中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080403

貓的繁殖密碼

學校名稱：連江縣立敬恆國民小學

作者：	指導老師：
小六 陳品蓁 小五 倪子涵	古靖章

關鍵詞：費氏數列、貓的繁殖、寵物結紮

摘 要

養貓養狗當成寵物人人愛，政府也不斷宣傳要幫寵物結紮以免數量太多造成家庭與社會的負擔，五下自然課也有上到動物的繁殖，為了能更清楚明瞭動物的繁殖力，本研究以貓為對象，費氏數列為基礎，研究影響貓族群數量的「成長期」、「懷孕期」與「子代對數」三個基本變因對數列的影響，找出數學式與推算出貓對(如公母各 1 隻稱為貓對數量為 1)繁殖的模型，以預測貓族群的數量，了解替寵物結紮的重要性。

壹、研究動機

五下的自然課曾提到動物的繁殖，最近學校的老師有養貓，加上看到網路文章─『貓咪的「二胎」可別輕易開放！日本 2 隻貓咪隔年生出 100 員大家族』才知道貓繁殖力很強。在想知道如果一對貓一段時間不結紮會生出多少後代，但卻不可能一次養那麼多隻貓的前提下，想透過找出數學公式來推算一對貓在特定條件下，兩年後能產生多少後代。

貳、研究目的

一、設定影響貓族群數量的變因，找出不結紮貓對繁殖數列規則（研究核心）。

二、設定影響貓族群數量的變因，找出成貓對繁殖一次後就結紮的數列規則。

三、依據所找出數列規則，推算出一對貓不結紮兩年後的貓對族群數量。

四、找出不結紮貓對可能的繁殖模型。

五、了解實驗中的變因對不結紮貓族群數量的影響。

四、依據貓對數量繁殖模型，比較 24 個月後結紮、繁殖一次後就結紮與不結紮貓族群的數量，更清楚認識幫寵物結紮的重要性。

七、使用不結紮貓對繁殖數列規則，檢驗網路文章-『貓咪的「二胎」可別輕易開放！日本 2 隻貓咪隔年生出 100 之大家族』的合理性。

八、以數學演算法找出貓對繁殖一次後就結紮的貓對數量計算式。

參、研究設備及器材

計算紙、筆、文件夾、軟體 WORD、軟體小畫家。

肆、研究過程或方法

一、研究影響貓對數量的變因

透過老師的飼養經驗與網路查找資料，找出影響貓對數量成長的因素有多個，如：成熟期、懷孕期、子代數量、生產後再懷孕期、營養、生病、壽命等，為了先找出初步的規則，降低研究的難度，了解在健康不生病，貓的壽命範圍內，一對貓在兩年後能夠產生出多少貓，先設定成熟期、懷孕期、子代數量為研究的變因進行探討。

二、符號設定與名詞解釋

S_n：第 n 個月的貓對數量(如公母各 1 隻稱為貓對數量為 1)。

m：maturity，從一出生到成長至可以懷孕的月數，就是「成長期」。

p：pregnancy，懷孕至生產所需的月數，即「懷孕期」。

a：amount，下一月貓子代對數(每 1 對公母各 1 隻)。

t：為貓對推演圖中幼年貓對(公母各 1 隻)。

T：為貓對推演圖中成年貓對(有繁衍能力的公母各 1 隻)。

~~T~~：為繁殖一次後結紮貓對（公母都結紮且與幼貓隔離）

初始值：貓對數量為 1 時。

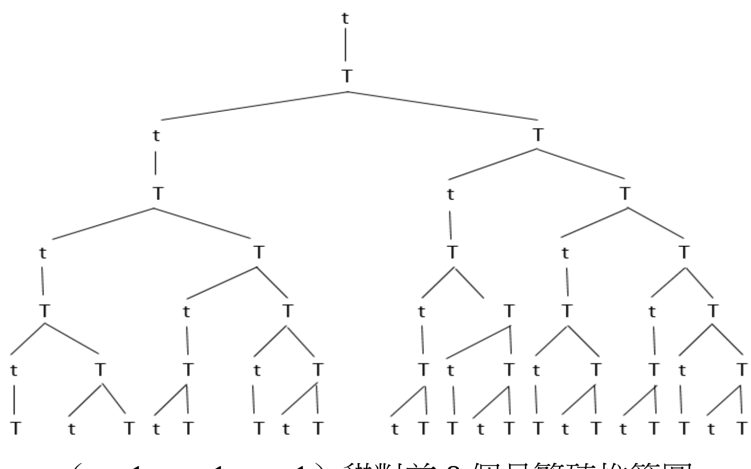
三、確認變因

本研究設定影響貓對數量的變因有成長期（代號 m）、懷孕期（代號 p）、子代對數（代號 a）。（三變因靈感來源請參閱-「**陸-三**」）

四、確立基本數列模型

將成長期（代號 m）、懷孕期（代號 p）、子代對數（代號 a）皆設為 1，透過繪圖推算出基本數列。

（一）$m=1$，$p=1$，$a=1$（t 為幼年貓對，T 為成年貓對）



（$m=1$，$p=1$，$a=1$）貓對前 8 個月繁殖推算圖

數列的前 8 項為 1，1，2，3，5，8，13，21，老師告訴我們這是費波南西數列具有以下

規律

1+1=2

1+2=3

2+3=5

3+5=8

5+8=13

8+13=21

透過上述的規律，以 S_n 表示第 n 個月貓對數量可得到

$$\begin{cases} \text{初始值} \quad S_1=S_2=1 \\ \text{數列規則 } S_n=S_{n-1}+S_{n-2}，n \geq 3 \end{cases}$$

此式即為本研究的基本模型。

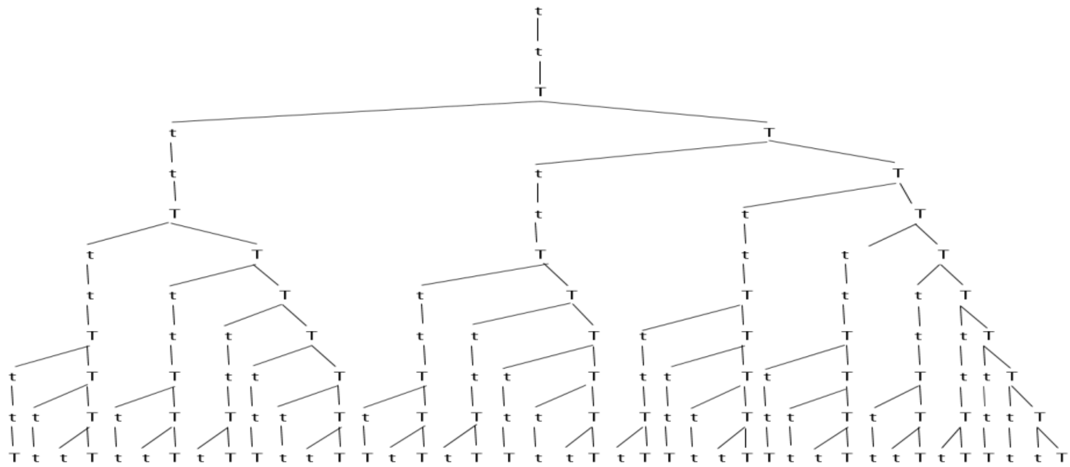
五、操縱變因，研究成長期（代號 m）、懷孕期（代號 p）、子代對數（代號 a）每一項變因對模型的影響，找出三變因的數列規則。

實驗步驟說明			
步驟	操縱變因數	操縱變因	實驗內容說明
（一）	1	m	只變動成長期 m，固定 p=1，a=1
（二）	1	p	只變動懷孕期 p，固定 m=1，a=1
（三）	1	a	只變動子代對數 a，固定 m=1，p =1
（四）	2	a、p	同時變動成長期 m 與懷孕期 p，固定 a=1
（五）	3	m、p、a	依據（三）與（四）的實驗結果，預測 m、p、a，所形成的數列規則。
（六）	3	m、p、a	確認 m、p、a，所形成的數列規則。
（七）	3	m、p、a	檢驗 m、p、a，所形成的數列規則準確性。

（一）變動成長期 m，p=1，a=1（懷孕期與子代對數皆為 1）。

以（m=2，p=1，a=1）為例：

1.繪製繁殖推算圖 （t 為幼年貓對，T 為成年貓對）



（m=2，p=1，a=1）貓對前 12 個月繁殖推算圖

2.整理（m=2，p=1，a=1）數據找出規律與推論

（m=2，p=1，a=1）貓對前 12 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_n	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41

將以上表格轉化成代數進行推論

n	S_n	轉化成代數
1	1	$S_1=S_2=S_3=1$
2	1	
3	1	
4	2	$S_4=S_3+S_1$
5	3	$S_5=S_4+S_2$
6	4	$S_6=S_5+S_3$
7	6	$S_7=S_6+S_4$
8	9	$S_8=S_7+S_5$
9	13	$S_9=S_8+S_6$
10	19	$S_{10}=S_9+S_7$
11	28	$S_{11}=S_{10}+S_8$
12	41	$S_{12}=S_{11}+S_9$
⋮	⋮	⋮
n	S_n	$S_n=S_{n-1}+S_{n-3}$

根據上表得到（m=2，p=1，a=1）數列的規律

$$\begin{cases} \text{初始值} \quad S_1=S_2=S_3=1 \\ \text{數列規律}\ S_n=S_{n-1}+S_{n-3}，n\geq 4 \end{cases}$$

3.歸納（m，p=1，a=1）的數列規則

繼續進行 m=3，m=4，m=5 的（m，p=1，a=1）數列規律探索（請參考貓對數量推算圖 NO.3~5），歸納如下

$1 \le m \le 5$

（m，1，1）	初始值	數列的規律
m=1	$S_1= S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+S_{n-2}$　　$n \ge 3$
m=2	$S_1=S_2=S_3=1$	$S_n=S_{n-1}+S_{n-3}$　　$n \ge 4$
m=3	$S_1=S_2=S_3=S_4=1$	$S_n=S_{n-1}+S_{n-4}$　　$n \ge 5$
m=4	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=S_{n-1}+S_{n-5}$　　$n \ge 6$
m=5	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$	$S_n=S_{n-1}+S_{n-6}$　　$n \ge 7$
	⋮	⋮
推論 m=m 時	$S_1=S_2=S_3=S_4=\ldots=S_{(m+1)}=1$	$S_n=S_{n-1}+S_{n-(m+1)}$　$n \ge (m+2)$

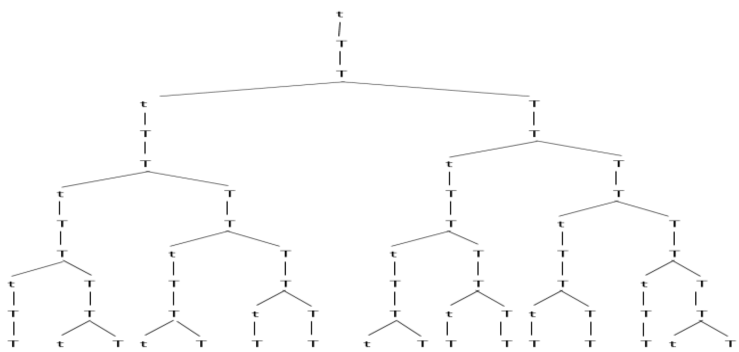
結論：1. m 值變動時，初始值為 $S_1=S_2=S_3=S_4=\ldots=S_{(m+1)}=1$

2. m 每增加 1，等號右邊右項的足碼便多減 1，數列為 $S_n=S_{n-1}+S_{n-(m+1)}$，$n \ge (m+2)$

（二）變動懷孕期 p，　m=1，a=1（成長期與子代對數皆為 1）。

以（m=1，p=2，a=1）為例：

1.繪製繁殖推算圖　（t 為幼年貓對，T 為成年貓對）



（m=1，p=2，a=1）貓對前 12 個月繁殖推算圖

2.整理（m=1，p=2，a=1）數據找出規律與推論

（m=1，p=2，a=1）貓對前 12 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_n	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16

將以上表格轉化成代數進行推論

n	S_n	轉化成代數
1	1	$S_1=S_2=S_3=1$

2	1	
3	1	
4	2	$S_4=S_2+S_1$
5	2	$S_5=S_3+S_2$
6	3	$S_6=S_4+S_3$
7	4	$S_7=S_5+S_4$
8	5	$S_8=S_6+S_5$
9	7	$S_9=S_7+S_6$
10	9	$S_{10}=S_8+S_7$
11	12	$S_{11}=S_9+S_8$
12	16	$S_{12}=S_{10}+S_9$
⋮	⋮	⋮
n	S_n	$S_n=S_{n-2}+S_{n-3}$

根據上表得到（m=1，p=2，a=1）數列的規律

$$\begin{cases} \text{初始值} & S_1=S_2=S_3=1 \\ \text{數列規律} & S_n=S_{n-2}+S_{n-3}，n\geq 4 \end{cases}$$

3.歸納（$m=1$，p，a=1）的數列規則

繼續進行 p=3，p=4，p=5 的（$m=1$，p，a=1）數列規律探索（請參考貓對數量推算圖 NO.7~9），歸納如下

$1\leq p\leq 5$

（1，p，1）	初始值	數列的規律
p=1	$S_1=S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+S_{n-2}$ $n\geq 3$
p=2	$S_1=S_2=S_3=1$	$S_n=S_{n-2}+S_{n-3}$ $n\geq 4$
p=3	$S_1=S_2=S_3=S_4=1$	$S_n=S_{n-3}+S_{n-4}$ $n\geq 5$
p=4	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=S_{n-4}+S_{n-5}$ $n\geq 6$
p=5	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$	$S_n=S_{n-5}+S_{n-6}$ $n\geq 7$
	⋮	⋮
推論 $p=p$ 時	$S_1=S_2=S_3=S_4=\ldots=S_{(p+1)}=1$	$S_n=S_{n-p}+S_{n-(p+1)}$ $n\geq(p+2)$

結論：1. p 值變動時，初始值為 $S_1=S_2=S_3=S_4=\ldots=S_{(p+1)}=1$

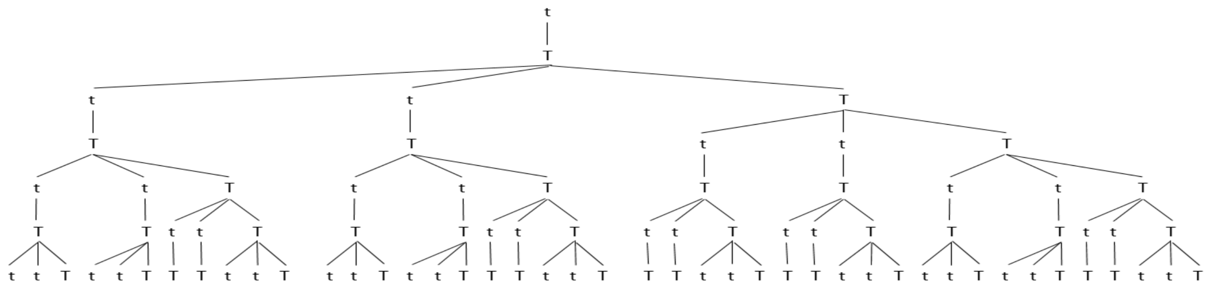
2. p 每增加 1，等號右邊左右項的足碼便同時多減 1，

數列為 $S_n=S_{n-p}+S_{n-(p+1)}$， $n\geq(p+2)$

（三）變動子代對數 a，m=1，p =1（成長期與懷孕期皆為 1）。

以（m=1，p=1，a=2）為例：

1.繪製繁殖推算圖 （t 為幼年貓對，T 為成年貓對）



（m=1，p=1，a=2）貓對前 7 個月繁殖推算圖

2.整理（m=1，p=1，a=2）數據找出規律與推論

（m=1，p=1，a=2）貓對前 7 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7
S_n	1	1	3	5	11	21	43

將以上表格轉化成代數進行推論

n	S_n	轉化成代數
1	1	S_1=S_2=1
2	1	
3	3	S_3=S_2+2×S_1
4	5	S_4=S_3+2×S_2
5	11	S_5=S_4+2×S_3
6	21	S_6=S_5+2×S_4
7	43	S_7=S_6+2×S_5
⋮	⋮	⋮
n	S_n	S_n=S_{n-1}+2×S_{n-2}

根據上表得到（m=1，p=1，a=2）數列的規律

$$\begin{cases} \text{初始值} & S_1=S_2=1 \\ \text{數列規律} & S_n=S_{n-1}+2\times S_{n-2}，n\geq 3 \end{cases}$$

3.歸納（m=1，p=1，a）的數列規則

繼續進行 p=3，p=4，p=5 的（m=1，p=1，a）數列規律探索（請參考貓對數量推算圖 NO.10~13），歸納如下

$1 \le a \le 5$

（1，1，a）	初始值	數列的規律
a=1	$S_1=S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+1\times S_{n-2}$　$n\ge3$
a=2	$S_1=S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+2\times S_{n-2}$　$n\ge3$
a=3	$S_1=S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+3\times S_{n-2}$　$n\ge3$
a=4	$S_1=S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+4\times S_{n-2}$　$n\ge3$
a=5	$S_1=S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+5\times S_{n-2}$　$n\ge3$
	⋮	⋮
推論 a=a 時	$S_1=S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+a\times S_{n-2}$　$n\ge3$

結論：1. a 值變動時，初始值皆為 $S_1=S_2=1$

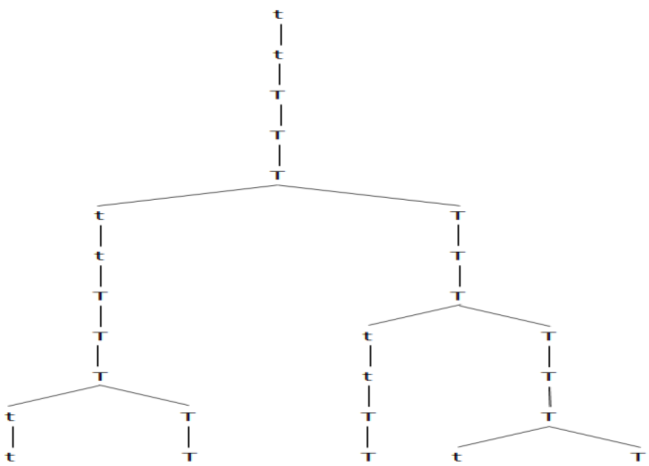
2. a 值變動時，a 成為等號右邊右項的係數，數列為 $S_n=S_{n-1}+a\times S_{n-2}$ ， $n\ge3$

（四）同時變動成長期 m 與懷孕期 p（子代對數為 1）

縣展時，評審老師有建議應加強三個變因整合成一個數學式的研究過程，團隊發現成長期 m 和懷孕期 p 對於數學式的影響較難掌握，因此決定在推演三個變因所形成的數列規則前，加入成長期 m 和懷孕期 p 的雙變因實驗，以強化整體實驗的論證。

以（m=2，p=3，a=1）為例：

1.繪製（m=2，p=3，a=1）的繁殖推算圖（t 為幼年貓對，T 為成年貓對）



（m=2，p=3，a=1）貓對前 12 個月繁殖推算圖

2.整理（m=2，p=3，a=1）數據找出規律與推論

（m=2，p=3，a=1）貓對前 12 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_n	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	5

將以上表格轉化成代數進行推論

n	S_n	轉化成代數
1	1	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$
2	1	
3	1	
4	1	
5	1	
6	2	$S_6=S_3+1\times S_1$
7	2	$S_7=S_4+1\times S_2$
8	2	$S_8=S_5+1\times S_3$
9	3	$S_9=S_6+1\times S_4$
10	3	$S_{10}=S_7+1\times S_5$
11	4	$S_{11}=S_8+1\times S_6$
12	5	$S_{12}=S_9+1\times S_7$
⋮	⋮	⋮
n	S_n	$S_n=S_{n-3}+1\times S_{n-5}$

根據上表得到（m=2，p=3，a=1）數列的規律

$$\begin{cases}\text{初始值} & S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1\\ \text{數列規律} & S_n=S_{n-3}+1\times S_{n-5}，n\geq 6\end{cases}$$

3.重複進行其他參數（m=3，p=2，a=1）、（m=4，p=2，a=1）、（m=4，p=3，a=1）的數列規則探索（請參考貓對數量推算圖 NO.補 2 ~補 4）， 歸納數列規則如下：

變動 m 與 p，a=1	初始值	數列的規律
（m=2，p=3，a=1）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=S_{n-3}+1\times S_{n-5}$ $n\geq 6$
（m=3，p=2，a=1）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=S_{n-2}+1\times S_{n-5}$ $n\geq 6$
（m=4，p=2，a=1）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$	$S_n=S_{n-2}+1\times S_{n-6}$ $n\geq 7$
（m=4，p=3，a=1）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=S_7=1$	$S_n=S_{n-3}+1\times S_{n-7}$ $n\geq 8$
	⋮	⋮
推論 m=m，p=p *時*	$S_1=S_2=\ldots=S_{(m+p)}=1$	$S_n=S_{n-p}+1\times S_{n-(m+p)}$ $n\geq(m+p+1)$

結論：1. m 與 p *變動*，a=1 *時*，初始值為 $S_1=S_2=S_3=S_4=\ldots=S_{(m+p)}=1$

2. m 與 p *變動*，a=1 *時*，等號右邊左項的足碼便為 p，等號右邊右項的足碼便為（m+p），數列為 $S_n=S_{n-p}+1\times S_{n-(m+p)}$， $n\geq(m+p+1)$

（五）預測三個變因所形成的數列規則：依據（三）與（四）的實驗結果，預測 m、p、a，所形成的數列規則。

（三）的實驗結果	（四）的實驗結果
變動 a，m=1 與 p =1 時數列的規則： 初始值皆為 $S_1=S_2=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+a\times S_{n-2}$ $n\geq3$	變動 m 與 p，a=1 時數列的規則： 初始值 $S_1=\ldots=S_{(m+p)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-p}+1\times S_{n-(m+p)}$，$n\geq(m+p+1)$
發現變動 a，m=1 與 p =1 時對數列的影響 初始值皆為 $S_1=S_2=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+\boxed{a}\times S_{n-2}$ $n\geq3$ 1. a 影響等號右邊右項的係數	發現變動 m 與 p，a=1 時對數列的影響 1. m 與 p 同時影響初始值的月數、等號右邊右項的足碼與 n 值的大小 初始值 $S_1=\ldots=S_{\boxed{(m+p)}}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-\boxed{p}}+\boxed{1}\times S_{n-\boxed{(m+p)}}$，$n\geq(\boxed{m+p}+1)$ 2. P 影響等號右邊左項的足碼 3. m 與 p 無法影響等號右邊右項的係數
合併（三）與（四）的實驗結果	
預測成長期 m、懷孕期 p、子代對數 a，三個變因所形成的數列規則。 初始值 $S_1=\ldots=S_{(m+p)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-p}+a\times S_{n-(m+p)}$，$n\geq(m+p+1)$	

（六）確認變動成長期 m、懷孕期 p、子代對數 a 三個變因所形成的數列規則。

1.以（$m=4$，p=3，a=2）進行確認。

2.將數據（$m=4$，p=3，a=2）帶入（五）所得的數列規則，預測所形成的數列，

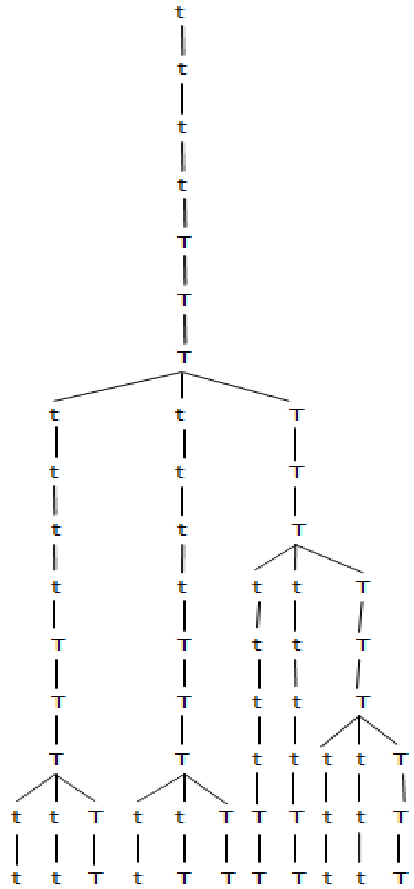
初始值 $S_1=\ldots=S_{(4+3)}=1$
數列規律 $S_n=S_{n-3}+2\times S_{n-(4+3)}$，$n\geq(4+3+1)$

$\Rightarrow$

初始值 $S_1=\ldots=S_7=1$
數列規律 $S_n=S_{n-3}+2\times S_{n-7}$，$n\geq8$

3.繪製繁殖推演圖並整理數據所的數列。

（1）繪製（$m=4$，p=3，a=2）繁殖推算圖



（m=4，p=3，a=2）貓對前 16 個月繁殖推算圖

（2）整理（m=4，p=3，a=2）數據找出規律。

（m=4，p=3，a=2）貓對前 16 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
S_n	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	5	5	5	7	11	11

將以上表格轉化成代數進行推論

n	S_n	轉化成代數
1	1	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=S_7=1$
2	1	
3	1	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	
8	3	$S_8=S_5+2\times S_1$
9	3	$S_9=S_6+2\times S_2$

10	3	$S_{10}=S_7+2\times S_3$
11	5	$S_{11}=S_8+2\times S_4$
12	5	$S_{12}=S_9+2\times S_5$
13	5	$S_{13}=S_{10}+2\times S_6$
14	7	$S_{14}=S_{11}+2\times S_7$
15	11	$S_{15}=S_{12}+2\times S_8$
16	11	$S_{16}=S_{13}+2\times S_9$
⋮	⋮	⋮
n	S_n	$S_n=S_{n-3}+2\times S_{n-7}$

根據上表得到（m=4，p=3，a=2）數列的規律

$$\begin{cases}\text{初始值} & S_1=\ldots=S_7=1\\ \text{數列規律} & S_n=S_{n-3}+2\times S_{n-7}，n\geq 8\end{cases}$$

4.將 3.與 2.所得的數列進行比對，以確認三變因所形成的數列規則是否正確。

<table>
<tr><td>3.將數據（m=4，p=3，a=2）直接帶入（五）所得的數列規則，預測所形成的數列。</td><td>2.透過繪製繁殖推演圖並整理數據所的數列。</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases}\text{初始值} & S_1=\ldots=S_7=1\\ \text{數列規律} & S_n=S_{n-3}+2\times S_{n-7}，n\geq 8\end{cases}$</td><td>$\begin{cases}\text{初始值} & S_1=\ldots=S_7=1\\ \text{數列規律} & S_n=S_{n-3}+2\times S_{n-7}，n\geq 8\end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">比對的結果：兩種方法所得數列完全相同。</td></tr>
<tr><td colspan="2">數列正確性的確認：代對數 a、成長期 m、懷孕期 p 三個變因所形成的數列規則
$\begin{cases}\text{初始值} & S_1=\ldots=S_{(m+p)}=1\\ \text{數列規律} & S_n=S_{n-p}+a\times S_{n-(m+p)}，n\geq(m+p+1)\end{cases}$ 是正確的。</td></tr>
</table>

（七）重複（六）的步驟，檢驗成長期 m、懷孕期 p 子、代對數 a 三個變因所形成，數列規則 $\begin{cases}\text{初始值} & S_1=\ldots=S_{(m+p)}=1\\ \text{數列規律} & S_n=S_{n-p}+a\times S_{n-(m+p)}，n\geq(m+p+1)\end{cases}$ 的準確性。

說明：

1.說明：縣展時，教授建議將（一）、（二）、（三）所得數據帶入檢驗，讓實驗能前後呼應，所以增加 1~13 的檢驗內容。

2.因 2、3、4 三個數字為比 1 大的最小三個數字，以（m=4，p=3，a=2）、（m=2，p=4，a=3）與（m=3，p=2，a=4）進行數列規則的推論與檢驗，不但數字小，也能清楚看到每一個變因位置；縣展時，教授建議可以再增加幾組數據讓檢驗更完整，所以增加（m=2，p=3，a=4）、（m=3，p=4，a=2）與（m=4，p=2，a=3）三組數據。

檢驗成長期 m、懷孕期 p、子代對數 a 三個變因所形成的數列規則				
編號	操縱變因與參數	基本模型與（一）、（二）、（三）實驗所得數列規則。	將參數直接帶入三個變因所形成數列。 初始值 $S_1=\ldots=S_{(m+p)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-p}+a\times S_{n-(m+p)}$， $n\geq(m+p+1)$	檢驗結果
1	$m=1$， $p=1$， $a=1$	初始值 $S_1=S_2=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+S_{n-2}$， $n\geq3$（請參考貓對數量推算圖 NO.1）	初始值 $S_1=S_{(1+1)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+1\times S_{n-(1+1)}$， $n\geq(1+1+1)$	檢驗成立
2	$m=2$， $p=1$， $a=1$	初始值 $S_1=S_2=S_3=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+S_{n-3}$， $n\geq4$（請參考貓對數量推算圖 NO.2）	初始值 $S_1=\ldots=S_{(2+1)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+a\times S_{n-(2+1)}$， $n\geq(2+1+1)$	檢驗成立
3	$m=3$， $p=1$， $a=1$	初始值 $S_1=S_2=S_3=S_4=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+S_{n-4}$， $n\geq5$（請參考貓對數量推算圖 NO.3）	初始值 $S_1=\ldots=S_{(3+1)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+a\times S_{n-(3+1)}$， $n\geq(2+1+1)$	檢驗成立
4	$m=4$， $p=1$， $a=1$	初始值 $S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+S_{n-5}$， $n\geq6$（請參考貓對數量推算圖 NO.4）	初始值 $S_1=\ldots=S_{(4+1)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+1\times S_{n-(4+1)}$， $n\geq(4+1+1)$	檢驗成立
5	$m=5$， $p=1$， $a=1$	初始值 $S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+S_{n-6}$， $n\geq7$（請參考貓對數量推算圖 NO.5）	初始值 $S_1=\ldots=S_{(5+1)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+1\times S_{n-(5+1)}$， $n\geq(5+1+1)$	檢驗成立
6	$m=1$， $p=2$， $a=1$	初始值 $S_1=S_2=S_3=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-2}+S_{n-3}$， $n\geq4$（請參考貓對數量推算圖 NO.6）	初始值 $S_1=\ldots=S_{(1+2)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-2}+1\times S_{n-(1+2)}$， $n\geq(1+2+1)$	檢驗成立
7	$m=1$， $p=3$， $a=1$	初始值 $S_1=S_2=S_3=S_4=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-3}+S_{n-4}$， $n\geq5$（請參考貓對數量推算圖 NO.7）	初始值 $S_1=\ldots=S_{(1+3)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-3}+1\times S_{n-(1+3)}$， $n\geq(1+3+1)$	檢驗成立
8	$m=1$， $p=4$， $a=1$	初始值 $S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-4}+S_{n-5}$， $n\geq6$（請參考貓對數量推算圖 NO.8）	初始值 $S_1=\ldots=S_{(1+4)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-4}+1\times S_{n-(1+4)}$， $n\geq(1+4+1)$	檢驗成立

9	m=1， p=5， a=1	初始值 $S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-5}+S_{n-6}$， $n\geq 7$（請參考貓對數量推算圖 NO.9）	初始值 $S_1=\ldots=S_{(1+5)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-5}+1\times S_{n-(1+5)}$， $n\geq(1+5+1)$	檢驗 成立
10	m=1， p=1， a=2	初始值 $S_1=S_2=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+2\times S_{n-2}$， $n\geq 3$（請參考貓對數量推算圖 NO.10）	初始值 $S_1=S_{(1+1)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+2\times S_{n-(1+1)}$， $n\geq(1+1+1)$	檢驗 成立
11	m=1， p=1， a=3	初始值 $S_1=S_2=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+3\times S_{n-2}$， $n\geq 3$（請參考貓對數量推算圖 NO.11）	初始值 $S_1=S_{(1+1)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+3\times S_{n-(1+1)}$， $n\geq(1+1+1)$	檢驗 成立
12	m=1， p=1， a=4	初始值 $S_1=S_2=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+4\times S_{n-2}$， $n\geq 3$（請參考貓對數量推算圖 NO.12）	初始值 $S_1=S_{(1+1)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+4\times S_{n-(1+1)}$， $n\geq(1+1+1)$	檢驗 成立
13	m=1， p=1， a=5	初始值 $S_1=S_2=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+5\times S_{n-2}$， $n\geq 3$（請參考貓對數量推算圖 NO.13）	初始值 $S_1=S_{(1+1)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+5\times S_{n-(1+1)}$， $n\geq(1+1+1)$	檢驗 成立
		將參數直接帶入三個變因所形成數列	檢驗後所得的數列	
14	m=2， p=4， a=3	初始值 $S_1=\ldots=S_{(2+4)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-4}+3\times S_{n-(2+4)}$， $n\geq(2+4+1)$	初始值 $S_1=\ldots=S_6=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-4}+3\times S_{n-6}$， $n\geq 7$（請參考貓對數量推算圖 NO.15）	檢驗 成立
15	m=2， p=3， a=4	初始值 $S_1=\ldots=S_{(2+3)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-3}+4\times S_{n-(2+3)}$， $n\geq(2+3+1)$	初始值 $S_1=\ldots=S_5=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-3}+4\times S_{n-5}$， $n\geq 6$（請參考貓對數量推算圖 NO.補 5）	檢驗 成立
16	m=3， p=4， a=2	初始值 $S_1=\ldots=S_{(3+4)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-4}+2\times S_{n-(3+4)}$， $n\geq(3+4+1)$	初始值 $S_1=\ldots=S_7=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-4}+2\times S_{n-7}$， $n\geq 8$（請參考貓對數量推算圖 NO.補 6）	檢驗 成立
17	m=3， p=2， a=4	初始值 $S_1=\ldots=S_{(3+2)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-2}+4\times S_{n-(3+2)}$， $n\geq(3+2+1)$	初始值 $S_1=\ldots=S_5=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-2}+2\times S_{n-5}$， $n\geq 6$ （請參考貓對數量推算圖 NO.16）	檢驗 成立

18	m=4， p=2， a=3	初始值 $S_1=\ldots=S_{(4+2)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-2}+3\times S_{n-(4+2)}$， $n\geq(4+2+1)$	初始值 $S_1=\ldots=S_6=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-2}+3\times S_{n-6}$， $n\geq 7$（請參考貓對數量推算圖 NO.補 7）	檢驗 成立

結論：以成長期 m、懷孕期 p 子、代對數 a 三個變因所形成數列規則為

$$\begin{cases}\text{初始值 } S_1=\ldots=S_{(m+p)}=1 \\ \text{數列規律 } S_n=S_{n-p}+a\times S_{n-(m+p)}，n\geq(m+p+1)\end{cases}$$

（本研究的核心）

六、找出成貓對繁殖一次後就結紮的數列規則

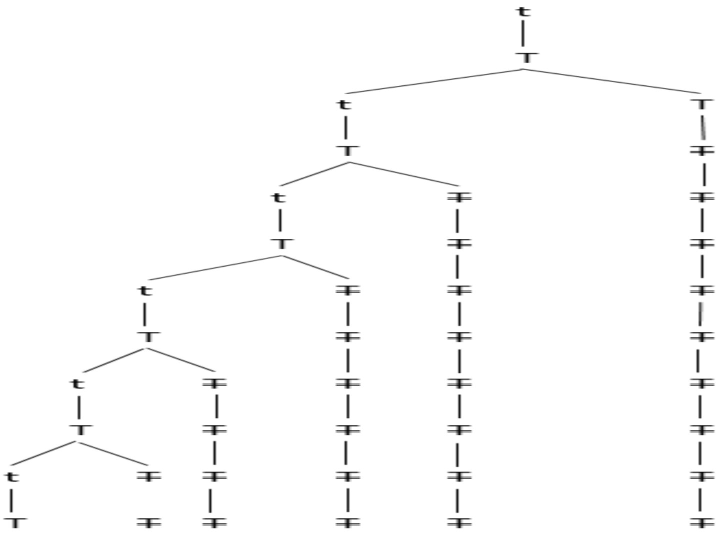
本實驗為重複本研究「**肆**-四」、「**肆**-五」的實驗，因受限說明書只有 30 頁，部分實驗內容會加以省略，詳情請參考「附件一：成貓對繁殖一次後就結紮的數列規則」。

變因仍設為成長期（代號 m）、懷孕期（代號 p）、子代對數（代號 a）。

（一）確定基本數列模型

1.繪製（m＝1，p＝1，a＝1）繁殖推演圖

（t 為幼年貓對，T 為成年貓對，Ŧ為成年結紮貓對）



（m=1，p=1，a=1）貓對繁殖一次後就結紮前 7 個月繁殖推算圖

2.整理（m=1，p=1，a=1）數據找出規律與推論

（m=1，p=1，a=1）貓對前 12 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_n	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6

將以上表格轉化成代數進行推論

n	S_n	轉化成代數

1	1	$S_1=S_2=1$
2	1	
3	2	$S_3=1+S_1$
4	2	$S_4=1+S_2$
5	3	$S_5=1+S_3$
6	3	$S_6=1+S_4$
7	4	$S_7=1+S_5$
8	4	$S_8=1+S_6$
9	5	$S_9=1+S_7$
10	5	$S_{10}=1+S_8$
11	6	$S_{11}=1+S_9$
12	6	$S_{12}=1+S_{10}$
⋮	⋮	⋮
n	S_n	$S_n=1+S_{n-2}$

根據上表得到（m=1，p=1，a=1）數列的規律

$$\begin{cases} \text{初始值} & S_1=S_2=1 \\ \text{數列規律} & S_n=1+S_{n-2}，n\geq 3 \end{cases}$$

（二）找出（m，p=1，a=1）的數列規則（請參考成貓繁殖一次結紮貓對數量推演圖 NO.2~5）

1.繪製（m=2，p=1，a=1）繁殖推演圖（略）

2.整理（m=2，p=1，a=1）數據找出規律與推論（略），

得到數列的規律
$$\begin{cases} \text{初始值} & S_1=S_2=S_3=1 \\ \text{數列規律} & S_n=1+S_{n-3}，n\geq 4 \end{cases}$$

3.歸納（m，p=1，a=1）的數列規則

繼續進行 m=3，m=4，m=5 的（m，p=1，a=1）數列規律探索，歸納如下

$1\leq m\leq 5$

（m，1，1）	初始值	數列的規律
m=1	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+S_{n-2}$　　$n\geq 3$
m=2	$S_1=S_2=S_3=1$	$S_n=1+S_{n-3}$　　$n\geq 4$
m=3	$S_1=S_2=S_3=S_4=1$	$S_n=1+S_{n-4}$　　$n\geq 5$
m=4	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=1+S_{n-5}$　　$n\geq 6$
m=5	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$	$S_n=1+S_{n-6}$　　$n\geq 7$
	⋮	⋮

推論 m=m 時	$S_1=S_2=S_3=S_4=\ldots=S_{(m+1)}=1$	$S_n=1+S_{n-(m+1)}$ $n\geq(m+2)$

結論：1. m 值變動時，初始值為 $S_1=S_2=S_3=S_4=\ldots=S_{(m+1)}=1$

2. m 每增加 1，等號右邊右項的足碼便多減 1，數列為 $S_n=1+S_{n-(m+1)}$，$n\geq(m+2)$

（三）找出（m=1，p，a=1）的數列規則（請參考成貓繁殖一次結紮貓對數量推演圖 NO.6~9）

1.繪製（m=1，p=2，a=1）繁殖推演圖（略）

2.整理（m=1，p=2，a=1）數據找出規律與推論（略），

得到數列的規律

初始值 $S_1=S_2=S_3=1$

數列規律 $S_n=1+S_{n-3}$，$n\geq4$

3.歸納（m=1，p=2，a=1）的數列規則

繼續進行 p=3，p=4，p=5 的（m=1，p，a=1）數列規律探索，歸納如下

$1\leq p\leq5$

（1，p，1）	初始值	數列的規律
p=1	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+S_{n-2}$ $n\geq3$
p=2	$S_1=S_2=S_3=1$	$S_n=1+S_{n-3}$ $n\geq4$
p=3	$S_1=S_2=S_3=S_4=1$	$S_n=1+S_{n-4}$ $n\geq5$
p=4	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=1+S_{n-5}$ $n\geq6$
p=5	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$	$S_n=1+S_{n-6}$ $n\geq7$
	⋮	⋮
推論 p=p 時	$S_1=S_2=S_3=S_4=\ldots=S_{(p+1)}=1$	$S_n=1+S_{n-(p+1)}$ $n\geq(p+2)$

結論：1. p 值變動時，初始值為 $S_1=S_2=S_3=S_4=\ldots=S_{(p+1)}=1$

2. p 每增加 1，等號右邊右項的足碼便同時多減 1，數列為 $S_n=1+S_{n-(p+1)}$，$n\geq(p+2)$

（四）找出（m=1，p=1，a）的數列規則（請參考成貓繁殖一次結紮貓對數量推演圖 NO.10~13）

1.繪製（m=1，p=1，a=2）繁殖推演圖（略）

2.整理（m=1，p=1，a=2）數據找出規律與推論（略），

得到數列的規律

初始值 $S_1=S_2=1$

數列規律 $S_n=1+2\times S_{n-2}$，$n\geq3$

3.歸納（m=1，p=1，a=2）的數列規則

繼續進行 a=3，a=4，a=5 的（m=1，p=1，a）數列規律探索，歸納如下

$1\leq a\leq5$

（1，1，a）	初始值	數列的規律
a=1	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+1\times S_{n-2}$ $n\geq3$

a=2	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+2\times S_{n-2}$ $n\geq 3$
a=3	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+3\times S_{n-2}$ $n\geq 3$
a=4	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+4\times S_{n-2}$ $n\geq 3$
a=5	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+5\times S_{n-2}$ $n\geq 3$
	⋮	⋮
推論 a=a 時	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+a\times S_{n-2}$ $n\geq 3$

結論：1. *a* 值變動時，初始值皆為 $S_1=S_2=1$

2. *a* 值變動時，*a* 成為等號右邊右項的係數，數列為 $S_n=1+a\times S_{n-2}$ ， $n\geq 3$

（五）同時變動成長期 *m* 與懷孕期 *p*

進行以下的數列規則探索（請參考成貓繁殖一次結紮貓對數量推演圖 NO.14 ~17），

歸納數列規則如下：

變動 m 與 p，a=1	初始值	數列的規律
（m=2，p=3，a=1）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=1+1\times S_{n-5}$ $n\geq 6$
（m=3，p=2，a=1）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=1+1\times S_{n-5}$ $n\geq 6$
（m=4，p=2，a=1）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$	$S_n=1+1\times S_{n-6}$ $n\geq 7$
（m=4，p=3，a=1）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=S_7=1$	$S_n=1+1\times S_{n-7}$ $n\geq 8$
		⋮
推論 m=m，p=p 時	$S_1=S_2=\ldots=S_{(m+p)}=1$	$S_n=1+1\times S_{n-(m+p)}$ $n\geq(m+p+1)$

結論：1. *m 與 p 變動*，*a*=1 *時*，初始值為 $S_1=S_2=S_3=S_4=\ldots=S_{(m+p)}=1$

2. *m 與 p 變動*，*a*=1 *時*，等號右邊右項的足碼便為（$m+p$），

數列為 $S_n=1+1\times S_{n-(m+p)}$， $n\geq(m+p+1)$

（六）預測三個變因所形成的成貓對繁殖一次後就結紮的數列規則：依據（四）與（五）的實驗結果，預測 *m*、*p*、*a*，所形成的數列規則。

$$\begin{cases} \text{初始值} \quad S_1=\ldots=S_{(m+p)}=1 \\ \text{數列規律 } S_n=1+a\times S_{n-(m+p)}，n\geq(m+p+1) \end{cases}$$

（七）檢驗三個變因所形成的成貓對繁殖一次後就結紮的數列規則

編號	操縱變因與參數	將數據直接帶入三個變因所形成數列	檢驗後所得的數列	

1	m=4， p=3， a=2	初始值　$S_1=\ldots=S_{(4+3)}=1$ 數列規律 $S_n=1+2\times S_{n-(4+3)}$， $n\geq(4+3+1)$	初始值　$S_1=\ldots=S_7=1$ 數列規律 $S_n=1+2\times S_{n-7}$， $n\geq8$（請參考成貓繁殖一次結紮數量推演圖 NO.18）	檢驗成立
2	m=3， p=4， a=2	初始值　$S_1=\ldots=S_{(3+4)}=1$ 數列規律 $S_n=1+2\times S_{n-(3+4)}$， $n\geq(3+4+1)$	初始值　$S_1=\ldots=S_7=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-3}+2\times S_{n-7}$， $n\geq8$（請參考成貓繁殖一次結紮數量推演圖 NO.19）	檢驗成立
3	m=2， p=4， a=3	初始值　$S_1=\ldots=S_{(2+4)}=1$ 數列規律 $S_n=1+3\times S_{n-(2+4)}$， $n\geq(2+4+1)$	初始值　$S_1=\ldots=S_6=1$ 數列規律 $S_n=1+2\times S_{n-6}$， $n\geq7$（請參考成貓繁殖一次結紮數量推演圖 NO.20）	檢驗成立

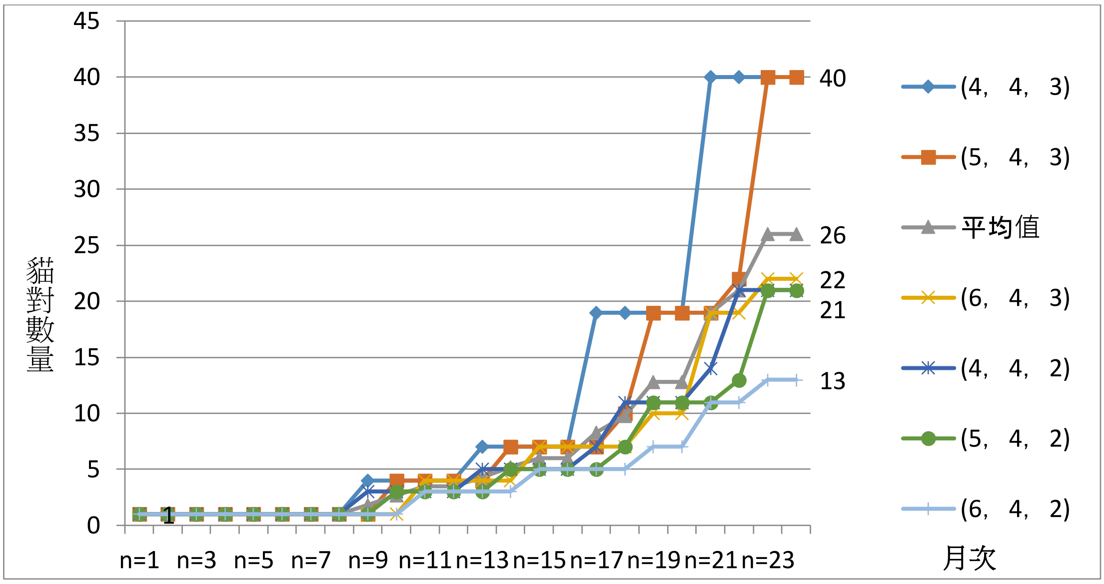
結論：以成長期 m、懷孕期 p 子、代對數 a 三個變因所形成貓對繁殖一次後就結紮的數列規則為

$$\begin{cases} \text{初始值} \quad S_1=\ldots=S_{(m+p)}=1 \\ \text{數列規律 } S_n=1+a\times S_{n-(m+p)},\ n\geq(m+p+1) \end{cases}$$

七、依據「**肆**-五-（七）」所找出數列規則，推算出一對貓不結紮兩年後的貓對族群數量。

條件設定：依據網路所得資料與老師的飼養經驗，母貓出約 4~6 個月就能懷孕，一年可以生產三次，平均一次可以生到 4 至 6 胎（2 至 3 對），依上述條件設定（m=4，p=4，a=2）、（m=4，p=4，a=3）、（m=5，p=4，a=2）、（m=5，p=4，a=3）、（m=6，p=4，a=2）與（m=6，p=4，a=3）進行 24 個月後（兩年後）貓對的數量的推算。

條件設定	第 24 個月貓對的數量
（m=4，p=4，a=2）	21 對（請參考貓對數量推算 NO.1）
（m=4，p=4，a=3）	40 對（請參考貓對數量推算 NO.2）
（m=5，p=4，a=2）	21 對（請參考貓對數量推算 NO.3）
（m=5，p=4，a=3）	40 對（請參考貓對數量推算 NO.4）
（m=6，p=4，a=2）	13 對（請參考貓對數量推算 NO.5）
（m=6，p=4，a=3）	22 對（請參考貓對數量推算 NO.6）
平均值	約 26 對（52 隻）。



兩年後貓對數量統計折線圖

八、找出不結紮貓對可能的繁殖模型。

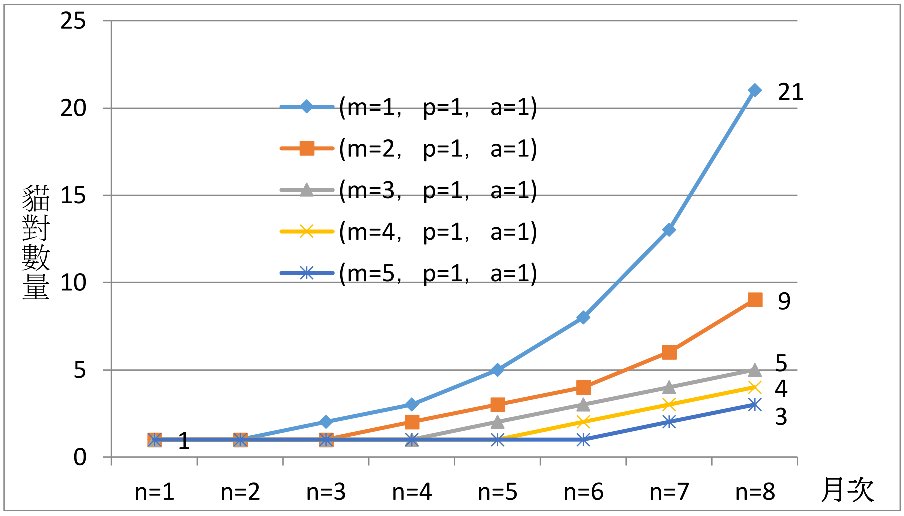
依據「**肆**-七」,(6,4,3)、(4,4,2)、(5,4,2)這三組參數所得貓對數量較接近平均值,將數據帶入「**肆**-五-(七)」所得的本研究數列規則,可做為不節紮貓對繁殖的模型,如下:

貓對繁殖模型				
(m、p、a)參數	數列規則			貓對繁殖的模型
(6,4,3)	帶入	初始值 $S_1=\ldots=S_{(m+p)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-p}+a\times S_{n-(m+p)}$, $n\geq(m+p+1)$	得到	初始值 $S_1=\ldots=S_{10}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-4}+3\times S_{n-10}$, $n\geq11$
(4,4,2)				初始值 $S_1=\ldots=S_8=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-4}+2\times S_{n-8}$, $n\geq9$
(5,4,2)				初始值 $S_1=\ldots=S_9=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-4}+2\times S_{n-9}$, $n\geq10$

九、了解不結紮數列規則實驗中的變因對貓族群數量的影響

(一)獨立觀察每個變因對不結紮貓族群數量變動的影響

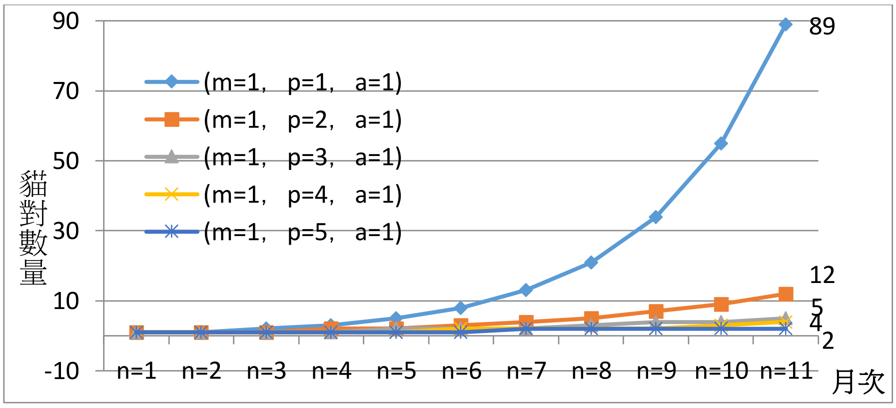
1.變動成長期 *m*



變動成長期 *m* 貓族群數量變動折線圖

發現：成長期 *m* 越大，貓族群數量的成長就越慢，屬於負向變因。

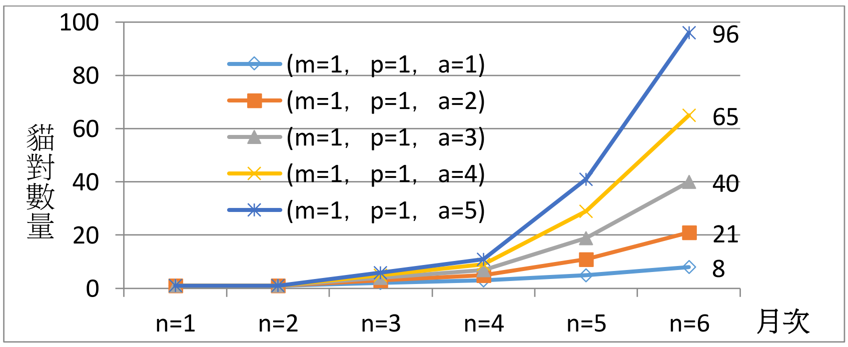
2.變動懷孕期 *p*



變動成長期 *p* 貓族群數量變動折線圖

發現：懷孕期 *p* 越大，貓族群數量的成長就越慢，屬於負向變因。

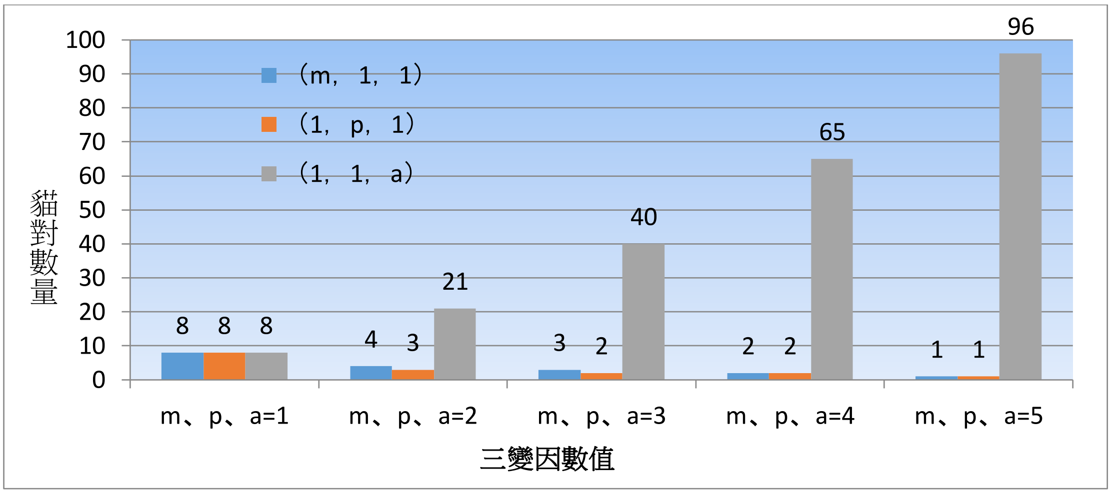
3.變動子代對數 *a*



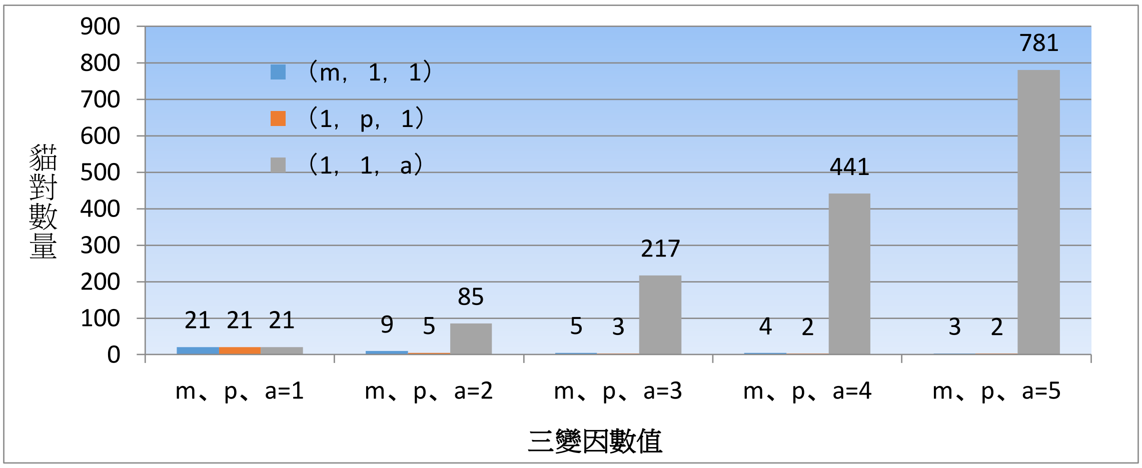
變動成長期 *a* 貓族群數量變動折線圖

發現：子代對數 *a* 越大，貓族群數量的成長就越快，屬於正向變因。

（二）同時觀察三個變因對不結紮貓族群數量變動的影響。



m、*p*、*a* 各變因影響貓族群數量變化柱狀圖 （數據取自 *n*=6）



m、*p*、*a* 各變因影響貓族群數量變化柱狀圖 （數據取自 *n*=8）

發現：

1.對於不結紮貓族群數量的成長的影響，子代對數 *a* 是正向變因，成長期 *m* 與懷孕期 *p* 是負向變因。

2.觀察 *m*=*p*=*a*=2 時，不論 *n*=6 或 *n*=8，懷孕期 *p* 對不結紮貓族群數量抑制的效果明顯大於成長期 *m*。

結論：

1.本研究中，子代對數 *a* 是正向變因，數值越大，不結紮貓族群數量的成長就越快；成長期 *m* 與懷孕期 *p* 是負向變因，數值越大，不結紮貓族群數量的成長就越慢。

2.懷孕期 *p* 對不結紮貓族群數量抑制的效果明顯大於成長期 *m*。

3.貓品種只要符合成長期 *m* 越小，懷孕期 *p* 越小，子代對數 *a* 越大，族群數量的成長就越快，此一結論也可以應用到其他物種。

十、依據貓對數量繁殖模型，比較 24 個月後，結紮、繁殖一次後就結紮與不結紮三組貓族群的數量。

說明：1.幼貓可能在四個月就懷孕，因此結紮組設定三個月時就結紮，對數都為 1。

2.繁殖一次後就結紮組使用（m=6，p=4，a=3），繁殖數量模型為：

$$\begin{cases} \text{初始值} \quad S_1=\ldots=S_{10}=1 \\ \text{數列規律 } S_n=1+3\times S_{n-10}，n\geq 11 \end{cases}$$

（m=6，p=4，a=3）繁殖一次後就結紮組貓對前 24 個月繁殖數量表

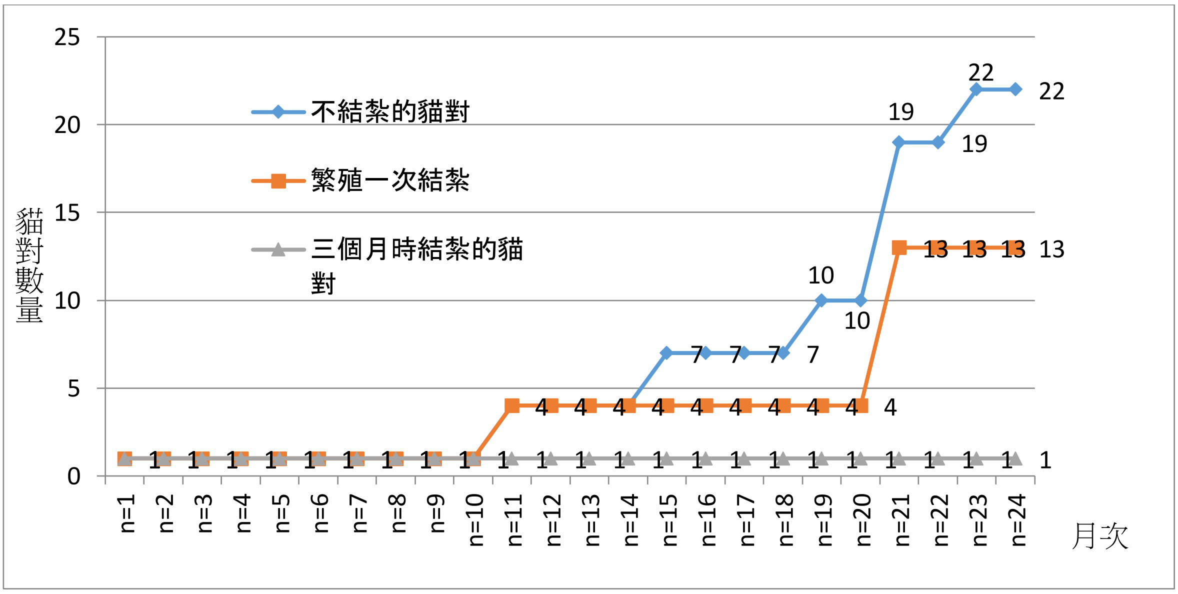
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
S_n	4	4	4	4	4	4	4	4	13	13	13	13

3.不結紮組使用（m=6，p=4，a=3），繁殖數量模型為：

$$\begin{cases} \text{初始值} \quad S_1=\ldots=S_{10}=1 \\ \text{數列規律 } S_n=S_{n-4}+3\times S_{n-10}，n\geq 11 \end{cases}$$

（m=6，p=4，a=3）不結紮組貓對前 24 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
S_n	4	4	7	7	7	7	10	10	19	19	22	22



不結紮、繁殖一次結紮與三個月時結紮貓對數量折線圖

觀察：1.不結紮組與結紮組的貓對數量在前 10 個月都是 1 對沒有差別。

2.在 24 個月時，<u>結紮組對數 1</u>＜<u>繁殖一次結紮組對數 13</u>＜<u>不結紮組對數 22</u>

結論：1.結紮是抑制貓族群成長的好方法。

2.越早結紮，抑制貓族群成長的效果越好。

十一、依據實驗結果，檢驗網路文章–『貓咪的「二胎」可別輕易開放！日本 2 隻貓隔年造出 100 員大家族』的合理性。

（一）說明：

1.三變因設為利於貓族群擴大的極限值，就是成長期與懷孕期越短，子代對數越多越有利於貓族群的擴大，*m* 設為 4，*p* 設為 3，*a* 設為 3、4，建立兩個模型，算出兩個模型 12 個月到 23 個月的平均族群數量是否能達到 50 對，即 100 隻以上。

2.變因參數與時間設定說明：

（1）*m* 設為 4：是已知貓最短的成長期。

（2）*p* 設為 3：母貓的懷孕期約 63（2 個月），加上母貓要哺乳至少一個月。

（3）*a* 設為 3、4：4 對為一般貓子代對數的極大值，但是考慮不可能每次都生出 4 對，所以和小組成員討論後，再加入 3，求取兩組的平均值。

（4）*n* 取 12~23：文章提到「隔年」，一般所理解的「隔年」，是指滿 12 個月未滿 24 個月，所以取 12~23。

（二）

1.以（*m=4*，*p=3*，*a=4*）帶入「**肆**-五-（七）」的數列規則，建立模型

$$\begin{cases} \text{初始值} \quad S_1=\ldots=S_7=1 \\ \text{數列規律 } S_n=S_{n-3}+4\times S_{n-7}\text{，}n\geq 8 \end{cases}$$

2.整理所得數據

（*m*=4，*p*=3，*a*=4）貓對前 23 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_n	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	9	9
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
S_n	9	13	29	29	33	65	65	69	117	181	185	

（三）

1.以（*m=4*，*p=3*，*a=3*）帶入「**肆**-五-（七）」的數列規則，建立模型

$$\begin{cases} \text{初始值} \quad S_1=\ldots=S_7=1 \\ \text{數列規律 } S_n=S_{n-3}+3\times S_{n-7}\text{，}n\geq 8 \end{cases}$$

2. 整理所得數據

（m=4，p=3，a=4）貓對前 23 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_n	1	1	1	1	1	1	1	4	4	4	7	7
n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
S_n	7	10	19	19	22	40	40	43	70	97	100	

（四）求取（二）、（三）所得 $n=12\sim23$ 數據平均值

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
S_n	**8**	8	11.5	24	24	27.5	**52.5**	52.5	56	93.5	139	142.5

（五）依（四）研究結果的下結論：

依據「**肆**-七」研究表示，一般狀況下一對貓要在 24 個月大約只能繁殖出 26 對（52 隻）貓；「**肆**-十一」研究表示，必須在高標準的條件下才有可能在第 18 個月後繁殖出 52.5 對（105 隻）。綜合以上兩個結果，『貓咪的「二胎」可別輕易開放！日本 2 隻貓隔年造出 100 員大家族』雖有可能發生，如果以 12 個月來看待，仍有誇大的部分。

（六）文章內容探究：文章部分內容提到「獸醫表示：…第二年…24 隻貓，…第三年便會演變成 127 隻貓咪！」與標題隔年造出 100 員大家族，明顯不同，顯示標題明顯誇大。

（七）最後結論：（五）、（六）都發現文章標題明顯誇大，所以標題明顯誇大不合理。

十二、以數學演算法找出成貓對繁殖一次後就結紮的貓對數量計算式

符號設定：（m：成長期）、（p：懷孕期）、（a：子代對數）、（S_n：第 n 個月的貓對數量）。

條件設定：生育過的貓對公母都結紮。

演算過程		
	月次	貓對數量
1	n=m+p+1 個月時	$S_n=S_{m+p+1}$=a+1
2	n = (m+p+1)+(m+p)個月時	$S_n=S_{(m+p+1)+(m+p)}$=(a+1)+a×a
3	n = (m+p+1)+(m+p)+(m+p)個月時	$S_n=S_{(m+p+1)+(m+p)+(m+p)}$=(a+1)+a×a+a×a×a
	⇩	⇩
4	n =1+3(m+p)個月時	$S_n=S_{1+3(m+p)}$=1+a+a×a+ a×a×a
5	n =1+x(m+p)個月時	$S_n=S_{1+x(m+p)}$=1+ a +a×a +a×a×a+ a×a×a×a+…+（x 個 a 相乘）

➡ 使用等量公理

6		$a \times S_{1+x(m+p)}$ = ~~a~~ +~~a×a~~ +~~a×a×a~~+ ~~a×a×a×a~~+……………+~~（x 個 a 相乘）~~+（x+1 個 a 相乘）
		$-1 \times S_{1+x(m+p)}$ = 1+ ~~a~~ +~~a×a~~ +~~a×a×a~~ +~~a×a×a×a~~+……………+~~（x 個 a 相乘）~~
	（1）	（a－1）$S_{1+x(m+p)}$ =（x+1 個 a 相乘）－1
	（2）	~~（a－1）~~ $S_{1+x(m+p)}$ ÷~~（a－1）~~ =（x+1 個 a 相乘）－1〕÷（a－1）
7		$S_{1+x(m+p)}$ =〔（x+1 個 a 相乘）－1〕÷（a－ 1）

演算結果　　$S_n = S_{1+x(m+p)}$ =〔（x+1 個 a 相乘）－1〕/（a－1）

➡ **成貓對繁殖一次後就結紮的貓對數量計算式**

1. $S_n = S_{1+x(m+p)}$ =〔（x+1 個 a 相乘）－1〕÷（a－1）
2. 且 $S_n = S_{1+x(m+p)+z}$ =〔（x+1 個 a 相乘）－1〕÷（a－ 1）

$x \geq 0$，x 為正整數； $0 < z \leq m+p-1$， z 為正整數

發現：依此計算式，得知貓對數量三變數中，讓族群數量成長是子代對數 *a*，與「**肆**-九」結論 1 不謀而合。

伍、研究結果

一、以成長期 *m*、懷孕期 *p*、子代對數 *a* 為變因，第 *n* 個月貓對數量的數列為

- 初始值　$S_1 = \ldots = S_{(m+p)} = 1$
- 數列規律 $S_n = S_{n-p} + a \times S_{n-(m+p)}$，$n \geq (m+p+1)$

二、以成長期 *m*、懷孕期 *p* 子、代對數 *a* 三個變因，貓對繁殖一次後就結紮，第 *n* 個月的數列為

- 初始值　$S_1 = \ldots = S_{(m+p)} = 1$
- 數列規律 $S_n = 1 + a \times S_{n-(m+p)}$，$n \geq (m+p+1)$

三、依所求數列進行推算，一對貓在考慮成長期、懷孕期與子代對數的因素下，兩年後（24 個月）可能產生 26 對（52 隻）的貓族群。

四、不結紮貓對可能的繁殖模型

（一）	（二）	（三）
初始值　$S_1 = \ldots = S_{10} = 1$ 數列規律 $S_n = S_{n-4} + 3 \times S_{n-10}$， $n \geq 11$	初始值　$S_1 = \ldots = S_8 = 1$ 數列規律 $S_n = S_{n-4} + 2 \times S_{n-8}$， $n \geq 9$	初始值　$S_1 = \ldots = S_9 = 1$ 數列規律 $S_n = S_{n-4} + 2 \times S_{n-10}$， $n \geq 10$

五、不結紮數列規則實驗中的變因對貓族群數量的影響

（一）本研究中，子代對數 *a* 是正向變因，數值越大，貓族群數量的成長就越快；成長期 *m* 與懷孕期 *p* 是負向變因，數值越大，貓族群數量的成長就越慢。

（二）懷孕期 p 對貓族群數量抑制的效果明顯大於成長期 m。

（三）貓品種只要符合成長期 m 越小，懷孕期 p 越小，子代對數 a 越大，族群數量的成長就越快，此一結論也可以應用到其他物種。

六、使用（m=6，p=4，a=3）貓對數量繁殖模型，比較 24 個月後結紮、繁殖一次後就結紮與不結紮貓族群的數量，得到

（一）結紮是抑制貓族群成長的好方法。

（二）越早結紮，抑制貓族群成長的效果越好。

七、網路文章-『貓咪的「二胎」可別輕易開放！日本 2 隻貓咪隔年生出 100 員大家族』內容是明顯誇大的。

八、貓對繁殖一次後就結紮的貓對數量計算式為

$$\begin{cases} 1.S_n = S_{1+x(m+p)} = [(x+1\text{ 個 a 相乘}) - 1] \div (a-1) \\ 2.\text{且 } S_n = S_{1+x(m+p)+z} = [(x+1\text{ 個 a 相乘}) - 1] \div (a-1) \\ x \geq 0，x\text{ 為正整數；}\ 0 < z \leq m+p-1，\ z\text{ 為正整數} \end{cases}$$

依此計算式，得知貓對數量三變數中，讓族群數量成長是子代對數 a，與「伍-五-（一）」相同。

陸、討論

一、變因選擇說明：根據老師養貓的經驗，影響貓對數量主要的因素有貓的成長期、懷孕期、子代的數量、母貓再次懷孕的時間、生病死亡、壽命，為了降低研究的難度，求得在理想狀態下貓的繁殖數量，就先以成長期（代號 m）、懷孕期（代號 p）、子代對數（代號 a）為實驗變因，待有初步成果後，在往後的實驗中再增加更多的變因，讓推出來的數列規則更加完備。

二、貓的懷孕週期約在 2 個多月，為何在最後推論時懷孕期 p 使用 4 而非 2，因為母貓在生產完後需要進行復原與哺乳，一年約可懷孕 3 次，換算下來每次懷孕間隔約 4 個月，為了讓推算結論符合實際狀況，因此將懷孕期 p 設為 4。

三、閱讀《費氏數列的由來》（參考資料 3）這篇網路文章時，小組成員就發現費氏數列的形成早已包含成長期、懷孕期、子代對數，只是三個變因都是 1 不易被發現，透過本研究就清楚看到每一個變因的位置與每一個變因對數列的影響。

四、雖然子代對數 a 是正向變因，數值越大，貓族群數量的成長就越快；成長期 m 與懷孕期 p 是負向變因，數值越大，貓族群數量的成長就越慢。但是在自然狀態下三個變因是很難透過人為力量去改變的，但是卻可以技巧性的延長成長期 m 與懷孕期 p，例如：將公

母貓進行隔離，待一年生理完全成熟才進行配種，就是技巧性的延長成長期 m；母貓生產後，將公母貓進行隔離，待幼貓完全斷奶後，再進行配種，就是技巧性的延長懷孕期 p。就能縮減貓族群成長的速度。

五、老師告訴我們，研究出的三變因的數列規則或公式，以後只要學會用電腦程式，例如：Scratch，只要輸入變因的參數值與時間月數，就能很快算出答案，是我們以後可以努力學習的目標。

六、「**肆**-八」所找出的貓對繁殖模型是本次研究所得，不一定符合或接近個別貓品種的真實情況。

七、本次研究預計要找出「不結紮三變因的數學計算式」，但變數過於複雜而失敗，卻在無意中卻找出「繁殖一次後就結紮的貓對數學計算式」。

柒、結論

一、在特定的條件下，是可以對貓的族群數量進行預測的（請參考「**伍**-三」的結果）。

二、貓的繁殖力相當驚人，推論的結果雖沒有如網路文章─『貓咪的「二胎」可別輕易開放！日本 2 隻貓咪隔年生出 100 員大家族』，但推論出的數據為，一對貓可在兩年產生 26 對（52 隻）的貓族也是相當驚人，一般家庭是很難負擔的。

三、本次研究所推算出的數列，除了可以建立貓的繁殖模型外，應可應用在其他動物族群數量的推算上。

以小型犬為例，假設成長期約 8 個月，一年約可懷孕兩次（懷孕期視為 6），

子代對數平均 2 對，以（m=8，p=6，a=2）帶入「**肆**-五-（七）」所得的數列規則，就能獲得小型犬繁殖模型：

$$\begin{cases} \text{初始值} & S_1=\ldots=S_{14}=1 \\ \text{數列規律} & S_n=S_{n-6}+2\times S_{n-14}，\quad n\geq 15 \end{cases}$$

四、本次研究的結論也讓成員深刻了解幫寵物結紮是非常必要的，政府在進行幫寵物結紮的宣傳時，應可考慮加入類似的數量推演，如加入本文「**肆**-十」的「不結紮、繁殖一次結紮與三個月時結紮貓對數量折線圖」，以加強宣傳的效果。

捌、參考資料

1.貓（2020）。2020 年 3 月 1 日取自 https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%8C%AB

2.費式數列（2014）。2020 年 3 月 11 日取自

https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%96%90%E6%B3%A2%E9%82%A3%E5%A5%91%E6%95%

B0%E5%88%97

3.費氏數列的由來（2012）。2020 年 3 月 11 日取自

https://web.ntnu.edu.tw/~499412058/series/history.html

4.貓咪的「二胎」可別輕易開放！日本 2 隻貓隔年造出 100 員大家族（2020）。2020 年 3 月 11 日取自 https://read01.com/MzEodd.html

5.南一書局(民 108)。第十單元 等量公理。國民小學數學 第十一冊。台南市：南一書局。

【評語】080403

有感於寵物的繁殖能力對於家庭與社會的負擔，本作品在考量影響貓族群數量的成長期、懷孕期與子代貓對數三個變因的條件下，找出不結紮貓對繁殖數列的規則，並探討不同時間點進行結紮後的貓對族群數量，從中了解不同變因對不結紮貓族群數量的影響，是一個有趣的研究主題。研究進行的方式基本上是透過觀察不同的特例，歸納出貓對數量計算式，而所歸納出來的計算式基本上都是遞迴的算式，然而需留意的是：結果是從有限的例子歸納出來的，因此尚需進一步的証明。此外，一般估計貓族群數量是透過指數函數的方式進行，日後研究可能可以進行兩種不同估算方法的比較。整體而言，本作品透過研究發現，深刻體認到寵物結紮的重要性，是一份兼具應用與省思的作品。

作品海報

摘 要

養貓養狗當成寵物人人愛，政府也不斷宣傳要幫寵物結紮以免數量太多造成家庭與社會的負擔，五下自然課也有上到動物的繁殖，為了能更清楚明瞭動物的繁殖力，本研究以貓為對象，費氏數列為基礎，研究影響貓族群數量的「成長期」、「懷孕期」與「子代對數」三個基本變因對數列的影響，找出數學式與推算出貓對(如公母各 1 隻稱為貓對數量為 1)繁殖的模型，以預測貓族群的數量，了解替寵物結紮的重要性。

壹、研究動機

五下的自然課曾提到動物的繁殖，最近學校的老師有養貓，加上看到網路文章–『貓咪的「二胎」可別輕易開放！日本 2 隻貓咪隔年生出 100 員大家族』才知道貓繁殖力很強。在想知道如果一對貓一段時間不結紮會生出多少後代，但卻不可能一次養那麼多隻貓的前提下，想透過找出數學公式來推算一對貓在特定條件下，兩年後能產生多少後代。

貳、研究目的(藍色字體為修正處，以下皆同)

一、設定影響貓族群數量的變因，找出不結紮貓對繁殖數列規則（研究核心）。
二、設定影響貓族群數量的變因，找出成貓對繁殖一次後就結紮的數列規則。
三、依據所找出數列規則，推算出一對貓不結紮兩年後的貓對族群數量。
四、找出不結紮貓對可能的繁殖模型。
五、了解實驗中的變因對不結紮貓族群數量的影響。
六、依據貓對數量繁殖模型，比較 24 個月後結紮、繁殖一次後就結紮與不結紮貓族群的數量更清楚認識幫寵物結紮的重要性。
七、使用不結紮貓對繁殖數列規則，檢驗網路文章-『貓咪的「二胎」可別輕易開放！日本 2 隻貓咪隔年生出 100 之大家族』的合理性。
八、以數學演算法找出貓對繁殖一次後就結紮的貓對數量計算式。（新的研究發現）
九、找出不結紮貓對繁殖數列（$m=p$，$p=m$，a）的代數解。（新的研究目的）
十、找出不結紮貓對繁殖數列（$m=p$，$p=m$，2）的數學計算式。（新的研究目的）

參、研究設備及器材

計算紙、筆、文件夾、軟體 WORD、軟體小畫家。

肆、研究過程或方法

一、研究影響貓對數量的變因

透過老師的飼養經驗與網路查找資料，找出影響貓對數量成長的因素有多個，如：成熟期、懷孕期、子代數量、生產後再懷孕期、營養、生病、壽命等，為了先找出初步的規則，降低研究的難度，了解在健康不生病，貓的壽命範圍內，一對貓在兩年後能夠產生出多少貓，先設定成熟期、懷孕期、子代數量為研究的變因進行探討。

二、符號設定與名詞解釋

S_n：第 n 個月的貓對數量(如公母各 1 隻稱為貓對數量為 1)。
m：maturity，從一出生到成長至可以懷孕的月數，就是「成長期」。
p：pregnancy，懷孕至生產所需的月數，即「懷孕期」。
a：amount，下一月貓子代對數(每 1 對公母各 1 隻)。
t：為貓對推演圖中幼年貓對(公母各 1 隻)。
T：為貓對推演圖中成年貓對(有繁衍能力的公母各 1 隻)。
Ŧ：為繁殖一次後結紮貓對（公母都結紮且與幼貓隔離）
初始值：貓對數量為 1 時。

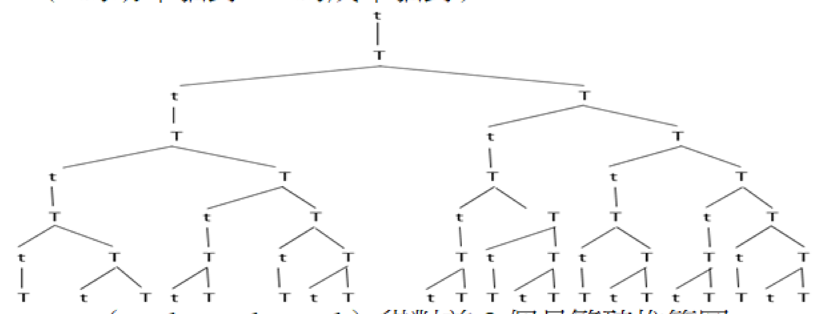
三、確認變因

本研究設定影響貓對數量的變因有成長期（代號 m）、懷孕期（代號 p）、子代對數（代號 a）。（＊三變因靈感來源請參閱-「**陸-三**」）

四、確立基本數列模型

將成長期（代號 m）、懷孕期（代號 p）、子代對數（代號 a）皆設為 1，透過繪圖推算出基本數列。

（一）$m=1$，$p=1$，$a=1$（t 為幼年貓對，T 為成年貓對）



（$m=1$，$p=1$，$a=1$）貓對前 8 個月繁殖推算圖

數列的前 8 項為 1，1，2，3，5，8，13，21，老師告訴我們這是費波南西數列具有以下規律

1+1=2
1+2=3
2+3=5
3+5=8
5+8=13
8+13=21

透過上述的規律，以 S_n表示第 n 個月貓對數量可得到

初始值 $S_1=S_2=1$
數列規則 $S_n=S_{n-1}+S_{n-2}$，$n\geq 3$
此式即為本研究的基本模型。

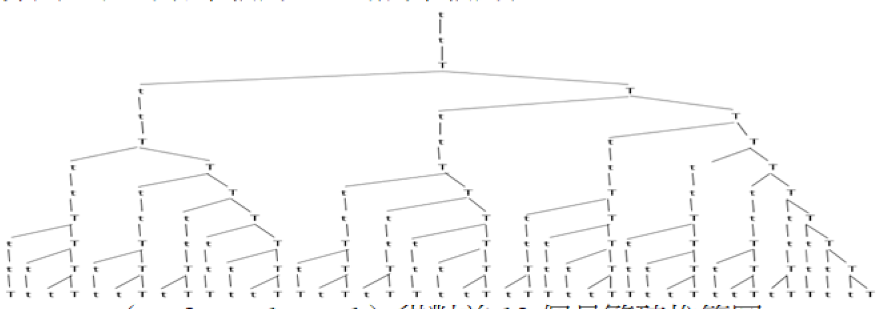
五、操縱變因，研究成長期（代號 m）、懷孕期（代號 p）、子代對數（代號 a）每一項變因對模型的影響，找出三變因的數列規則。

實驗步驟說明			
步驟	操縱變因數	操縱變因	實驗內容說明
（一）	1	m	＊只變動成長期 m，固定 $p=1$，$a=1$
（二）	1	p	＊只變動懷孕期 p，固定 $m=1$，$a=1$
（三）	1	a	＊只變動子代對數 a，固定 $m=1$，$p=1$
（四）	2	m、p	同時變動成長期 m 與懷孕期 p，固定 $a=1$
（五）	3	m、p、a	依據（三）與（四）的實驗結果，預測 m、p、a，所形成的數列規則。
（六）	3	m、p、a	確認 m、p、a，所形成的數列規則。
（七）	3	m、p、a	檢驗 m、p、a，所形成的數列規則準確性。

（一）變動成長期 m，$p=1$，$a=1$（懷孕期與子代對數皆為 1）。

以（$m=2$，$p=1$，$a=1$）為例：

1.繪製繁殖推算圖 （t 為幼年貓對，T 為成年貓對）



（$m=2$，$p=1$，$a=1$）貓對前 12 個月繁殖推算圖

2.整理（$m=2$，$p=1$，$a=1$）數據找出規律與推論

（$m=2$，$p=1$，$a=1$）貓對前 12 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_n	1	1	1	2	3	4	6	9	13	19	28	41

將以上表格轉化成代數 進行推論 ➡

n	S_n	轉化成代數
1	1	$S_1=S_2=S_3=1$
2	1	
3	1	
4	2	$S_4=S_3+S_1$
5	3	$S_5=S_4+S_2$
6	4	$S_6=S_5+S_3$
7	6	$S_7=S_6+S_4$
8	9	$S_8=S_7+S_5$
9	13	$S_9=S_8+S_6$
10	19	$S_{10}=S_9+S_7$
11	28	$S_{11}=S_{10}+S_8$
12	41	$S_{12}=S_{11}+S_9$
⋮	⋮	⋮
n	S_n	$S_n=S_{n-1}+S_{n-3}$

根據上表得到（$m=2$，$p=1$，$a=1$）數列的規律

初始值 $S_1=S_2=S_3=1$
數列規律 $S_n=S_{n-1}+S_{n-3}$，$n\geq4$

3.歸納（m，$p=1$，$a=1$）的數列規則

繼續進行 $m=3$，$m=4$，$m=5$ 的（m，$p=1$，$a=1$）數列規律探索（請參考貓對數量算圖 NO.3~5），歸納如下 $1\leq m\leq5$

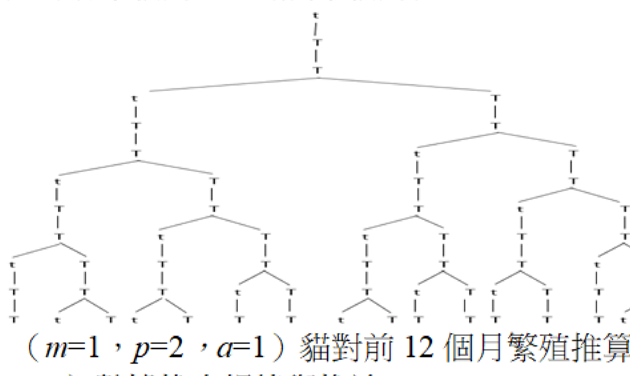
（m，1，1）	初始值	數列的規律
$m=1$	$S_1=S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+S_{n-2}$ $n\geq3$
$m=2$	$S_1=S_2=S_3=1$	$S_n=S_{n-1}+S_{n-3}$ $n\geq4$
$m=3$	$S_1=S_2=S_3=S_4=1$	$S_n=S_{n-1}+S_{n-4}$ $n\geq5$
$m=4$	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=S_{n-1}+S_{n-5}$ $n\geq6$
$m=5$	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$	$S_n=S_{n-1}+S_{n-6}$ $n\geq7$
⋮	⋮	⋮
推論 $m=m$ 時	$S_1=S_2=S_3=S_4=\ldots=S_{(m+1)}=1$	$S_n=S_{n-1}+S_{n-(m+1)}$ $n\geq(m+2)$

結論：1. m 值變動時，初始值為 $S_1=S_2=S_3=S_4=\ldots=S_{(m+1)}=1$
2. m 每增加 1，等號右邊右項的足碼便多減 1，數列為 $S_n=S_{n-1}+S_{n-(m+1)}$，$n\geq(m+2)$

（二）變動懷孕期 p， $m=1$，$a=1$（成長期與子代對數皆為 1）。

以（$m=1$，$p=2$，$a=1$）為例：

1.繪製繁殖推算圖 （t 為幼年貓對，T 為成年貓對）



（$m=1$，$p=2$，$a=1$）貓對前 12 個月繁殖推算圖

2.整理（$m=1$，$p=2$，$a=1$）數據找出規律與推論

（$m=1$，$p=2$，$a=1$）貓對前 12 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_n	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16

將以上表格轉化成代數 進行推論 ➡

n	S_n	轉化成代數
1	1	$S_1=S_2=S_3=1$
2	1	
3	1	
4	2	$S_4=S_2+S_1$
5	2	$S_5=S_3+S_2$
6	3	$S_6=S_4+S_3$
7	4	$S_7=S_5+S_4$
8	5	$S_8=S_6+S_5$
9	7	$S_9=S_7+S_6$
10	9	$S_{10}=S_8+S_7$
11	12	$S_{11}=S_9+S_8$
12	16	$S_{12}=S_{10}+S_9$
⋮	⋮	⋮
n	S_n	$S_n=S_{n-2}+S_{n-3}$

根據上表得到（$m=1$，$p=2$，$a=1$）數列的規律

初始值 $S_1=S_2=S_3=1$
數列規律 $S_n=S_{n-2}+S_{n-3}$，$n\geq4$

3.歸納（$m=1$，p，$a=1$）的數列規則

繼續進行 $p=3$，$p=4$，$p=5$ 的（$m=1$，p，$a=1$）數列規律探索（請參考貓對數量推算圖 NO.7~9），歸納如下 $1\leq p\leq5$

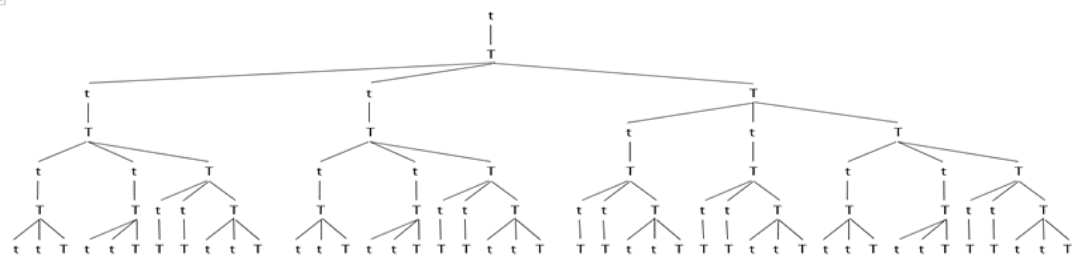
（1，p，1）	初始值	數列的規律
$p=1$	$S_1=S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+S_{n-2}$ $n\geq3$
$p=2$	$S_1=S_2=S_3=1$	$S_n=S_{n-2}+S_{n-3}$ $n\geq4$
$p=3$	$S_1=S_2=S_3=S_4=1$	$S_n=S_{n-3}+S_{n-4}$ $n\geq5$
$p=4$	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=S_{n-4}+S_{n-5}$ $n\geq6$
$p=5$	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$	$S_n=S_{n-5}+S_{n-6}$ $n\geq7$
	⋮	⋮
推論 $p=p$ 時	$S_1=S_2=S_3=S_4=\ldots=S_{(p+1)}=1$	$S_n=S_{n-p}+S_{n-(p+1)}$ $n\geq(p+2)$

結論：1. p 值變動時，初始值為 $S_1=S_2=S_3=S_4=\ldots=S_{(p+1)}=1$
2. p 每增加 1，等號右邊左右項的足碼便同時多減 1，數列為 $S_n=S_{n-p}+S_{n-(p+1)}$， $n\geq(p+2)$

（三）變動子代對數 a，$m=1$，$p=1$（成長期與懷孕期皆為 1）。

以（$m=1$，$p=1$，$a=2$）為例：

1.繪製繁殖推算圖（t 為幼年貓對，T 為成年貓對）



（$m=1$，$p=1$，$a=2$）貓對前 7 個月繁殖推算圖

2.整理（$m=1$，$p=1$，$a=2$）數據找出規律與推論

（$m=1$，$p=1$，$a=2$）貓對前 7 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7
S_n	1	1	3	5	11	21	43

將以上表格轉化成代數進行推論 ➡

n	S_n	轉化成代數
1	1	$S_1=S_2=1$
2	1	
3	3	$S_3=S_2+2\times S_1$
4	5	$S_4=S_3+2\times S_2$
5	11	$S_5=S_4+2\times S_3$
6	21	$S_6=S_5+2\times S_4$
7	43	$S_7=S_6+2\times S_5$
⋮	⋮	⋮
n	S_n	$S_n=S_{n-1}+2\times S_{n-2}$

根據上表得到（$m=1$，$p=1$，$a=2$）數列的規律

初始值 $S_1=S_2=1$
數列規律 $S_n=S_{n-1}+2\times S_{n-2}$，$n\geq 3$

3.歸納（$m=1$，$p=1$，a）的數列規則

繼續進行 $p=3$，$p=4$，$p=5$ 的（$m=1$，$p=1$，a）數列規律探索（請參考貓對數量推算圖 NO.10~13），歸納如下 $1\leq a\leq5$

（1，1，a）	初始值	數列的規律
$a=1$	$S_1=S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+1\times S_{n-2}$ $n\geq3$
$a=2$	$S_1=S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+2\times S_{n-2}$ $n\geq3$
$a=3$	$S_1=S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+3\times S_{n-2}$ $n\geq3$
$a=4$	$S_1=S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+4\times S_{n-2}$ $n\geq3$
$a=5$	$S_1=S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+5\times S_{n-2}$ $n\geq3$
	⋮	⋮
推論 $a=a$ 時	$S_1=S_2=1$	$S_n=S_{n-1}+a\times S_{n-2}$ $n\geq3$

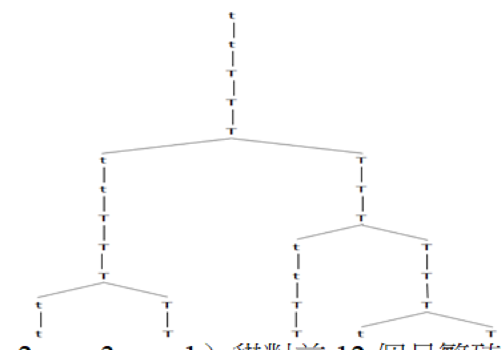
結論：1. a 值變動時，初始值皆為 $S_1=S_2=1$
2. a 值變動時，a 成為等號右邊右項的係數，數列為 $S_n=S_{n-1}+a\times S_{n-2}$ ， $n\geq3$

（四）同時變動成長期 m 與懷孕期 p（子代對數為 1）

縣展時，評審老師有建議應加強三個變因整合成一個數學式的研究過程，團隊發現成長期 m 和懷孕期 p 對於數學式的影響較難掌握，因此決定在推演三個變因所形成的數列規則前，加入成長期 m 和懷孕期 p 的雙變因實驗，以強化整體實驗的論證。

以（$m=2$，$p=3$，$a=1$）為例：

1.繪製（$m=2$，$p=3$，$a=1$）的繁殖推算圖（t 為幼年貓對，T 為成年貓對）



（$m=2$，$p=3$，$a=1$）貓對前 12 個月繁殖推算圖

2.整理（$m=2$，$p=3$，$a=1$）數據找出規律與推論

（$m=2$，$p=3$，$a=1$）貓對前 12 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_n	1	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	5

啟用 Windows

將以上表格轉化成代數 進行推論 ➡

n	S_n	轉化成代數
1	1	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$
⋮		
5		
6	2	$S_6=S_3+1\times S_1$
7	2	$S_7=S_4+1\times S_2$
8	2	$S_8=S_5+1\times S_3$
9	3	$S_9=S_6+1\times S_4$
10	3	$S_{10}=S_7+1\times S_5$
11	4	$S_{11}=S_8+1\times S_6$
12	5	$S_{12}=S_9+1\times S_7$
⋮	⋮	⋮
n	S_n	$S_n=S_{n-3}+1\times S_{n-5}$

根據上表得到（$m=2$，$p=3$，$a=1$）數列的規律

初始值 $S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$
數列規律 $S_n=S_{n-3}+1\times S_{n-5}$，$n\geq 6$

3.重複進行其他參數（$m=3$，$p=2$，$a=1$）、（$m=4$，$p=2$，$a=1$）、（$m=4$，$p=3$，$a=1$）的數列規則探索（請參考貓對數量推算圖 NO.補 2 ~補 4），歸納數列規則如下：

變動 m 與 p，$a=1$	初始值	數列的規律
（$m=2$，$p=3$，$a=1$）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=S_{n-3}+1\times S_{n-5}$ $n\geq 6$
（$m=3$，$p=2$，$a=1$）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=S_{n-2}+1\times S_{n-5}$ $n\geq 6$
（$m=4$，$p=2$，$a=1$）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$	$S_n=S_{n-2}+1\times S_{n-6}$ $n\geq 7$
（$m=4$，$p=3$，$a=1$）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=S_7=1$	$S_n=S_{n-3}+1\times S_{n-7}$ $n\geq 8$
	⋮	⋮
推論 $m=m$，$p=p$ 時	$S_1=S_2=\ldots=S_{(m+p)}=1$	$S_n=S_{n-p}+1\times S_{n-(m+p)}$ $n\geq(m+p+1)$

結論：1. m 與 p *變動*，*$a=1$ 時*，初始值為 $S_1=S_2=S_3=S_4=\ldots=S_{(m+p)}=1$
2. m 與 p *變動*，*$a=1$ 時*，等號右邊左項的足碼便為 p，等號右邊右項的足碼便為（$m+p$），數列為 $S_n=S_{n-p}+1\times S_{n-(m+p)}$， $n\geq(m+p+1)$

（五）預測三個變因所形成的數列規則：依據（三）與（四）的實驗結果，預測 m、p、a，所形成的數列規則。

（三）的實驗結果	（四）的實驗結果
變動 a，$m=1$ 與 $p=1$ 時數列的規則： 初始值皆為 $S_1=S_2=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+a\times S_{n-2}$ $n\geq3$	變動 m 與 p，$a=1$ 時數列的規則： 初始值 $S_1=\ldots=S_{(m+p)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-p}+1\times S_{n-(m+p)}$，$n\geq(m+p+1)$
發現變動 a，$m=1$ 與 $p=1$ 時對數列的影響 初始值皆為 $S_1=S_2=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-1}+\boxed{a}\times S_{n-2}$ $n\geq3$ 1. a 影響等號右邊右項的係數	發現變動 m 與 p，$a=1$ 時對數列的影響 1. m 與 p 同時影響初始值的月數、等號右邊右項的足碼與 n 值的大小 初始值 $S_1=\ldots=S_{\boxed{(m+p)}}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-\boxed{p}}+\boxed{1}\times S_{n-\boxed{(m+p)}}$，$n\geq(\boxed{m+p}+1)$ 2. P 影響等號右邊左項的足碼 3. m 與 p 無法影響等號右邊右項的係數
合併（三）與（四）的實驗結果	
預測成長期 m、懷孕期 p、子代對數 a，三個變因所形成的數列規則。	初始值 $S_1=\ldots=S_{(m+p)}=1$ 數列規律 $S_n=S_{n-p}+a\times S_{n-(m+p)}$，$n\geq(m+p+1)$

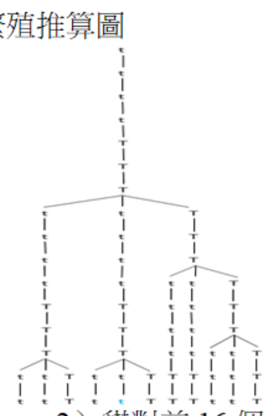
（六）確認變動成長期 m、懷孕期 p、子代對數 a 三個變因所形成的數列規則。

1.以（$m=4$，$p=3$，$a=2$）進行確認。

2.將數據（$m=4$，$p=3$，$a=2$）帶入（五）所得的數列規則，預測所形成的數列，

$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_{(4+3)}=1 \\ 數列規律\ S_n=S_{n-3}+2\times S_{n-(4+3)}，n\ge(4+3+1) \end{cases}$ ➡ $\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_7=1 \\ 數列規律\ S_n=S_{n-3}+2\times S_{n-7}，n\ge 8 \end{cases}$

（1）繪製（$m=4$，$p=3$，$a=2$）繁殖推算圖



（$m=4$，$p=3$，$a=2$）貓對前 16 個月繁殖推算圖

（2）整理（$m=4$，$p=3$，$a=2$）數據找出規律。

（$m=4$，$p=3$，$a=2$）貓對前 16 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
S_n	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	5	5	5	7	11	11

將以上表格轉化成代數 進行推論 ➡

n	S_n	轉化成代數
1	1	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=S_7=1$
⋮		
7		
8	3	$S_8=S_5+2\times S_1$
9	3	$S_9=S_6+2\times S_2$
10	3	$S_{10}=S_7+2\times S_3$
11	5	$S_{11}=S_8+2\times S_4$
12	5	$S_{12}=S_9+2\times S_5$
13	5	$S_{13}=S_{10}+2\times S_6$
14	7	$S_{14}=S_{11}+2\times S_7$
15	11	$S_{15}=S_{12}+2\times S_8$
16	11	$S_{16}=S_{13}+2\times S_9$
⋮	⋮	⋮
n	S_n	$S_n=S_{n-3}+2\times S_{n-7}$

根據上表得到（$m=4$，$p=3$，$a=2$）數列的規律

$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_7=1 \\ 數列規律\ S_n=S_{n-3}+2\times S_{n-7}，n\ge 8 \end{cases}$

4.將 3.與 2.所得的數列進行比對，以確認三變因所形成的數列規則是否正確。

3.將數據（$m=4$，$p=3$，$a=2$）直接帶入（五）所得的數列規則，預測所形成的數列。	2.透過繪製繁殖推演圖並整理數據所的數列。
$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_7=1 \\ 數列規律\ S_n=S_{n-3}+2\times S_{n-7}，n\ge 8 \end{cases}$	$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_7=1 \\ 數列規律\ S_n=S_{n-3}+2\times S_{n-7}，n\ge 8 \end{cases}$
比對的結果：兩種方法所得數列完全相同。	
數列正確性的確認：代對數 a、成長期 m、懷孕期 p 三個變因所形成的數列規則 $\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_{(m+p)}=1 \\ 數列規律\ S_n=S_{n-p}+a\times S_{n-(m+p)}，n\ge(m+p+1) \end{cases}$ 是正確的。	

（七）重複（六）的步驟，檢驗成長期 m、懷孕期 p 子、代對數 a 三個變因所形成，數列

規則 $\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_{(m+p)}=1 \\ 數列規律\ S_n=S_{n-p}+a\times S_{n-(m+p)}，n\ge(m+p+1) \end{cases}$ 的準確性。

（檢驗內容因受限展版篇幅限制省略，詳情請參閱說明書）

結論：以成長期 m、懷孕期 p 子、代對數 a 三個變因，不結紮所形成數列規則為

$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_{(m+p)}=1 \\ 數列規律\ S_n=S_{n-p}+a\times S_{n-(m+p)}，n\ge(m+p+1) \end{cases}$ **（本研究的核心）**

六、＊找出成貓對繁殖一次後就結紮的數列規則

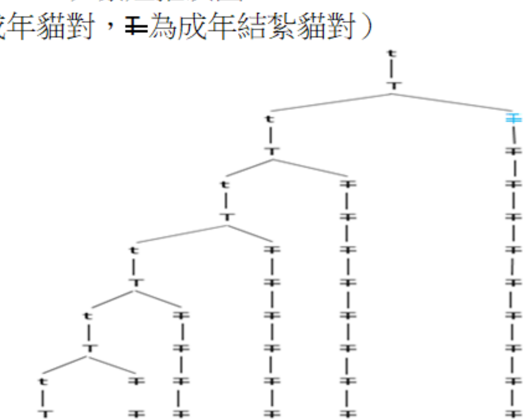
本實驗為重複本研究「**肆**-四」、「**肆**-五」的實驗，部分實驗內容會加以省略，詳情請參考「附件四：成貓對繁殖一次後就結紮的數列規則實驗」。

變因仍設為成長期（代號 m）、懷孕期（代號 p）、子代對數（代號 a）。

（一）確定基本數列模型

1.繪製（$m=1$，$p=1$，$a=1$）繁殖推演圖

（t 為幼年貓對，T 為成年貓對，Ŧ為成年結紮貓對）



（$m=1$，$p=1$，$a=1$）貓對繁殖一次後就結紮前 12 個月繁殖推算圖

2.整理（$m=1$，$p=1$，$a=1$）數據找出規律與推論

（$m=1$，$p=1$，$a=1$）貓對前 12 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_n	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6

將以上表格轉化成代數 進行推論 ➡

n	S_n	轉化成代數
1	1	$S_1=S_2=1$
2	1	
3	2	$S_3=1+S_1$
4	2	$S_4=1+S_2$
5	3	$S_5=1+S_3$
6	3	$S_6=1+S_4$
7	4	$S_7=1+S_5$
8	4	$S_8=1+S_6$
9	5	$S_9=1+S_7$
10	5	$S_{10}=1+S_8$
11	6	$S_{11}=1+S_9$
12	6	$S_{12}=1+S_{10}$
⋮	⋮	⋮
n	S_n	$S_n=1+S_{n-2}$

根據上表得到（$m=1$，$p=1$，$a=1$）數列的規律

$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=S_2=1 \\ 數列規律\ S_n=1+S_{n-2}，n\ge 3 \end{cases}$

（二）找出（m，$p=1$，$a=1$）的數列規則（請參考成貓繁殖一次結紮貓對數量推演圖 NO.2~5）

1.繪製（$m=2$，$p=1$，$a=1$）繁殖推演圖（略）

2.整理（$m=2$，$p=1$，$a=1$）數據找出規律與推論（略），

得到數列的規律 $\begin{cases} 初始值 \quad S_1=S_2=S_3=1 \\ 數列規律\ S_n=1+S_{n-3}，n\ge 4 \end{cases}$

3.歸納（m，$p=1$，$a=1$）的數列規則

繼續進行 $m=3$，$m=4$，$m=5$ 的（m，$p=1$，$a=1$）數列規律探索，歸納如下

$1\le m\le 5$

（m，1，1）	初始值	數列的規律
$m=1$	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+S_{n-2}$ $n\ge 3$
$m=2$	$S_1=S_2=S_3=1$	$S_n=1+S_{n-3}$ $n\ge 4$
$m=3$	$S_1=S_2=S_3=S_4=1$	$S_n=1+S_{n-4}$ $n\ge 5$
$m=4$	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=1+S_{n-5}$ $n\ge 6$
$m=5$	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$	$S_n=1+S_{n-6}$ $n\ge 7$
	⋮	⋮
推論 m=m 時	$S_1=S_2=S_3=S_4=\dots=S_{(m+1)}=1$	$S_n=1+S_{n-(m+1)}$ $n\ge(m+2)$

結論：1. m 值變動時，初始值為 $S_1=S_2=S_3=S_4=\dots=S_{(m+1)}=1$

2. m 每增加 1，等號右邊右項的足碼便多減 1，數列為 $S_n=1+S_{n-(m+1)}$，$n\ge(m+2)$

（三）找出（$m=1$，p，$a=1$）的數列規則（請參考成貓繁殖一次結紮貓對數量推演圖 NO.6~9）

1.繪製（$m=1$，$p=2$，$a=1$）繁殖推演圖（略）

2.整理（$m=1$，$p=2$，$a=1$）數據找出規律與推論（略），

得到數列的規律 $\begin{cases} 初始值 \quad S_1=S_2=S_3=1 \\ 數列規律\ S_n=1+S_{n-3}，n\ge 4 \end{cases}$

3.歸納（$m=1$，$p=2$，$a=1$）的數列規則

繼續進行 $p=3$，$p=4$，$p=5$ 的（$m=1$，p，$a=1$）數列規律探索，歸納如下

$1\le p\le 5$

（1，p，1）	初始值	數列的規律
$p=1$	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+S_{n-2}$ $n\ge 3$
$p=2$	$S_1=S_2=S_3=1$	$S_n=1+S_{n-3}$ $n\ge 4$
$p=3$	$S_1=S_2=S_3=S_4=1$	$S_n=1+S_{n-4}$ $n\ge 5$
$p=4$	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=1+S_{n-5}$ $n\ge 6$
$p=5$	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$	$S_n=1+S_{n-6}$ $n\ge 7$
	⋮	⋮
推論 p=p 時	$S_1=S_2=S_3=S_4=\dots=S_{(p+1)}=1$	$S_n=1+S_{n-(p+1)}$ $n\ge(p+2)$

結論：1. p 值變動時，初始值為 $S_1=S_2=S_3=S_4=\dots=S_{(p+1)}=1$

2. p 每增加 1，等號右邊右項的足碼便同時多減 1，數列為 $S_n=1+S_{n-(p+1)}$，$n\ge(p+2)$

（四）找出（$m=1$，$p=1$，a）的數列規則（請參考成貓繁殖一次結紮貓對數量推演圖 NO.10~13）

1.繪製（$m=1$，$p=1$，$a=2$）繁殖推演圖（略）

2.整理（$m=1$，$p=1$，$a=2$）數據找出規律與推論（略），

得到數列的規律 $\begin{cases} 初始值 \quad S_1=S_2=1 \\ 數列規律\ S_n=1+2\times S_{n-2}，n\ge 3 \end{cases}$

3.歸納（$m=1$，$p=1$，$a=2$）的數列規則

繼續進行 $a=3$，$a=4$，$a=5$ 的（$m=1$，$p=1$，a）數列規律探索，歸納如下

$1\le a\le 5$

（1，1，a）	初始值	數列的規律
$a=1$	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+1\times S_{n-2}$ $n\ge 3$
$a=2$	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+2\times S_{n-2}$ $n\ge 3$
$a=3$	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+3\times S_{n-2}$ $n\ge 3$
$a=4$	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+4\times S_{n-2}$ $n\ge 3$
$a=5$	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+5\times S_{n-2}$ $n\ge 3$
	⋮	⋮
推論 a=a 時	$S_1=S_2=1$	$S_n=1+a\times S_{n-2}$ $n\ge 3$

結論：1. a 值變動時，初始值皆為 $S_1=S_2=1$

2. a 值變動時，a 成為等號右邊右項的係數，數列為 $S_n=1+a\times S_{n-2}$，$n\ge 3$

（五）同時變動成長期 m 與懷孕期 p

進行以下的數列規則探索（請參考成貓繁殖一次結紮貓對數量推演圖 NO.14 ~17），歸納數列規則如下：

變動 m 與 p，$a=1$	初始值	數列的規律
（$m=2$，$p=3$，$a=1$）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=1+1\times S_{n-5}$ $n\ge 6$
（$m=3$，$p=2$，$a=1$）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=1$	$S_n=1+1\times S_{n-5}$ $n\ge 6$
（$m=4$，$p=2$，$a=1$）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=1$	$S_n=1+1\times S_{n-6}$ $n\ge 7$
（$m=4$，$p=3$，$a=1$）	$S_1=S_2=S_3=S_4=S_5=S_6=S_7=1$	$S_n=1+1\times S_{n-7}$ $n\ge 8$
	⋮	⋮
推論 m=m，p=p 時	$S_1=S_2=\dots=S_{(m+p)}=1$	$S_n=1+1\times S_{n-(m+p)}$ $n\ge(m+p+1)$

結論：1. m 與 p 變動，$a=1$ 時，初始值為 $S_1=S_2=S_3=S_4=\dots=S_{(m+p)}=1$

2. m 與 p 變動，$a=1$ 時，等號右邊右項的足碼便為（$m+p$），數列為 $S_n=1+1\times S_{n-(m+p)}$，$n\ge(m+p+1)$

（六）預測三個變因所形成的成貓對繁殖一次後就結紮的數列規則：依據（四）與（五）的實驗結果，預測 m、p、a，所形成的數列規則。

$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_{(m+p)}=1 \\ 數列規律\ S_n=1+a\times S_{n-(m+p)}，n\ge(m+p+1) \end{cases}$

（七）檢驗三個變因所形成的成貓對繁殖一次後就結紮的數列規則

（檢驗內容因受限展版篇幅限制省略，詳情請參閱~附件四：成貓對繁殖一次後就結紮的數列規則）

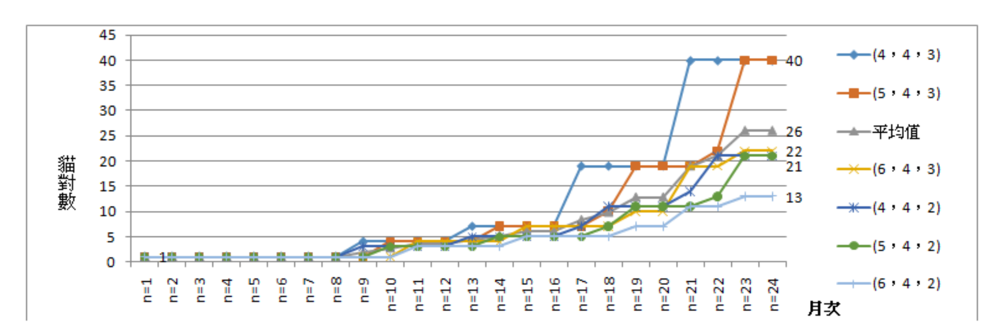
結論：以成長期 m、懷孕期 p、子代對數 a 三個變因所形成貓對繁殖一次後就結紮的數列規則為

$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_{(m+p)}=1 \\ 數列規律\ S_n=1+a\times S_{n-(m+p)}，n\ge(m+p+1) \end{cases}$

七、依據「**肆**-五-（七）」所找出數列規則，推算出一對貓不結紮，兩年後繁衍出的貓對族群數量。

條件設定：依據網路所得資料與老師的飼養經驗，母貓出約 4~6 個月就能懷孕，一年可以生產三次，平均一次可以生到 4 至 6 胎（2 至 3 對），依上述條件設定表中六組參數進行 24 個月後（兩年後）貓對的數量的推算。

參數設定	第 24 個月貓對的數量
（$m=4$，$p=4$，$a=2$）	21 對（請參考貓對數量推算 NO.1）
（$m=4$，$p=4$，$a=3$）	40 對（請參考貓對數量推算 NO.2）
（$m=5$，$p=4$，$a=2$）	21 對（請參考貓對數量推算 NO.3）
（$m=5$，$p=4$，$a=3$）	40 對（請參考貓對數量推算 NO.4）
（$m=6$，$p=4$，$a=2$）	13 對（請參考貓對數量推算 NO.5）
（$m=6$，$p=4$，$a=3$）	22 對（請參考貓對數量推算 NO.6）
平均值	約 26 對（52 隻）。



兩年後貓對數量統計折線圖

八、找出不結紮貓對可能的繁殖模型。

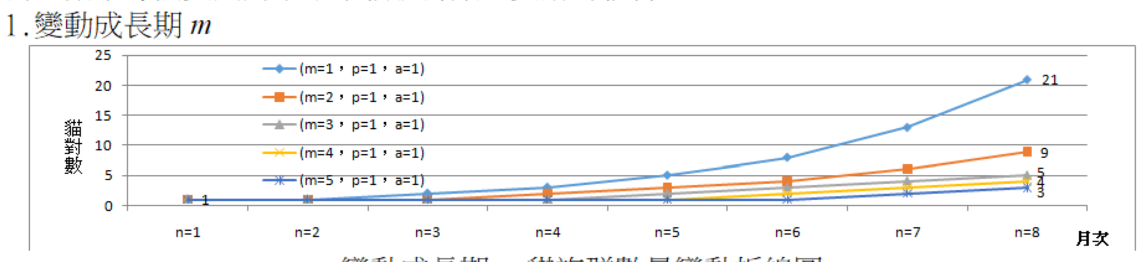
依據「**肆**-七」，(6，4，3)、(4，4，2)、(5，4，2) 這三組參數所得貓對數量較接近平均值，將數據帶入「**肆**-五-（七）」所得的本研究數列規則，可做為不結紮貓對繁殖的模型，如下：

貓對繁殖模型				
參數		數列規則		貓對繁殖的模型
（6，4，3）	帶入 ➡	$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_{(m+p)}=1 \\ 數列規律\ S_n=S_{n-p}+a\times S_{n-(m+p)}，n\ge(m+p+1) \end{cases}$	得到 ➡	$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_{10}=1 \\ 數列規律\ S_n=S_{n-4}+3\times S_{n-10}，n\ge 11 \end{cases}$
（4，4，2）				$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_8=1 \\ 數列規律\ S_n=S_{n-4}+2\times S_{n-8}，n\ge 9 \end{cases}$
（5，4，2）				$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_9=1 \\ 數列規律\ S_n=S_{n-4}+2\times S_{n-9}，n\ge 10 \end{cases}$

九、了解不結紮數列規則實驗中的變因對貓族群數量的影響

（一）獨立觀察每個變因對不結紮貓族群數量變動的影響

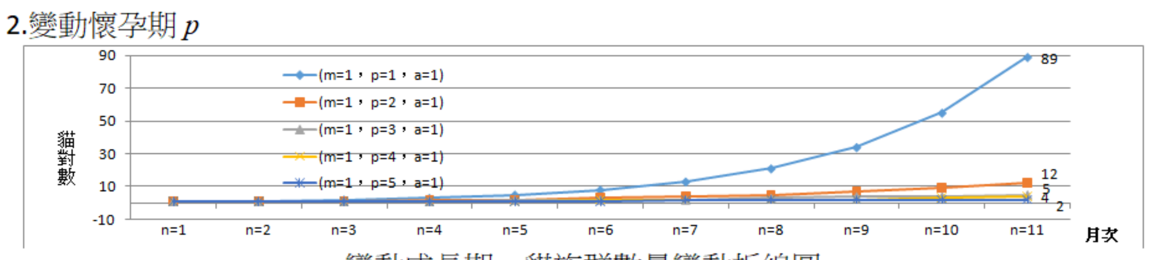
1.變動成長期 m



變動成長期 m 貓族群數量變動折線圖

發現：成長期 m 越大，貓族群數量的成長就越慢，屬於負向變因。

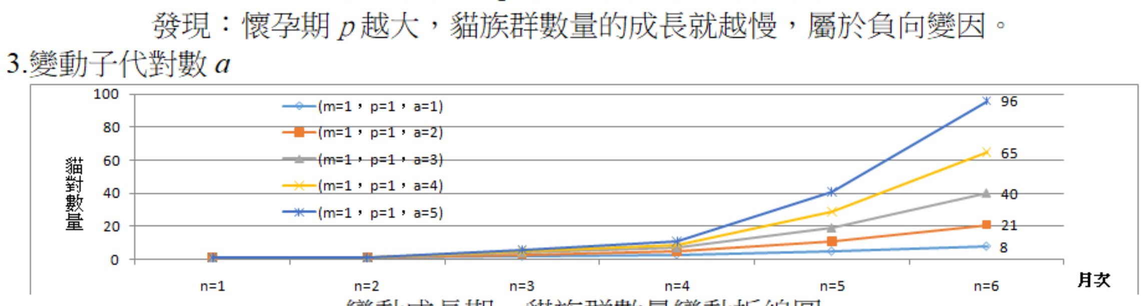
2.變動懷孕期 p



變動成長期 p 貓族群數量變動折線圖

發現：懷孕期 p 越大，貓族群數量的成長就越慢，屬於負向變因。

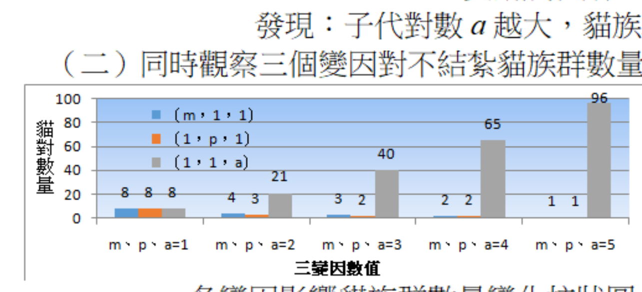
3.變動子代對數 a



變動成長期 a 貓族群數量變動折線圖

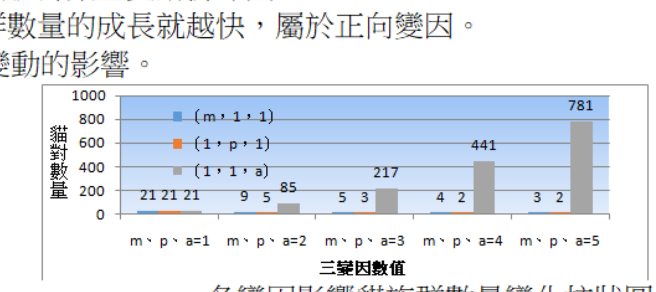
發現：子代對數 a 越大，貓族群數量的成長就越快，屬於正向變因。

（二）同時觀察三個變因對不結紮貓族群數量變動的影響。



m、p、a 各變因影響貓族群數量變化柱狀圖

（數據取自 $n=6$）



m、p、a 各變因影響貓族群數量變化柱狀圖

（數據取自 $n=8$）

結論：

1.本研究中，子代對數 a 是正向變因，數值越大，不結紮貓族群數量的成長就越快；成長期 m 與懷孕期 p 是負向變因，數值越大，不結紮貓族群數量的成長就越慢。

2.懷孕期 p 對不結紮貓族群數量抑制的效果明顯大於成長期 m。

十、依據貓對數量繁殖模型，比較 24 個月後，結紮、繁殖一次後就結紮與不結紮三組貓族群的數量。

說明：1.幼貓可能在四個月就懷孕，因此結紮組設定三個月時就結紮，對數都為 1。

2.繁殖一次後就結紮組使用（$m=6$，$p=4$，$a=3$），繁殖數量模型為：

$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_{10}=1 \\ 數列規律\ S_n=1+3\times S_{n-10}，n\ge 11 \end{cases}$

（$m=6$，$p=4$，$a=3$）繁殖一次後就結紮組貓對前 24 個月繁殖數量表

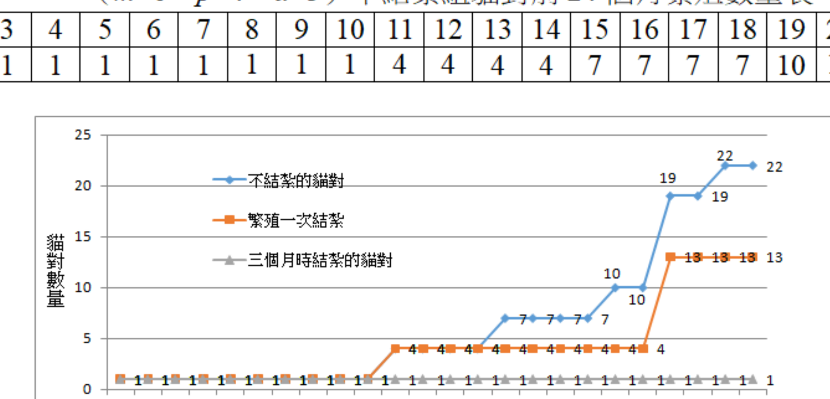
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
S_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	13	13	13	13

3.不結紮組使用（$m=6$，$p=4$，$a=3$），繁殖數量模型為：

$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_{10}=1 \\ 數列規律\ S_n=S_{n-4}+3\times S_{n-10}，n\ge 11 \end{cases}$

（$m=6$，$p=4$，$a=3$）不結紮組貓對前 24 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
S_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	4	4	7	7	7	7	10	10	19	19	22	22



不結紮、繁殖一次結紮與三個月時結紮貓對數量折線圖

結論：1.在 24 個月時，結紮組對數 1＜繁殖一次結紮組對數 13＜不結紮組對數 22

2.越早結紮，抑制貓族群成長的效果越好。

十一、依據實驗結果，檢驗網路文章─『貓咪的「二胎」可別輕易開放！日本 2 隻貓隔年造出 100 員大家族』的合理性。

（一）說明：

1.三變因設為利於貓族群擴大的極限值，就是成長期與懷孕期越短，子代對數越多越有利於貓族群的擴大，m 設為 4，p 設為 3，a 設為 3、4，建立兩個模型，算出兩個模型 12 個月到 23 個月的平均族群數量是否能達到 50 對，即 100 隻以上。

2.變因參數與時間設定說明：（請詳閱說明書）

（二）1.以（$m=4$，$p=3$，$a=4$）帶入「**肆**-五-（七）」的數列規則，建立模型

$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_7=1 \\ 數列規律\ S_n=S_{n-3}+4\times S_{n-7}，n\ge 8 \end{cases}$

2.整理所得數據 （$m=4$，$p=3$，$a=4$）貓對前 23 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
S_n	1	1	1	1	1	1	1	5	5	5	9	9	9	13	29	29	33	65	65	69	117	181	185

（三）1.以（$m=4$，$p=3$，$a=3$）帶入「**肆**-五-（七）」的數列規則，建立模型

$\begin{cases} 初始值 \quad S_1=\dots=S_7=1 \\ 數列規律\ S_n=S_{n-3}+3\times S_{n-7}，n\ge 8 \end{cases}$

2. 整理所得數據　（$m=4$，$p=3$，$a=3$）貓對前 23 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
S_n	1	1	1	1	1	1	1	4	4	4	7	7	7	10	19	19	22	40	40	43	70	97	100

（四）求取（二）、（三）所得 $n=12\sim23$ 數據平均值

n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
S_n	8	8	11.5	24	24	27.5	52.5	52.5	56	93.5	139	142.5

（五）依（四）研究結果的下結論：

依據「**肆**-七」研究表示，一對貓要在 24 個月大約只能繁殖出 26 對（52 隻）貓；「**肆**-十一」研究表示，必須在高標準的條件下才有可能在第 18 個月後繁殖出 52.5 對（105 隻）。綜合以上兩個結果，『貓咪的「二胎」可別輕易開放！……』雖有可能發生，如果以 12 個月來看待，仍有誇大的部分。

（六）＊文章內容探究：文章部分內容提到「獸醫表示：…第二年…24 隻貓，…第三年便會演變成 127 隻貓咪！」與標題隔年造出 100 員大家族，明顯不同，顯示標題明顯誇大。

（七）最後結論：（五）、（六）都發現文章標題明顯誇大，所以標題明顯誇大不合理。

十二、以數學演算法找出成貓對繁殖一次後就結紮的貓對數量計算式

符號設定：（m：成長期）、（p：懷孕期）、（a：子代對數）、（S_n：第 n 個月的貓對數量）。

＊（一）當 a≥2 時，演算過程

	月次	貓對數量
1	n=1+m+p 個月時	$S_n=S_{1+m+p}=1+a$
2	n=1+(m+p)+(m+p)個月時	$S_n=S_{1+(m+p)+(m+p)}=1+a+a\times a$
3	n=1+(m+p)+(m+p)+(m+p)個月時	$S_n=S_{1+(m+p)+(m+p)+(m+p)}=1+a+a\times a+a\times a\times a$
	⇩	⇩
4	n=1+3(m+p)個月時	$S_n=S_{1+3(m+p)}=1+a+a\times a+a\times a\times a$
5	n=1+x(m+p)個月時	$S_n=S_{1+x(m+p)}=1+a+a\times a+a\times a\times a+a\times a\times a\times a+\cdots+$（$x$ 個 a 相乘）

使用等量公理

6	$a\times S_{1+x(m+p)}$ ＝	~~a+a×a+a×a×a+a×a×a×a+……………+（x 個 a 相乘）~~+（x+1 個 a 相乘）
	$-1\times S_{1+x(m+p)}$ ＝	1+~~a+a×a+a×a×a+a×a×a×a+……………+（x 個 a 相乘）~~
	（1）	（a－1）$S_{1+x(m+p)}$＝（x+1 個 a 相乘）－1
	（2）	~~（a－1）~~$S_{1+x(m+p)}$ ~~÷（a－1）~~ ＝（x+1 個 a 相乘）－1〕÷（a－1）
7	演算結果 $S_{1+x(m+p)}$	＝〔（x+1 個 a 相乘）－1〕÷（a－1）

當 a≥2 時，成貓對繁殖一次後就結紮的貓對數量計算式

1. $S_n=S_{1+x(m+p)}$＝〔（x+1 個 a 相乘）－1〕÷（a－1）
2. 且 $S_n=S_{1+x(m+p)+z}$＝〔（x+1 個 a 相乘）－1〕÷（a－1）

$x\geq0$，x 為正整數； $0<z\leq m+p-1$， z 為正整數

發現：依此計算式，得知貓對數量三變數中，讓族群數量成長是子代對數 a，與「**肆**-九」結論 1 不謀而合。

＊（二）當 a=1 時，演算過程（新的研究成果）

	月次	貓對數量
1	n=1+m+p 個月時	$S_n=S_{1+m+p}=1+1$
2	n=1+(m+p)+(m+p)個月時	$S_n=S_{1+(m+p)+(m+p)}=1+(1+1)$
3	n=1+(m+p)+(m+p)+(m+p)個月時	$S_n=S_{1+(m+p)+(m+p)+(m+p)}=1+(1+1+1)$
	⇩	⇩
4	n=1+3(m+p)個月時	$S_n=S_{1+3(m+p)}=1+(1+1+1)$
5	n=1+x(m+p)個月時	$S_n=S_{1+x(m+p)}=1+x$

當 a=1 時，成貓對繁殖一次後就結紮的貓對數量計算式

1. $S_n=S_{1+x(m+p)}=x+1$
2. 且 $S_n=S_{1+x(m+p)+z}=x+1$

$x\geq0$，x 為正整數；$0<z\leq m+p-1$， z 為正整數

完整過程請參閱~附件五：成貓對繁殖一次就結紮計算式。

十三、找出不結紮貓對繁殖數列（$m=p$，$p=m$，a）的代數解（新的研究成果）

說明：m、p、a 三變因不結紮的計算式很難找，但是在繪製眾多的貓對數量推算圖與資料整理後，發現當 $m=p$ 時，是可以找出 a 代數解的規則。

（一）找出（$m=p$，$p=m$，a）的數列規則

1.（$m=1$，$p=1$，$a=2$）數列模型為 { 初始值 $S_1=S_2=1$；數列規律 $S_n=S_{n-1}+2\times S_{n-2}$，$n\geq3$ }

（$m=1$，$p=1$，$a=2$）不結紮貓對前 10 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341

2.（$m=2$，$p=2$，$a=2$）數列模型為 { 初始值 $S_1=\ldots=S_4=1$；數列規律 $S_n=S_{n-2}+2\times S_{n-4}$，$n\geq5$ }

（$m=2$，$p=2$，$a=2$）不結紮貓對前 20 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
S_n	1	1	1	1	3	3	5	5	11	11	21	21	43	43	85	85	171	171	341	341

3.（$m=3$，$p=3$，$a=2$）數列模型為 { 初始值 $S_1=\ldots=S_6=1$；數列規律 $S_n=S_{n-3}+2\times S_{n-6}$，$n\geq7$ }

（$m=3$，$p=3$，$a=2$）不結紮貓對前 30 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
S_n	1	1	1	1	1	1	3	3	3	5	5	5	11	11	11
n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
S_n	21	21	21	43	43	43	85	85	85	171	171	171	341	341	341

4.（$m=4$，$p=4$，$a=2$）數列模型為 { 初始值 $S_1=\ldots=S_8=1$；數列規律 $S_n=S_{n-4}+2\times S_{n-8}$，$n\geq9$ }

（$m=4$，$p=4$，$a=2$）不結紮貓對前 40 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
S_n	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	5	5	5	5	11	11	11	11
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
S_n	21	21	21	21	43	43	43	43	85	85	85	85	171	171	171	171	341	341	341	341

5.（$m=5$，$p=5$，$a=2$）數列模型為 { 初始值 $S_1=\ldots=S_{10}=1$；數列規律 $S_n=S_{n-5}+2\times S_{n-10}$，$n\geq11$ }

（$m=5$，$p=5$，$a=2$）不結紮貓對前 50 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
S_n	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	5	5	5
n	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
S_n	5	5	11	11	11	11	11	21	21	21	21	21	43	43	43	43	43	85
n	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50				
S_n	85	85	85	85	171	171	171	171	171	341	341	341	341	341				

6.整理並推論（$m=p$，$p=m$，$a=2$）數列規則

（$m=p$，$p=m$，$a=2$）數列規則

貓對數量	參數值	n 值範圍	n 值轉換成代數(m=p)
$S_n=1$	（$m=1$，$p=1$，$a=2$）	1~2×1	1
	（$m=2$，$p=2$，$a=2$）	1~2×2	
	（$m=3$，$p=3$，$a=2$）	1~2×3	
	（$m=4$，$p=4$，$a=2$）	1~2×4	⋮
	（$m=5$，$p=5$，$a=2$）	1~2×5	
	⋮	⋮	
	（$m=m$，$p=p$，$a=2$）	1~2×m	2m
$S_n=3$	（$m=1$，$p=1$，$a=2$）	2x1+1	2m+1
	（$m=2$，$p=2$，$a=2$）	2x2+1~3x2	
	（$m=3$，$p=3$，$a=2$）	2x3+1~3x3	
	（$m=4$，$p=4$，$a=2$）	2x4+1~3x4	⋮
	（$m=5$，$p=5$，$a=2$）	2x5+1~3x5	
	⋮	⋮	
	（$m=m$，$p=p$，$a=2$）	2×m+1~3×m	3m
⋮	⋮	⋮	⋮
$S_n=341$	（$m=1$，$p=1$，$a=2$）	9x1+1	9m+1
	（$m=2$，$p=2$，$a=2$）	9x2+1~10x2	
	（$m=3$，$p=3$，$a=2$）	9x3+1~10x3	
	（$m=4$，$p=4$，$a=2$）	9x4+1~10x4	⋮
	（$m=5$，$p=5$，$a=2$）	9x5+1~10x5	
	⋮	⋮	
	（$m=m$，$p=p$，$a=2$）	9×m+1~10×m	10m

（二）找出不結紮數列規則（$m=1$，$p=1$，a）的代數解

依據數列模型 { 初始值 $S_1=S_2=1$；數列規律 $S_n=S_{n-1}+a\times S_{n-2}$，$n\geq3$ } 進行

（$m=1$，$p=1$，a）n=1~10 的代數解

$S_1=1$

$S_2=1$

$S_3=S_2+a\times S_1=1+a$

$S_4=S_3+a\times S_2=(1+a)+a\times1=1+2a$

$S_5=S_4+a\times S_3=(1+2a)+a\times(1+1a)=1+3a+a^2$

$S_6=S_5+a\times S_4=(1+3a+1a^2)+a\times(1+2a)=1+4a+3a^2$

$S_7=S_6+a\times S_5=(1+4a+3a^2)+a\times(1+3a+a^2)=1+5a+6a^2+a^3$

$S_8=S_7+a\times S_6=(1+5a+6a^2+a^3)+a\times(1+4a+3a^2)=1+6a+10a^2+4a^3$

$S_9=S_8+a\times S_7=1+6a+10a^2+4a^3+a\times(1+5a+6a^2+a^3)=1+7a+15a^2+10a^3\cancel{+6a^3}+a^4$

$S_{10}=S_9+a\times S_8=1+7a+15a^2+10a^3+6a^3+a^4+a\times(1+6a+10a^2+4a^3)=1+8a+21a^2+20a^3+5a^4$

⋮

（三）整理（$m=1$，$p=1$，a）n=1~10 的代數解的每項係數發現以下規律，可依箭頭所示進行類推

	1	a	a×a	a×a×a	a×a×a×a
S_1	1				
S_2	1				
$S_3=S_2+a\times S_1$	1	1			
$S_4=S_3+a\times S_2$	1	1+1=2			
$S_5=S_4+a\times S_3$	1	2+1=3	1		
$S_6=S_5+a\times S_4$	1	3+1=4	1+2=3		
$S_7=S_6+a\times S_5$	1	4+1=5	3+3=6	1	
$S_8=S_7+a\times S_6$	1	5+1=6	6+4=10	1+3=4	
$S_9=S_8+a\times S_7$	1	6+1=7	10+5=15	4+6=10	1
$S_{10}=S_9+a\times S_8$	1	7+1=8	15+6=21	10+10=20	1+4=5
⋮					

（四）將（一）所得的 n 值替換（三）的 n 值，展開式即為不結紮貓對繁殖數列（$m=p$，$p=m$，$a=2$）的代數解

	1	a	a×a	a×a×a	a×a×a×a	展開式
n=1…n=2m	1					1
n=2m+1…n=3m	1	1				1+a
n=3m+1…n=4m	1	1+1=2				1+2a
n=4m+1…n=5m	1	2+1=3	1			$1+3a+a^2$
n=5m+1…n=6m	1	3+1=4	1+2=3			$1+4a+3a^2$
n=6m+1…n=7m	1	4+1=5	3+3=6	1		$1+5a+6a^2+a^3$
n=7m+1…n=8m	1	5+1=6	6+4=10	1+3=4		$1+6a+10a^2+4a^3$
n=8m+1…n=9m	1	6+1=7	10+5=15	4+6=10	1	$1+7a+15a^2+10a^3\cancel{+6a^3}+a^4$
n=9m+1…n=10m	1	7+1=8	15+6=21	10+10=20	1+4=5	$1+8a+21a^2+20a^3+5a^4$
⋮ 不結紮貓對繁殖數列（$m=p$，$p=m$，a）代數解可依此研究所得規律無限延伸						

（五）檢驗：請參閱~附件六：不結紮貓對繁殖數列（$m=p$，a）的代數解。

十四、找出不結紮貓對繁殖數列（$m=p$，$p=m$，2）的數學計算式。（新的研究成果）

（一）觀察不結紮貓對（$m=1$，$p=1$，$a=2$）數列找出規則

（$m=1$，$p=1$，$a=2$）不結紮貓對前 10 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341

$S_1=1$		
$S_2=1$	$=-1+(-1)\times(-2)$	首項-1，公比-2
$S_3=3$	$=1+1\times(-2)+1\times(-2)\times(-2)$	首項 1，公比-2
$S_4=5$	$=-1+(-1)\times(-2)+(-1)\times(-2)\times(-2)+(-1)\times(-2)\times(-2)\times(-2)$	首項-1，公比-2
$S_5=11$	$=1+1\times(-2)+1\times(-2)\times(-2)+1\times(-2)\times(-2)\times(-2)+1\times(-2)\times(-2)\times(-2\times)\times(-2)$	首項 1，公比-2
$S_6=21$	$=-1+(-1)\times(-2)+(-1)\times(-2)^2+(-1)\times(-2)^3+(-1)\times(-2)^4+(-1)\times(-2)^5$	首項-1，公比-2
$S_7=43$	$=1+1\times(-2)+1\times(-2)^2+1\times(-2)^3+1\times(-2)^4+1\times(-2)^5+1\times(-2)^6$	首項 1，公比-2
$S_8=85$	$=(-1)\times[(-2)^8-1)]/[(-2)-1]$	首項-1，公比-2
$S_9=171$	$=1\times[(-2)^9-1)]/[(-2)-1]$	首項 1，公比-2
$S_{10}=341$	$=(-1)\times[(-2)^{10}-1)]/[(-2)-1]$	首項-1，公比-2

得到（$m=1$，$p=1$，$a=2$）不結紮：

1. 當 n 為奇數，$S_n=(1)\times[(-2)^n-1]/[$(公比是-2)$-1]$；
2. 當 n 為偶數，$S_n=(-1)\times[(-2)^n-1]/[-2)-1]$。

兩式合併成 $S_n=(-1)^{n+1}\times[(-2)^n-1]/[(-2)-1]$。

（二）使用其他兩組參數進行數學式套用與檢驗

1. 不結紮貓對（$m=2$，$p=2$，$a=2$）

（1）觀察以下表格內容套用（一）式子，得到

（$m=2$，$p=2$，$a=2$）不結紮數學式當，n 為 2 的倍數時，：$S_{n\div2}=(-1)^{n\div2+1}\times[(-2)^{n\div2}-1]/[(-2)-1]$

（$m=2$，$p=2$，$a=2$）不結紮貓對前 20 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n	1	1	1	1	3	3	5	5	11	11
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
S_n	21	21	43	43	85	85	171	171	341	341

（2）檢驗：由於每兩項貓對數量一樣，所以我們先只討論 n 為 2 的倍數，到最後再處理其他項數。

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
n÷2	1	2	3	4	5	6	7	9	9	10
$S_{n\div2}$	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341

n	$n\div2$	$S_{n\div2}$	檢驗：當 n 為 2 的倍數時，$S_{n\div2}=(-1)^{n\div2+1}\times[(-2)^{n\div2}-1]/[(-2)-1]$
2	1	1	$S_2=(-1)^2\times[(-2)^1-1]/[(-2)-1]=1\times(-3)/(-3)=1$
4	2	1	$S_4=(-1)^3\times[(-2)^2-1]/[(-2)-1]=(-1)\times3/(-3)=1$
6	3	3	$S_6=(-1)^4\times[(-2)^3-1]/[(-2)-1]=1\times(-9)/(-3)=3$
8	4	5	$S_8=(-1)^5\times[(-2)^4-1]/[(-2)-1]=(-1)\times15/(-3)=5$
10	5	11	$S_{10}=(-1)^6\times[(-2)^5-1]/[(-2)-1]=1\times(-33)/(-3)=11$
12	6	21	$S_{12}=(-1)^7\times[(-2)^6-1]/[(-2)-1]=(-1)\times63/(-3)=21$
14	7	43	$S_{14}=(-1)^8\times[(-2)^7-1]/[(-2)-1]=1\times(-129)/(-3)=43$
16	8	85	$S_{16}=(-1)^9\times[(-2)^8-1]/[(-2)-1]=(-1)\times255/(-3)=85$
18	9	171	$S_{18}=(-1)^{10}\times[(-2)^9-1]/[(-2)-1]=1\times(-513)/(-3)=171$
20	10	341	$S_{20}=(-1)^{11}\times[(-2)^{10}-1]/[(-2)-1]=(-1)\times1023/(-3)=341$

2.不結紮貓對（$m=3$，$p=3$，$a=2$）

（1）觀察以下表格內容套用（一）式子，得到

（$m=3$，$p=3$，$a=2$）不結紮數學式，當 n 為 3 的倍數時：$S_{n\div3}=(-1)^{n\div3+1}\times[(-2)^{n\div3}-1]/[(-2)-1]$

（$m=3$，$p=3$，$a=2$）不結紮貓對前 30 個月繁殖數量表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
S_n	1	1	1	1	1	1	3	3	3	5	5	5	11	11	11
n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
S_n	21	21	21	43	43	43	85	85	85	171	171	171	341	341	341

（2）檢驗：由於每三項貓對數量一樣，所以我們先只討論 n 為 3 的倍數，到最後再處理其他項數。

n	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
$n\div3$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$S_{n\div3}$	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341

n	$n\div3$	$S_{n\div3}$	檢驗：當 n 為 3 的倍數時，$S_{n\div3}=(-1)^{n\div3+1}\times[(-2)^{n\div3}-1]/[(-2)-1]$
3	1	1	$S_3=(-1)^2\times[(-2)^1-1]/[(-2)-1]=1\times(-3)/(-3)=1$
6	2	1	$S_6=(-1)^3\times[(-2)^2-1]/[(-2)-1]=(-1)\times3/(-3)=1$
9	3	3	$S_9=(-1)^4\times[(-2)^3-1]/[(-2)-1]=1\times(-9)/(-3)=3$
12	4	5	$S_{12}=(-1)^5\times[(-2)^4-1]/[(-2)-1]=(-1)\times15/(-3)=5$
15	5	11	$S_{15}=(-1)^6\times[(-2)^5-1]/[(-2)-1]=1\times(-33)/(-3)=11$
18	6	21	$S_{18}=(-1)^7\times[(-2)^6-1]/[(-2)-1]=(-1)\times63/(-3)=21$
21	7	43	$S_{21}=(-1)^8\times[(-2)^7-1]/[(-2)-1]=1\times(-129)/(-3)=43$
24	8	85	$S_{24}=(-1)^9\times[(-2)^8-1]/[(-2)-1]=(-1)\times255/(-3)=85$
27	9	171	$S_{27}=(-1)^{10}\times[(-2)^9-1]/[(-2)-1]=1\times(-513)/(-3)=171$
30	10	341	$S_{30}=(-1)^{11}\times[(-2)^{10}-1]/[(-2)-1]=(-1)\times1023/(-3)=341$

（三）透過觀察找出（$m=p$，2）的數列重複規則，推論出完整計算式。

以（$m=3$，$p=3$，$a=2$）為例

同解的項次	推得
$S_1\sim S_2=S_3$，3 為 3 的 1 倍	（1÷3、2÷3 的商）+1=3÷3
$S_4\sim S_5=S_6$，6 為 3 的 2 倍	（4÷3、5÷3 的商）+1=6÷3
$S_7\sim S_8=S_9$，9 為 3 的 3 倍	（17÷3、8÷3 的商）+1=9÷3
$S_{10}\sim S_{11}=S_{12}$，12 為 3 的 4 倍	（10÷3、11÷3 的商）+1=12÷3
⋮	⋮
$S_{n-2}\sim S_{n-1}=S_n$，n 為 m 的整數倍	[（n-2）÷m、（n-1）÷m 的商）+1]=n÷m

推得（$m=p$，$a=2$）不結紮計算式：

1.當 n 為 m 的整數倍時，$S_n=(-1)^{n\div m+1}\times[(-2)^{n\div m}-1]/[(-2)-1]$

2.當 n 不為 m 的整數倍時，無條件進位成整數，$S_n=(-1)^{n\div m\text{的商}+2}\times[(-2)^{n\div m\text{的商}+1}-1]/[(-2)-1]$

（四）第二種解法，（$m=p$，$p=m$，2）不結紮數學計算式

{ $S_n=S_{mx-z}=(-1)^{x+1}\times[(-2)^x-1]/[(-2)-1]$，
$x\geq1$，x 為正整數；$0\leq z\leq m-1$， z 為正整數 }

請參閱附件七：不結紮貓對繁殖數列（m=p，p=m，a=2）的數學計算式~第二種解法

伍、研究結果

一、以成長期 m、懷孕期 p、子代對數 a 為變因，第 n 個月貓對數量的數列，詳如「**肆**-五-（七）」。

二、以成長期 m、懷孕期 p 子、代對數 a 三個變因，貓對繁殖一次後就結紮，第 n 個月的數列，詳如「**肆**-六-（七）」。

三、依「**肆**-五-（七）」所求數列進行推算，一對貓不結紮， 24 個月可能產生 26 對（52 隻）的貓族群。

四、不結紮貓對可能的繁殖模型

（一）	（二）	（三）
初始值 $S_1=\ldots=S_{10}=1$；數列規律 $S_n=S_{n-4}+3\times S_{n-10}$， $n\geq11$	初始值 $S_1=\ldots=S_8=1$；數列規律 $S_n=S_{n-4}+2\times S_{n-8}$， $n\geq9$	初始值 $S_1=\ldots=S_9=1$；數列規律 $S_n=S_{n-4}+2\times S_{n-9}$， $n\geq10$

五、不結紮數列規則實驗中的變因對貓族群數量的影響。（請參考「**肆**-九」結論 ）

六、使用（$m=6$，$p=4$，$a=3$）貓對數量繁殖模型，比較 24 個月後結紮、繁殖一次後就結紮與不結紮貓族群的數量，得到

（一）結紮是抑制貓族群成長的好方法。（二）越早結紮，抑制貓族群成長的效果越好。

七、網路文章-『貓咪的「二胎」可別輕易開放！日本 2 隻貓咪隔年生出 100 員大家族』內容是明顯誇大的。

八、貓對繁殖一次後就結紮的貓對數量計算式為，詳如「**肆**-十二」。

九、不結紮貓對繁殖數列（$m=p$，$p=m$，a）的代數解詳如「**肆**-十三-（四）」。

十、不結紮貓對繁殖數列（$m=p$，$p=m$，2）的數學計算式，詳如「**肆**-十四-（三）、（四）」。

陸、討論

一、（請詳閱說明書）

二、貓的懷孕週期約在 2 個多月，為何「肆-七」在最後推論時懷孕期 p 使用 4 而非 2，因為母貓在生產完後需要進行復原與哺乳，一年約可懷孕 3 次，換算下來每次懷孕間隔約 4 個月，為了讓推算結論符合實際狀況，因此將懷孕期 p 設為 4。

三、閱讀《費氏數列的由來》（參考資料 3）這篇網路文章時，小組成員就發現費氏數列的形成早已包含成長期、懷孕期、子代對數，只是三個變因都是 1 不易被發現，透過本研究就清楚看到每一個變因的位置與每一個變因對數列的影響。

四、（請詳閱說明書）

五、（請詳閱說明書）

六、「**肆**-八」所找出的貓對繁殖模型是本次研究所得，不一定符合或接近個別貓品種的真實情況。

柒、結論

一、在特定的條件下，是可以對貓的族群數量進行預測的（請參考「**伍**-三」的結果）。

二、貓的繁殖力相當驚人，推論的結果雖沒有如網路文章─『貓咪的「二胎」可別輕易開放！日本 2 隻貓咪隔年生出 100 員大家族』，但推論出的數據為，一對貓可在兩年產生 26 對（52 隻）的貓族也是相當驚人，一般家庭是很難負擔的。

三、本次研究所推算出的數列、代數解與公式，除了可以建立貓的繁殖模型外，應可應用在其他動物族群數量的推算上。以小型犬為例，假設成長期約 8 個月，一年約可懷孕兩次（懷孕期視為 6），子代對數平均 2 對，以（$m=8$，$p=6$，$a=2$）帶入「**肆**-五-（七）」所得的數列規則，就能獲得小型犬繁殖模型：{ 初始值 $S_1=\ldots=S_{14}=1$；數列規律 $S_n=S_{n-6}+2\times S_{n-14}$， $n\geq15$ }

四、本次研究的結論也讓成員深刻了解幫寵物結紮是非常必要的，政府在進行幫寵物結紮的宣傳時，應可考慮加入類似的數量推演，如加入本文「**肆**-十」的「不結紮、繁殖一次結紮與三個月時結紮貓對數量折線圖」，以加強宣傳的效果。

捌、參考資料

（請詳閱說明書）