=13$	4	8	12	16	20	21	18	15	12	9	6	3	0	144

(六)觀察表十一不難發現 $k=n-(s+1)$ ，將 $k=\left\lceil\frac{ds}{u+d}\right\rceil$ 代入 $k=n-(s+1)$ ，得 $n-(s+1)+1>\frac{ds}{u+d}\geq n-(s+1)$ ，計算得 $\frac{u+d}{u+2d}(n-1)\leq s<\frac{u+d}{u+2d}n$ ，第 s 站與第 $s+1$ 站同為太空人移動所需總耗能最小的衛星站。

(七)將表十一的數據代入不等式

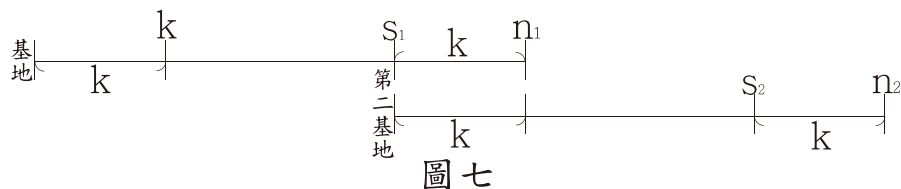
1.用 $k=n-(s+1)\Rightarrow\frac{u+d}{u+2d}(n-1)\leq s<\frac{u+d}{u+2d}n$ 代入數據得 $8.4\leq s<9.1$ ， $s=9$ ，第9站與第10站同為太空人移動所需總耗能最小的衛星站。

2.用 $k=n-s\Rightarrow\frac{u+d}{u+2d}n\leq s\leq\frac{u+d}{u+2d}(n+1)$ 代入數據得 $9.1\leq s<9.8$ ，雖然找不到整數解，但最靠近的兩個整數即為所求，即第9站與第10站同為太空人移動所需總耗能最小的衛星站。詳細論述請參閱筆記。

柒、未來展望

本研究探討都以飛行船只能降落一次的情況，找出太空人移動所需總耗能最小的衛星站，並求其總耗能，往後希望能找出飛行船降落二次、三次、…時的情形。

我們有一個想法，就是將定理四推廣。當 $k=n_1-s_1$ 時，會有太空人移動所需總耗能最小的衛星站(s_1)，將此第 s_1 站當成第二個基地，而當 $k=n_2-s_2$ 時，會有太空人移動所需總耗能最小的衛星站(s_2)，第 s_1 站與第 s_2 站即為所求，如圖七。



捌、參考資料文獻

- 1.國小數學課本第十冊第4單元“符號代表數”，翰林出版社
- 2.國小數學課本第十二冊第5單元“怎樣解題”，翰林出版社
- 3.國中數學課本第二冊“一元一次不等式”，翰林出版社
- 4.國中數學課本第四冊“用配方法解一元二次方程式”，翰林出版社
- 5.國中數學課本第四冊“等差數列與等差級數”，翰林出版社
- 6.國中數學基本學習內容補救教材(第二冊)
<https://priori.moe.gov.tw/download/textbook/math/grade7/book2/math-7-2-8-4.pdf>
- 7.國中數學基本學習內容補救教材(第三冊)

<https://piori.moe.gov.tw/download/textbook/math/grade8/book3/math-8-3-10.pdf>

8.臺北市立建國高級中學第 149 期通訊解題

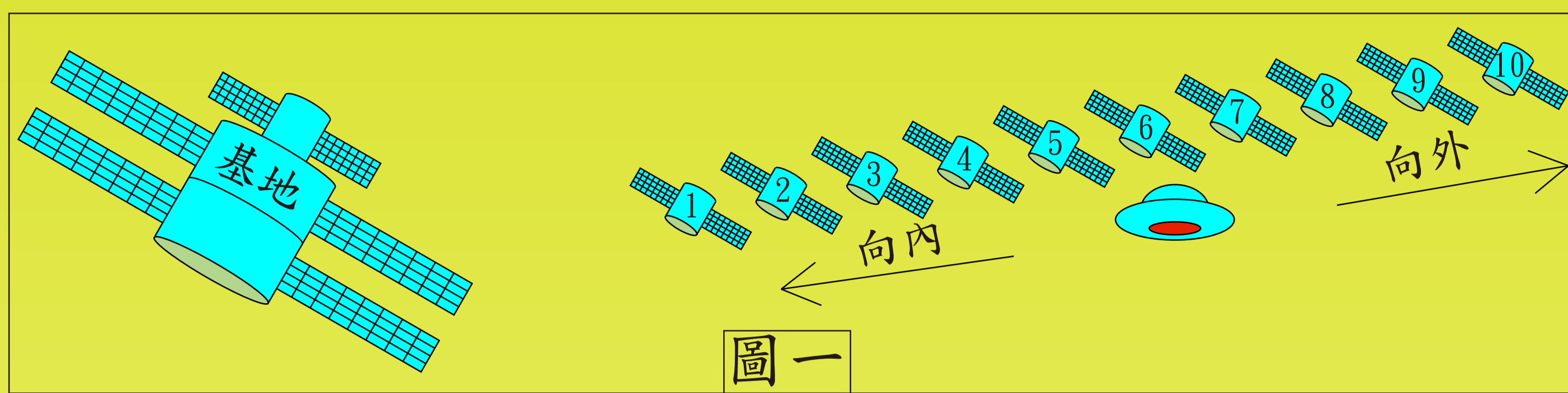
http://web2.ck.tp.edu.tw/~mathweb/index.php?option=com_content&view=article&id=42:2012-02-07-02-50-11&catid=19:2011-11-23-08-30-15&Itemid=37

【評語】 080404

本作品改編自一個貨梯停靠的耗能問題，從一個虛擬的太空任務出發，探討最小耗能的相關問題，並進而將推進器向外、向內的耗能及衛星站「一般化」，同時改變情境，對相關問題做更進一步的討論。數學內容的深度雖不高，但是研究過程中，循序漸進的解析問題，符合科學探究的精神。是一個有趣的作品！

摘要

在一座太空基地外，有10個等距離的衛星站排成一列(如圖一)。現有10個太空人分別前往相異的衛星站執行任務，他們從基地搭乘飛行船一同前往，但飛行船只能降落一次，所以有些太空人還要再利用推進器才能抵達要到的衛星站。當太空人向外太空方向(向外)移動一個站距，推進器要耗能5根燃料棒；向基地方向(向內)移動一個站距，推進器要耗能2根燃料棒，那麼飛行船要降落在哪一個衛星站，才能使這10個太空人的總耗能最小？



研究一：給定n個衛星站、n個太空人，他們都搭飛行船

定理一：給定n個衛星站、n個太空人，且這n個太空人都搭飛行船，若向外耗能u、向內耗能d，則飛行船降落在第s個衛星站時，這n個太空人移動的總耗能 $A_s = u \sum_{t=s+1}^n (t-s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (s-t)$

- 【說明】：**
1. 在第s個衛星站下船後，分別要抵達第(s+1)個衛星站、第(s+2)個衛星站、……第n個衛星站的太空人，他們要往外太空方向移動。現在考慮其中一太空人要到第t個衛星站，則他身上的推進器要耗能 $u(t-s)$ 根燃料棒，故所有向外移動的太空人的總耗能 $= u \sum_{t=s+1}^n (t-s)$ 。
 2. 在第s個衛星站下船後，分別要抵達第1個衛星站、第2個衛星站、……第(s-1)個衛星站的太空人，他們要往基地方向移動。現在考慮其中一太空人要到第t個衛星站，則他身上的推進器要耗能 $d(s-t)$ 根燃料棒，故所有向內移動的太空人的總耗能 $= d \sum_{t=1}^{s-1} (s-t)$ 。
 3. 由上述1、2知，飛行船降落在第s個衛星站時，太空人移動的總耗能 = 太空人向外移動的總耗能 + 太空人向內移動的總耗能，即 $A_s = u \sum_{t=s+1}^n (t-s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (s-t)$ 。

引理二：給定n個衛星站、n個太空人，且這n個太空人都搭飛行船，若向外耗能u、向內耗能d，則 $A_s = A_{s-1} - u [n - (s-1)] + d (s-1)$ 。

1. 觀察表三發現：

$$A_2 = A_1 - u(n-1) + d(2-1)$$

$$A_3 = A_2 - u(n-2) + d(3-1)$$

$$A_4 = A_3 - u(n-3) + d(4-1)$$

⋮

$$A_s = A_{s-1} - u [n - (s-1)] + d(s-1)$$

表三 向外耗能u、向內耗能d

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	⋯	a_n	A_s
s=1	0	u	2u	3u	4u	5u	6u	⋯	$u(n-1)$	A_1
s=2	d	0	u	2u	3u	4u	5u	⋯	$u(n-2)$	A_2
s=3	2d	d	0	u	2u	3u	4u	⋯	$u(n-3)$	A_3
s=4	3d	2d	d	0	u	2u	3u	⋯	$u(n-4)$	A_4
s=5	4d	3d	2d	d	0	u	2u	⋯	$u(n-5)$	A_5
s=6	5d	4d	3d	2d	d	0	u	⋯	$u(n-6)$	A_6
s=7	6d	5d	4d	3d	2d	d	0	⋯	$u(n-7)$	A_7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
s=n	$d(n-1)$	$d(n-2)$	$d(n-3)$	$d(n-4)$	$d(n-5)$	$d(n-6)$	$d(n-7)$	⋯	0	A_n

2. 結論：n個衛星站、n個太空人，向外耗能u、向內耗能d時，比較相鄰兩衛星站，太空人移動的總耗能關係為 $A_s = A_{s-1} - u [n - (s-1)] + d(s-1)$

引理三：給定n個衛星站、n個太空人，且這n個太空人都搭飛行船，當向外耗能u、向內耗能d時，若 $u [n - (s-1)] > d (s-1)$ ，且 $u(n-s) \leq ds$ ，會有這n個太空人移動所需總耗能最小的衛星站。

- 【說明】：**
1. 由引理二知， $A_s = A_{s-1} - u [n - (s-1)] + d(s-1)$
 2. 當“減掉的耗能”與“增加的耗能”，兩者之間的關係由減多加少變成減少加多時，會有最小總耗能的衛星站。
 3. 由引理二的 $A_s = A_{s-1} - u [n - (s-1)] + d(s-1)$ ，推得 $A_{s+1} = A_s - u(n-s) + ds$
 4. 由上述2、3知，當： $u [n - (s-1)] > d(s-1)$ ，且 $u(n-s) \leq ds$ 時，第s個衛星站為太空人移動所需總耗能最小的衛星站。

定理二：給定n個衛星站、n個太空人，且這n個太空人都搭飛行船，若向外耗能u、向內耗能d，則這n個太空人移動所需總耗能最小的衛星站s，會介於 $\frac{un}{u+d}$ 和 $\frac{un}{u+d} + 1$ 之間，亦即 $\frac{un}{u+d} \leq s < \frac{un}{u+d} + 1$ 。

【說明】：1. 由引理二知：

$$A_s = A_{s-1} - u [n - (s-1)] + d(s-1)$$

$$A_{s+1} = A_s - u(n-s) + ds$$

2. 由引理三知，當“減掉的耗能”與“增加的耗能”，兩者之間的關係由減多加少變成減少加多時，會有太空人移動所需總耗能最小的衛星站，即 $u [n - (s-1)] > d(s-1)$ ，且 $u(n-s) \leq ds$ 。
3. 由上述1、2可推得 $\frac{un}{u+d} \leq s < \frac{un}{u+d} + 1$ 。

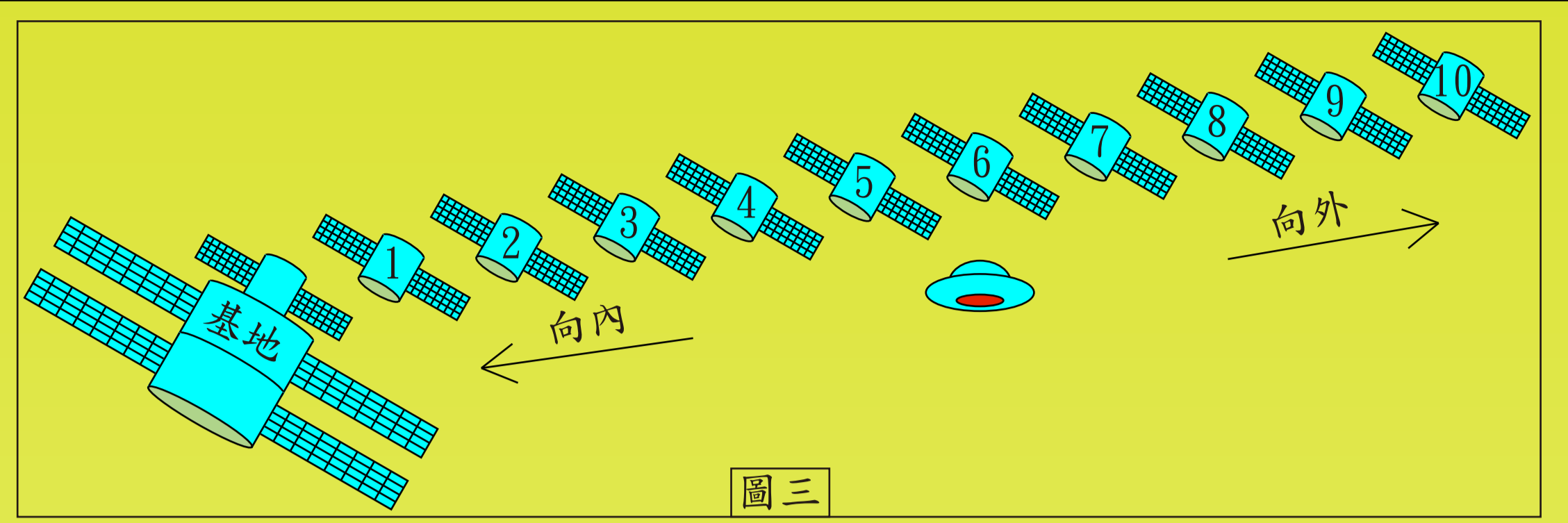
表四 n=11、u=5、d=2

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	A_s
s=1	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	275
s=2	2	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	227
s=3	4	2	0	5	10	15	20	25	30	35	40	186
s=4	6	4	2	0	5	10	15	20	25	30	35	152
s=5	8	6	4	2	0	5	10	15	20	25	30	125
s=6	10	8	6	4	2	0	5	10	15	20	25	105
s=7	12	10	8	6	4	2	0	5	10	15	20	92
s=8	14	12	10	8	6	4	2	0	5	10	15	86
s=9	16	14	12	10	8	6	4	2	0	5	10	87
s=10	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	5	95
s=11	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	110

研究二：給定n個衛星站、n個太空人，並非都要搭飛行船

引理四：給定n個衛星站、n個太空人，但這n個太空人並非都要搭飛行船，若太空人向外耗能u、向內耗能d，當飛行船降落在第s個衛星站時，要抵達第k(1 ≤ k ≤ s-1)個衛星站之前的太空人選擇不搭飛行船，那麼k = [$\frac{ds}{u+d}$]，其中 [$\frac{ds}{u+d}$] 為 $\frac{ds}{u+d}$ 取高斯。

- 【說明】：1. 要到第k個衛星站的太空人不搭飛行船的耗能為uk，搭飛行船的耗能為d(s-k)，當uk ≤ d(s-k)時，他們不搭飛行船。
2. 由uk ≤ d(s-k)，可得k ≤ $\frac{ds}{u+d}$ ，但k為整數，故k = [$\frac{ds}{u+d}$]，所以要到第1、2、...k個衛星站的太空人選擇不搭飛行船，則k = [$\frac{ds}{u+d}$]。



定理三：給定n個衛星站、n個太空人，但這n個太空人並非都要搭飛行船，若太空人向外耗能u、向內耗能d，則飛行船降落在第s個衛星站時，這n個太空人移動的總耗能

$$A_s = u \sum_{t=s+1}^n (t-s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (s-t) - d \sum_{t=1}^{[\frac{ds}{u+d}]} (s-t) + u \sum_{t=1}^{[\frac{ds}{u+d}]} t$$

- 【說明】：1. 由引理四知，若第k個衛星站之前的太空人不搭飛行船，則k = [$\frac{ds}{u+d}$]。
2. A_s = 全部的太空人都搭飛行船的總耗能 - 不搭飛行船的太空人向內移動的總耗能 + 不搭飛行船的太空人向外移動的總耗能，即

$$A_s = u \sum_{t=s+1}^n (t-s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (s-t) - d \sum_{t=1}^{[\frac{ds}{u+d}]} (s-t) + u \sum_{t=1}^{[\frac{ds}{u+d}]} t$$

當「不搭飛行船，只靠推進器向外移動抵達各衛星站的太空人數」(k)和「搭飛行船到第s個衛星站後，再向外移動抵達各衛星站的太空人數」(n-s)相等，即k = n-s時，第s個衛星站是太空人移動所需總耗能最小的衛星站。

引理五：給定n個衛星站、n個太空人，但這n個太空人並非都要搭飛行船，若太空人向外耗能u、向內耗能d，當k = n-s時， $A_{s-1} > A_s$ 。

- 【說明】：1. 當k = n-s，飛行船降落在第s個衛星站時，太空人移動的總耗能

$$A_s = a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{(k+1)} + a_{(k+2)} + \dots + a_{(s-1)} + a_s + a_{(s+1)} + a_{(s+2)} + \dots + a_n \\ = u + 2u + \dots + ku + [s-(k+1)]d + [s-(k+2)]d + \dots + d + 0 + u + 2u + \dots + ku$$

2. 飛行船降落在第(s-1)個衛星站的總耗能為

$$A_{s-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{(k+1)} + a_{(k+2)} + \dots + a_{(s+2)} + a_{(s-1)} + a_s + a_{(s+1)} + \dots + a_{(n-1)} + a_n \\ = u + 2u + \dots + ku + [(s-1)-(k+1)]d + [(s-1)-(k+2)]d + \dots + d + 0 + u + 2u + \dots + ku + (k+1)u$$

3. 比較飛行船降落在第s個衛星站和第(s-1)個衛星站的總耗能

$$A_{s-1} = u + 2u + \dots + ku + [(s-1)-(k+1)]d + [(s-1)-(k+2)]d + \dots + d + 0 + u + 2u + \dots + ku + (k+1)u \\ A_s = u + 2u + \dots + ku + [s-(k+1)]d + [s-(k+2)]d + \dots + d + 0 + u + 2u + \dots + ku$$

發現：① A_{s-1} 比 A_s 多一項 $(k+1)u$ 。② A_s 比 A_{s-1} 多一項 $[s-(k+1)]d$ 。

推論： $(k+1)u > [s-(k+1)]d$ ，因為若 $(k+1)u \leq [s-(k+1)]d$ ，那麼要抵達第(k+1)個衛星站的人不搭飛行船，這和猜想矛盾，所以 $(k+1)u > [s-(k+1)]d$ 。

結論： $A_{s-1} > A_s$ 。

引理六：給定n個衛星站、n個太空人，但這n個太空人並非都要搭飛行船，若太空人向外耗能u、向內耗能d，當k = n-s時， $A_{s+1} \geq A_s$ 。

- 【說明】：同引理五

發現：① A_s 比 A_{s+1} 多一項 ku 。② A_{s+1} 比 A_s 多一項 $[(s+1)-(k+1)]d$ 。

推論： $[(s+1)-(k+1)]d = (s-k)d$ ， $(s-k)d \geq ku$ ，因為若 $(s-k)d < ku$ ，那麼要抵達第k個衛星站的人要搭飛行船，這和猜想矛盾，所以 $[(s+1)-(k+1)]d \geq ku$ 。

結論： $A_{s+1} \geq A_s$ 。

定理四：給定n個衛星站、n個太空人，但這n個太空人並非都要搭飛行船，若太空人向外耗能u、向內耗能d，當k = n-s，則這n個太空人移動所需總耗能最小的衛星站s，會介於 $\frac{u+d}{u+2d}n$ 和 $\frac{u+d}{u+2d}(n+1)$ 之間，即 $\frac{u+d}{u+2d}n \leq s < \frac{u+d}{u+2d}(n+1)$ 。(註：若k=0則s=n)

- 【說明】：1. 當k = n-s時，若k=0，則n=s。

2. 若k ≥ 1時，由引理四知：k = [$\frac{ds}{u+d}$]

，將k = [$\frac{ds}{u+d}$] 代入k = n-s，

得n-s+1 > $\frac{ds}{u+d} \geq n-s$

$$(1) n-s+1 > \frac{ds}{u+d} \rightarrow \frac{u+d}{u+2d}(n+1) > s$$

$$(2) \frac{ds}{u+d} \geq n-s \rightarrow \frac{u+d}{u+2d}n \leq s$$

$$(3) \text{由(1)、(2)得 } \frac{u+d}{u+2d}n \leq s < \frac{u+d}{u+2d}(n+1)$$

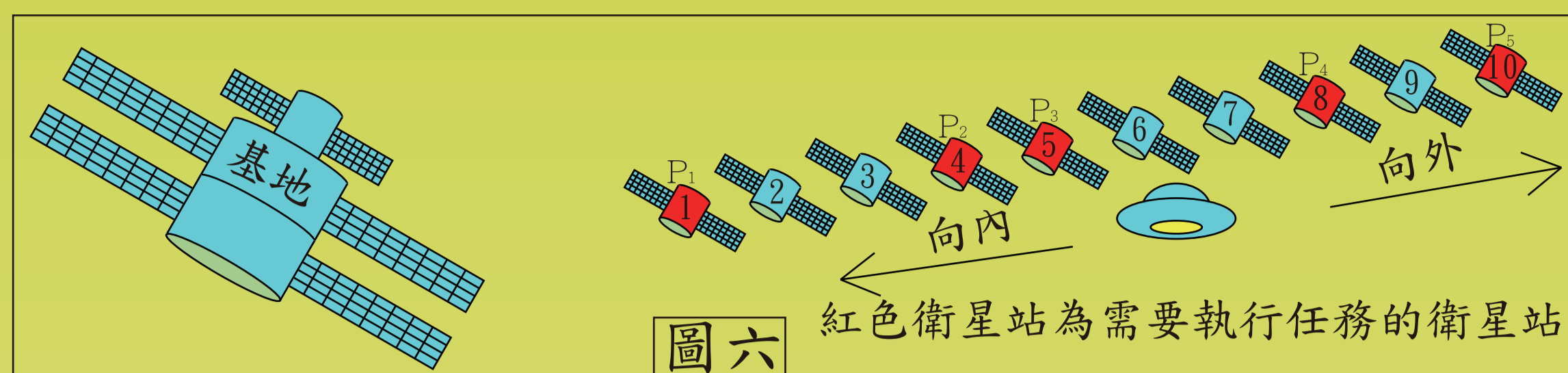
表七 n=15, u=4, d=3

	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇	a ₈	a ₉	a ₁₀	a ₁₁	a ₁₂	a ₁₃	a ₁₄	a ₁₅	A _s
s=1	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	420
s=2	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	367
s=3	4	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	319
s=4	4	6	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	277
s=5	4	8	6	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	241
s=6	4	8	9	6	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	210
s=7	4	8	12	9	6	3	0	4	8	12	16	20	24	28	32	186
s=8	4	8	12	12	9	6	3	0	4	8	12	16	20	24	28	166
s=9	4	8	12	15	12	9	6	3	0	4	8	12	16	20	24	153
s=10	4	8	12	16	15	12	9	6	3	0	4	8	12	16	20	145
s=11	4	8	12	16	18	15	12	9	6	3	0	4	8	12	16	143
s=12	4	8	12	16	20	18	15	12	9	6	3	0	4	8	12	147
s=13	4	8	12	16	20	21	18	15	12	9	6	3	0	4	8	156
s=14	4	8	12	16	20	24	21	18	15	12	9	6	3	0	4	172
s=15	4	8	12	16	20	24	24	21	18	15	12	9	6	3	0	192

研究三：給定n個衛星站、m個太空人，他們都搭飛行船

定理五：給定n個衛星站，m個太空人要搭飛行船，且分別要到第 P_1 站~第 P_m 站，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，飛行船降落第 P_s 個衛星站時，這m個太空人移動的總耗能 $A_{P_s} = u \sum_{t=s+1}^n (P_t - P_s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (P_s - P_t)$ (註： $m < n$)

【說明】：1. 太空人移動的總耗能
= 所有向外移動的總耗能
+ 所有向內移動的總耗能，
即 $A_{P_s} = u \sum_{t=s+1}^n (P_t - P_s) + d \sum_{t=1}^{s-1} (P_s - P_t)$



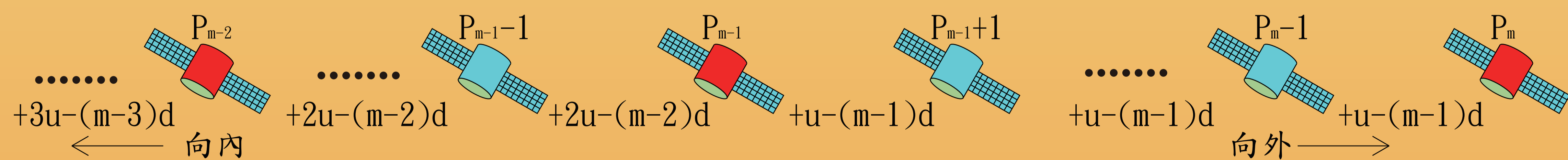
2. $(P_t - P_s)$ 、 $(P_s - P_t)$ 要轉換成原來相對的序號，再計算。

引理七：給定n個衛星站、m個太空人，這m個太空人都搭飛行船，且分別要到第 P_1 ~第 P_m 站，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，則這m個太空人移動所需總耗能最小的衛星站，會在第 P_1 到第 P_m 站之間。(含第 P_1 站及第 P_m 站)

【說明】：1. 將這m個太空人要抵達的衛星站，按其先後順序重新編號為第 P_1 站、第 P_2 站、……第 P_m 站（沒有太空人要抵達的衛星站不編號）。
2. 假設第 P_i 站到第 P_j 站($i < j$)，兩衛星站之間的站距為 $\Delta P_{(i,j)}$ ，則
① 第 P_1 站到其他各站的總站距為 $(\Delta P_{(1,2)} + \Delta P_{(1,3)} + \dots + \Delta P_{(1,m)})$ ；
② 第 P_m 站到其他各站的總站距為 $(\Delta P_{(m-1,m)} + \Delta P_{(m-2,m)} + \dots + \Delta P_{(1,m)})$ 。
3. 飛行船降落在
① 第 P_1 站的總耗能 $= u \times (\Delta P_{(1,2)} + \Delta P_{(1,3)} + \dots + \Delta P_{(1,m)})$ ；
② 第 P_{i-1} 站的總耗能 $= u \times [(\Delta P_{(1,2)} + \Delta P_{(1,3)} + \dots + \Delta P_{(1,m)}) + m]$
③ 第 P_{i-2} 站的總耗能 $= u \times [(\Delta P_{(1,2)} + \Delta P_{(1,3)} + \dots + \Delta P_{(1,m)}) + 2m]$
⋮
4. 觀察上述3知，飛行船降落在第 P_1 站之前的總耗能，都會比降落在第 P_1 站大
5. 同理，飛行船降落在第 P_m 站之後的總耗能都會比降落在第 P_m 站大。
6. 由上述4、5知，太空人移動所需總耗能最小的衛星站，會在第 P_1 站到第 P_m 站之間(含第 P_1 站及第 P_m 站)。

定理六：給定n個衛星站、m個太空人，這m個太空人都搭飛行船且分別要到第 P_1 個~第 P_m 個衛星站，若太空人向外耗能 u 、向內耗能 d ，則這m個太空人移動所需總耗能最小的衛星站為第 $P_{m - \lfloor \frac{md}{u+d} \rfloor}$ 個衛星站。

【說明】：1. 由引理七知，太空人移動所需總耗能最小的衛星站會在第 P_1 站到第 P_m 站之間(含第 P_1 站及第 P_m 站)。
2. 猜想飛行船降落在第 P_m 站，此時若改為向前一個(數字較小)衛星站降落(第 P_{m-1} 站)，總耗能會增加 u ，減少 $(m-1)d$ ，而在第 P_m 站到第 P_{m-1} 站之間，相鄰兩衛星站都有這種情形。如果 $(m-1)d > u$ ，表示改為向前一個衛星站降落，可使總耗能降低，並可透過不斷改為向前一個衛星站降落，使得第 P_{m-1} 站，成為第 P_m 站到第 P_{m-1} 站之間，太空人移動所需總耗能最小的衛星站。
3. 同上述2，猜想飛行船降落在第 P_{m-1} 站，此時若改為向前一個衛星站降落，總耗能會增加 $2u$ ，減少 $(m-2)d$ ，而在第 P_{m-1} 站到第 P_{m-2} 站之間，相鄰兩衛星站都有這種情形。如果 $(m-2)d > 2u$ ，表示改為向前一個衛星站降落可使總耗能降低，並可透過不斷改為向前一個衛星站降落，使得第 P_{m-2} 個衛星站，成為第 P_{m-1} 站到第 P_{m-2} 站之間，太空人移動所需總耗能最小的衛星站。
4. 從上述2、3知，當 $(m-t)d \geq tu$ ，會有太空人移動所需總耗能最小的衛星站
5. 由 $(m-t)d \geq tu$ ，可得 $t \leq \frac{md}{u+d}$ ，又 $t \in \mathbb{N}$ ，所以 $t_{\max} = \lfloor \frac{md}{u+d} \rfloor$ 。
6. 太空人移動所需總耗能最小的衛星站是第 $P_{m - \lfloor \frac{md}{u+d} \rfloor}$ 個衛星站。



未來展望

本研究探討都以飛行船只能降落一次的情況，找出太空人移動所需總耗能最小的衛星站，並求其總耗能，往後希望能找出飛行船降落二次、三次、……時的情形。我們有一個想法，就是將定理四推廣。

