

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

051801

探究 U 型管的液面自由振盪

學校名稱：彰化縣私立精誠高級中學

作者： 高二 徐培哲 高二 李秉宸 高二 陳昱佑	指導老師： 胡誌峰
---	------------------

關鍵詞：U 型管、振盪、流體力學

摘要

本實驗最主要探討 U 型管中液面的振盪行為，並嘗試建立理論模型。為了簡化推導，將流動近似為準穩態，並以阻尼振盪模型近似其運動。經實驗發現，其振盪角頻率和指數衰減率隨各變因改變的趨勢，與理論模型所得的部分結果類似，但其振幅的指數衰減率和振盪角頻率皆大於理論值。推測振盪的過程中可能存在其他的損失機制，導致現有模型不適用。

壹、研究動機

U 型管的振盪是介紹簡諧運動時常被提起的例子，但其真實的運動卻很少被討論，因而對此感到好奇，究竟當考慮能量損失時，液面的振盪又會是如何呢？因此我們希望建立能描述真實振盪的理論模型，並分析各項變數對振盪的影響。

貳、研究目的

- 一、建立模型求解考慮能量損失的振盪
- 二、探討管路幾何形狀對振盪的影響
- 三、探討液體種類對振盪的影響
- 四、探討液柱總長對振盪的影響
- 五、探討液面初始高度差對振盪的影響
- 六、檢視實際振盪情形與阻尼振盪的異同



參、研究設備與器材

一、研究設備與器材

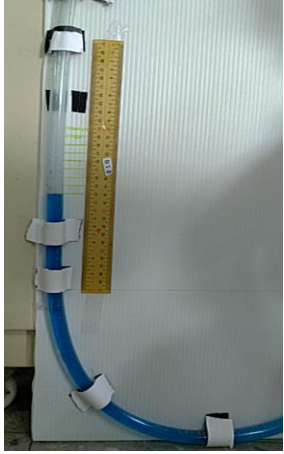
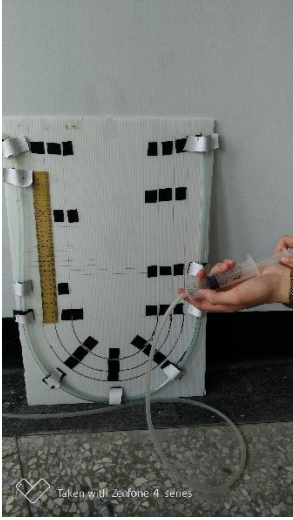
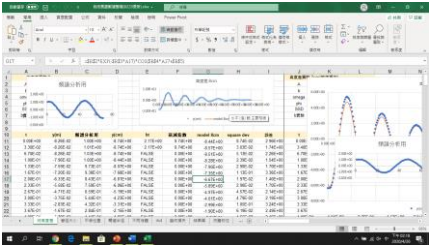
		
<p>(一) 固定板</p>	<p>(二) 打氣筒 (活塞)</p>	<p>(三) 果糖</p>
		
<p>(四) 食鹽</p>	<p>(五) 沙拉油</p>	<p>(六) 亞甲藍液 (染色用)</p>
<p>其他器材： 各尺寸水管（水管內半徑分別為 0.6cm、0.5cm、0.3cm、0.2cm）、直尺、量筒、燒杯、智慧型手機（攝影及水平儀用）、攪拌棒、滴管、漏斗、筆記型電腦、Excel、Tracker。</p>		

二、實驗裝置圖示

圖片	說明
	<p>在固定板上標示預設的水管位置後，利用魔鬼氈將水管固定。以下實驗的 U 型管的彎曲部分皆為半圓，兩側的直管皆垂直於地面。</p>
	<p>管路的一側連接活塞，以便製造兩端液位差來引起振盪。</p>

肆、實驗設計與方法

一、實驗步驟

圖片	說明
	<p>將液體加入至預設的液位。</p>
	<p>用活塞施壓使兩側液面不等高，接著用手按住管口，確認造成的液位差符合設定的條件，再放開使液體振盪並拍攝高度變化。</p>
	<p>利用 Tracker、Excel 軟體進行數據分析。</p>

二、名詞解釋

以下為本研究頻繁使用的變因、名詞之定義：

(一) 初始液位與平衡液位的高度差：

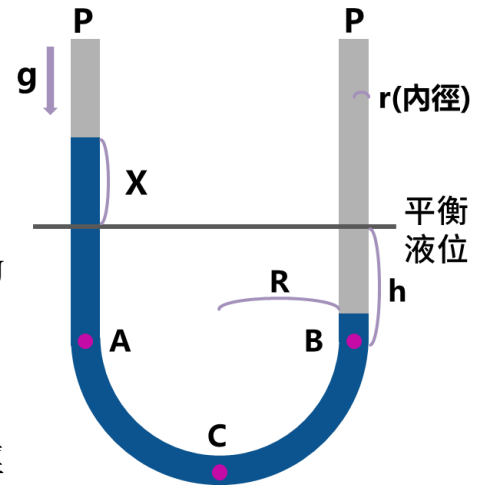
以下簡稱高度差（即右圖所示的 X）。

(二) 平衡位置：

當振盪衰減完畢，管內液位達平衡時，液面距離 U 型管底部彎道末端的距離（即右圖所示的 h）。

(三) 彎道半徑：

U 型管的彎曲部分為一半圓，其半徑稱為彎道半徑（即右圖所示 R）。



三、運動方程式的推導

(一) 推導所遵循的假設：

1. 假設管內流場為層流。
2. 假設水管不會變形。
3. 僅討論不可壓縮的牛頓流體（黏性係數在溫度變化不大時是定值的流體）。
4. 將振盪的過程視為準穩態，因此管內液體的流動近似於穩定流動（流速不隨時間變化）。由於我們無法得知管內流速的分佈情形，以下推導將會以是否考慮流速的不均勻分佈分為兩種情形討論：

(二) 理論推導

1. 不考慮流速分佈的不均性：

考慮一兩側液面偏離平衡液位一段高度 y_0 的 U 型管，液體密度為 ρ ，黏性係數為 μ ，重力場為 g ，水管內半徑 r ，液柱的總長為 L ，彎道的半徑為 R ，管內流體的平均流速為 \bar{v} ， \bar{v} 視為液面位移 y 對時間的導數。

管內流速隨時間變化，適用 Unsteady bernouli equation：

$$\rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \cdot d\bar{\ell} + p + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constant}$$

由於考慮能量損失，必須加入黏性損失項 Δp ：

$$\rho L \frac{dv}{dt} + P_{atm} + 2\rho gx + \frac{1}{2} \rho v^2 + \Delta p = 0 + P_{atm} + \frac{1}{2} \rho v^2$$

根據泊肅葉定律 (Poiseuille's law)，在流速恆定時，因黏性力造成的壓力損失如下：

$$\Delta p = \frac{8\mu L Q}{\pi r^4} = \frac{8\mu L \bar{V}}{r^2}$$

Q 為單位時間流過管中任一截面的體積 (即體積流率)，由於體積流率等於平均流速和截面積的乘積，上式可被化簡為：

$$\Delta p = \frac{8\mu L \bar{V}}{r^2}$$

可以發現黏性力的貢獻為線性阻尼，代回 Unsteady bernouli equation 整理後可得到以下的微分方程：

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{8\mu}{\rho r^2} \frac{dy}{dt} + \frac{2g}{L} y = 0$$

初始條件： $y(0) = y_0$ ， $y'(0) = 0$ ，其中 y_0 即為上文提及的高度差。在活塞鬆開的瞬間，流體因其慣性而尚未開始移動，流速為零。

此方程式為典型的阻尼振盪方程。在微分方程的第二項不為零時， y 的解有以下幾種可能，其最終的結果由黏性阻尼的強度決定：

$$\text{欠阻尼：} y = y_0 e^{-bt} \cos(\omega t + \phi) \quad (1)$$

$$\text{過阻尼：} y = A_1 e^{-b_1 t} + A_2 e^{-b_2 t} \quad (2)$$

$$\text{臨界阻尼：} y = (A_3 t + A_4) e^{-b_3 t} \quad (3)$$

(1)式中， y 為一振幅隨時間衰減的餘弦波，這種情況被稱為欠阻尼振盪。 b 稱為振幅的指數衰減率， ω 為此餘弦波的振盪角頻率， ϕ 則為初始相位，在我們的實驗中，由於初始條件的約束故 ϕ 為零， b 和 ω 便為決定函數樣貌的關鍵因素。由於實驗結果多與欠阻尼振盪較類似， b 和 ω 將會成為我們探討實驗結果的重要指標。以下為欠阻尼情況下 b 和 ω 的理論公式。

$$b = \frac{4\mu}{\rho r^2} \quad \omega = \left(\frac{2g}{L} - \frac{16\mu^2}{\rho^2 r^4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

2.考慮流速分佈的不均性：

假設管內流場在任何時刻下都可用穩態管流近似，使用 Lagrangian mechanics 求運動方程式：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial(T - V)}{\partial y} = F$$

T 為系統總動能， V 則為位能，可將上式簡化為：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial V}{\partial y} = F \quad (4)$$

F 為系統中的非保守力，表示為壓力損失與水管截面積的乘積，壓力損失 Δp 由泊肅葉定律給出（ \bar{V} 為平均流速）：

$$F = -\Delta p A = -\frac{8\mu L Q}{r^2} \pi r^2 = -8\mu \pi L \bar{V} \quad (5)$$

假設管內流場 v 為穩態管流的流場， r 為水管的內半徑， w 為距離水管中心的距離：

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{4\mu} \frac{\Delta p}{L} (r^2 - w^2) = -\frac{2\bar{V}}{r^2} (r^2 - w^2) \\ T &= \int dT = \int \frac{1}{2} v^2 dm = \int \frac{1}{2} \rho 2\pi w L v^2 dw \\ &= \int_0^r \rho \pi L \frac{4\bar{V}^2}{r^4} (wr^4 - 2r^2w^3 + w^5) dw = \frac{2\rho \pi L r^2}{3} \bar{V}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

設 A、B 連線處為零位面，求系統的重力位能：

$$V = \rho g \pi r^2 \left[(h+y) \left(\frac{h+y}{2} \right) (h-y) \left(\frac{h-y}{2} \right) \right] = \rho g \pi r^2 (y^2 + h^2) \quad (7)$$

將(5)、(6)、(7)式代回(4)式：

$$\begin{aligned} \frac{4\rho \pi L r^2}{3} \frac{d\bar{V}}{dt} + 2\rho g \pi r^2 y &= -8\mu \pi L \bar{V} \\ \frac{4\rho \pi L r^2}{3} \frac{d^2 y}{dt^2} + 8\mu \pi L \frac{dy}{dt} + 2\rho g \pi r^2 y &= 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{6\mu}{\rho r^2} \frac{dy}{dt} + \frac{3g}{2L} y &= 0 \\ IC : y(0) = y_0, \frac{dy}{dt}(0) &= 0 \end{aligned}$$

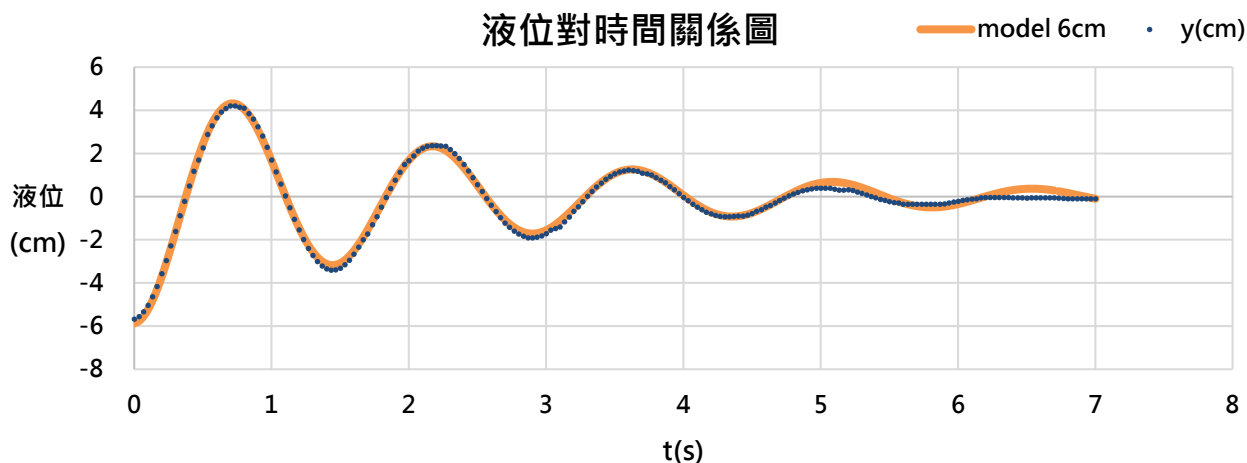
此為阻尼振盪方程，欠阻尼特解為：

$$\begin{aligned} y &= y_0 e^{-bt} \cos(\omega t) \\ b &= \frac{3\mu}{\rho r^2}, \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2L}}, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \end{aligned}$$

伍、研究結果與討論

一、觀察並分析液位的振盪

我們將拍攝的影片利用 Tracker 分析後，利用 Excel 的規劃求解功能將實驗數據與阻尼振盪的方程解進行擬合，下圖為我們用欠阻尼振盪擬合的例子。其中 model 6 cm 為用來擬合的函數曲線， $y(\text{cm})$ 為實驗結果。

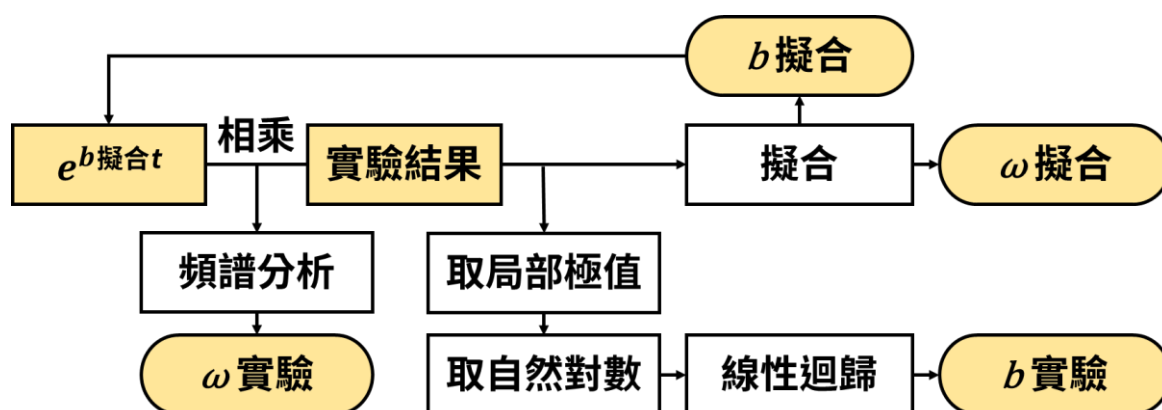


變因	高度差	密度	水管內半徑	彎道半徑	平衡位置	黏性係數
數值	6 cm	1000 kg/m ³	0.6 cm	18 cm	20 cm	0.001 pa · s

可以發現在振盪的前期，擬合的效果相當佳，振幅的衰減和頻率都近似，但在第 4 秒後，實驗結果卻比擬合曲線衰減得更快。我們推測管內流體的運動可能並不是準穩態。因此在接下來的分析中，我們將特別著重於比較實驗結果與阻尼振盪之解的差異。

二、數據分析說明

由於缺乏明確的理論解，我們將會利用現有的數據和理論再分別得出振幅指數衰減率和振盪角頻率的擬合值、實驗計算值和理論值（分別記為 b 擬合、 b 實驗、 b 理論、 ω 擬合、 ω 實驗、 ω 理論，其中 b 理論分為用 Lagrangian mechanics 得到的結果，我們稱為 $b(l)$ ，以及用 unsteady bernouli equation 得到的結果，我們稱為 $b(b)$ ），以便比較實驗結果與阻尼振盪理論的異同。下圖為數據分析的處理流程。

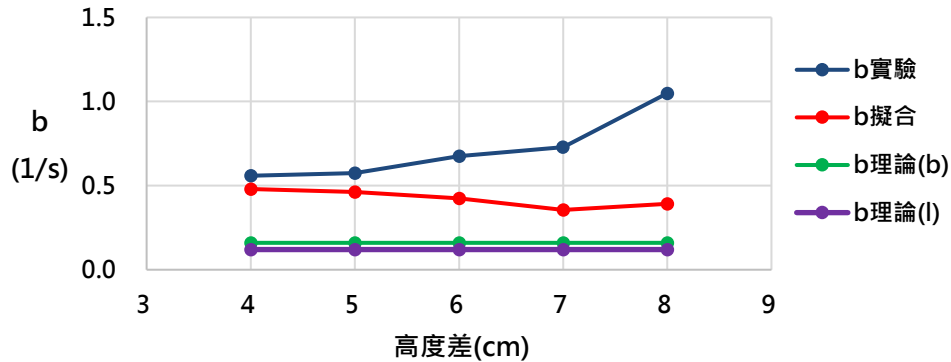


三、不同高度差對振盪之影響

改變高度差進行實驗，控制變因如下：

變因	密度	黏度	彎道半徑	平衡位置	水管內半徑
數值	1000 kg/m ³	0.001 pa · s	18 cm	20 cm	0.6 cm

指數衰減率對高度差關係圖



上圖為三種不同方式所得的指數衰減率對高度差作圖的結果，可以發現 b 實驗有隨高度差遞增的趨勢。這很顯然的與阻尼振盪的預測不同。

事實上，參考資料[1]中以歐拉法（Euler's Method）求 U 型管液面振盪的數值解。運動方程式如下：

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{\lambda}{2D} \left| \frac{dh}{dt} \right| \frac{dh}{dt} + \frac{2g}{L} h = 0$$

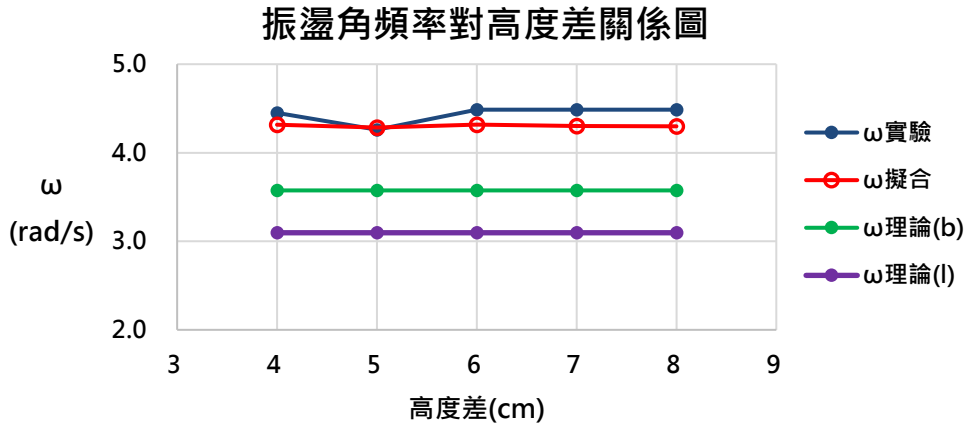
λ 為摩擦因子，根據參考資料[1]的實驗結果， λ 的最佳解如下，其中 C^* 為 0.4176， $sign()$ 為符號函數：

$$\lambda = \max \left\{ \left[\frac{64}{Re} + \frac{\sqrt{C^*}}{2} \frac{2D}{\bar{V}|\bar{V}|} \left| \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} \right| \text{sign}(\bar{V}) \right], \frac{0.3164}{Re^{0.25}} \right\}$$

我們認為正是因為越大的高度差造成液柱的受力越大，造成 $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}$ 的量值增加，因而加速能量的耗散，才導致此一結果。

實驗值與擬合值的差異相當明顯， b 實驗明顯大於 b 擬合，且變化趨勢也較明顯，可能是因為 b 擬合只能適用於振盪前期，並無法表現整體振幅衰減。

此外，不考慮流速不均性的理論結果較接近實驗結果，推測這可能代表管中的流動並未進入全發展流狀態(Fully developed flow)，導致管內流場分佈較穩態管流均勻。

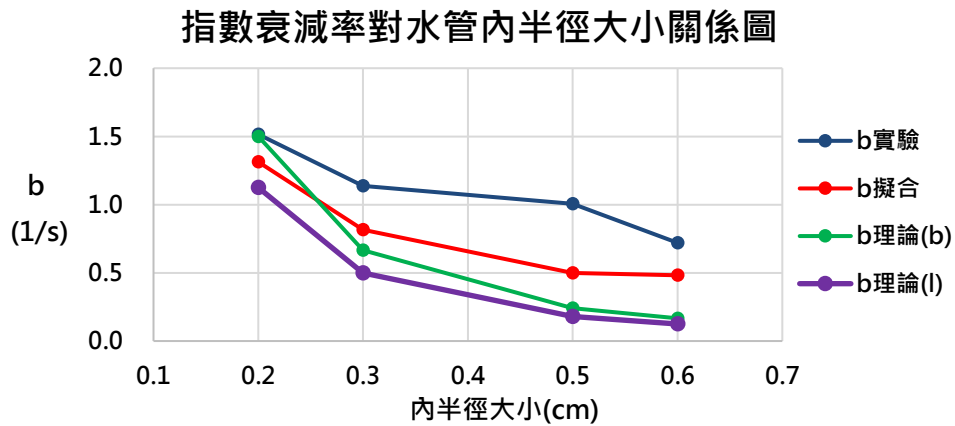


上圖為三種方式求得的振盪角頻率對高度差作圖的結果，可看到三者都沒有明顯的隨高度差變化的趨勢，且 b 實驗與 b 擬合相當接近，但阻尼振盪理論顯然低估了振盪角頻率。

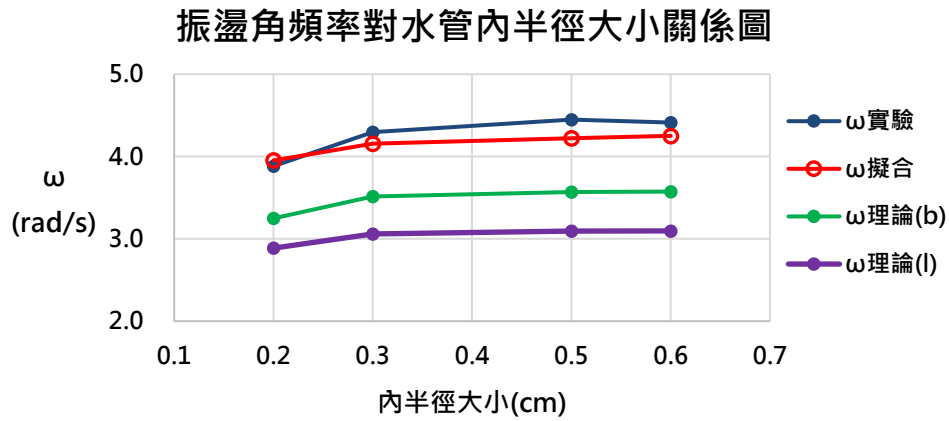
四、不同水管內半徑大小對振盪之影響

使用不同內半徑的水管進行實驗，控制變因如下：

變因	密度	黏度	彎道半徑	平衡位置	高度差
數值	1000 kg/m ³	0.001 pa · s	18 cm	20 cm	8 cm



上圖為三種方式求得的指數衰減率對水管內半徑大小作圖的結果，三者的趨勢都是與內半徑大小呈負相關。而三者的大小排序除了內半徑為 0.2 cm 外，其餘仍是 b 實驗 $>$ b 擬合 $>$ b 理論。

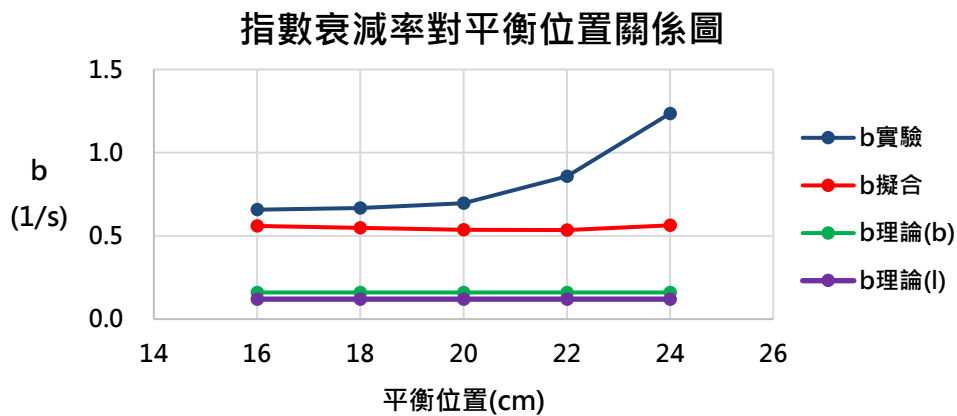


上圖為三種方式求得的振盪角頻率對水管內半徑大小作圖的結果，三者的變化趨勢和理論相同，都是隨內半徑大小增加而遞增，而阻尼振盪理論仍然低估了振盪角頻率。

五、不同平衡位置對振盪之影響

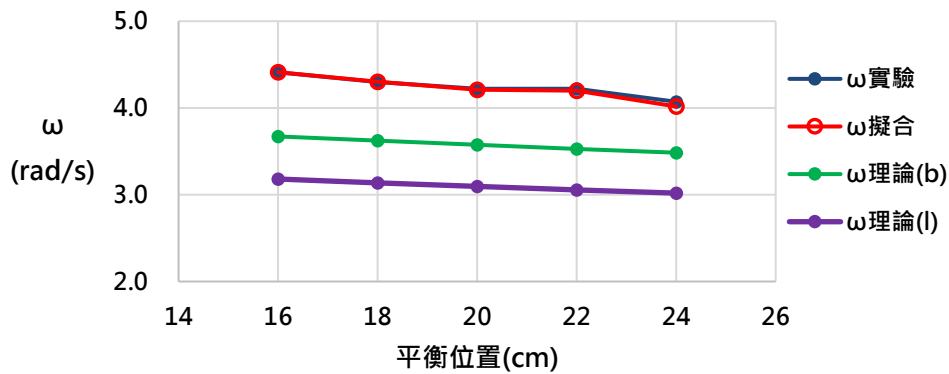
改變平衡位置進行實驗，控制變因如下：

變因	密度	黏度	彎道半徑	水管內半徑	高度差
數值	1000 kg/m ³	0.001 pa · s	18 cm	0.5 cm	6 cm



上圖為三種方式求得的指數衰減率對平衡位置作圖的結果，三者的大小排序和前文相同，而 b 實驗會隨平衡位置升高而上升，與阻尼振盪預測的趨勢不吻合。

振盪角頻率對平衡位置關係圖



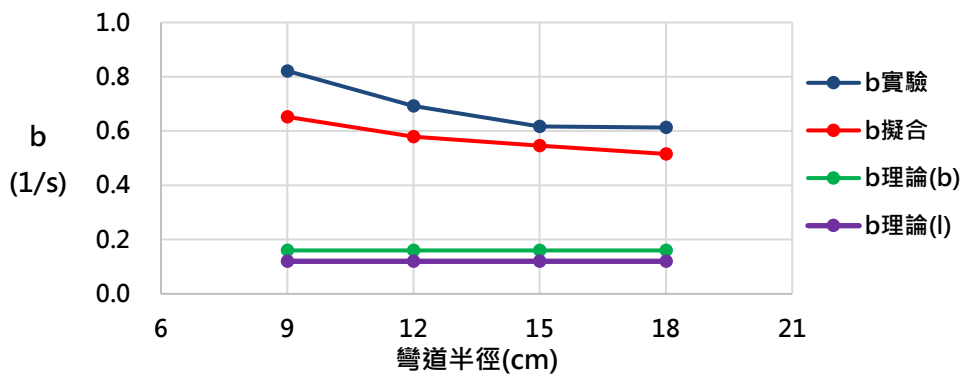
上圖為三種方式求得的振盪角頻率對平衡位置作圖的結果，三者的變化趨勢皆為隨平衡位置高度增價而遞減，符合理論預測，但實驗計算和擬合所得的振盪角頻率仍比理論值高。

六、不同彎道半徑對振盪之影響

改變彎道半徑進行實驗，控制變因如下：

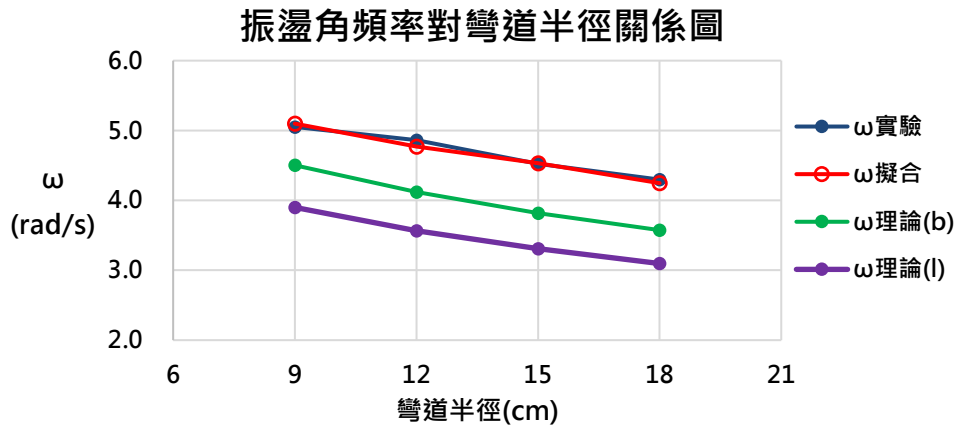
變因	密度	黏度	平衡位置	水管內半徑	高度差
數值	1000 kg/m ³	0.001 pa · s	20 cm	0.5 cm	6 cm

指數衰減率對彎道半徑關係圖



上圖為三種方式求得的指數衰減率對彎道半徑作圖的結果，三者的大小排序與上文相同，值得注意的是，彎道半徑和實際的指數衰減率成負相關，也就是說，越小的彎道半徑會造成越大的損失，這有可能與二次流損失有關。

當管路中的液體作圓周運動時，需要向心力，因此管中必然存在徑向的壓差來提供向心力，然而這也導致一股徑向的流動，稱為二次流，帶來額外的能量損失。目前並沒有明確的理論可預測二次流損失的大小，但工程界常用的經驗公式中，就包含了管路內徑和彎道半徑的比值。因此我們推測，彎道半徑的大小改變可能造成了不同的二次流損失，進而造成指數衰減率隨之不同。



上圖為三種方式求得的振盪角頻率對彎道半徑作圖的結果，由於彎道半徑越大，液柱總長越大，而振盪角頻率也會因此降低。雖實驗所得的趨勢與理論相符，但實際的振盪角頻率仍較理論值高。

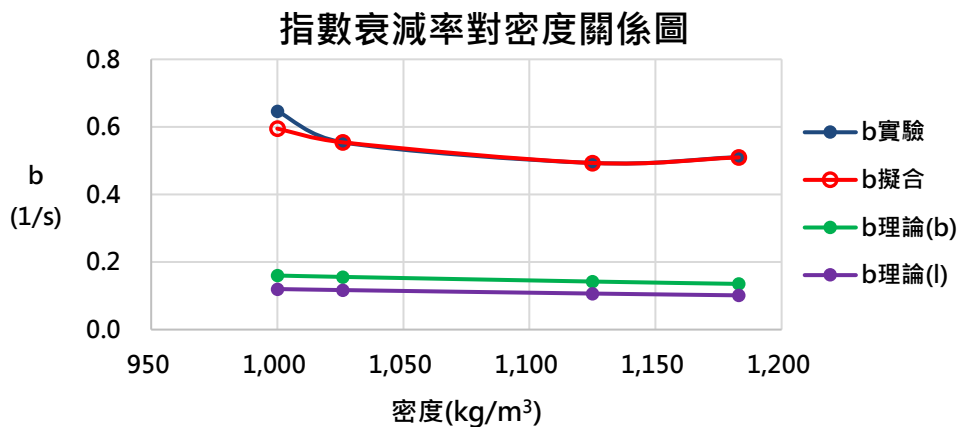
七、不同液體對振盪之影響

改變液體種類進行實驗，控制變因如下：

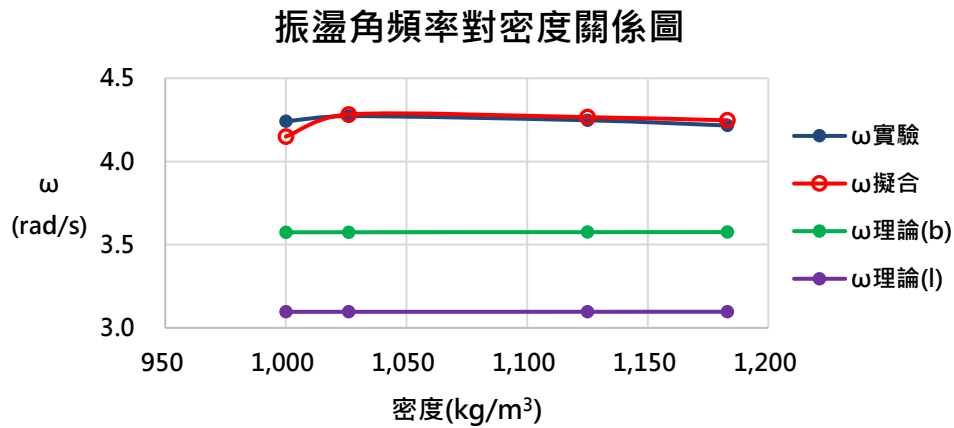
變因	彎道半徑	平衡位置	水管內半徑	高度差
數值	18 cm	20 cm	0.5 cm	6 cm

(一) 不同密度的液體

首先使用不同密度的食鹽水溶液和自來水，它們的物性除了密度之外基本上是相同的，因此這組實驗的主要目的是觀察密度對振盪的影響。密度分別為 1183 kg/m^3 、 1125 kg/m^3 、 1026 kg/m^3 、 1000 kg/m^3 。



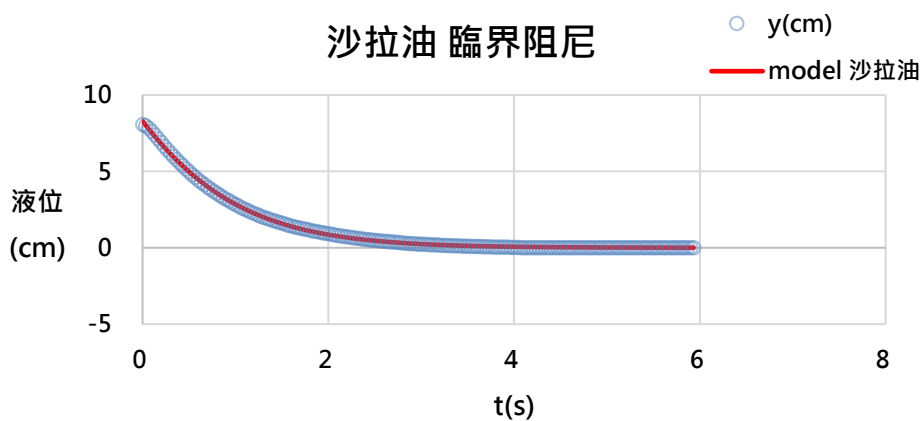
上圖為三種指數衰減率作圖後的結果，可看到三者的大小排序和前文相同，且不論是哪個處理方式，所得的指數衰減率都和理論推得的趨勢相同，密度較大的液體，其指數衰減率較小。

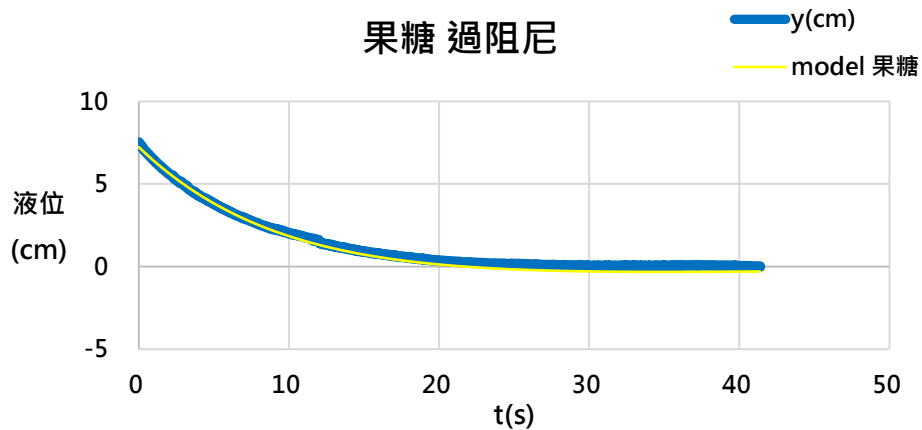
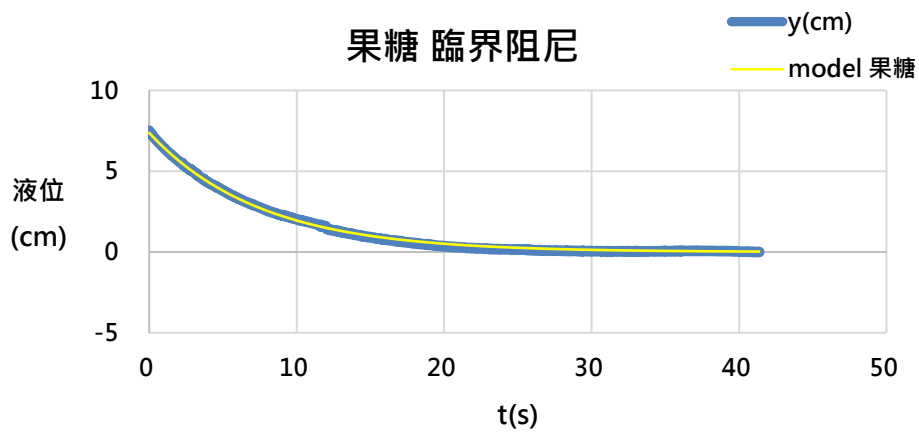
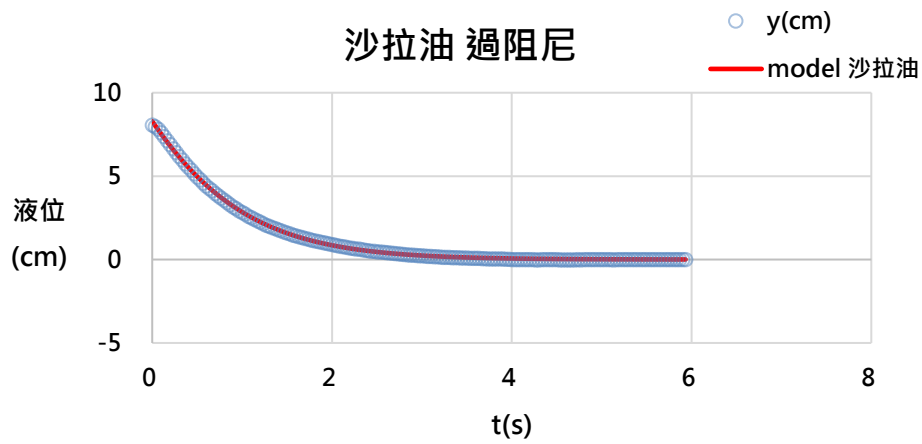


上圖為三種振盪角頻率作圖後的結果，其趨勢與理論推測的相同，密度較大的液體，其振盪角頻率較大。而理論值仍小於實驗所得之值。

(二) 果糖和沙拉油的比較

由於我們並沒有辦法取得密度相同，黏性係數不同的液體，因此改為選用另外兩種黏性係數較大的液體，去觀察阻尼較大時的運動情形。以下我們用過阻尼和臨界阻尼模型進行擬合。其中 $y(\text{cm})$ 為實驗結果，model 則為擬合所得。





由於我們目前無法取得準確度可靠的黏性計，所以無法確認其理論值，但若就擬合程度而言，這兩種黏性係數較大的液體的確比食鹽水和自來水更符合擬合函數的特性，幾乎所有數據點都緊貼擬合曲線，且並沒有改變流動方向，因此我們認為，導致之前的實驗結果偏離阻尼振盪之理論值的原因，可能是因為流速變化太過劇烈，使管路不適合被當作準穩態系統分析，或者管路的局部產生了紊流或二次流，導致更大的能量損失。

陸、結論

- 一、液體在 U 型管振盪結果，實驗的衰減比理論衰減還要猛烈。
- 二、就指數衰減率而言，只有隨水管內半徑和密度變化的趨勢與理論相符。
- 三、由實驗結果計算而得的振盪角頻率較理論推導出的振盪角頻率還大。
- 四、振盪角頻率隨各變因變化的趨勢與理論推導的結果一致。
- 五、振盪過程中可能有我們無法明確掌握的損失機制，例如和彎道半徑有關的二次流損失，及與高度差、平衡位置高度有關的未知損失項。
- 六、由兩種理論結果（有無考慮流場分佈的不均性）與實驗結果的相似程度來看，管內流場的分佈似乎較穩態管流均勻。

柒、參考資料

- [1] Bjorn Olav Thon (2014). *Friction Models for Oscillating Flow in a U-tube*, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim.
- [2] 陳友剛 (2009)。 *EXCEL 的數理科技應用*。台北：基峰資訊股份有限公司。
- [3] Joseph Lagrange (1788). *Lagrangian mechanics*.
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8B%89%E6%A0%BC%E6%9C%97%E6%97%A5%E5%8A%9B%E5%AD%A6>

【評語】 051801

本實驗作品探討 U 型管中液體的振盪運動，並嘗試以理論解釋，探討的題材是常討論的問題，但仍有可以探索空間。實驗設計及流程，雖能顯現探討的議題，但並沒有特別不同之處。在理論分析與物理機制方面則有待改進，特別實驗結果與理論模型的差異發生小振幅時，未考慮表面張力的影響，使得本實驗的結論有所侷限，未能給出說服性之理論與實驗的比較。

壹、摘要

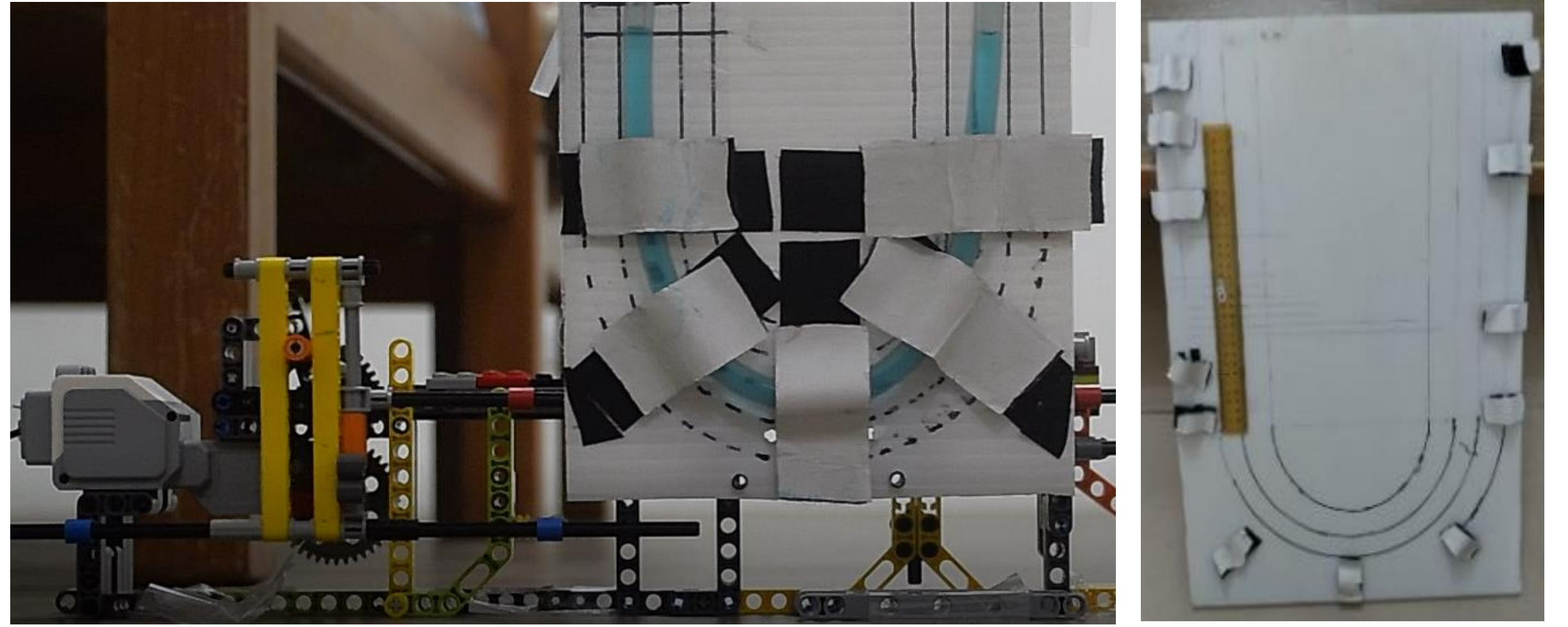
本實驗最主要探討U型管中液位的振盪行為，並嘗試建立模型描述其運動。為了簡化推導，將流動近似為準穩態，並以阻尼振盪理論模型近似其運動。經實驗發現，其振盪角頻率和指數衰減率隨各變因改變的趨勢，與理論模型所得的部分結果類似，但其振幅的衰減率和角頻率皆大於理論值。推測振盪的過程中可能存在其他的損失機制，且根據強迫振盪實驗結果，這些損失項的影響在高頻時較不明顯。

貳、研究動機

U型管的振盪是介紹簡諧運動時常被提起的例子，但其真實的運動卻很少被討論，因而對此感到好奇，究竟當考慮能量損失時，液面的振盪又會是如何呢？因此我們希望建立能描述真實振盪的理論模型，並分析各項變數對振盪的影響。

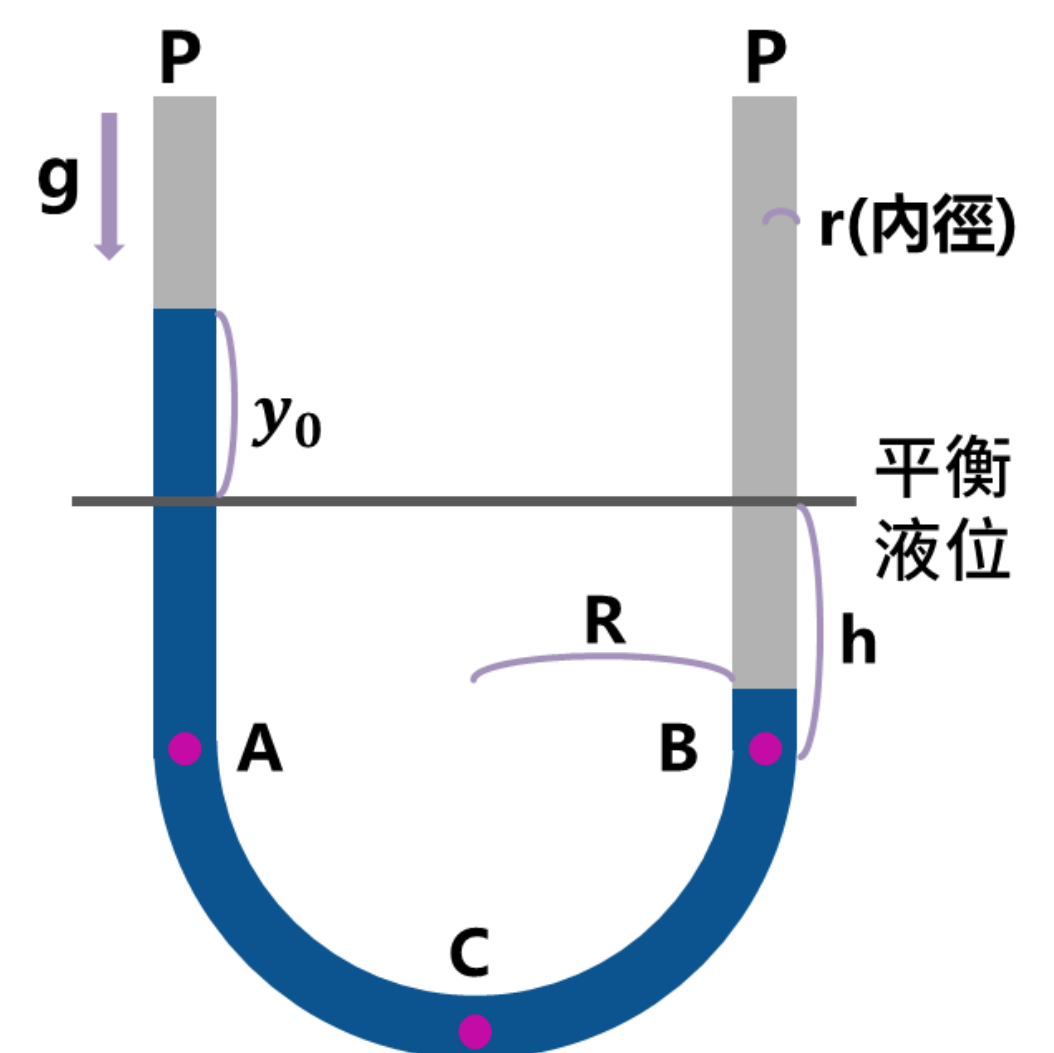
參、研究目的

- 一、建立模型求解考慮能量損失的振盪。
- 二、探討各變因對振盪的影響。
- 三、檢視實際振盪情形與阻尼振盪的異同。
- 四、以強迫振盪和自由振盪的實驗結果探討此物理系統的特性。



肆、研究器材

固定板、打氣筒、果糖、食鹽、沙拉油、亞甲藍液（染色用）、直尺、量筒、各尺寸水管（水管內半徑分別為0.6cm、0.5cm、0.3cm、0.2cm）、燒杯、智慧型手機（攝影及水平儀用）、攪拌棒、滴管、漏斗、筆記型電腦、振盪器、Excel、Tracker。



伍、研究方法

（一）自由振盪運動方程式的推導：

考慮一兩側液面偏離平衡水位一段高度 y_0 的U型管，液體密度為 ρ ，黏性係數為 μ ，重力場為 g ，管內半徑 r ，液柱的總長為 L ，彎道的半徑為 R ，管內流體的平均流速為 v ，是水面高度 y 對時間的導數。

假設流速變化足夠小使此流動符合泊肅葉定律（Poiseuille's law），則因黏性力造成的壓力損失如下， Q 為單位時間流過管中任一截面的體積（即體積流率），由於體積流率等於平均流速和截面積的乘積，上式可被化簡為：

$$\rho g h_f = \frac{8\mu L Q}{\pi r^4} = \frac{8\mu L v}{r^2} \quad (1)$$

以下分為管內流場均勻和不均勻的情況討論：

1. 流場均勻：

管內流速隨時間變化，適用Unsteady bernoulli equation，由於考慮能量損失，需加入黏性損失項：

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dl + p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constant}$$
$$\rho L \frac{dv}{dt} + P_{atm} + 2\rho g x + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h_f = 0 + P_{atm} + \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (2)$$

將(1)式代回(2)式整理後可得到以下的微分方程：

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{8\mu}{\rho r^2} \frac{dy}{dt} + \frac{2g}{L} y = 0$$

初始條件： $y(0) = y_0$ ， $y'(0) = 0$ ，其中 y_0 即為上文提及的高度差。

此方程式為典型的阻尼振盪方程。當微分方程的第二項不為零時， y 的解有以下幾種特解，其最終的結果由黏性阻尼的強度決定：

$$\begin{aligned} \text{欠阻尼} \quad y &= A e^{-bt} \cos \omega t \\ \text{過阻尼} \quad y &= A_1 e^{-b_1 t} + A_2 e^{-b_2 t} \\ \text{臨界阻尼} \quad y &= (A_3 t + A_4) e^{-b_3 t} \end{aligned}$$

由二階線性微分方程之特解，當其解為欠阻尼特解時， b 和 ω 可由方程中的係數求出：

$$b = \frac{4\mu}{\rho r^2} \quad \omega = \left(\frac{2g}{L} - \frac{16\mu^2}{\rho^2 r^4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

2. 流場不均勻：

假設管內流場與穩態管流相同，用拉格朗日法（Lagrangian mechanics）可得運動方程式：

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{6\mu}{\rho r^2} \frac{dy}{dt} + \frac{3g}{2L} y = 0$$

當其解為欠阻尼特解時， b 和 ω 為：

$$b = \frac{3\mu}{\rho r^2} \quad \omega = \left(\frac{3g}{2L} - \frac{9\mu^2}{\rho^2 r^4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

(二) 強迫振盪運動方程式的推導：

使用拉格朗日力學 (Lagrangian mechanics) 求運動方程式，其中 T 為動能， V 為位能：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial V}{\partial y} = F \quad (3)$$

F 為系統中的非保守力，表示為壓力損失與管子截面積 A 的乘積，壓力損失 Δp 由泊肅葉定律 (Poiseuille's law) 給出 (\bar{V} 為平均流速)：

$$F = -\Delta p A = -\frac{8\mu L Q}{\pi r^4} A = -\frac{8\mu L \bar{V}}{r^2} A \quad (4)$$

以 A 、 B 為零位面，計算位能 V ：

$$V = \rho g A (h+y) \frac{(h+y)}{2} + \rho g A (h-y) \frac{(h-y)}{2} = \rho g A (h^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 2\rho g y \quad (5)$$

將動能分為兩側垂直液柱的動能和彎道處動能計算， x 與 y 為液面的水平與鉛直位移：

$$T = \rho A h [(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2] + \int_0^\pi \rho A R d\theta [(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \sin^2 \theta) + (\dot{y} \cos \theta)^2]$$

$$= \rho A h [(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2] + \int_0^\pi \rho A R d\theta (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y} \sin \theta)$$

$$= \rho A \left(h + \frac{\pi R}{2} \right) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2\rho A R \dot{x}\dot{y}$$

將上式帶入 $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}$ ：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{d}{dt} \left[2\rho A \left(h + \frac{\pi R}{2} \right) \dot{y} + 2\rho A R \dot{x} \right]$$

$$= \rho A (h + \pi R) \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\rho A R \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (6)$$

將(4)(5)(6)式帶回(3)式，可得受迫阻尼振盪方程式：

$$\rho A (h + \pi R) \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{8\mu L}{r^2} A \frac{dy}{dt} + 2\rho A g y = -2\rho A R \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{8\mu}{\rho r^2} \frac{dy}{dt} + \frac{2g}{L} y = \frac{2R}{2h + \pi R} \omega^2 X_m \cos(\omega t + \phi_x) \quad (7)$$

為求穩態解，假設 $x(t)$ 、 $y(t)$ 為弦波：

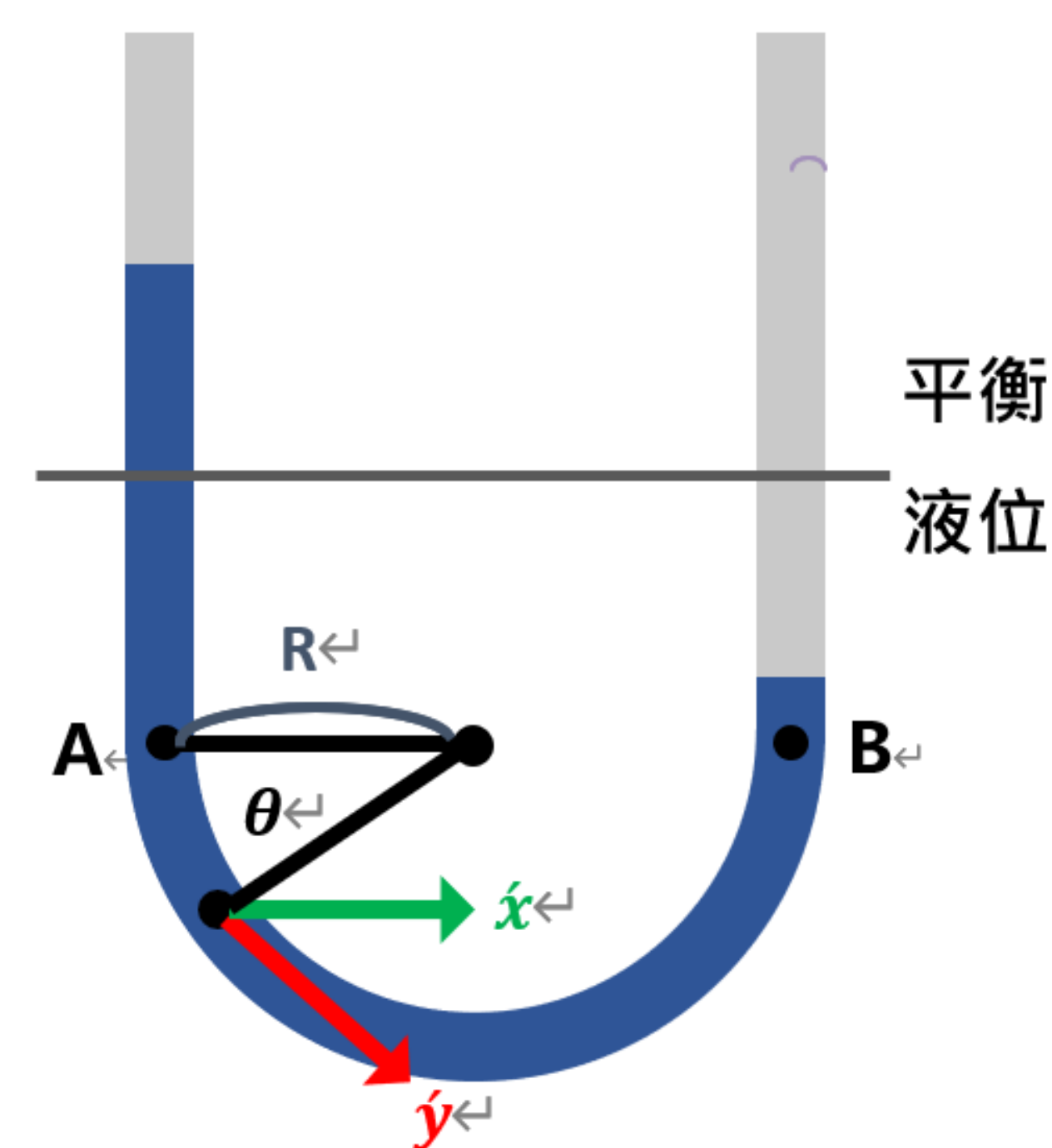
$$x = X_m \cos(\omega t + \phi_x)$$

$$y = A \cos(\omega t + \phi_y)$$

將 $x(t)$ 、 $y(t)$ 帶入(7)式可求得 $x(t)$ 、 $y(t)$ 的振幅關係式：

$$\frac{A}{X_m} = \frac{2R}{2h + \pi R} \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\frac{2g}{L} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{8\mu}{\rho r^2} \omega\right)^2}}$$

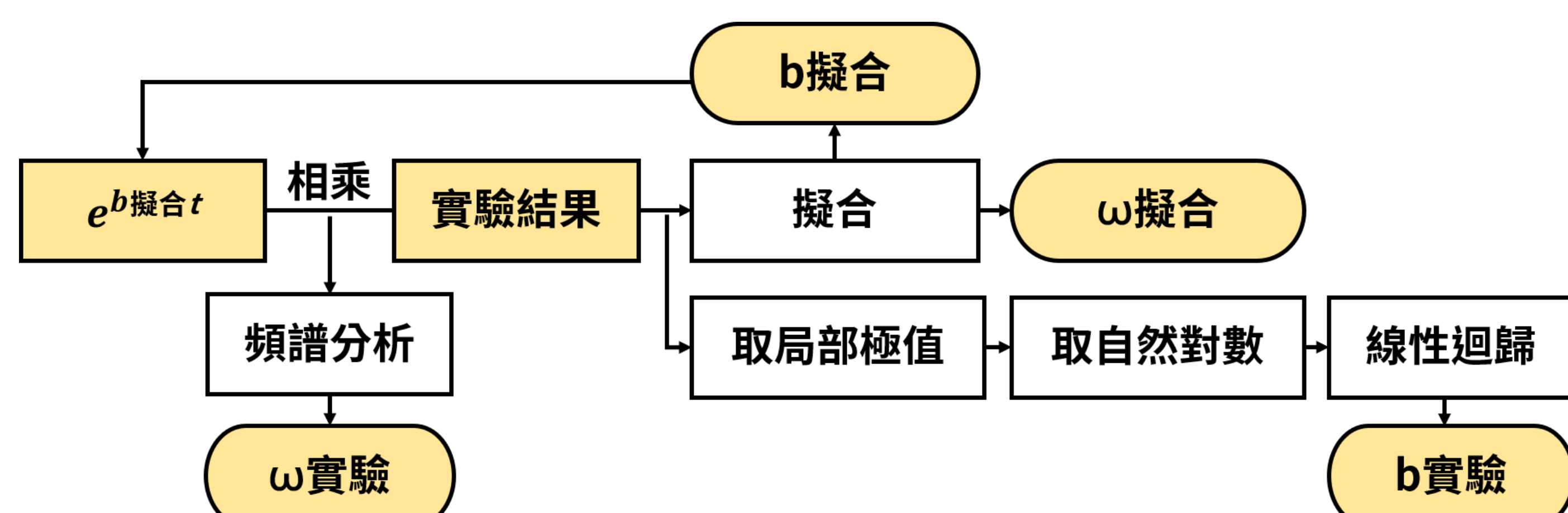
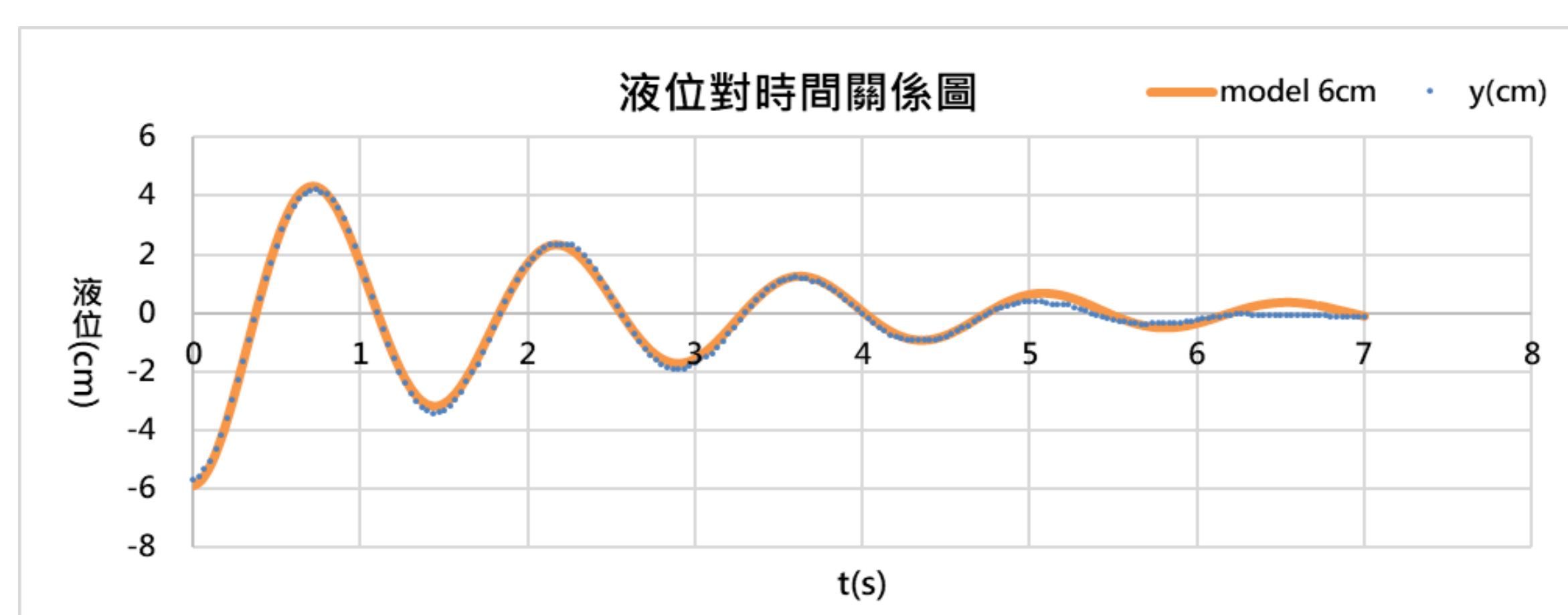
在此定義 $\frac{A}{X_m}$ 為振幅比 B ，在之後的分析中將用 B 和 ω 的關係探討 U 型管的頻率響應。



(三) 數據處理

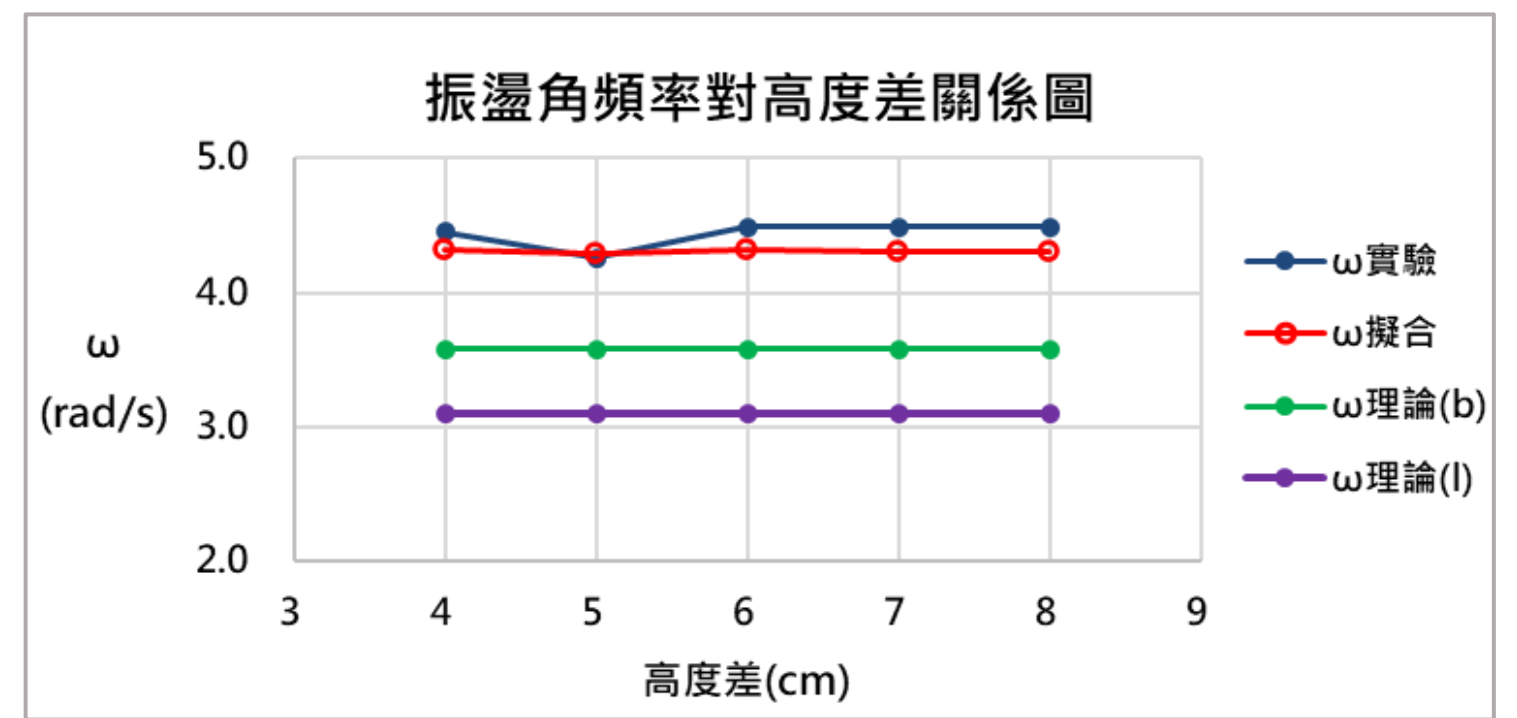
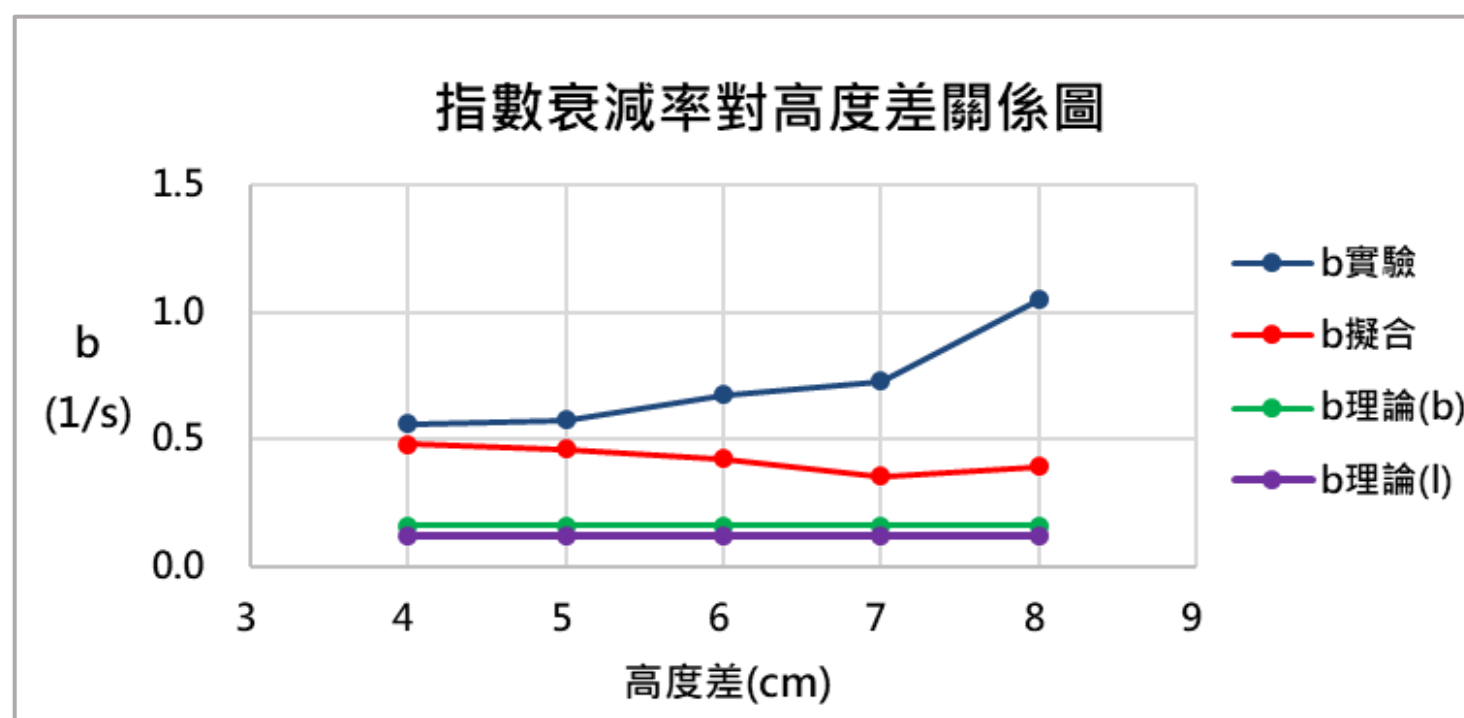
我們將拍攝的影片利用 Tracker 分析後，利用 Excel 的規劃求解功能將實驗數據與阻尼振盪的方程解進行擬合，右圖為我們用欠阻尼振盪擬合的例子。其中 model 6cm 為用來擬合的函數曲線， y (cm) 為實驗結果。可以發現在振盪的前期，擬合的效果相當佳，振幅的衰減和頻率都近似，但在第 4 秒後，實驗結果卻比擬合曲線衰減得更快。我們推測管內流體的運動可能並不是準穩態。因此在接下來的分析中，我們將特別著重於比較實驗結果與阻尼振盪之解的差異。

由於缺乏明確的理論解，我們將會利用現有的數據和理論再分別得出振幅衰減率和角頻率的擬合值、實驗計算值和理論值 (分別記為 b 擬合、 b 實驗、 b 理論、 ω 擬合、 ω 實驗、 ω 理論)，以便比較實驗結果與阻尼振盪理論的異同。右圖為數據分析的處理流程。

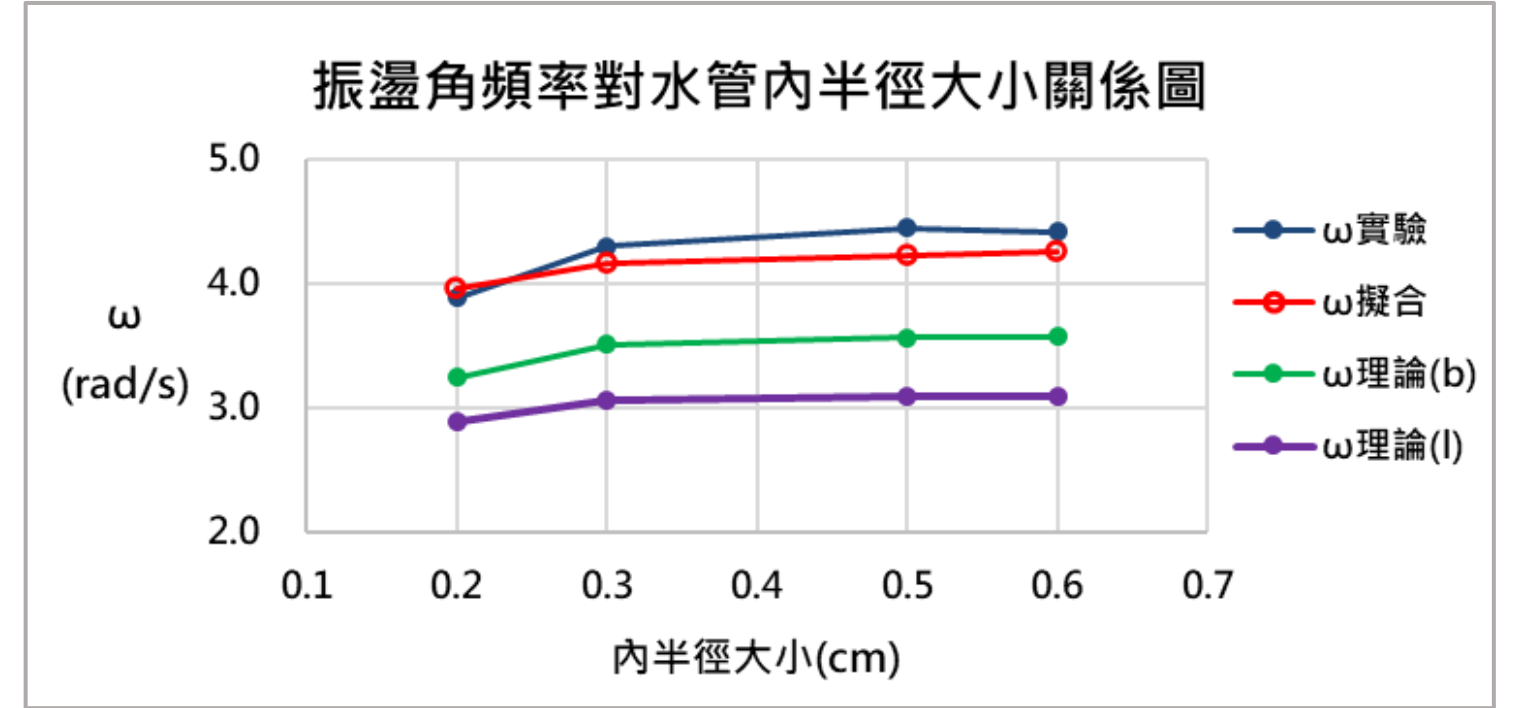
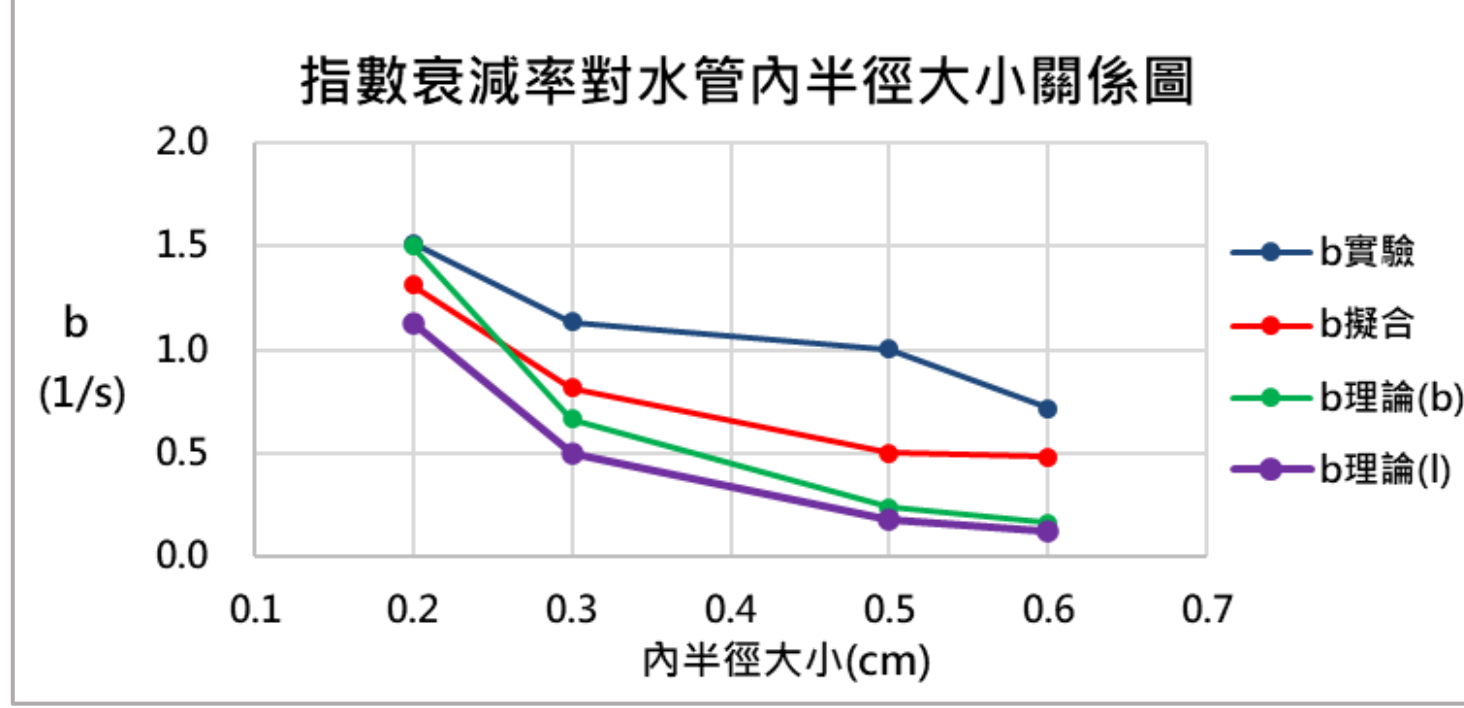


陸、研究結果與討論

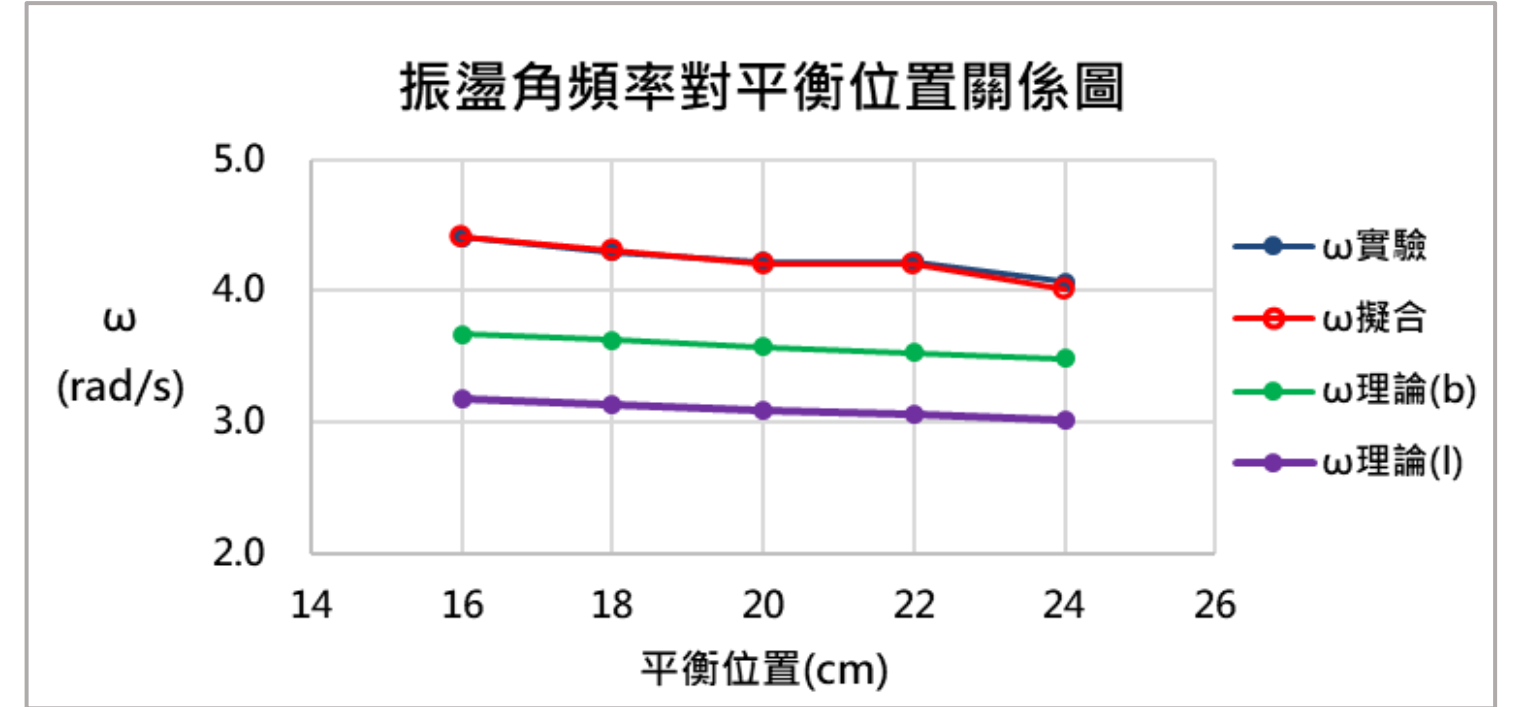
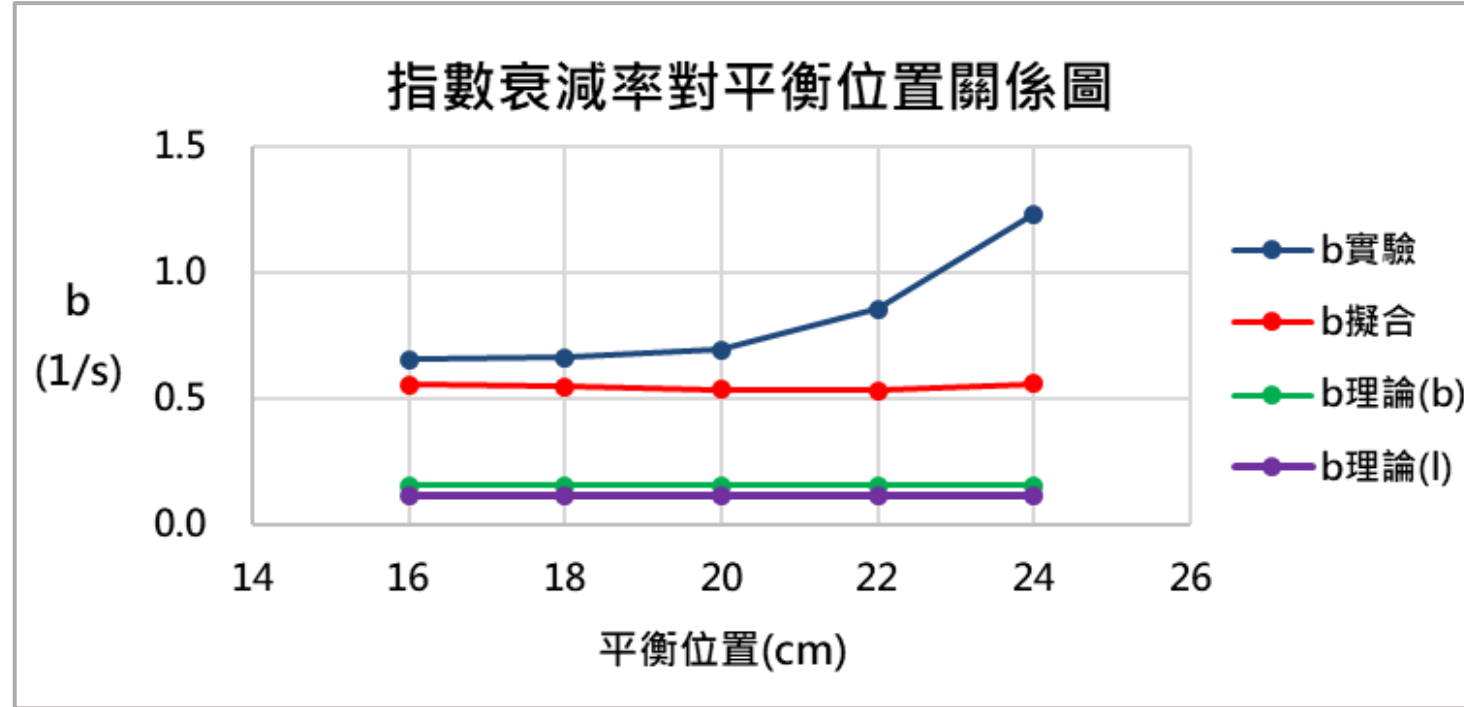
不同高度差 實驗一	控制變因	數值
	密度	1000kg/m ³
	黏度	0.001pa·s
	彎道半徑	18cm
	平衡位置	20cm
	水管內半徑	0.6cm



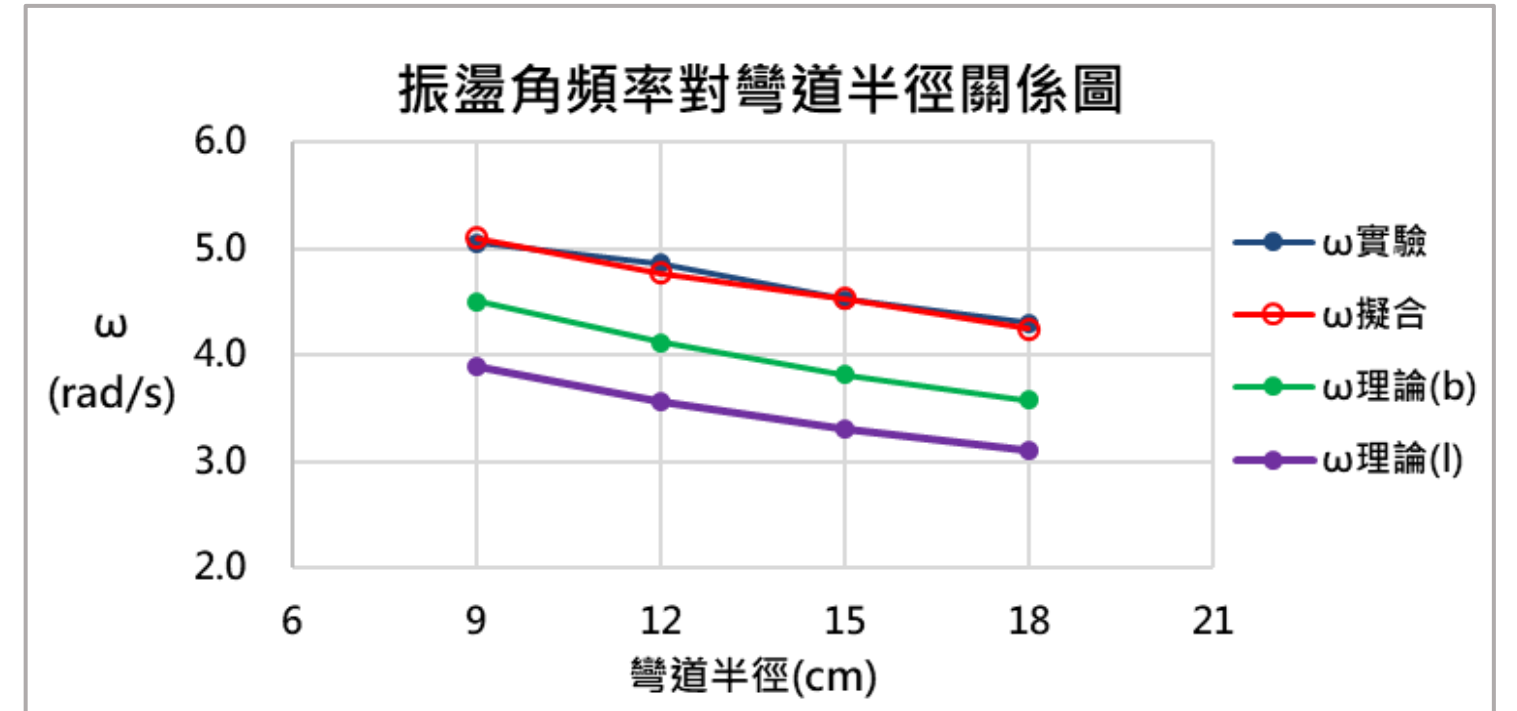
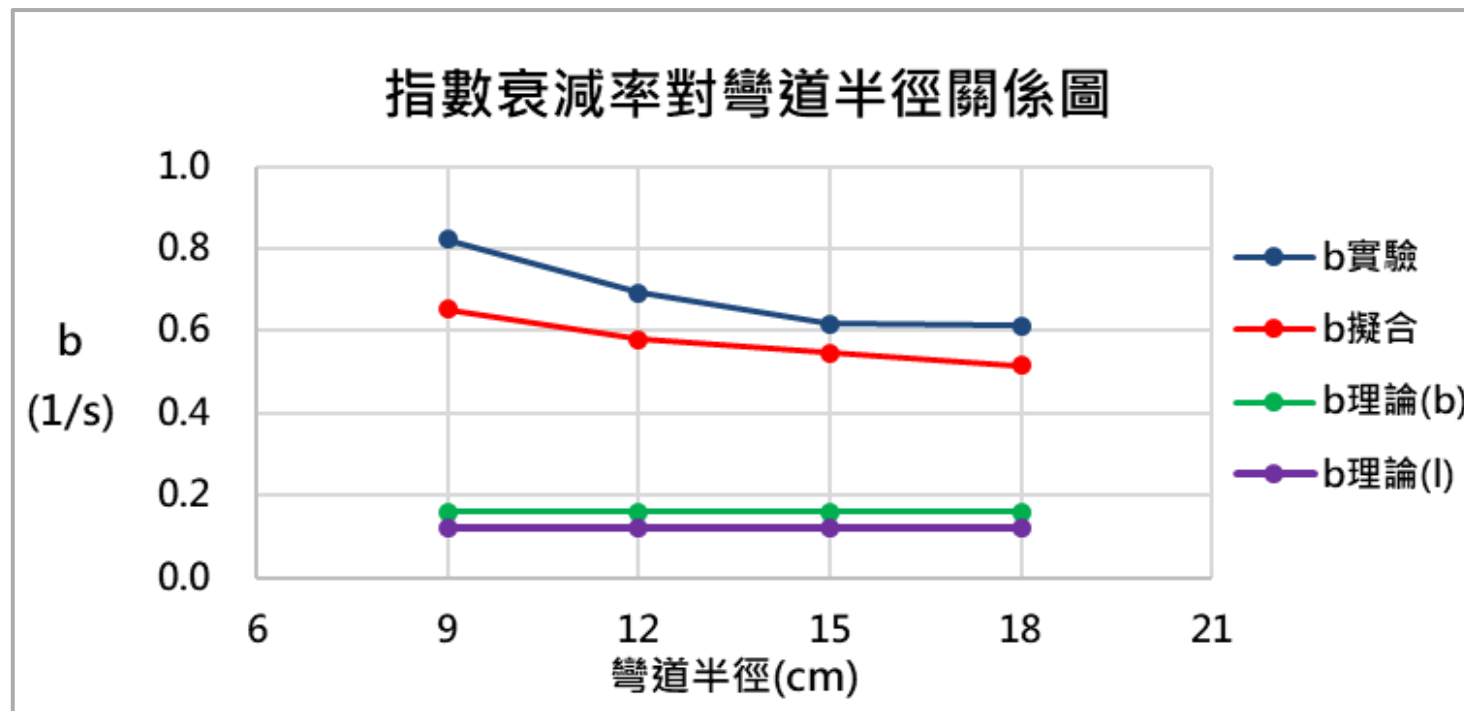
不同內半徑大小 實驗二	控制變因	數值
	密度	1000kg/m ³
	黏度	0.001pa·s
	彎道半徑	18cm
	平衡位置	20cm
	高度差	8cm



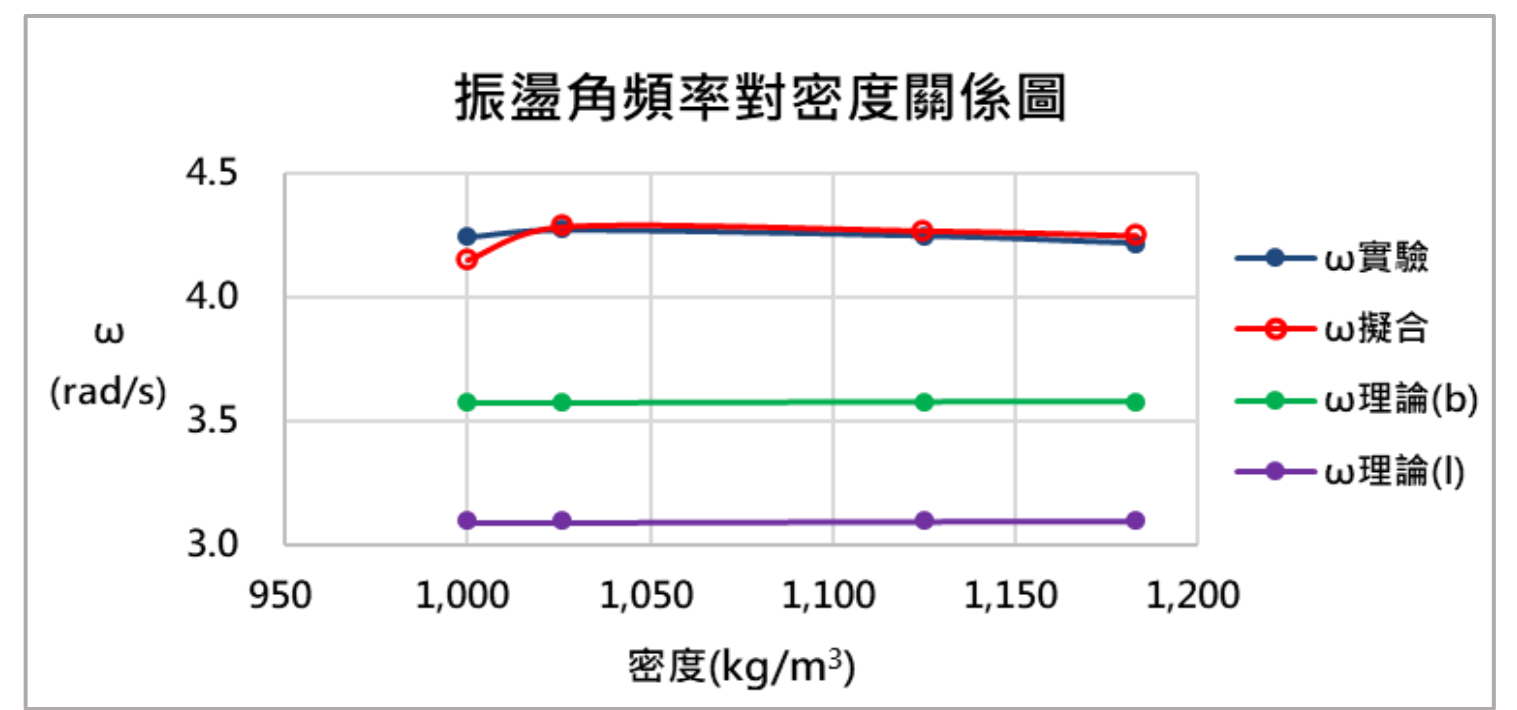
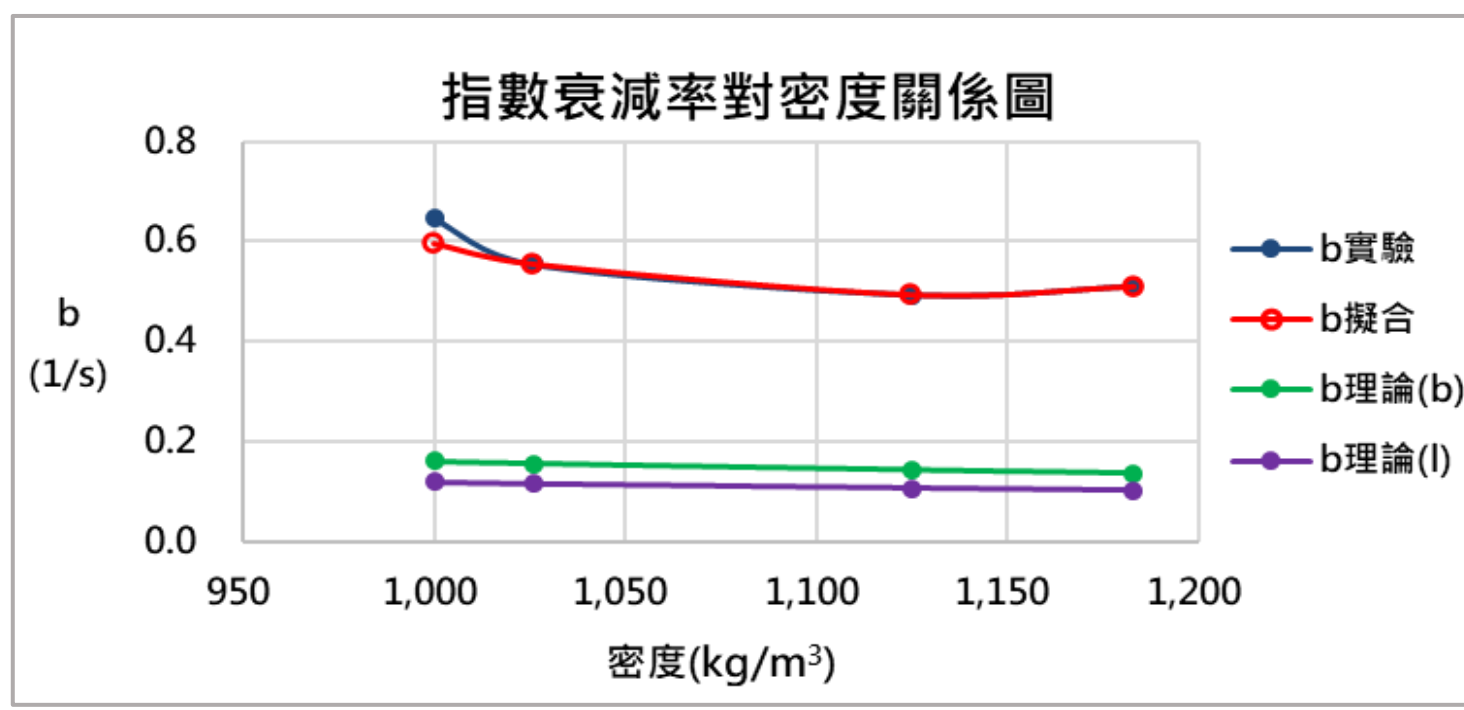
不同平衡位置 實驗三	控制變因	數值
	密度	1000kg/m ³
	黏度	0.001pa·s
	彎道半徑	18cm
	水管內半徑	0.5cm
	高度差	6cm



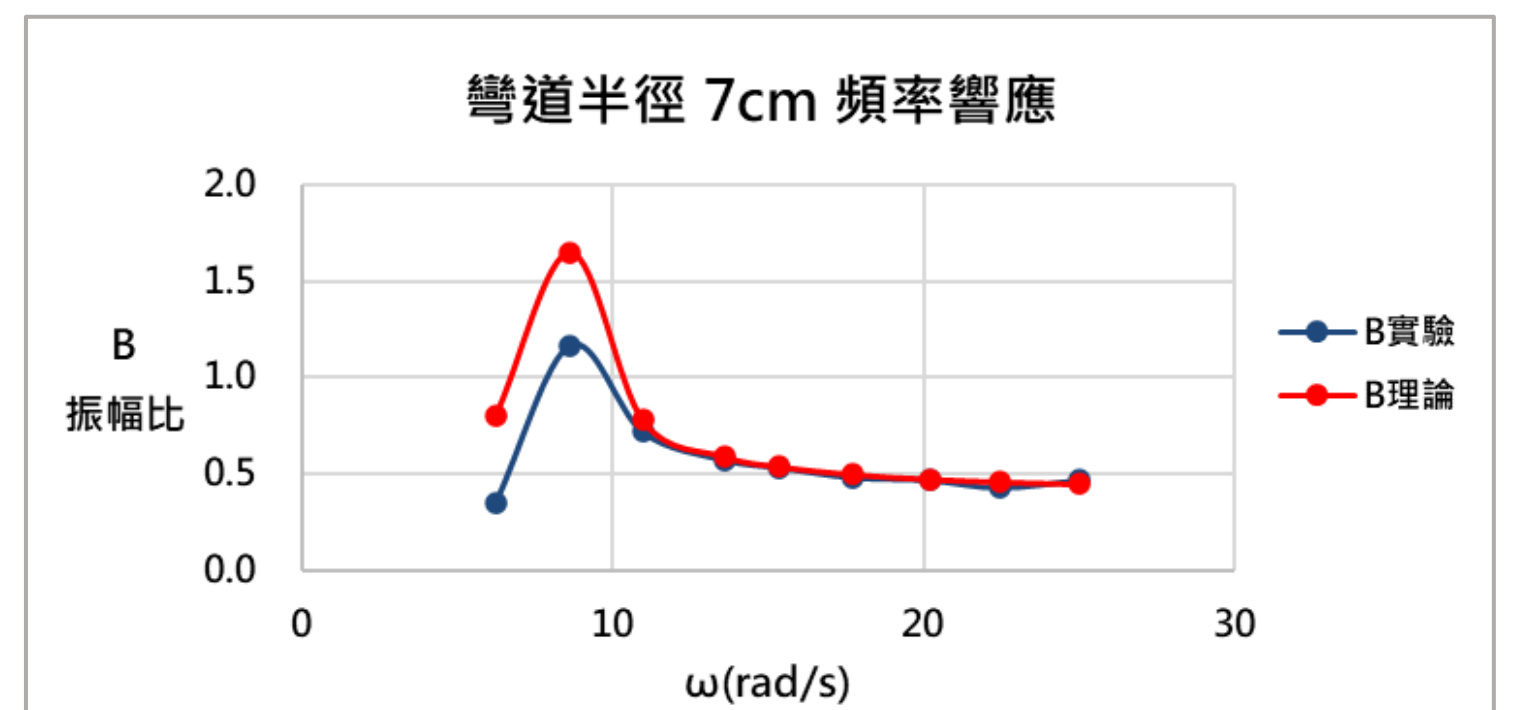
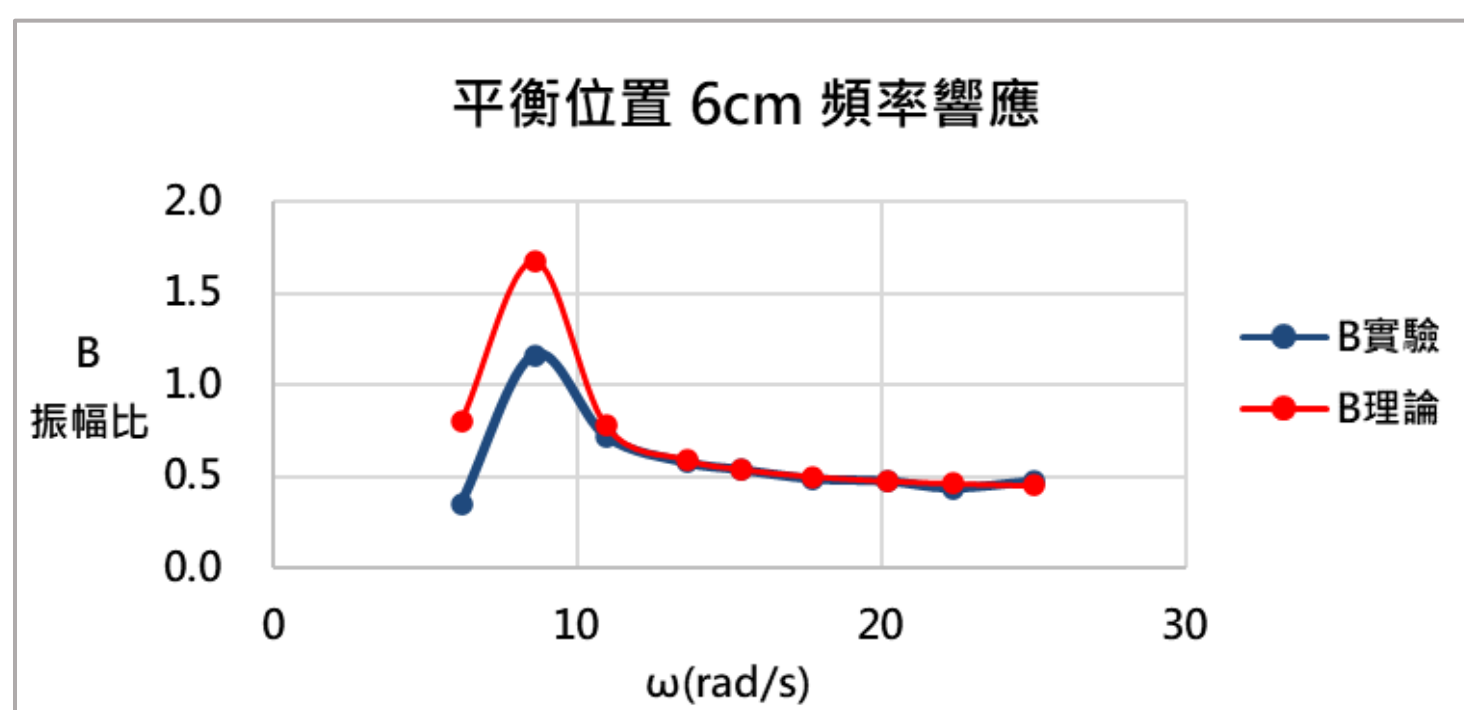
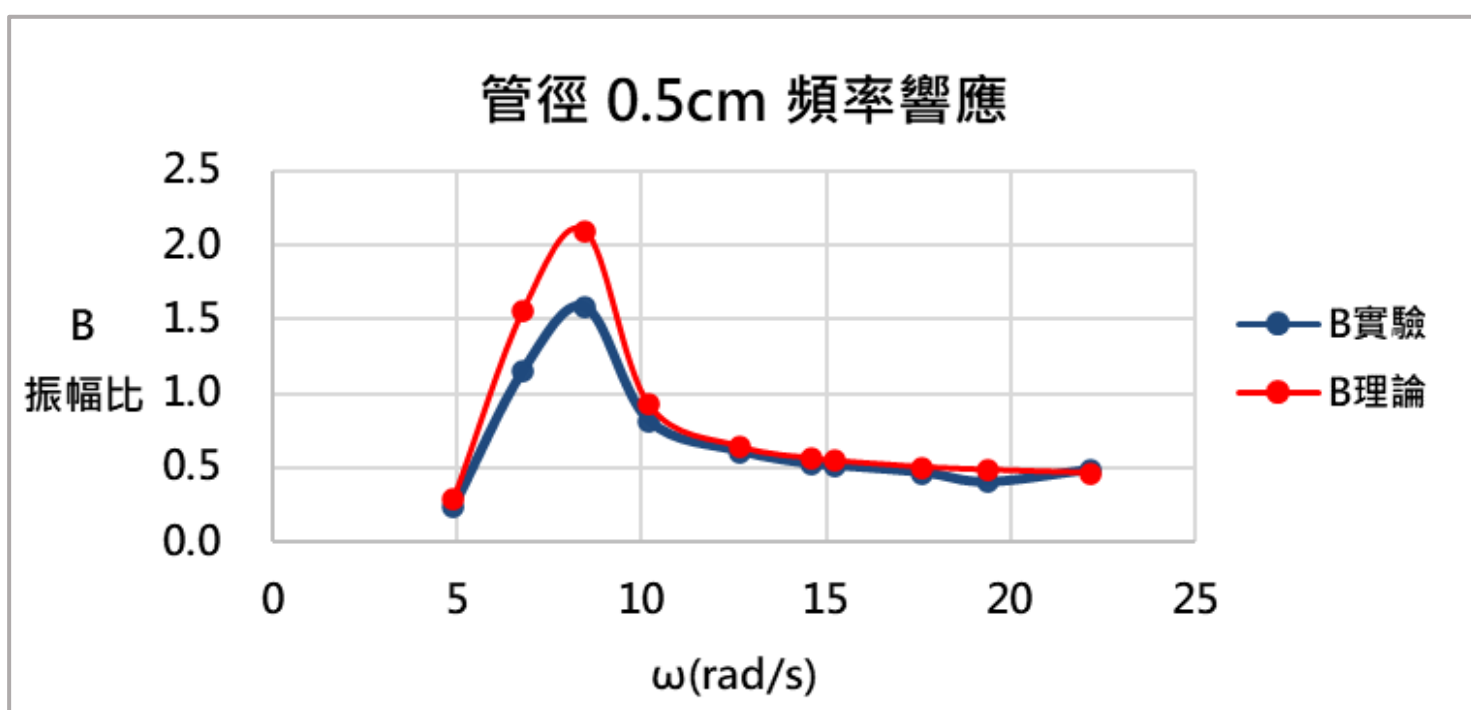
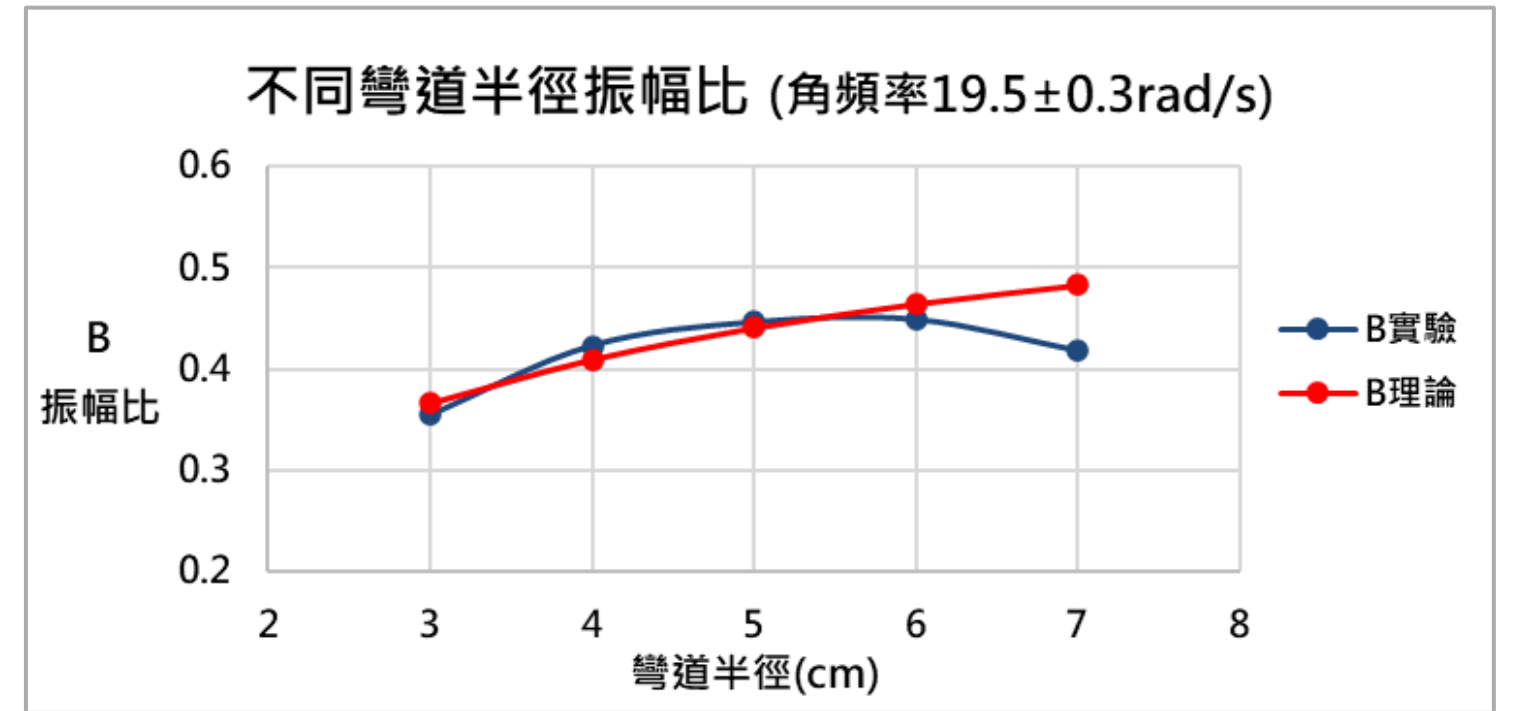
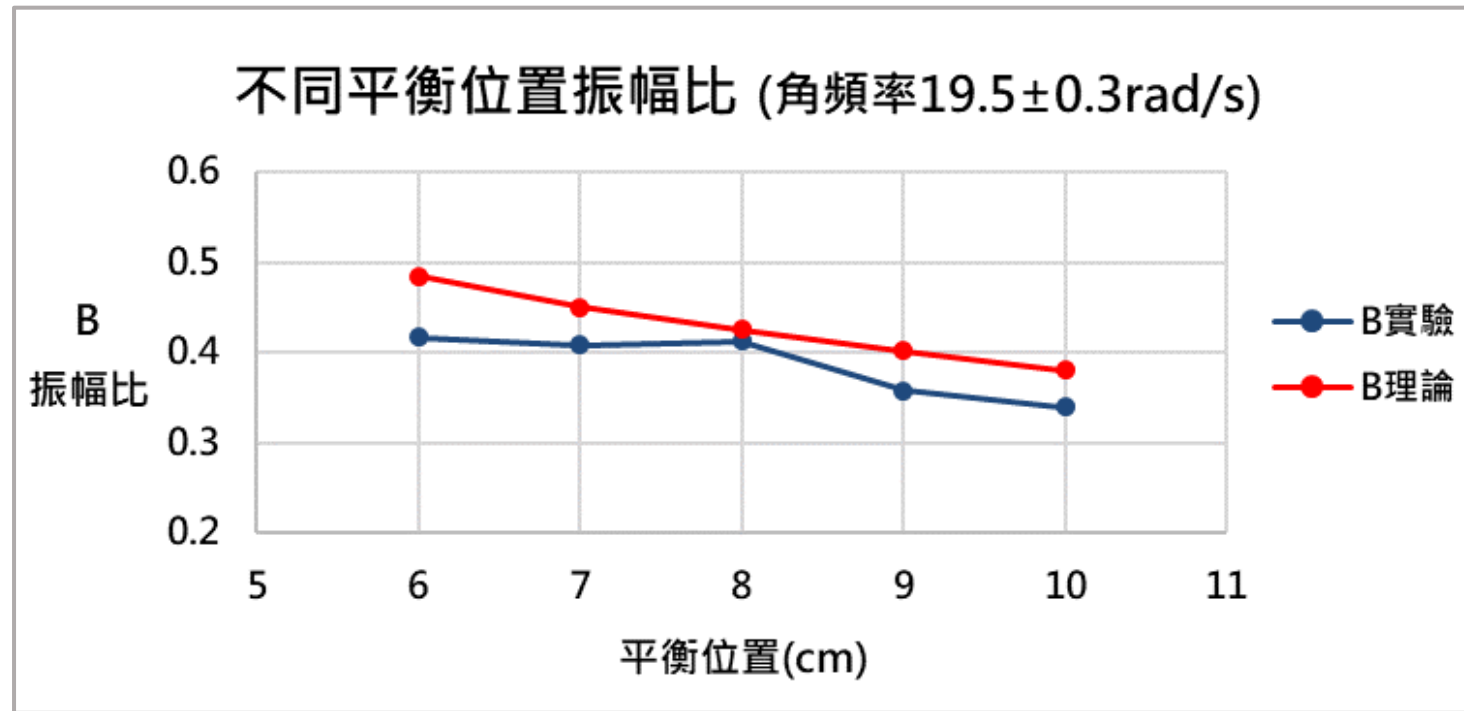
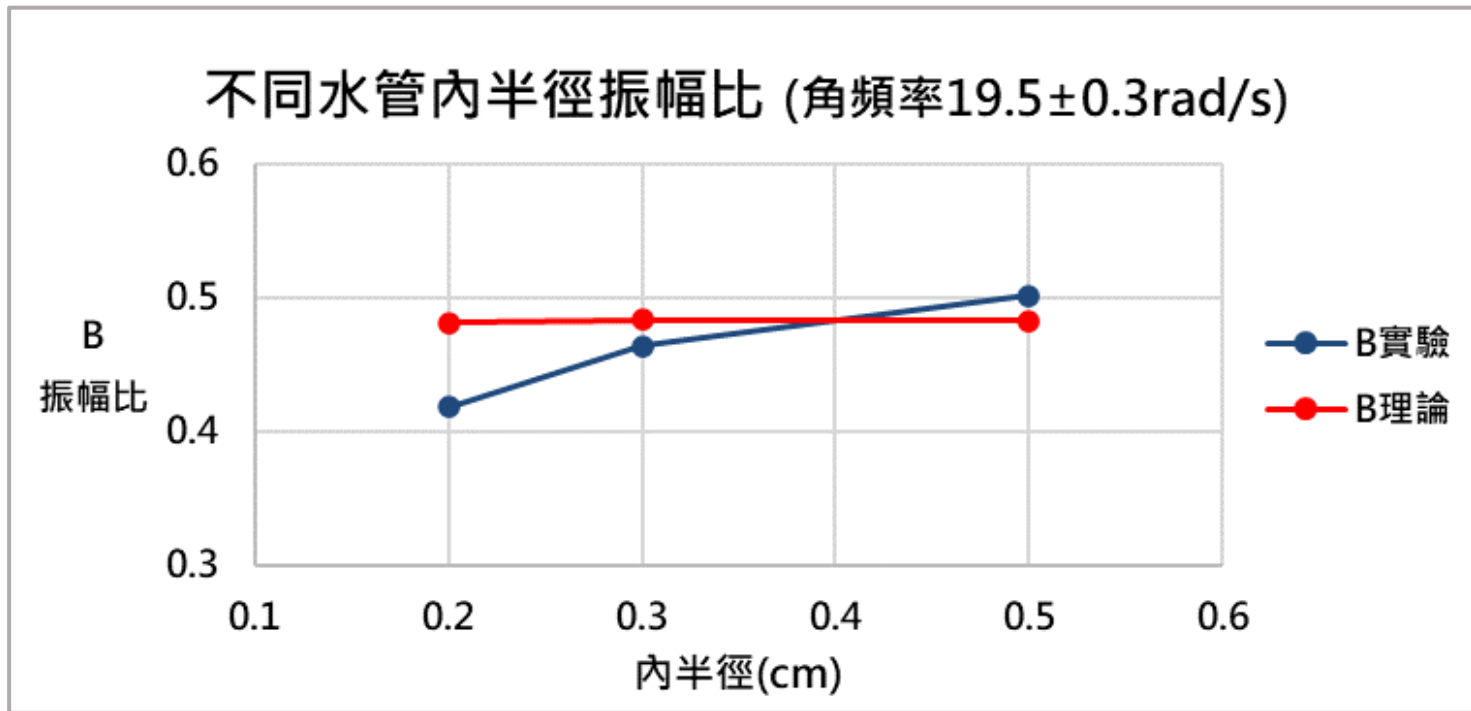
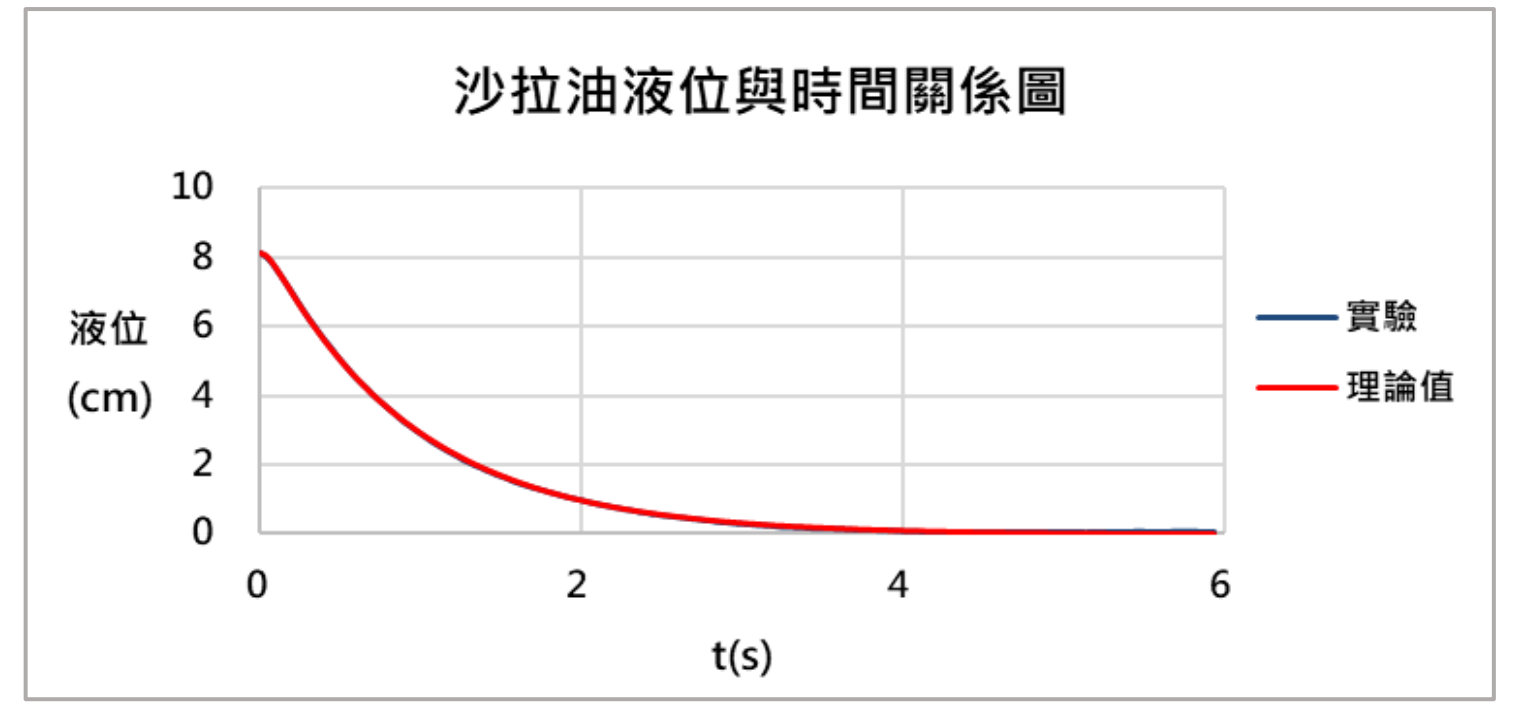
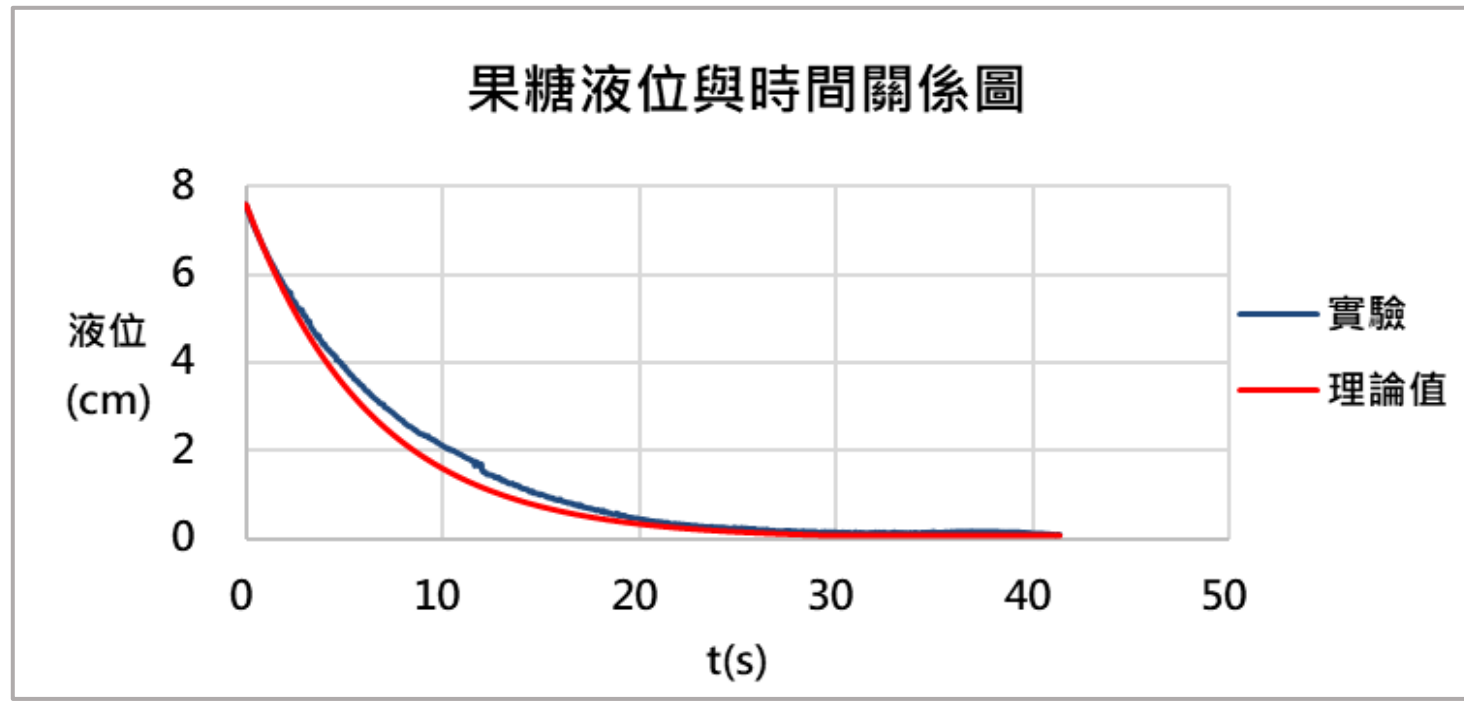
不同彎道半徑 實驗四	控制變因	數值
	密度	1000kg/m ³
	黏度	0.001pa·s
	平衡位置	20cm
	水管內半徑	0.5cm
	高度差	6cm



不同密度 實驗五	控制變因	數值
	食鹽水溶液與自來水	
	彎道半徑	18cm
	平衡位置	20cm
	水管內半徑	0.5cm
	高度差	6cm



不同液體 實驗六	控制變因	數值
	果糖與沙拉油	
	彎道半徑	18cm
	平衡位置	20cm
	水管內半徑	0.5cm
	高度差	6cm



柒、結論

- 自由振盪實驗中，實驗觀測到的波型衰減比理論推測的衰減還要猛烈。
- 自由振盪實驗中，就指數衰減率而言，只有隨水管內半徑和密度變化的趨勢與理論相符。
- 自由振盪實驗中，由實驗結果計算而得的振盪角頻率較理論推導出的振盪角頻率還大。
- 自由振盪實驗中，振盪角頻率隨各變因變化的趨勢與理論推導的結果一致。
- 振盪過程中可能有我們無法明確掌握的損失機制，例如和彎道半徑有關的二次流損失，及與高度差、平衡位置高度有關的未知損失項，其中二次流損失等未知的損失項且似乎會隨頻率增加而遞減，使頻率響應曲線在較高頻處與理論重合。
- 由兩種理論結果（有無考慮流場分佈的不均性）與實驗結果的相似程度來看，管內流場的分佈似乎較穩態管流均勻。
- 強迫振盪實驗中，在流速變化不明顯、振盪頻率高時，泊肅葉定律（Poiseuille's law）才適用於描述U型管中的能量損失。

捌、參考資料

- [1]黃啟晉 (2004)。調諧水柱消能系統之分析與試驗。國立交通大學土木工程系所：碩士論文。
- [2]陳友剛 (2009)。EXCEL的數理科技應用。台北：碁峰資訊股份有限公司。
- [3]Batchelor, G. K (2000)。An introduction to Fluid Dynamics, Cambridge University Press, Cambridge.
- [4]Bjorn Olav Thon (2014)。Friction Models for Oscillating Flow in a U-tube, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim.
- [5]Joseph Lagrange (1788)。Lagrangian mechanics. Retrieved from <https://reurl.cc/R459oe> (May 2, 2020)