# 中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

# 作品說明書

---

高級中等學校組　數學科

## 第三名

050415

## 圓例覺醒

學校名稱：國立臺灣師範大學附屬高級中學

| 作者： | 指導老師： |
| --- | --- |
| 高二 張竣為<br>高二 陳竹欣 | 周洺朱 |

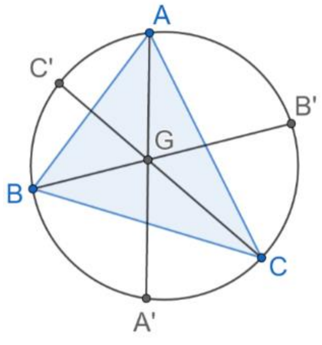
關鍵詞：三線性坐標、不等式、三角函數

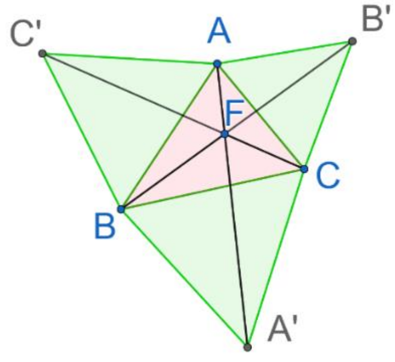
# 摘要

平面上，$P$點為$\triangle ABC$內部任意一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$這三個三角形的外接圓於$A'$、$B'$、$C'$。若$\triangle ABC$為銳角三角形，則$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\geq 8$，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形，此外，並以三角形的三內角來表示$P$點為費馬點、外心、內心、垂心、重心時的確切比值；接下來推廣至$n$維空間，當$P$為任意$n+1$單體$A_1A_2\ldots A_{n+1}$內任意一點，$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、⋯、$\overleftrightarrow{A_{n+1}P}$分別與$n+1$單體$P-A_2A_3\ldots A_{n+1}$、$P-A_1A_3\ldots A_{n+1}$、⋯、$P-A_1A_2\ldots A_n$的外接$n-1$維球面交於$A_1'$、$A_2'$、⋯、$A_{n+1}'$，滿足$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\geq n^{n+1}$，等號成立時若且唯若$\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=n$，$k=1,2,\ldots,n+1$，其中$n\geq 2$。再藉由任意點的結論，可以應用於直接生成或快速解出許多特殊類型的三角函數不等式。此外，從主要的不等式還可以得到$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k'}}=1$，此時$P$點為$n$維空間中任意一點，最後，我們把圓改為圓錐曲線，再進行線段比值的探討。

# 壹、研究動機

於 2017 年國際科展[1](石博允、錢昀，2017)提到「任意給定$\triangle ABC$與其外接圓$O$和重心$G$，若$\overleftrightarrow{AG}$、$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CG}$分別交$O$於$A'$、$B'$、$C'$，則$\frac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{GB'}}+\frac{\overline{CC'}}{\overline{GC'}}=6$」。讓我們很驚艷三角形的衍生線段有如此特殊的比值相加關係，恰巧當時數學課在介紹費馬點，費馬點、兩個頂點和衍生點有著四點共圓的關係，於是我們用 GGB 觀察，並更改比值為「相乘」關係，發現任意給定三內角都小於$120^\circ$的$\triangle ABC$，透過算幾不等式可得$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\geq 8$，這引起了我們很大的好奇，其他特殊點是否也有這個不等式。



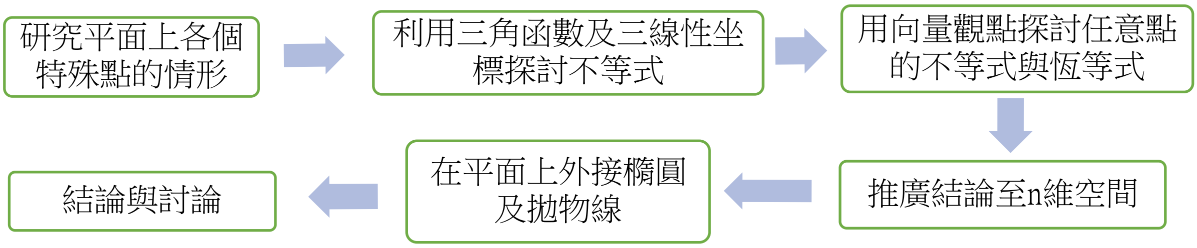



## 貳、研究目的

一、嘗試用多種方法來探討當三角形內的點為費馬點、外心、內心、垂心、重心等特殊點時之比值與極值為何？並將範圍延伸至任意點。

二、將二維延伸至三維、$n$ 維空間，並探討其特性。

三、找出其他特殊比值的極值，並證明之。

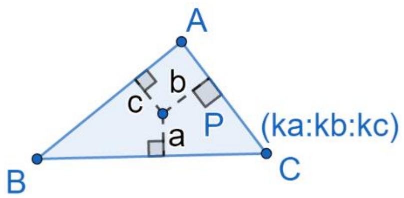



## 參、研究設備及器材

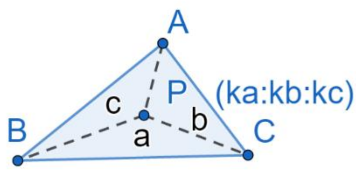
**一、研究設備**：紙、筆、電腦、Geogebra 繪圖軟體。

**二、定義與預備定理：**

<Definition 1>[2](趙文敏，1997)給定平面上任意$\triangle ABC$和一點$P$，若點$P$至$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$的有向距離分別為$a$、$b$和$c$，則對每個非零實數$k$，有序三實數$(ka:kb:kc)$稱為$P$對$\triangle ABC$的一組齊次三線性坐標。

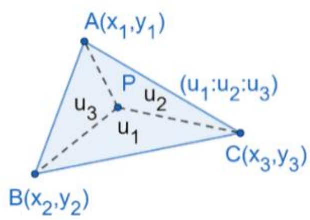



<Definition 2>[2](趙文敏) 給定平面上任意$\triangle ABC$和一點$P$，若$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$的有向面積分別為$a$、$b$和$c$，則對每個非零實數$k$，有序三實數$(ka:kb:kc)$稱為點$P$對$\triangle ABC$的一組齊次面積坐標。

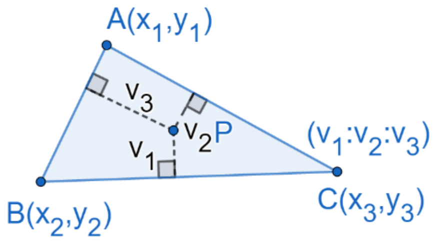



<Definition 3>令$\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}\in\mathbb{R}^n$，若$\overrightarrow{a}=k\cdot\overrightarrow{b}$，$k\in\mathbb{R}$，則定義$\dfrac{\overrightarrow{a}}{\overrightarrow{b}}\equiv k$。

<Lemma 1>[2](趙文敏)若$(u_1:u_2:u_3)$是點$P$對$\triangle ABC$的一組面積坐標，$A$、$B$、$C$的直角坐標分別為$(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$、$(x_3,y_3)$，則點$P$的直角坐標$(x,y)$可表示為$\left(\dfrac{u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3}{u_1+u_2+u_3},\dfrac{u_1y_1+u_2y_2+u_3y_3}{u_1+u_2+u_3}\right)$。



<Lemma 2>[2](趙文敏)若$(v_1:v_2:v_3)$是點$P$對$\triangle ABC$的一組三線性坐標，$A$、$B$、$C$的直角坐標分別為$(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$、$(x_3,y_3)$，$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=a:b:c$，則點$P$的直角坐標$(x,y)$可表示為$\left(\dfrac{av_1x_1+bv_2x_2+cv_3x_3}{av_1+bv_2+cv_3},\dfrac{av_1y_1+bv_2y_2+cv_3y_3}{av_1+bv_2+cv_3}\right)$。




<Lemma 3>[2](趙文敏)設$\triangle ABC$、$P$、$Q$、$R$皆在同一平面上且$\overrightarrow{PR}=r\cdot\overrightarrow{RQ}$，若$P$、$Q$對$\triangle ABC$的規範化面積坐標為$(p_1:p_2:p_3)$、$(q_1:q_2:q_3)$，則$R$對$\triangle ABC$的規範化面積坐標為$\left(\dfrac{p_1+rq_1}{1+r}:\dfrac{p_2+rq_2}{1+r}:\dfrac{p_3+rq_3}{1+r}\right)$。

註：任選一點$P$對$\triangle ABC$的一組面積坐標為$(u_1:u_2:u_3)$，令$\lambda_i=\dfrac{u_i}{u_1+u_2+u_3},i=1,2,3$，則$(\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3)$是點$P$對$\triangle ABC$的規範化面積坐標，且$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$。

<Lemma 4>[2](趙文敏)設$O(x_0,y_0)$為$\triangle ABC$的外接圓圓心，$A$、$B$、$C$的直角坐標分別為$(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$、$(x_3,y_3)$，$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=a:b:c$，若有一點$P$ $(x,y)$在外接圓上，且對$\triangle ABC$的面積坐標為$(u_1:u_2:u_3)$，則$a^2u_2u_3+b^2u_3u_1+c^2u_1u_2=0$。

<Lemma 5>

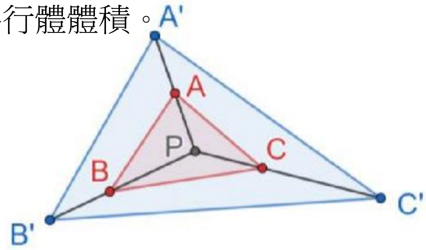
我們定義${}_a\triangle ABC$表示$\triangle ABC$的面積，$V_{A_1A_2\cdots A_{n+1}}$表示$A_1A_2\cdots A_{n+1}$在$\mathbb{R}^n$中的超體積。

(1) 對於$\triangle ABC$內部一點任意一點$P$，存在實數$l$、$m$、$n$使得$l\cdot\overrightarrow{PA}+m\cdot\overrightarrow{PB}+n\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$成立，其中$l:m:n={}_a\triangle BPC:{}_a\triangle APC:{}_a\triangle APB$。

(2) 在三維空間中，對於四面體$A_1A_2A_3A_4$內部任意一點$P$，存在實數$a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$使得$a_1\cdot\overrightarrow{PA_1}+a_2\cdot\overrightarrow{PA_2}+a_3\cdot\overrightarrow{PA_3}+a_4\cdot\overrightarrow{PA_4}=\overrightarrow{0}$成立，其中$a_1:a_2:a_3:a_4=V_{PA_2A_3A_4}:V_{PA_1A_3A_4}:V_{PA_1A_2A_4}:V_{PA_1A_2A_3}$。

(3) 在$\mathbb{R}^n$空間中，對於$n+1$單體$A_1A_2...A_{n+1}$內部任意一點$P$，存在實數$a_1$、…、$a_{n+1}$使得$a_1\cdot\overrightarrow{PA_1}+a_2\cdot\overrightarrow{PA_2}+...+a_{n+1}\cdot\overrightarrow{PA_{n+1}}=\overrightarrow{0}$成立，其中$a_1:a_2:...:a_{n+1}=V_{PA_2A_3...A_{n+1}}:V_{PA_1A_3...A_{n+1}}:...:V_{PA_1A_2...A_n}$。

符號定義：$|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{a_1}\\ \overrightarrow{a_2}\\ \vdots\\ \overrightarrow{a_n}\end{pmatrix}|$表示 $\overrightarrow{a_1}$ 、$\overrightarrow{a_2}$ 、⋯、$\overrightarrow{a_n}$ 所圍成的 $n$ 維平行體體積。




< proof of Lemma 5(1)>

設 $P$ 為 $\triangle A'B'C'$ 的重心，其中 $\overrightarrow{PA'}=l\cdot\overrightarrow{PA}$ ，$\overrightarrow{PB'}=m\cdot\overrightarrow{PB}$ ，$\overrightarrow{PC'}=n\cdot\overrightarrow{PC}$ ，

$\because \overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}=\overrightarrow{0}$ ，$\therefore l\cdot\overrightarrow{PA}+m\cdot\overrightarrow{PB}+n\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$ 。$\because {}_a\triangle B'PC'={}_a\triangle A'PC'={}_a\triangle A'PB'$ ，

$$\therefore \frac{{}_a\triangle PBC}{{}_a\triangle PB'C'}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\det|\begin{pmatrix}\overrightarrow{PB}\\ \overrightarrow{PC}\end{pmatrix}|}{\frac{1}{2}\cdot|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{PB'}\\ \overrightarrow{PC'}\end{pmatrix}|}=\frac{|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{PB}\\ \overrightarrow{PC}\end{pmatrix}|}{|\det\begin{pmatrix}m\cdot\overrightarrow{PB}\\ n\cdot\overrightarrow{PC}\end{pmatrix}|}=\frac{1}{|mn|}$$

，又 $P$ 在 $\triangle ABC$ 內部，$\frac{1}{|mn|}=\frac{1}{mn}$ ，

同理，$\frac{1}{ln}=\frac{{}_a\triangle PAC}{{}_a\triangle PA'C'}$ ，$\frac{1}{lm}=\frac{{}_a\triangle PAB}{{}_a\triangle PA'B'}$ ，故 $l:m:n=\frac{1}{mn}:\frac{1}{ln}:\frac{1}{lm}={}_a\triangle BPC:{}_a\triangle APC:{}_a\triangle APB$ 。#

< proof of Lemma 5(2)>

由於此處的證明和以下類似，故省略。

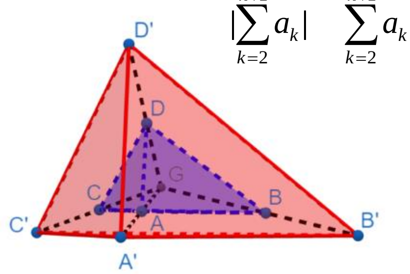
< proof of Lemma 5(3)>

設 $P$ 為 $n+1$ 單體 $A_1'A_2'\dots A_{n+1}'$ 的重心，其中 $a_k\cdot\overrightarrow{PA_k}=\overrightarrow{PA_k'}$ ，$\forall k\in\{1,2,\dots,n+1\}$ ，

$\because \overrightarrow{PA_1'}+\overrightarrow{PA_2'}+\dots+\overrightarrow{PA_{n+1}'}=\overrightarrow{0}$ ，$\therefore a_1\cdot\overrightarrow{PA_1}+a_2\cdot\overrightarrow{PA_2}+\dots+a_{n+1}\cdot\overrightarrow{PA_{n+1}}=\overrightarrow{0}$ 。因超體積 $V_{PA_2'A_3'\dots A_{n+1}'}=V_{PA_1'A_3'\dots A_{n+1}'}=\dots=V_{PA_1'A_2'\dots A_n'}$ ，

$$\frac{V_{PA_2A_3\dots A_{n+1}}}{V_{PA_2'A_3'\dots A_{n+1}'}}=\frac{\frac{1}{n}\cdot|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{PA_2}\\ \overrightarrow{PA_3}\\ \vdots\\ \overrightarrow{PA_{n+1}}\end{pmatrix}|}{\frac{1}{n}\cdot|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{PA_2'}\\ \overrightarrow{PA_3'}\\ \vdots\\ \overrightarrow{PA_{n+1}'}\end{pmatrix}|}=\frac{|\det\begin{pmatrix}\overrightarrow{PA_2}\\ \overrightarrow{PA_3}\\ \vdots\\ \overrightarrow{PA_{n+1}}\end{pmatrix}|}{|\det\begin{pmatrix}a_2\,\overrightarrow{PA_2}\\ a_3\,\overrightarrow{PA_3}\\ \vdots\\ a_{n+1}\,\overrightarrow{PA_{n+1}}\end{pmatrix}|}=\frac{1}{|\sum_{k=2}^{n+1}a_k|}$$

，因為 $P$ 在 $A_1A_2\dots A_{n+1}$ 內部，$\frac{1}{|\sum_{k=2}^{n+1}a_k|}=\frac{1}{\sum_{k=2}^{n+1}a_k}$




故 $a_1:a_2:\dots:a_{n+1}=V_{PA_2A_3\dots A_{n+1}}:V_{PA_1A_3\dots A_{n+1}}:\dots:V_{PA_1A_2\dots A_n}$ 。#

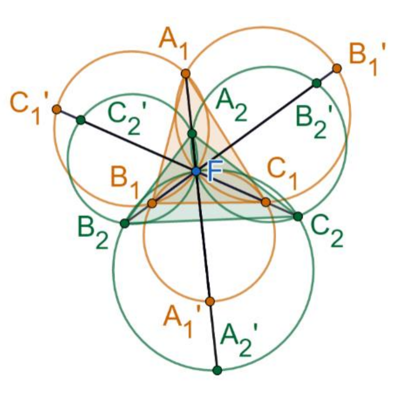
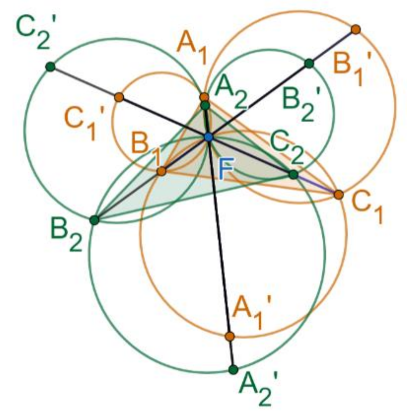
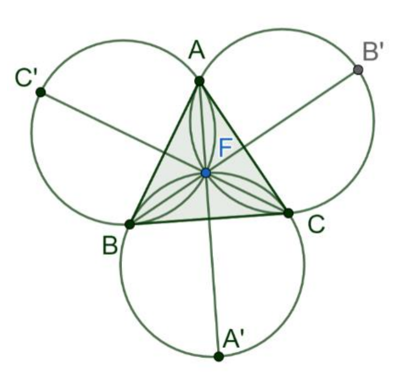
▲此圖以三維為例

# 肆、研究過程與方法

## 一、利用三角函數及三線性坐標探討 $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\geq 8$

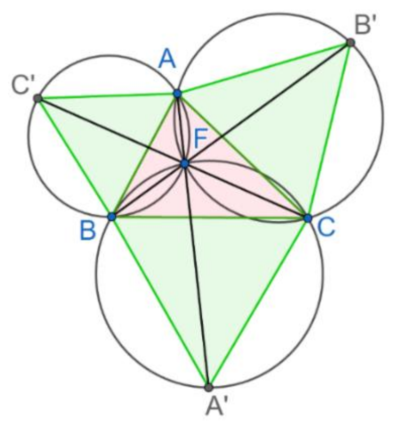
### (一) 費馬點

<GGB 測試結果>猜測：任意給定$\triangle ABC$滿足費馬點$F$在其內，則$\dfrac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\dfrac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\geq 8$。

| 銳角$\triangle ABC$，比值恆$\geq 8$。 | $90^\circ\leq\angle A<120^\circ$，比值恆$\geq 8$。 | 正三角形時等號成立。 |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\dfrac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\dfrac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\approx 8.53332\geq 8$<br>$\dfrac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\dfrac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\approx 10.11297\geq 8$ | $\dfrac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\dfrac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\approx 12.11885\geq 8$<br>$\dfrac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\dfrac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\approx 10.86134\geq 8$ | $\dfrac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\dfrac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}=8$ |

**<Theorem 1>**任意給定最大內角$\leq 120^\circ$的$\triangle ABC$，$F$為其費馬點，$A'$、$B'$、$C'$為以三邊向外做正三角形的頂點，滿足$\dfrac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\dfrac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\geq 8$，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形。

<proof>




$\because\ \overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}=\overline{AA'}=\overline{BB'}=\overline{CC'}$，

$\therefore$由算幾不等式得$\begin{cases}\overline{FA'}=\overline{FB}+\overline{FC}\geq 2\sqrt{\overline{FB}\cdot\overline{FC}}\\ \overline{FB'}=\overline{FC}+\overline{FA}\geq 2\sqrt{\overline{FC}\cdot\overline{FA}}\\ \overline{FC'}=\overline{FA}+\overline{FB}\geq 2\sqrt{\overline{FA}\cdot\overline{FB}}\end{cases}$，

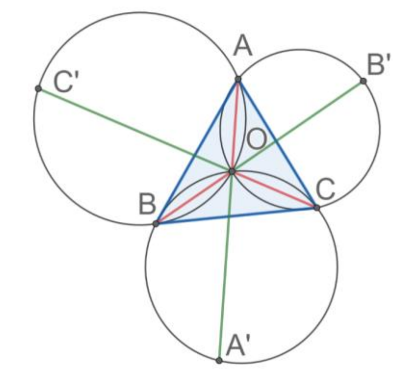
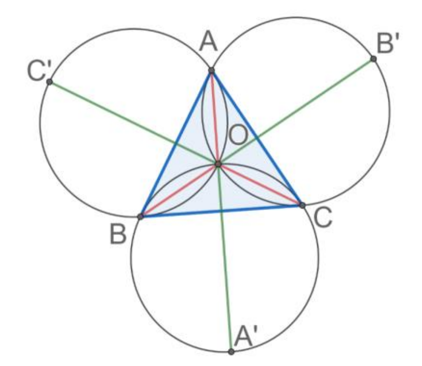
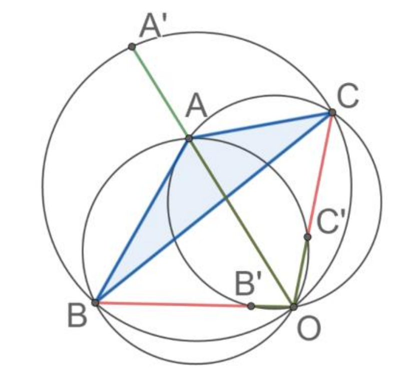
三式相乘得$\overline{FA'}\cdot\overline{FB'}\cdot\overline{FC'}\geq 8\cdot\sqrt{\overline{FA}^2\cdot\overline{FB}^2\cdot\overline{FC}^2}=8\cdot\overline{FA}\cdot\overline{FB}\cdot\overline{FC}$，

故$\dfrac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\dfrac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\geq 8$，且在等號成立時$\overline{FA}=\overline{FB}=\overline{FC}\Leftrightarrow\triangle ABC$為正三角形。#

## (二)外心

在討論完費馬點的比值之後，由於 $FBCA'$ 四點共圓，我們自然會想將費馬點轉換成外心，發現只有在 $\triangle ABC$ 為銳角三角形時才會成立。

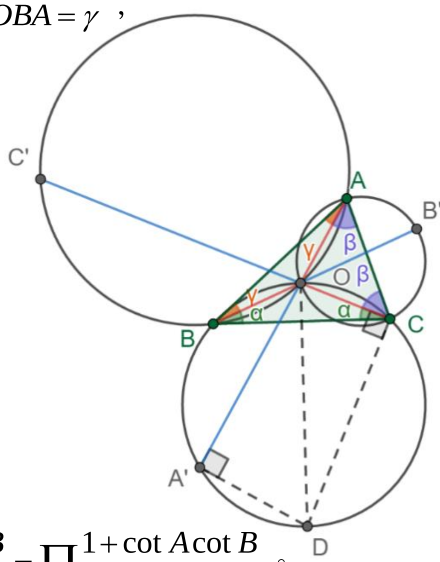
<GGB 測試結果>猜測：任意給定銳角 $\triangle ABC$ ，$O$ 為其外心，恆滿足 $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\ge 8$ 。

| 銳角 $\triangle ABC$ ，比值恆 $\ge 8$ 。 | 正三角形時等號成立。 | 鈍角 $\triangle ABC$ ，比值不恆 $\ge 8$ 。 |
|---|---|---|
|   |   |   |
| $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\approx 8.05229\ge 8$ | $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=8$ | $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\approx 0.11935<8$ |

<Theorem 2>任意給定銳角 $\triangle ABC$ ，$O$ 為其外心，$\overleftrightarrow{AO}$ 、$\overleftrightarrow{BO}$ 、$\overleftrightarrow{CO}$ 分別交 $\triangle BOC$ 、$\triangle AOC$ 、$\triangle AOB$ 的外接圓於 $A'$ 、$B'$ 、$C'$，滿足 $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\prod_{cyc}\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\ge 8$，等號成立時若且唯若 $\triangle ABC$ 為正三角形。

<proof>

$1^\circ$ 令 $\angle OBC=\angle OCB=\alpha$ ，$\angle OCA=\angle OAC=\beta$ ，$\angle OAB=\angle OBA=\gamma$ ，




$\because \overline{BC}\perp\overline{OD}$ ，$\therefore \begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=90^\circ\\ \alpha+\angle DOC=90^\circ\end{cases}\Rightarrow \angle BAC=\angle DOC$ ，

$$\overline{OA'}=\overline{OD}\times\cos\angle A'OD=R\cdot\frac{\cos\angle A'OD}{\cos\angle COD}=R\cdot\frac{\cos(\angle C-\angle B)}{\cos A}$$

$$=R\cdot\frac{\sin B\sin C+\cos B\cos C}{\sin B\sin C-\cos B\cos C}=R\cdot\frac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\ ,$$

同理，$\overline{OB'}=R\cdot\dfrac{1+\cot A\cot C}{1-\cot A\cot C}$ ，$\overline{OC'}=R\cdot\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}$ ，

故 $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\dfrac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\cdot\dfrac{1+\cot A\cot C}{1-\cot A\cot C}\cdot\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}=\prod_{cyc}\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}$ 。

$2^\circ$ 令 $x=\cot B\cot C$ ， $y=\cot A\cot C$ ， $z=\cot A\cot B$

$$\Rightarrow x+y+z=\cot C\left(\cot B+\cot A\right)+\cot A\cot B=-\cot\left(\angle A+\angle B\right)\left(\cot B+\cot A\right)+\cot A\cot B$$

$$=-\frac{\cot B\cot A-1}{\cot B+\cot A}\left(\cot B+\cot A\right)+\cot A\cot B=1\text{ ，}$$

$\because \triangle ABC$ 為銳角三角形，$\therefore x+y$ 、 $y+z$ 、 $z+x$ 大於 $0$ ，

$$\text{由算幾不等式得}\begin{cases}\overline{OA'}=\overline{OA}\cdot\dfrac{1+x}{1-x}=\overline{OA}\cdot\dfrac{(x+y)+(x+z)}{y+z}\geq\overline{OA}\cdot\dfrac{2\cdot\sqrt{(x+y)\cdot(x+z)}}{y+z}\\ \overline{OB'}=\overline{OB}\cdot\dfrac{1+y}{1-y}=\overline{OB}\cdot\dfrac{(y+x)+(y+z)}{x+z}\geq\overline{OB}\cdot\dfrac{2\cdot\sqrt{(y+x)\cdot(y+z)}}{x+z}\\ \overline{OC'}=\overline{OC}\cdot\dfrac{1+z}{1-z}=\overline{OC}\cdot\dfrac{(z+x)+(z+y)}{x+y}\geq\overline{OC}\cdot\dfrac{2\cdot\sqrt{(z+x)\cdot(z+y)}}{x+y}\end{cases}\text{ ，}$$

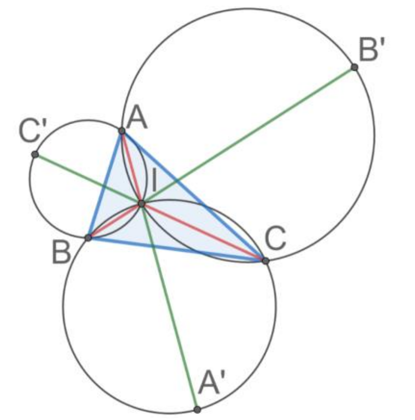
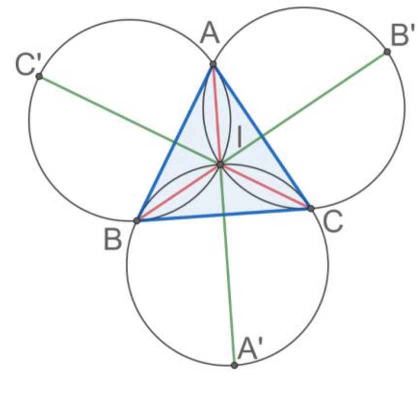
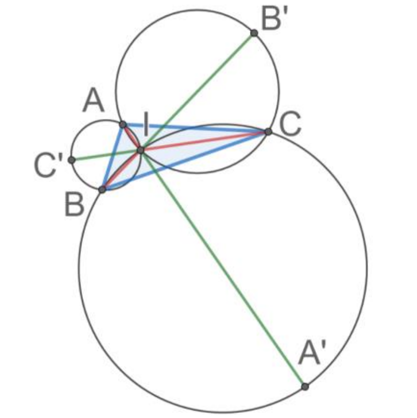
$$\text{故 }\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\geq\frac{8\cdot\sqrt{(x+y)^2\cdot(y+z)^2\cdot(z+x)^2}}{(x+y)\cdot(y+z)\cdot(z+x)}=8\text{ ，}$$

等號成立時 $x+y=y+z=z+x$ ， $x=y=z$ ， $\cot A=\cot B=\cot C$ ， $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$ 。

由 $1^\circ,2^\circ$ 得 $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\prod_{cyc}\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\geq 8$ ，且在等號成立時 $\triangle ABC$ 為正三角形。#

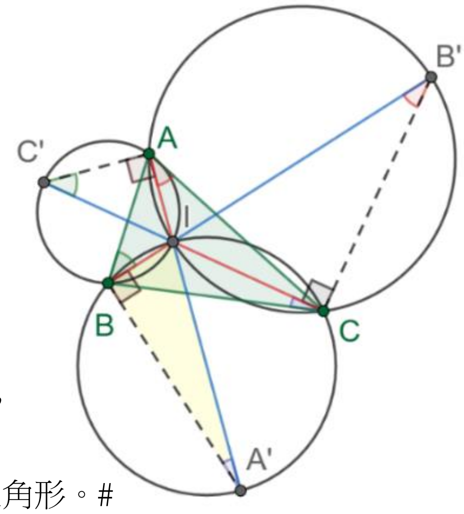
## (三)內心

<GGB 測試結果>猜測：任意給定 $\triangle ABC$ ， $I$ 為其內心，恆滿足 $\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\geq 8$ 。

<table>
<tr><td>銳角 $\triangle ABC$ ，比值恆 $\geq 8$ 。</td><td>正三角形，等號成立。</td><td>鈍角 $\triangle ABC$ ，比值恆 $\geq 8$ 。</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\approx 9.67233\geq 8$</td><td>$\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}=8$</td><td>$\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\approx 14.71705\geq 8$</td></tr>
</table>

<Theorem 3>任意給定$\triangle ABC$，$I$ 為其內心，$\overleftrightarrow{AI}$、$\overleftrightarrow{BI}$、$\overleftrightarrow{CI}$ 分別交$\triangle BIC$、$\triangle CIA$、$\triangle AIB$的外接圓於$A'$、$B'$、$C'$，滿足$\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}=\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\geq 8$，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形。

<proof>




$$\because\begin{cases}\overline{IB}=\overline{IA'}\cdot\sin\dfrac{C}{2}\\ \overline{IC}=\overline{IB'}\cdot\sin\dfrac{A}{2}\\ \overline{IA}=\overline{IC'}\cdot\sin\dfrac{B}{2}\end{cases}，\therefore\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}=\dfrac{1}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}，$$

由三角不等式得$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\leq\dfrac{1}{8}$，故$\dfrac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\dfrac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\dfrac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\geq 8$，

且在等號成立時，$\sin\dfrac{A}{2}=\sin\dfrac{B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\triangle ABC$為正三角形。#

## (四)垂心

我們透過 GGB 的觀察，發現當$\triangle ABC$為銳角三角形時，$H$ 為其垂心，恆滿足

$\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\geq 8$。因為$\overleftrightarrow{AP}\perp\overline{BC}$，所以使用三線性坐標(Definition 1)來證明。

<Theorem 4>任意給定銳角$\triangle ABC$，$H$ 為其垂心，$\overleftrightarrow{AH}$、$\overleftrightarrow{BH}$、$\overleftrightarrow{CH}$ 分別交$\triangle BHC$、$\triangle CHA$、$\triangle AHB$的外接圓於$A'$、$B'$、$C'$，滿足$\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=\prod_{cyc}\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\geq 8$，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形。

註：外心和垂心比值相等的幾何意義在 p.27 討論。

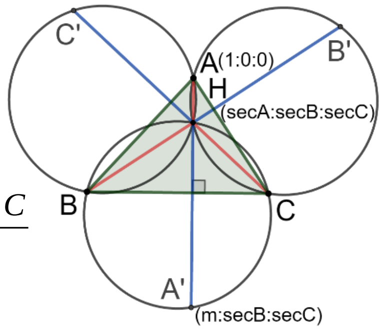
<proof>$1^{\circ}$令$A$、$B$、$C$的直角坐標為$(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$、$(x_3,y_3)$，

$A$、$H$、$A'$的三線性座標為$(1:0:0)$、$(\sec A:\sec B:\sec C)$、$(m:\sec B:\sec C)$，

$\triangle ABC$之三邊長為$a$、$b$、$c$，由 Lemma1 得$H$、$A'$的直角坐標為

$\left(\dfrac{ax_1\sec A+bx_2\sec B+cx_3\sec C}{a\sec A+b\sec B+c\sec C},\dfrac{ay_1\sec A+by_2\sec B+cy_3\sec C}{a\sec A+b\sec B+c\sec C}\right)$、

$\left(\dfrac{ax_1 m+bx_2\sec B+cx_3\sec C}{am+b\sec B+c\sec C},\dfrac{ay_1 m+by_2\sec B+cy_3\sec C}{am+b\sec B+c\sec C}\right)$，




$\because x_A-x_H=\dfrac{b\sec B\cdot(x_1-x_2)+c\sec C\cdot(x_1-x_3)}{a\sec A+b\sec B+c\sec C}$，

又 $x_H-x_{A'}=\dfrac{ax_1\sec A+bx_2\sec B+cx_3\sec C}{a\sec A+b\sec B+c\sec C}-\dfrac{ax_1 m+bx_2\sec B+cx_3\sec C}{am+b\sec B+c\sec C}$

$=\dfrac{\left[b\sec B\cdot(x_1-x_2)+c\sec C\cdot(x_1-x_3)\right]\cdot\left(a\sec A-am\right)}{\left(a\sec A+b\sec B+c\sec C\right)\cdot\left(am+b\sec B+c\sec C\right)}$，

$\therefore \overline{AH}\cdot\dfrac{\sec A\cdot a-m\cdot a}{m\cdot a+\sec B\cdot b+\sec C\cdot c}=\overline{A'H}$，

$\because \begin{cases}\overline{A'B}\cdot\sin\angle CBA'=\overline{AB}\cdot\sin B=-m\\ \overline{A'B}\cdot\sin\angle DBA'=\overline{AB}\cdot\sin(180^\circ-2\angle B)=\sec C\end{cases}$，$\therefore m=\dfrac{-\sin B\cdot\sec C}{\sin(180^\circ-2\angle B)}=\dfrac{-\sin B\cdot\sec C}{\sin 2B}=\dfrac{-\sec C}{2\cos B}$

$\Rightarrow \dfrac{a\sec A-am}{am+b\sec B+c\sec C}=\dfrac{\sin A\cdot(\sec A+\dfrac{\sec C}{2\cos B})}{-\dfrac{\sec C}{2\cos B}\cdot\sin A+b\sec B+c\sec C}$，

$\because -\dfrac{\sec C}{2\cos B}\cdot\sin A=-\dfrac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{2\cos B\cos C}=-\left(\dfrac{\tan B+\tan C}{2}\right)$，

$\therefore \dfrac{\sin A\cdot(\sec A+\dfrac{\sec C}{2\cos B})}{-\dfrac{\sec C}{2\cos B}\cdot\sin A+b\sec B+c\sec C}=\dfrac{\tan A+\dfrac{\tan B+\tan C}{2}}{\dfrac{\tan B+\tan C}{2}}$，

$\because \tan\left(\angle B+\angle C\right)=\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-\tan A$，$\tan B+\tan C=\tan A\cdot\left(\tan B\tan C-1\right)$，

$\therefore \dfrac{\tan A+\dfrac{\tan B+\tan C}{2}}{\dfrac{\tan B+\tan C}{2}}=\dfrac{\tan A\cdot\left(\tan B\tan C+1\right)}{\tan A\cdot\left(\tan B\tan C-1\right)}=\dfrac{\tan B\tan C+1}{\tan B\tan C-1}=\dfrac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}$，

故 $\overline{AH}\cdot\dfrac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}=\overline{A'H}$，同理 $\overline{BH}\cdot\dfrac{1+\cot A\cot C}{1-\cot A\cot C}=\overline{B'H}$，$\overline{CH}\cdot\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}=\overline{C'H}$，

得 $\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=\dfrac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\cdot\dfrac{1+\cot A\cot C}{1-\cot A\cot C}\cdot\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}=\prod_{cyc}\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}$。

$2^\circ$ 由於 $\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=\prod_{cyc}\dfrac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}=\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$，故 $\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\geq 8$。#

### (五)重心

我們透過 GGB 的觀察，發現任意給定$\triangle ABC$，$G$ 為其重心，恆滿足$\dfrac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\dfrac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\dfrac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}\geq 8$。證明時，我們嘗試了許多不同的方法，包括前面使用過的幾何觀點與三線性坐標，但都沒有好的結果，而重心有三塊面積相等的特性，最終使用面積坐標(Definition2)完成證明。

<Theorem 5>任意給定$\triangle ABC$，$G$ 為其重心，$\overleftrightarrow{AG}$、$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CG}$分別交$\triangle BGC$、$\triangle CGA$、$\triangle AGB$的外接圓於 $A'$、$B'$、$C'$，滿足

$$\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=\prod_{cyc}\frac{\left[\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2\cdot\overline{BC}^2+\overline{BC}\cdot\left(\overline{AB}\cdot\cos B+\overline{AC}\cdot\cos C\right)\right]}{\left(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A\right)}\geq 8$$

，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形。

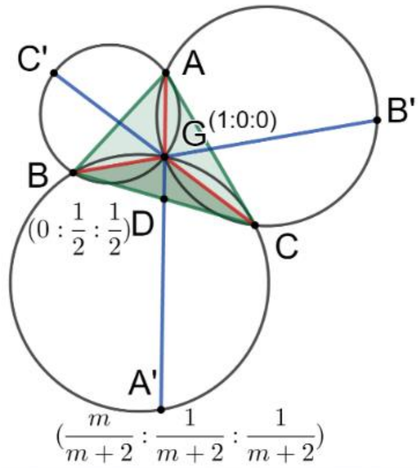
<proof>

$1^\circ$ 令$G$、$D$、$A'$對$\triangle GBC$的規範化面積坐標為$(1:0:0)$、$\left(0:\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{2}\right)$、$\left(\dfrac{m}{m+2}:\dfrac{1}{m+2}:\dfrac{1}{m+2}\right)$，

由 Lemma3，設$\dfrac{\overrightarrow{GD}}{\overrightarrow{DA'}}=p$，$0=\dfrac{1+p\cdot\dfrac{m}{m+2}}{1+p}$且$\dfrac{1}{2}=\dfrac{p\cdot\dfrac{1}{m+2}}{1+p}$，$p=\dfrac{\overline{GD}}{\overline{DA'}}=-\dfrac{m+2}{m}\Rightarrow\overline{GA'}=\dfrac{\overline{GA}}{m+2}$，

又由 Lemma4 得$\overline{BC}^2+\left(\overline{GB}^2+\overline{GC}^2\right)\cdot m=0$，$m=\dfrac{-\overline{BC}^2}{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}$

$$\Rightarrow\frac{1}{m+2}=\frac{1}{\dfrac{-\overline{BC}^2}{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}+2}=\frac{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}{2\cdot\overline{GB}^2+2\cdot\overline{GC}^2-\overline{BC}^2},$$




由中線定理得$\begin{cases}\overline{GB}^2+\overline{GC}^2=2\cdot\left(\overline{GD}^2+\overline{BD}^2\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\overline{GA}^2+\overline{BC}^2\right)\\ \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\cdot\left(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2\right)\end{cases}$，

$$\frac{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}{2\cdot\overline{GB}^2+2\cdot\overline{GC}^2-\overline{BC}^2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\overline{GA}^2+\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}^2}{\overline{GA}^2}=\frac{2\cdot\overline{GD}^2+2\cdot\overline{BD}^2}{\overline{GA}^2}=\frac{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GA}^2}\Rightarrow\overline{GA'}=\overline{GA}\cdot\frac{\overline{GA}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GA}^2},$$

同理，$\overline{GB'}=\overline{GB}\cdot\dfrac{\overline{GA}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GB}^2}$，$\overline{GC'}=\overline{GC}\cdot\dfrac{\overline{GA}^2+\overline{GB}^2}{\overline{GC}^2}$，

得 $\dfrac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\dfrac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\dfrac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=\dfrac{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GA}^2}\cdot\dfrac{\overline{GA}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GB}^2}\cdot\dfrac{\overline{GA}^2+\overline{GB}^2}{\overline{GC}^2}$ ，

$\because \overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ ，$\therefore \overline{GA}^2=\dfrac{1}{9}\cdot\left(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A\right)$ ，

同理，$\overline{GB}^2=\dfrac{1}{9}\cdot\left(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos B\right)$ ，$\overline{GC}^2=\dfrac{1}{9}\cdot\left(\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\cos C\right)$

$$\Rightarrow \frac{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GA}^2}\cdot\frac{\overline{GA}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GB}^2}\cdot\frac{\overline{GA}^2+\overline{GB}^2}{\overline{GC}^2}=\prod_{cyc}\frac{\left[\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2\cdot\overline{BC}^2+\overline{BC}\cdot\left(\overline{AB}\cdot\cos B+\overline{AC}\cdot\cos C\right)\right]}{\left(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A\right)}\text{。}$$

$2^\circ$ 由算幾不等式得

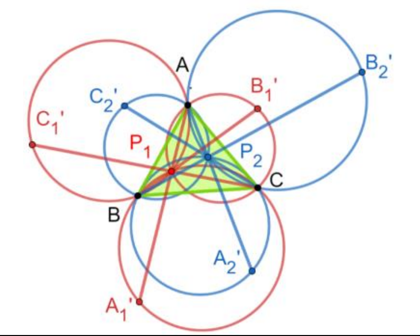
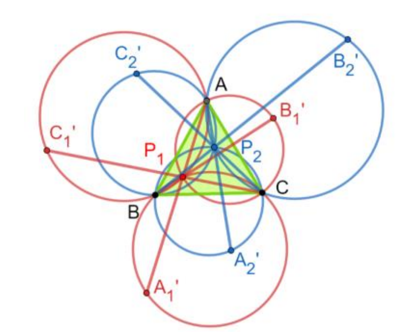
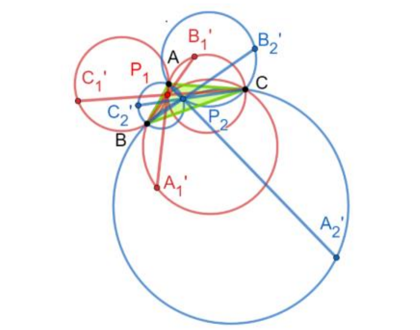
$$\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=\frac{\overline{GB}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GA}^2}\cdot\frac{\overline{GA}^2+\overline{GC}^2}{\overline{GB}^2}\cdot\frac{\overline{GA}^2+\overline{GB}^2}{\overline{GC}^2}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{\overline{GB}^2\cdot\overline{GC}^2}{\overline{GA}^4}}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{\overline{GA}^2\cdot\overline{GC}^2}{\overline{GB}^4}}\cdot 2\cdot\sqrt{\frac{\overline{GA}^2\cdot\overline{GB}^2}{\overline{GC}^4}}=8\text{，}$$

故 $\dfrac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\dfrac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\dfrac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}\geq 8$ ，且等號成立時滿足 $\overline{GA}=\overline{GB}=\overline{GC}\Leftrightarrow \triangle ABC$ 為正三角形。#

### (六)任意點

探討完特殊點的情況後，我們想把定理推廣到任意點在三角形內部的情形。證明時，因為圖形中沒有特殊的幾何性質，我們很難透過三角函數及解析幾何完成證明，再觀察到重心的三塊面積相同，自然而然地去觀察 $P$ 與三邊圍成的面積，最後引入了向量的證明手法完成證明。

<GGB 測試結果>猜測：任意給定 $\triangle ABC$ 及其內一點 $P$ ，恆滿足 $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\geq 8$ 。

| | | |
|---|---|---|
| 當 $\triangle ABC$ 是銳角三角形且 $P$ 在 $\triangle ABC$ 內時，性質成立。 | 當 $\triangle ABC$ 為正三角形且 $P$ 在 $\triangle ABC$ 內時，性質成立。 | 當 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形且 $P$ 在 $\triangle ABC$ 內時，性質成立。 |
|  |  |  |
| $\frac{\overline{P_1A_1'}}{\overline{P_1A}}\cdot\frac{\overline{P_1B_1'}}{\overline{P_1B}}\cdot\frac{\overline{P_1C_1'}}{\overline{P_1C}}\approx 8.14328\geq 2^3$ <br> $\frac{\overline{P_2A_2'}}{\overline{P_2A}}\cdot\frac{\overline{P_2B_2'}}{\overline{P_2B}}\cdot\frac{\overline{P_2C_2'}}{\overline{P_2C}}\approx 8.06391\geq 2^3$ | $\frac{\overline{P_1A_1'}}{\overline{P_1A}}\cdot\frac{\overline{P_1B_1'}}{\overline{P_1B}}\cdot\frac{\overline{P_1C_1'}}{\overline{P_1C}}\approx 8.50781\geq 2^3$ <br> $\frac{\overline{P_2A_2'}}{\overline{P_2A}}\cdot\frac{\overline{P_2B_2'}}{\overline{P_2B}}\cdot\frac{\overline{P_2C_2'}}{\overline{P_2C}}\approx 8.08883\geq 2^3$ | $\frac{\overline{P_1A_1'}}{\overline{P_1A}}\cdot\frac{\overline{P_1B_1'}}{\overline{P_1B}}\cdot\frac{\overline{P_1C_1'}}{\overline{P_1C}}\approx 13.07403\geq 2^3$ <br> $\frac{\overline{P_2A_2'}}{\overline{P_2A}}\cdot\frac{\overline{P_2B_2'}}{\overline{P_2B}}\cdot\frac{\overline{P_2C_2'}}{\overline{P_2C}}\approx 15.50069\geq 2^3$ |

<Theorem 6>任意給定三角形$\triangle ABC$，$P$為其內任意一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$的外接圓於$A'$、$B'$、$C'$，則$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\geq 8$，且當等號成立時若且唯若$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=2$。

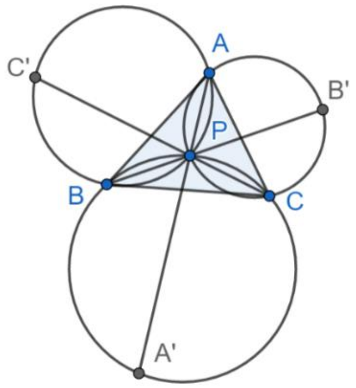
<proof> 由 Lemma5(1)得知對於$\triangle ABC$內部一點任意一點$P$，存在實數$l$、$m$、$n$使得

$l\cdot\overrightarrow{PA}+m\cdot\overrightarrow{PB}+n\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$ 成立，其中$l:m:n={}_a\triangle BPC:{}_a\triangle APC:{}_a\triangle APB$。

令$\overrightarrow{AP}=\lambda_A\cdot\overrightarrow{PA'}$，則$-\lambda_A l\cdot\overrightarrow{PA'}+m\cdot\overrightarrow{PB}+n\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow -\lambda_A l\cdot\overrightarrow{OA'}+m\cdot\overrightarrow{OB}+n\cdot\overrightarrow{OC}=\left(-\lambda_A l+m+n\right)\cdot\overrightarrow{OP}$，$O$、$R$分別為$\triangle BPC$的外接圓圓心、半徑，

$$\because\begin{cases}-\lambda_A l\cdot\left|\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OP}\right|^2=-\lambda_A l\cdot\overline{OA'}^2-\lambda_A l\cdot\overline{OP}^2+2\lambda_A l\cdot\left(\overrightarrow{OA'}\bullet\overrightarrow{OP}\right)\ldots(1)\\ m\cdot\left|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}\right|^2=m\cdot\overline{OB}^2+m\cdot\overline{OP}^2-2m\cdot\left(\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{OP}\right)\ldots(2)\\ n\cdot\left|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}\right|^2=n\cdot\overline{OC}^2+n\cdot\overline{OP}^2-2n\cdot\left(\overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{OP}\right)\ldots(3)\end{cases}，$$




由$(1)+(2)+(3)$得

$-\lambda_A l\cdot\overline{PA'}^2+m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2$

$=-\lambda_A l\cdot\overline{OA'}^2+m\cdot\overline{OB}^2+n\cdot\overline{OC}^2+\overline{OP}^2\cdot\left(-\lambda_A l+m+n\right)-2\cdot\overrightarrow{OP}\bullet\left(-\lambda_A l\cdot\overrightarrow{OA'}+m\cdot\overrightarrow{OB}+n\cdot\overrightarrow{OC}\right)$

$=R^2\cdot\left(-\lambda_A l+m+n\right)+R^2\cdot\left(-\lambda_A l+m+n\right)-2R^2\cdot\left(-\lambda_A l+m+n\right)=0$，

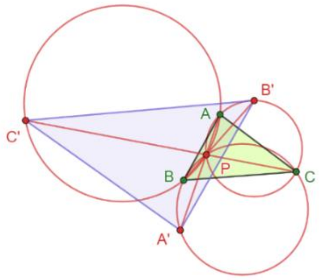
$\therefore \lambda_A=\dfrac{m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}{l\cdot\overline{PA'}^2}\Rightarrow\dfrac{1}{\lambda_A}=\dfrac{m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}{l\cdot\overline{PA}^2}\geq 2\cdot\sqrt{\dfrac{m\cdot\overline{PB}^2\cdot n\cdot\overline{PC}^2}{l^2\cdot\overline{PA}^4}}$，

同理，$\dfrac{1}{\lambda_B}\geq 2\cdot\sqrt{\dfrac{l\cdot\overline{PA}^2\cdot n\cdot\overline{PC}^2}{m^2\cdot\overline{PB}^4}}$，$\dfrac{1}{\lambda_C}\geq 2\cdot\sqrt{\dfrac{l\cdot\overline{PA}^2\cdot m\cdot\overline{PB}^2}{n^2\cdot\overline{PC}^4}}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{\lambda_A}\cdot\dfrac{1}{\lambda_B}\cdot\dfrac{1}{\lambda_C}\geq 8$，$\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\geq 8$，

且當等號成立時$l\cdot\overline{PA}^2=m\cdot\overline{PB}^2=n\cdot\overline{PC}^2\Rightarrow\lambda_A=\lambda_B=\lambda_C=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=2$。#

討論 1 $\triangle ABC$ 中，$P$ 為其內一點滿足 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=8$，則下列兩個性質必成立。




(1) $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 且 $\overline{AB}//\overline{A'B'}$、$\overline{BC}//\overline{B'C'}$、$\overline{AC}//\overline{A'C'}$。

(2) $\overline{PA}\sin\angle BPC=\overline{PB}\sin\angle APC=\overline{PC}\sin\angle APB$。

<proof>

(1) $\because \frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}=2$，又 $\because \angle APB=\angle A'PB'$ (對頂角) $\therefore \triangle APB \sim \triangle A'PB'$ (SAS 相似)

$\Rightarrow \overline{A'B'}=2\overline{AB}$ 且 $\overline{AB}//\overline{A'B'}$，同理，$\overline{B'C'}=2\overline{BC}$，$\overline{A'C'}=2\overline{AC}$，

得 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ (SSS 相似)且 $\overline{AB}//\overline{A'B'}$、$\overline{BC}//\overline{B'C'}$、$\overline{AC}//\overline{A'C'}$。#

(2)由 $l\cdot\overline{PA}^2=m\cdot\overline{PB}^2=n\cdot\overline{PC}^2$，

得 $\overline{PA}^2\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}\sin\angle BPC=\overline{PA}\cdot\overline{PB}^2\cdot\overline{PC}\sin\angle APC=\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}^2\sin\angle APB$，

$\therefore \overline{PA}\sin\angle BPC=\overline{PB}\sin\angle APC=\overline{PC}\sin\angle APB$。#

討論 2 僅當 $\triangle ABC$ 為正三角形且 $P$ 在四心共點的位置時，$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=8$。也就是說，當 $\triangle ABC$ 不為正三角形或 $P$ 不在正三角形四心共點的位置時，$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}>8$。

<說明>由於 $P$ 是 $\triangle ABC$ 內任意一點，所以也須滿足特殊點的情況，而當 $P$ 為特殊點時，等式成立的條件為 $\triangle ABC$ 是正三角形，故 $\triangle ABC$ 必為正三角形，$P$ 在四心共點的位置。#

討論 3 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}$、$\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}$、$\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}$ 三段比值不會同時大於 2。

<proof>

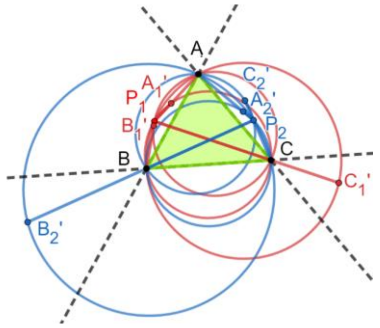
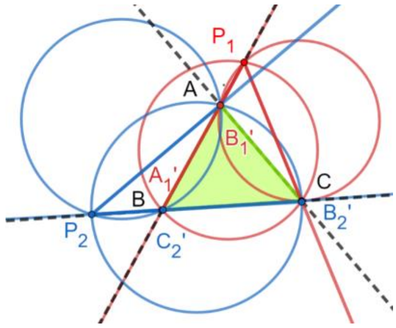
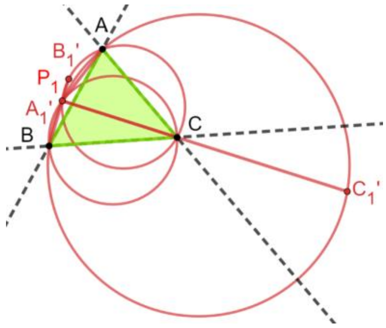
由任意點結論，設 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\frac{m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}{l\cdot\overline{PA}^2}>2$，$m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2>2l\cdot\overline{PA}^2$...(1)，

同理，$l\cdot\overline{PA}^2+n\cdot\overline{PC}^2>2m\cdot\overline{PB}^2$...(2)，$l\cdot\overline{PA}^2+m\cdot\overline{PB}^2>2n\cdot\overline{PC}^2$...(3)，

由於三式相加後顯然矛盾，故三段比值不會同時大於 2。#

$\boxed{\text{討論 4}}$ $P$ 點在三角形外部時，不會恆滿足 $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\geq 8$。

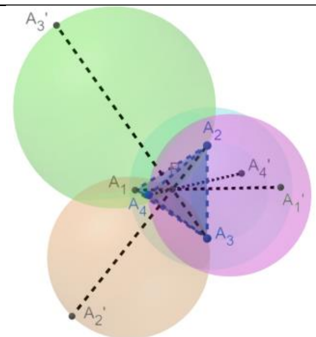
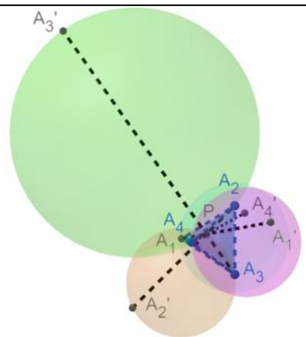
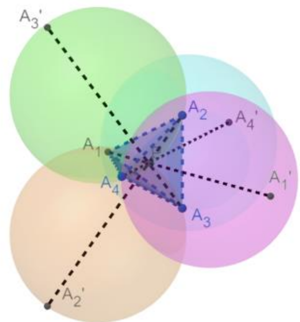
由 GGB 的觀察，當 $P$ 點在三角形外部時，比值可以為任意非負實數。

| $P$ 與 $A'$、$B'$、$C'$ 其中一點很靠近時，比值趨近於 0。 | $P$ 與 $\triangle ABC$ 三邊的直線非常靠近時，比值趨近於 $\infty$。 | $P$ 與 $A'$、$B'$、$C'$ 其中一點重合，比值等於 0。 |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\dfrac{\overline{P_1A_1'}}{\overline{P_1A}}\cdot\dfrac{\overline{P_1B_1'}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{P_1C_1'}}{\overline{P_1C}}\approx 0.05579$ <br> $\dfrac{\overline{P_2A_2'}}{\overline{P_2A}}\cdot\dfrac{\overline{P_2B_2'}}{\overline{P_2B}}\cdot\dfrac{\overline{P_2C_2'}}{\overline{P_2C}}\approx 0.19506$ | $\dfrac{\overline{P_1A_1'}}{\overline{P_1A}}\cdot\dfrac{\overline{P_1B_1'}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{P_1C_1'}}{\overline{P_1C}}\approx 334.58021$ <br> $\dfrac{\overline{P_2A_2'}}{\overline{P_2A}}\cdot\dfrac{\overline{P_2B_2'}}{\overline{P_2B}}\cdot\dfrac{\overline{P_2C_2'}}{\overline{P_2C}}\approx 108.32088$ | $\dfrac{\overline{P_1A_1'}}{\overline{P_1A}}\cdot\dfrac{\overline{P_1B_1'}}{\overline{P_1B}}\cdot\dfrac{\overline{P_1C_1'}}{\overline{P_1C}}=0$ |

## 二、在三維、$n$ 維空間中探討線段比值關係

我們想將任意點結論推廣至三維空間，把三角形和圓分別換成四面體和球。

<GGB 測試結果>猜測：當 $P$ 在四面體 $A_1A_2A_3A_4$ 內，滿足 $\prod_{k=1}^{4}\dfrac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\geq 81$。

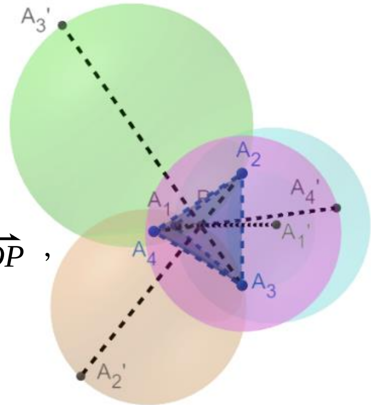
| 測試一 | 測試二 | 正四面體 $A_1A_2A_3A_4$，$P$ 為四心 |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\prod_{k=1}^{4}\dfrac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\approx 88.08>81$ | $\prod_{k=1}^{4}\dfrac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\approx 108.76>81$ | $\prod_{k=1}^{4}\dfrac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=81$ |

<Theorem 7>在空間中，任意給定四面體 $A_1A_2A_3A_4$，$P$ 為其內部任意一點，$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\overleftrightarrow{A_3P}$、$\overleftrightarrow{A_4P}$ 分別與四面體 $P-A_2A_3A_4$、$P-A_1A_3A_4$、$P-A_1A_2A_4$、$P-A_1A_2A_3$ 的外接球交於 $A_1'$、$A_2'$、$A_3'$、$A_4'$，滿足 $\prod_{k=1}^{4}\dfrac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\geq 81$，且當等號成立時若且唯若 $\dfrac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=3$，$\forall k\in\{1,2,3,4\}$。

<proof>

由 Lemma 5(2)得知對於四面體 $A_1A_2A_3A_4$ 內部任意一點 $P$ ，存在實數 $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ 、 $a_4$ 使得

$a_1\cdot\overrightarrow{PA_1}+a_2\cdot\overrightarrow{PA_2}+a_3\cdot\overrightarrow{PA_3}+a_4\cdot\overrightarrow{PA_4}=\overrightarrow{0}$ 成立，其中 $a_1:a_2:a_3:a_4=V_{PA_2A_3A_4}:V_{PA_1A_3A_4}:V_{PA_1A_2A_4}:V_{PA_1A_2A_3}$ 。




令 $\overrightarrow{A_1P}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{PA_1}'$ ，

則 $-\lambda_1a_1\cdot\overrightarrow{PA_1}'+a_2\cdot\overrightarrow{PA_2}+a_3\cdot\overrightarrow{PA_3}+a_4\cdot\overrightarrow{PA_4}=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow -\lambda_1a_1\cdot\overrightarrow{OA_1}'+a_2\cdot\overrightarrow{OA_2}+a_3\cdot\overrightarrow{OA_3}+a_4\cdot\overrightarrow{OA_4}=\left(-\lambda_1\cdot a_1+a_2+a_3+a_4\right)\cdot\overrightarrow{OP}$ ，

$O$ 、 $R$ 分別為四面體 $P-A_2A_3A_4$ 的外接球球心、半徑，

$$\because\begin{cases}-\lambda_1a_1\cdot\left|\overrightarrow{OA_1}'-\overrightarrow{OP}\right|^2=-\lambda_1a_1\cdot\overline{OA_1'}^2-\lambda_1a_1\cdot\overline{OP}^2+2\lambda_1a_1\cdot\left(\overrightarrow{OA_1}'\bullet\overrightarrow{OP}\right)\ldots(1)\\ \sum_{k=2}^{4}\left(a_k\cdot\left|\overrightarrow{OA_k}-\overrightarrow{OP}\right|^2\right)=\sum_{k=2}^{4}\left(a_k\cdot\overline{OA_k}^2+a_k\cdot\overline{OP}^2-2a_k\cdot\left(\overrightarrow{OA_k}\bullet\overrightarrow{OP}\right)\right)\ldots(2)\end{cases},$$

由 $(1)+(2)$ 得 $-\lambda_1a_1\cdot\overline{PA_1'}^2+\sum_{k=2}^{4}a_k\cdot\overline{PA_k}^2$

$$=-\lambda_1a_1\cdot\overline{OA_1'}^2+\left(\sum_{k=2}^{4}a_k\cdot\overline{OA_k}^2\right)+\overline{OP}^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{4}a_i\right)-2\cdot\overrightarrow{OP}\bullet\left(-\lambda_1a_1\cdot\overrightarrow{OA_1}'+\left(\sum_{k=2}^{4}a_k\cdot\overrightarrow{OA_k}\right)\right)$$

$$=R^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{4}a_i\right)+R^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{4}a_i\right)-2\cdot R^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{4}a_i\right)=0\ ，$$

$$\therefore\lambda_1=\frac{\sum_{i=2}^{4}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1\cdot\overline{PA_1'}^2}\Rightarrow\frac{1}{\lambda_1}=\frac{\sum_{i=2}^{4}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1\cdot\overline{PA_1}^2}\ge3\cdot\sqrt[3]{\frac{\prod_{i=2}^{4}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1^3\cdot\overline{PA_1}^6}}=3\cdot\sqrt[3]{\frac{\prod_{i=1}^{4}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1^4\cdot\overline{PA_1}^8}}\ ,$$

同理， $\frac{1}{\lambda_k}\ge3\cdot\sqrt[3]{\frac{\prod_{i=1}^{4}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_k^4\cdot\overline{PA_k}^8}}$ ，得 $\prod_{k=1}^{4}\frac{1}{\lambda_k}\ge81\Leftrightarrow\prod_{k=1}^{4}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\ge81$ ，

且當等號成立時， $a_k\cdot\overline{PA_k}^2$ 為定值 $\Rightarrow\lambda_k=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=3$ ， $\forall k\in\{1,2,3,4\}$ ，故得證。#

$\boxed{推廣}$由二維平面以及三維空間的結論，我們想推廣至 $n$ 維空間，並推論 $\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\geq n^{n+1}$ 。

<Corollary 1>在 $\mathbb{R}^n$ 空間中，任意給定 $n+1$ 單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ ，$P$ 為其內部任意一點，$\overleftrightarrow{A_1P}$ 、$\overleftrightarrow{A_2P}$、…、$\overleftrightarrow{A_{n+1}P}$ 分別與 $n+1$ 單體 $P-A_2A_3...A_{n+1}$、$P-A_1A_3...A_{n+1}$、…、$P-A_1A_2...A_n$ 的外接 $n-1$ 維球面交於 $A_1'$ 、 $A_2'$ 、… 、 $A_{n+1}'$，滿足 $\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\geq n^{n+1}$ ，等號成立時若且唯若 $\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=n$ ，$\forall k\in\{1,2,...,n+1\}$ 。

<proof> 由 Lemma 5(3)得知對於 $n+1$ 單體 $A_1A_2...A_{n+1}$ 內部任意一點 $P$ ，存在實數 $a_1$ 、… 、 $a_{n+1}$ 使得 $a_1\cdot\overrightarrow{PA_1}+a_2\cdot\overrightarrow{PA_2}+...+a_{n+1}\cdot\overrightarrow{PA_{n+1}}=\overrightarrow{0}$ 成立，其中 $a_1:a_2:...:a_{n+1}=V_{PA_2A_3...A_{n+1}}:V_{PA_1A_3...A_{n+1}}:...:V_{PA_1A_2...A_n}$ 。

令 $\overrightarrow{A_1P}=\lambda_1\cdot\overrightarrow{PA_1'}$ ，則 $-\lambda_1a_1\cdot\overrightarrow{PA_1'}+\left(\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overrightarrow{PA_i}\right)=\overrightarrow{0}\Rightarrow-\lambda_1a_1\cdot\overrightarrow{OA_1'}+\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overrightarrow{OA_i}=\left(-\lambda_1\cdot a_1+\sum_{i=2}^{n+1}a_i\right)\cdot\overrightarrow{OP}$ ，

$O$ 、 $R$ 分別為 $n+1$ 單體 $P-A_2A_3...A_{n+1}$ 的外接 $n$ 維球體的球心、半徑，

$$\because\begin{cases}-\lambda_1a_1\cdot\left|\overrightarrow{OA_1'}-\overrightarrow{OP}\right|^2=-\lambda_1a_1\cdot\overline{OA_1'}^2-\lambda_1a_1\cdot\overline{OP}^2+2\lambda_1a_1\cdot\left(\overrightarrow{OA_1'}\bullet\overrightarrow{OP}\right)...(1)\\ \sum_{i=2}^{n+1}\left(a_i\cdot\left|\overrightarrow{OA_i}-\overrightarrow{OP}\right|^2\right)=\sum_{i=2}^{n+1}\left(a_i\cdot\overline{OA_i}^2+a_i\cdot\overline{OP}^2-2a_i\cdot\left(\overrightarrow{OA_i}\bullet\overrightarrow{OP}\right)\right)...(2)\end{cases},$$

由 $(1)+(2)$ 得 $-\lambda_1a_1\cdot\overline{PA_1'}^2+\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2$

$$=-\lambda_1a_1\cdot\overline{OA_1'}^2+\left(\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overline{OA_i}^2\right)+\overline{OP}^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{n+1}a_i\right)-2\cdot\overrightarrow{OP}\bullet\left(-\lambda_1a_1\cdot\overrightarrow{OA_1'}+\left(\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overrightarrow{OA_i}\right)\right)$$

$$=R^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{n+1}a_i\right)+R^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{n+1}a_i\right)-2\cdot R^2\cdot\left(-\lambda_1a_1+\sum_{i=2}^{n+1}a_i\right)=0,$$

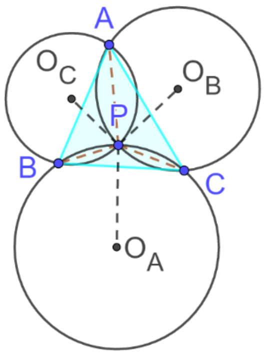
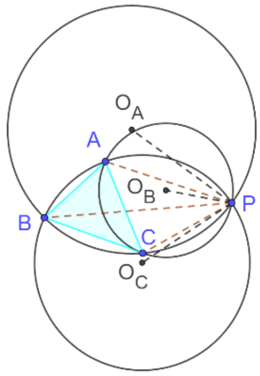
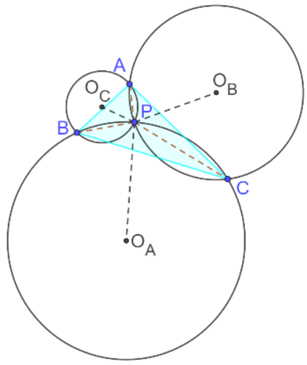
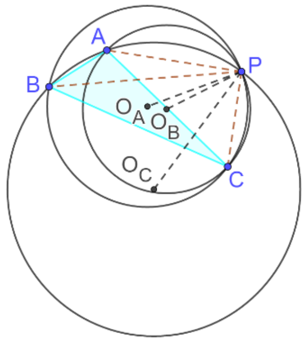
$$\therefore\lambda_1=\frac{\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1\cdot\overline{PA_1'}^2}\Rightarrow\frac{1}{\lambda_1}=\frac{\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1\cdot\overline{PA_1}^2}\geq n\cdot\sqrt[n]{\frac{\prod_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1^{\,n}\cdot\overline{PA_1}^{2n}}}=n\cdot\sqrt[n]{\frac{\prod_{i=1}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1^{\,n+1}\cdot\overline{PA_1}^{2n+2}}},$$

同理，$\frac{1}{\lambda_k}\geq n\cdot\sqrt[n]{\frac{\prod_{i=1}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_k^{\,n+1}\cdot\overline{PA_k}^{2n+2}}}\Rightarrow\prod_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\lambda_k}\geq n^{n+1}$ ，$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\geq n^{n+1}$ ，

當等號成立時，$a_k\cdot\overline{PA_k}^2$ 為定值 $\Rightarrow\lambda_k=\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=n$ ，$\forall k\in\{1,2,...,n+1\}$ 。#

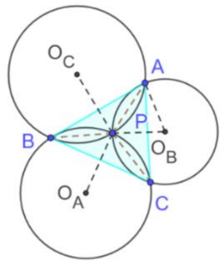
## 三、利用三角函數探討 $\frac{r_A}{PA}\cdot\frac{r_B}{PB}\cdot\frac{r_C}{PC}\geq 1$

<GGB 測試結果>猜測：任意給定$\triangle ABC$及一點$P$，$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$的外接圓半徑分別為$r_A$、$r_B$、$r_C$，恆滿足$\frac{r_A}{PA}\cdot\frac{r_B}{PB}\cdot\frac{r_C}{PC}\geq 1$。

| 任意銳角$\triangle ABC$，<br>$P$在$\triangle ABC$內。 | 任意銳角$\triangle ABC$，<br>$P$在$\triangle ABC$外。 | 任意鈍角$\triangle ABC$，<br>$P$在$\triangle ABC$內。 | 任意鈍角$\triangle ABC$，<br>$P$在$\triangle ABC$外。 |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| $\frac{r_A}{PA}\cdot\frac{r_B}{PB}\cdot\frac{r_C}{PC}\approx 1.23>1$ | $\frac{r_A}{PA}\cdot\frac{r_B}{PB}\cdot\frac{r_C}{PC}\approx 0.35<1$ | $\frac{r_A}{PA}\cdot\frac{r_B}{PB}\cdot\frac{r_C}{PC}\approx 1.52>1$ | $\frac{r_A}{PA}\cdot\frac{r_B}{PB}\cdot\frac{r_C}{PC}\approx 0.49<1$ |

<Theorem 8>任意給定$\triangle ABC$及一點$P$，$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$的外接圓半徑分別為$r_A$、$r_B$、$r_C$，滿足$\frac{r_A}{PA}\cdot\frac{r_B}{PB}\cdot\frac{r_C}{PC}\geq 1$，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形，$P$為其內心。

<proof>




$$\because \frac{r_B}{\sin\angle PAO_B}=\frac{\overline{AP}}{\sin\angle AO_BP}，\therefore \frac{r_B}{\overline{AP}}=\frac{1}{2\sin\angle PCA}，$$

同理，$\frac{r_C}{\overline{BP}}=\frac{1}{2\sin\angle PAB}$，$\frac{r_A}{\overline{CP}}=\frac{1}{2\sin\angle PBC}$，

$$\because \frac{r_B}{\sin\angle PCO_B}=\frac{\overline{CP}}{\sin\angle CO_BP}，\therefore \frac{r_B}{\overline{CP}}=\frac{1}{2\sin\angle PAC}$$，同理，$\frac{r_C}{\overline{AP}}=\frac{1}{2\sin\angle PBA}$，$\frac{r_A}{\overline{BP}}=\frac{1}{2\sin\angle PCB}$，

得$\left(\frac{r_A\cdot r_B\cdot r_C}{\overline{AP}\cdot\overline{BP}\cdot\overline{CP}}\right)^2=\frac{1}{64\cdot\sin\angle PCA\cdot\sin\angle PAB\cdot\sin\angle PBC\cdot\sin\angle PAC\cdot\sin\angle PBA\cdot\sin\angle PCB}$，

由琴生不等式得$\left(\frac{r_A}{PA}\cdot\frac{r_B}{PB}\cdot\frac{r_C}{PC}\right)^2\geq 1$，$\frac{r_A}{PA}\cdot\frac{r_B}{PB}\cdot\frac{r_C}{PC}\geq 1$，

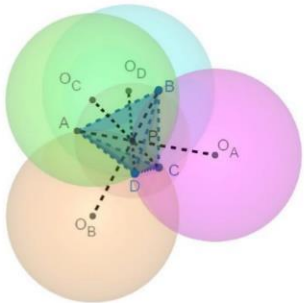
且在等號成立時，$\sin\angle PCA=\sin\angle PAB=\sin\angle PBC=\sin\angle PAC=\sin\angle PBA=\sin\angle PCB$

$\Leftrightarrow\triangle ABC$為正三角形，$P$為內心。#

$\boxed{\text{推廣}}$我們除了能透過琴生不等式完成 Thm.8 的證明，也可以透過 Thm.6 的結果完成，甚至利用 Thm.7 及 Corollary 1 推廣至三維、$n$ 維空間。

<Corollary 2>在$\mathbb{R}^n$空間中，任意給定$n+1$單體$A_1A_2...A_{n+1}$，$P$為其內部任意一點，$n+1$單體$P-A_2A_3...A_{n+1}$、$P-A_1A_3...A_{n+1}$、⋯、$P-A_1A_2...A_n$的外接$n$維球球半徑分別為$r_1$、$r_2$、⋯、$r_{n+1}$，則$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{r_k}{PA_k}\geq\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}$，等號成立時若且唯若$\overline{PA_k}'=2r_k,\forall k\in\{1,2,...,n+1\}$。

<proof>




$\because\overline{PA_k}'\leq 2r_k,\forall k\in\{1,2,...,n+1\}$，$\therefore\prod_{k=1}^{n+1}\frac{r_k}{PA_k}\geq\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k}'}{2\cdot PA_k}\geq\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}$，

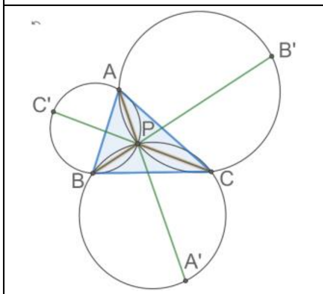
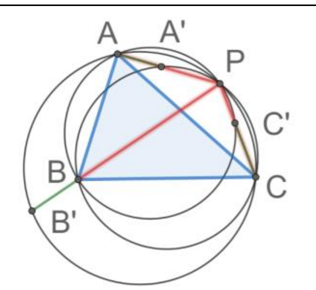
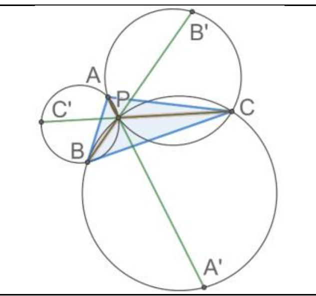
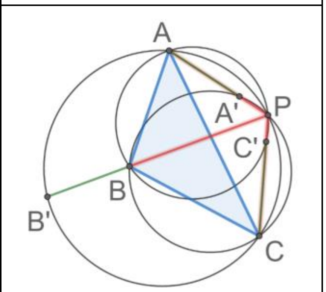
且在等號成立時，$\overline{PA_k}'=2r_k$，$\forall k\in\{1,2,...,n+1\}$。#

## 四、利用向量探討 $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=1$

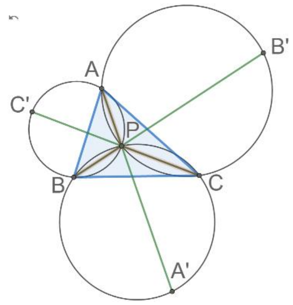
### (一)任意點

我們好奇在任意點的情況，是否滿足恆等式，我們引入向量的觀點，發現不論$P$點在三角形內部或外部，都能滿足恆等式，推廣到三維，甚至$n$維空間中都成立。

<GGB 測試結果>推測：平面上任意給定$\triangle ABC$與一點$P$，恆滿足$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=1$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 當$\triangle ABC$是銳角三角形且$P$在$\triangle ABC$內。 | 當$\triangle ABC$是銳角三角形且$P$在$\triangle ABC$外。 | 當$\triangle ABC$是鈍角三角形且$P$在$\triangle ABC$內。 | 當$\triangle ABC$是鈍角三角形且$P$在$\triangle ABC$外。 |
|   |   |   |   |
| $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}$ $\approx 0.28503+0.25199$ $+0.46497=1$ | $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}$ $\approx 2.33571\text{-}3.06389$ $+1.72819=1$ | $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}$ $\approx 0.18098+0.28543$ $+0.59559=1$ | $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}$ $\approx 1.40675\text{-}1.68903$ $+1.28229=1$ |

| |
|---|
| <Corollary 3>任意給定$\triangle ABC$，$P$為其內任意一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$這三個三角形的外接圓於$A'$、$B'$、$C'$，則$\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\dfrac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=1$。 |




<proof>$\because$ 在 Thm.6 的證明中，得 $\overrightarrow{PA'}=\dfrac{m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}{l\cdot\overline{PA}^2}\cdot\overrightarrow{AP}$，

$\therefore \overrightarrow{AA'}=\dfrac{l\cdot\overline{PA}^2+m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}{l\cdot\overline{PA}^2}\cdot\overrightarrow{AP}$，$\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}=\dfrac{l\cdot\overline{PA}^2}{l\cdot\overline{PA}^2+m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}$，

同理，$\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}=\dfrac{m\cdot\overline{PB}^2}{l\cdot\overline{PA}^2+m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}$，$\dfrac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=\dfrac{n\cdot\overline{PC}^2}{l\cdot\overline{PA}^2+m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}$，得$\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\dfrac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\dfrac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=1$。#

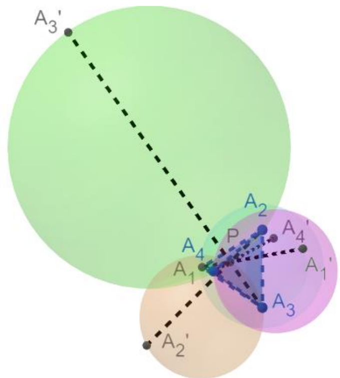
## (二)$n$維

| |
|---|
| <Corollary 4>在$\mathbb{R}^n$空間中，任意給定$n+1$單體$A_1A_2\ldots A_{n+1}$與$P$，$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、…、$\overleftrightarrow{A_{n+1}P}$. 分別與$n+1$單體$P-A_2A_3\ldots A_{n+1}$、$P-A_1A_3\ldots A_{n+1}$、…、$P-A_1A_2\ldots A_n$的外接$n-1$維球面交於$A_1'$、$A_2'$、…、$A_{n+1}'$，恆滿足$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k'}}=1$。 |

<proof> 因為在 Corollary 1 的證明中，得 $\overrightarrow{PA_1'}=\dfrac{\sum_{i=2}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1\cdot\overline{PA_1}^2}\cdot\overrightarrow{A_1P}$，

$\therefore \overrightarrow{A_1A_1'}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}{a_1\cdot\overline{PA_1}^2}\cdot\overrightarrow{A_1P}\Rightarrow\dfrac{\overrightarrow{A_1P}}{\overrightarrow{A_1A_1'}}=\dfrac{a_1\cdot\overline{PA_1}^2}{\sum_{i=1}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}$，

同理，$\dfrac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k'}}=\dfrac{a_k\cdot\overline{PA_k}^2}{\sum_{i=1}^{n+1}a_i\cdot\overline{PA_i}^2}$，$\forall k\in\{1,2,\ldots,n+1\}$，得$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k'}}=1$。#




▲此圖以三維為例

**討論 5** 在 2008 年的 BAMO 試題中[4]( *10th Bay Area Mathematical Olympiad*，2008)有和此處類似的性質，比較兩者間的差異，特別的是，我們可以將結論推廣至$\mathbb{R}^n$空間。

| | BAMO 2008 | Corollary 3-4 |
|---|---|---|
| $P$點位置 | $P$在$\triangle ABC$內 | $P$為任意一點 |

| 比值表示法 | 線段比值 | 向量係數積 |
| --- | --- | --- |
| 維度 | 僅限於二維平面 | 任意$\mathbb{R}^n$空間 |
| 證明手法 | 反演 | 向量面積比性質 |

## 五、研究應用—製造特殊的三角函數不等式

在 Thm.2~Thm.5 討論特殊點的不等式情況時，都是先用三角形三內角的三角函數來表示比值，再得到不等式關係。唯獨在 Thm.1 費馬點的情況時，我們是直接得到了不等式的關係，更引發的研究興趣，以下是關於費馬點的比值三角恆等式的證明：

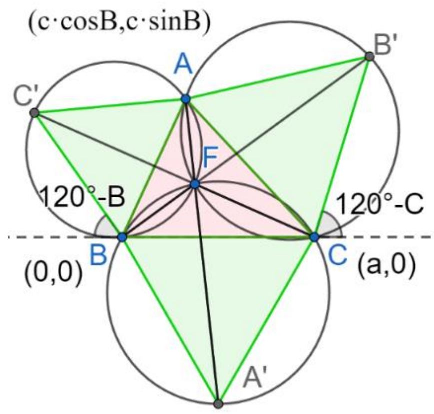
**<Property>**任意給定$\triangle ABC$，$F$為費馬點，$A'$、$B'$、$C'$為以三邊向外做正三角形的頂點，則

$$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}=\prod_{cyc}\frac{\sin A\cdot\left(\sqrt{3}\sin A-2\cdot\sin B\sin C\right)}{\sin B\sin C\cdot\left(\sqrt{3}\cos A-\sin A\right)}\text{。}$$

<proof>令$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，則$C$、$C'$、$B'$的直角座標分別為

$(a,0)$、$\left(-c\cdot\cos\left(120^\circ-B\right),c\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)\right)$、

$\left(b\cdot\cos\left(120^\circ-C\right)+a,b\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)\right)$，




$$\because\begin{cases}\overleftrightarrow{BB'}:y=\dfrac{b\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)}{b\cdot\cos\left(120^\circ-C\right)+a}\cdot x\\[2ex]\overleftrightarrow{CC'}:y=\dfrac{c\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)}{-c\cdot\cos\left(120^\circ-B\right)-a}\cdot x-\dfrac{ac\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)}{-c\cdot\cos\left(120^\circ-B\right)-a}\end{cases},$$

$\therefore F$的直角坐標為(
$$\frac{ac\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)\cdot\left(b\cdot\cos\left(120^\circ-C\right)+a\right)}{b\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)\cdot\left(c\cdot\cos\left(120^\circ-B\right)+a\right)+c\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)\cdot\left(b\cdot\cos\left(120^\circ-C\right)+a\right)},$$

$$\frac{ac\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)\cdot b\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)}{b\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)\cdot\left(c\cdot\cos\left(120^\circ-B\right)+a\right)+c\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)\cdot\left(b\cdot\cos\left(120^\circ-C\right)+a\right)}\text{)，}$$

令$\dfrac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}=k$，由分點公式得$k=$

$$\frac{b\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)-\dfrac{ac\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)\cdot b\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)}{b\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)\cdot\left(c\cdot\cos\left(120^\circ-B\right)+a\right)+c\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)\cdot\left(b\cdot\cos\left(120^\circ-C\right)+a\right)}}{\dfrac{ac\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)\cdot b\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)}{b\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)\cdot\left(c\cdot\cos\left(120^\circ-B\right)+a\right)+c\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)\cdot\left(b\cdot\cos\left(120^\circ-C\right)+a\right)}}$$

$$=\frac{bc\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)\cdot\cos\left(120^\circ-B\right)+ab\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)+bc\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)\cdot\cos\left(120^\circ-C\right)}{ac\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)}$$

$$=\frac{ab\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)+bc\cdot\sin\left(120^\circ-A\right)}{ac\cdot\sin\left(120^\circ-B\right)}=\frac{\sin B\cdot\left(\sin A\cdot\sin\left(120^\circ-C\right)+\sin C\cdot\sin\left(120^\circ-A\right)\right)}{\sin A\sin C\sin\left(120^\circ-B\right)}$$

$$=\frac{\sin B\cdot\left(\sin A\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\frac{1}{2}\sin C\right)+\sin C\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A\right)\right)}{\sin A\sin C\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\frac{1}{2}\sin B\right)}$$

$$=\frac{\sin B\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B-\sin A\sin C\right)}{\sin A\sin C\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B-\frac{1}{2}\sin B\right)}=\frac{\sin B\cdot\left(\sqrt{3}\sin B-2\sin A\sin C\right)}{\sin A\sin C\cdot\left(\sqrt{3}\cos B-\sin B\right)}$$

同理，$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}=\frac{\sin A\cdot\left(\sqrt{3}\sin A-2\sin B\sin C\right)}{\sin B\sin C\cdot\left(\sqrt{3}\cos A-\sin A\right)}$，$\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}=\frac{\sin C\cdot\left(\sqrt{3}\sin C-2\sin A\sin B\right)}{\sin A\sin B\cdot\left(\sqrt{3}\cos C-\sin C\right)}$，

由此可得 $\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}=\prod_{cyc}\frac{\sin A\cdot\left(\sqrt{3}\sin A-2\cdot\sin B\sin C\right)}{\sin B\sin C\cdot\left(\sqrt{3}\cos A-\sin A\right)}$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}\sin A-2\sin B\sin C\right)\cdot\left(\sqrt{3}\sin B-2\sin C\sin A\right)\cdot\left(\sqrt{3}\sin C-2\sin A\sin B\right)}{\sin A\sin B\sin C\cdot\left(\sqrt{3}\cos A-\sin A\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cos B-\sin B\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cos C-\sin C\right)}\geq 8$$ 。#

顯然，這個比值的下界非常難得到，卻可以從 Thm.1 的結論輕易得出。

**< Corollary 5> $\triangle ABC$ 之三內角皆小於 $120^\circ$，仍滿足下列不等式**

$$\frac{\left(\sqrt{3}\sin A-2\sin B\sin C\right)\cdot\left(\sqrt{3}\sin B-2\sin C\sin A\right)\cdot\left(\sqrt{3}\sin C-2\sin A\sin B\right)}{\sin A\sin B\sin C\cdot\left(\sqrt{3}\cos A-\sin A\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cos B-\sin B\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cos C-\sin C\right)}\geq 8$$ 。

於是透過任意點的結果可以輕易得到不直觀的三角函數不等式。也可以製造或快速解出其他的三角函數不等式，例如：

1. 由外心、垂心的比值結果 $\prod_{cyc}\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}$，得到任意銳角 $\triangle ABC$，仍滿足下列不等式

$$\left(\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\right)\left(\frac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\right)\left(\frac{1+\cot C\cot A}{1-\cot C\cot A}\right)\geq 8$$ 。

2. 由內心的比值結果，得到任意 $\triangle ABC$，仍滿足下列不等式 $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}$ 。

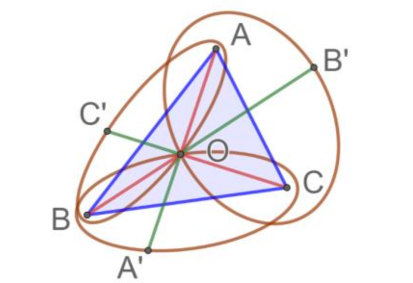
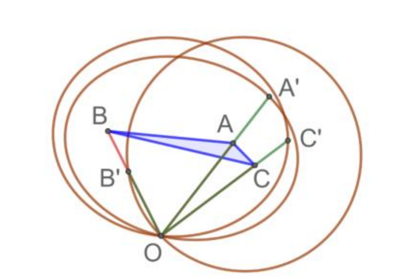
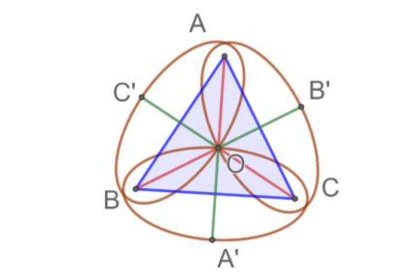
## 六、將圓轉換成橢圓探討其比值關係

### (一) 以三邊為焦距、取三角形內一點屬於橢圓

任意給定$\triangle ABC$與一點$P$，分別以三邊為焦距與其上一點$P$建構橢圓$\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$於$A'$、$B'$、$C'$，並觀察$\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}$的範圍。

1. 外心

<GGB 測試結果> 猜測：$O$為外心且$\triangle ABC$為銳角三角形時，恆滿足$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$。

| 銳角$\triangle ABC$，比值恆$\le 1$。 | 鈍角$\triangle ABC$，比值不恆$\le 1$。 | 正三角形，等號成立。 |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\approx 0.89856\le 1$ | $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\approx 1.24636>1$ | $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=1$ |

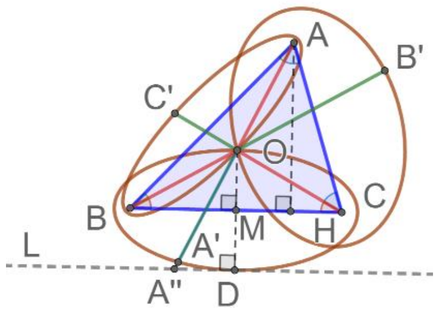
<Theorem 9>任意給定$\triangle ABC$，$O$為其外心，以三邊為焦距，$O$為橢圓上一點建構橢圓$\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$，$\overleftrightarrow{AO}$、$\overleftrightarrow{BO}$、$\overleftrightarrow{CO}$分別交$\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$於$A'$、$B'$、$C'$，滿足$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形。

<proof> 假設$M$為$\overline{BC}$中點，$H$為$A$在$\overline{BC}$上的垂足，

$\overrightarrow{OM}$交以$B$、$C$為焦點，$O$為橢圓上一點的橢圓於$D$，

過$D$做$L$且平行$\overline{BC}$，$\overleftrightarrow{OA}$交$L$於$A''$，

則$\overline{OM}=\overline{OC}\sin\gamma=R\sin\left(90^\circ-A\right)=R\cos A$，




$\overline{AH}=b\sin C=c\sin B=2R\sin B\sin C$，$\overline{OD}=2\overline{OM}=2R\cos A$

$$\Rightarrow\frac{\overline{OA''}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OD}}{\overline{AH}-\overline{OM}}=\frac{2R\cos A}{\overline{AH}-R\cos A}=\frac{2\cos A}{2\sin B\sin C-\cos A}=\frac{2\sin B\sin C-2\cos B\cos C}{\sin B\sin C+\cos B\cos C}=2\cdot\frac{1-\cot B\cot C}{1+\cot B\cot C},$$

同理，$\dfrac{\overline{OB''}}{\overline{OB}}=2\cdot\dfrac{1-\cot A\cot C}{1+\cot A\cot C}$，$\dfrac{\overline{OC''}}{\overline{OC}}=2\cdot\dfrac{1-\cot A\cot B}{1+\cot A\cot B}$，得$\dfrac{\overline{OA''}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB''}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC''}}{\overline{OC}}=8\cdot\prod_{cyc}\dfrac{1-\cot A\cot B}{1+\cot A\cot B}\le 1$，

等號成立時 $\cot A=\cot B=\cot C$ ，$\angle A=\angle B=\angle C=60^{\circ} \Leftrightarrow \triangle ABC$ 為正三角形，

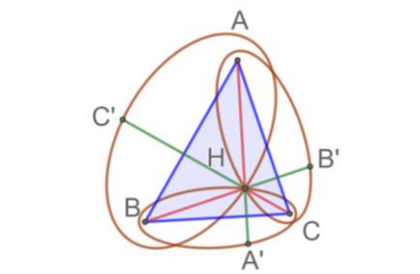
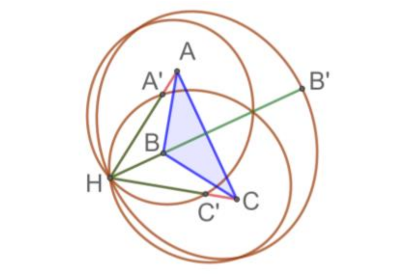
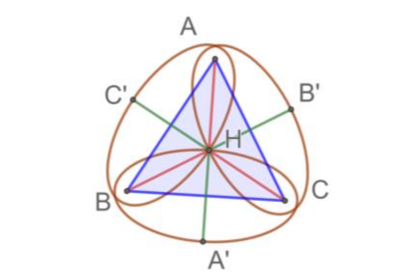
又顯然 $\overline{OA'}\le\overline{OA''}$ ，故 $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le\dfrac{\overline{OA''}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB''}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC''}}{\overline{OC}}\le 1$ ，

且當 $\triangle ABC$ 為正三角形時， $A'$ 與 $A''$ 重合，

$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\dfrac{\overline{OA''}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB''}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC''}}{\overline{OC}}=1$ ，得 $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$ 。#

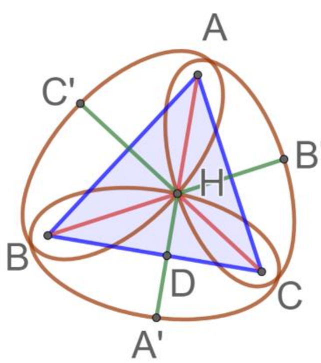
**2. 垂心**

<GGB 測試結果> 猜測： $H$ 為垂心且 $\triangle ABC$ 為銳角三角形時，恆滿足 $\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\le 1$ 。

| 銳角 $\triangle ABC$ ，比值恆 $\le 1$ 。 | 鈍角 $\triangle ABC$ ，比值不恆 $\le 1$ 。 | 正三角形，等號成立。 |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\approx 0.76734\le 1$ | $\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\approx 2.12402>1$ | $\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=1$ |

<Theorem 10>任意給定 $\triangle ABC$，$H$ 為其垂心，以三邊為焦距，$H$ 為橢圓上一點建構橢圓 $\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$，$\overleftrightarrow{AH}$、$\overleftrightarrow{BH}$、$\overleftrightarrow{CH}$ 分別交 $\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$ 於 $A'$、$B'$、$C'$，則 $\dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\le 1$，等號成立時若且唯若 $\triangle ABC$ 為正三角形。

<proof>




$\because \triangle AFH \sim \triangle ADB$ ，$\therefore \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AF}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AH}\cdot\overline{AD}=\overline{AF}\cdot\overline{AB}=b\cos A\cdot c$

$\Rightarrow \overline{AH}=\dfrac{bc\cos A}{c\sin B}=\dfrac{b\left(\sin B\sin C-\cos B\cos C\right)}{\sin B}$ ，

又 $\overline{AD}=b\sin C \Rightarrow \overline{HA'}=2\left(\overline{AD}-\overline{AH}\right)=\dfrac{2b\cos B\cos C}{\sin B}$ ，

$$\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}=\frac{2\cos B\cos C}{\sin B\sin C-\cos B\cos C}=2\cdot\frac{\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\le 2\cdot\frac{\cot B\cot C}{\sqrt{\cot C\cot A+\cot A\cot B}},$$

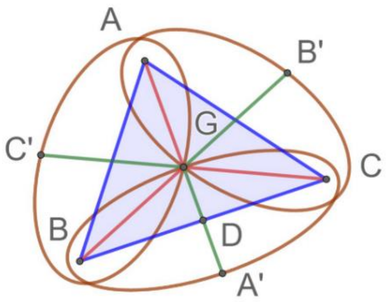
同理，$\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\le 2\cdot\dfrac{\cot A\cot B}{\sqrt{\cot A\cot B+\cot B\cot C}}$ ，$\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\le 2\cdot\dfrac{\cot C\cot B}{\sqrt{\cot B\cot C+\cot C\cot A}}$ ，

$\therefore \dfrac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\dfrac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\dfrac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=\prod_{cyc}2\cdot\dfrac{\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\le 1$ 。#

### 3. 重心

> <Theorem 11>任意給定$\triangle ABC$，$G$為其重心，以三邊為焦距，$G$為橢圓上一點建構橢圓$\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$，$\overleftrightarrow{AG}$、$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CG}$分別交$\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$於$A'$、$B'$、$C'$，則$\dfrac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\dfrac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\dfrac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=1$且$\dfrac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}=\dfrac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}=\dfrac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=1$。

<proof>




$\because \overline{AG}=2\cdot\overline{GD}$，又$D$為橢圓中心，$\therefore \overline{GD}=\overline{GA'}\Rightarrow\overline{GA}=\overline{GA'}$，

同理，$\overline{GB}=\overline{GB'}$，$\overline{GC}=\overline{GC'}$，故$\dfrac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\dfrac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\dfrac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=1$。#

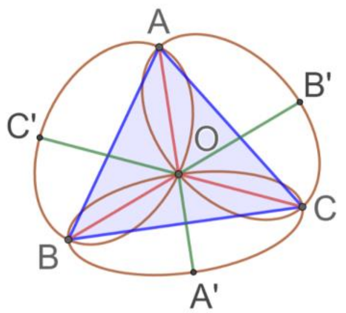
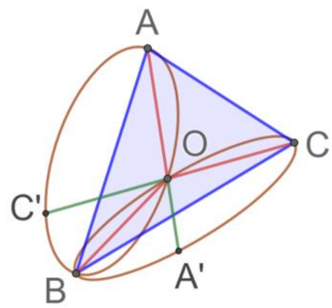
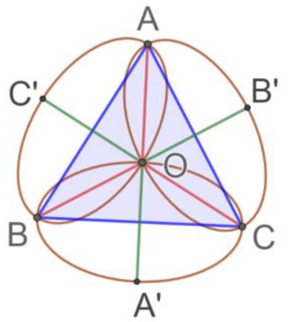
## (二) 以三邊為長軸，取三角形內一點屬於橢圓

此處的規則我們改分別以三邊為長軸與其上一點$P$建構橢圓$\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$，發現大部分的性質和前面一樣，唯一不同的地方在於橢圓存在的條件。

### 1. 外心

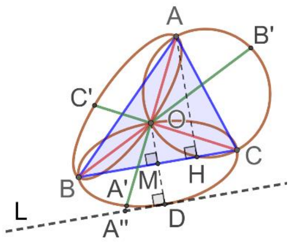
<GGB 測試結果> 猜測：$O$為外心且三內角皆在$45^\circ$和$90^\circ$之間時，恆滿足$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$。

Remark: 三內角皆在$45^\circ$和$90^\circ$之間時，橢圓長軸才會大於短軸。

| $45^\circ<$三內角$<90^\circ$，比值$\le 1$ | 當其中一或二內角$<45^\circ$ | 正三角形，等號成立 |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\approx 0.95156<1$ | 短軸比長軸長，比值未定義 | $\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=1$ |

> <Theorem 12>任意給定$\triangle ABC$，$O$為其外心，以三邊為長軸，$O$為橢圓上一點建構橢圓$\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$，$\overleftrightarrow{AO}$、$\overleftrightarrow{BO}$、$\overleftrightarrow{CO}$分別交$\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$於$A'$、$B'$、$C'$，則當三內角皆在$45^\circ$和$90^\circ$之間時，$\dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\dfrac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$，且等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形。

<proof> $1^\circ \because$ 橢圓存在的條件為 $\overline{BM} \geq \overline{OM}$ ，



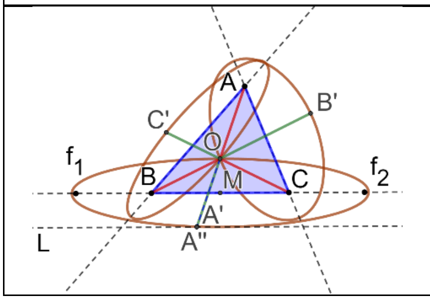
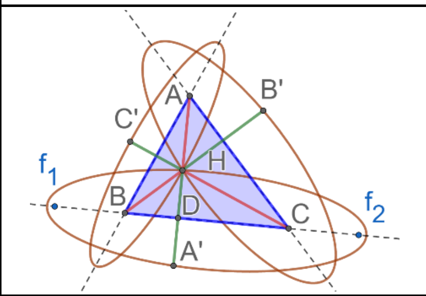
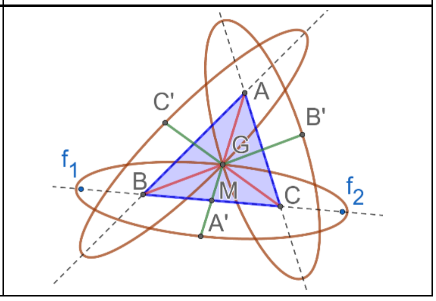

$\therefore \overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = R\sin A \geq \overline{OM} = R\sin\beta = R\sin\left(90^\circ - A\right) = R\cos A$

$\Rightarrow \tan A \geq 1$ ， $45^\circ \leq \angle A < 90^\circ$ ，同理， $45^\circ \leq \angle B < 90^\circ$ ， $45^\circ \leq \angle C < 90^\circ$ 。

$2^\circ$ 可以用與 Thm 8 相同方法證出 $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} \leq 1$，且當等號成立時，$\triangle ABC$ 為正三角形。#

推廣 兩焦點在三邊延長直線上任意移動，性質依然會成立。

在外心的情況，由於 $M$ 為橢圓中心，$O$ 是外心，所以橢圓的短軸是固定的， $A"$ 的位置也不會變，我們可以將橢圓的兩焦點在三邊延長之直線上任意移動，都滿足 $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} \leq 1$，唯一不同的是能否建構出橢圓；垂心、重心也有類似的情形。

| 外心 | 垂心 | 重心 |
|---|---|---|
|  |  |  |

## 伍、研究結果

| <定理 1-5> | 任意給定 $\triangle ABC$，$P$ 為其內一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$ 分別交 $\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$ 的外接圓於 $A'$、$B'$、$C'$，滿足 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}} \cdot \frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}} \geq 8$，等號成立時若且唯若 $\triangle ABC$ 為正三角形。 | |
|---|---|---|
| $P$ 為特殊點 | 線段比值 | 前提條件 |
| $F$ 費馬點 | $\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}} \cdot \frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}} = \prod_{cyc} \frac{\sin A \cdot \left(\sqrt{3}\sin A - \sin 2A\right)}{\sin B \sin C \cdot \left(\sqrt{3}\cos A - \sin A\right)} \geq 2^3$ | 三內角小於 $120^\circ$ |
| $O$ 外心 | $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \cdot \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} \cdot \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \prod_{cyc} \frac{1 + \cot A \cot B}{1 - \cot A \cot B} \geq 2^3$ | 銳角三角形 |
| $I$ 內心 | $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} \cdot \frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}} \cdot \frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}} = \frac{1}{\sin\frac{A}{2} \times \sin\frac{B}{2} \times \sin\frac{C}{2}} \geq 2^3$ | 任意三角形 |

| | | |
|---|---|---|
| $H$ 垂心 | $\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=\prod_{cyc}\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\ge 2^3$ | 銳角三角形 |
| $G$ 重心 | $\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=\prod_{cyc}\frac{\left[\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2\cdot\overline{BC}^2+\overline{BC}\cdot\left(\overline{AB}\cdot\cos B+\overline{AC}\cdot\cos C\right)\right]}{\left(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A\right)}\ge 2^3$ | 任意三角形 |

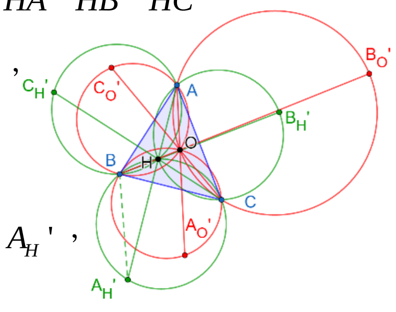
| | |
|---|---|
| <定理 6> | 任意給定三角形$\triangle ABC$，$P$為其內任意一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$的外接圓於$A'$、$B'$、$C'$，滿足$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\ge 8$，等號成立時若且唯若$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=2$。 |
| <系 1> | 在$\mathbb{R}^n$空間中，任意給定$n+1$單體$A_1A_2\ldots A_{n+1}$，$P$為其內部任意一點，$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\cdots$、$\overleftrightarrow{A_{n+1}P}$分別與$n+1$單體$P-A_2A_3\ldots A_{n+1}$、$P-A_1A_3\ldots A_{n+1}$、$\cdots$、$P-A_1A_2\ldots A_n$的外接$n-1$維球面交於$A_1'$、$A_2'$、$\cdots$、$A_{n+1}'$，滿足$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\ge n^{n+1}$，等號成立時若且唯若$\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=n$，$\forall k\in\{1,2,\ldots,n+1\}$。 |
| <系 2> | 在$\mathbb{R}^n$空間中，任意給定$n+1$單體$A_1A_2\ldots A_{n+1}$及其內一點$P$，若$n+1$單體$P-A_2A_3\ldots A_{n+1}$、$P-A_1A_3\ldots A_{n+1}$、$\cdots$、$P-A_1A_2\ldots A_n$的外接$n$維球球半徑分別為$r_1$、$r_2$、$\cdots$、$r_{n+1}$，則$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{r_k}{\overline{PA_k}}\ge\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}$，等號成立時若且唯若$\overline{PA_k'}=2r_k$，$\forall k\in\{1,2,\ldots,n+1\}$。 |
| <系 3> | 任意給定$\triangle ABC$，$P$為其內任意一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$的外接圓於$A'$、$B'$、$C'$，則$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=1$。 |
| <系 4> | 在$\mathbb{R}^n$空間中，任意給定$n+1$單體$A_1A_2\ldots A_{n+1}$，$P$為其內任意一點，$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、$\cdots$、$\overleftrightarrow{A_{n+1}P}$分別與$n+1$單體$P-A_2A_3\ldots A_{n+1}$、$P-A_1A_3\ldots A_{n+1}$、$\cdots$、 |

| | |
|---|---|
| | $P-A_1A_2...A_n$ 的外接 $n-1$ 維球面交於 $A_1'$、$A_2'$、…、$A_{n+1}'$，滿足 $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k'}}=1$。 |
| <定理 9> | 任意給定 $\triangle ABC$，$O$ 為其外心，以三邊為焦距，$O$ 為橢圓上一點建構橢圓，$\overleftrightarrow{AO}$、$\overleftrightarrow{BO}$、$\overleftrightarrow{CO}$ 分別交橢圓於 $A'$、$B'$、$C'$，滿足 $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$，等號成立時若且唯若 $\triangle ABC$ 為正三角形。 |
| <定理 10> | 任意給定 $\triangle ABC$，$H$ 為其垂心，以三邊為焦距，$H$ 為橢圓上一點建構橢圓，$\overleftrightarrow{AH}$、$\overleftrightarrow{BH}$、$\overleftrightarrow{CH}$ 分別交橢圓於 $A'$、$B'$、$C'$，滿足 $\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\le 1$，等號成立時若且唯若 $\triangle ABC$ 為正三角形。 |
| <定理 11> | 任意給定 $\triangle ABC$，$G$ 為其重心，以三邊為焦距，$G$ 為橢圓上一點建構橢圓，$\overleftrightarrow{AG}$、$\overleftrightarrow{BG}$、$\overleftrightarrow{CG}$ 分別交橢圓於 $A'$、$B'$、$C'$，滿足 $\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=1$ 且 $\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}=\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=1$。 |

# 陸、討論

## 一、外心和垂心比值相等的幾何意義

在外心和垂心的證明，我們發現不但整組比值 $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}$ 相同，且這三組比值 $\frac{\overline{OA_O'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{HA_H'}}{\overline{HA}}$、$\frac{\overline{OB_O'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{HB_H'}}{\overline{HB}}$、$\frac{\overline{OC_O'}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{HC_H'}}{\overline{HC}}$ 也各自相同，故進而探討其幾何意義。




<proof> $\overrightarrow{AO}$ 交 $\triangle BOC$ 的外接圓於 $A_O'$，$\overrightarrow{AH}$ 交 $\triangle BHC$ 的外接圓於 $A_H'$，

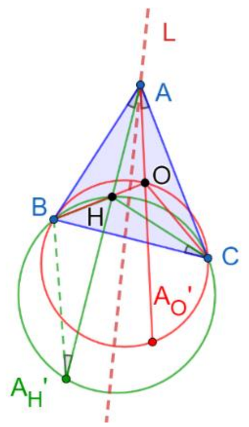
令 $\varphi$ 為以 $A$ 為反演中心，$\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ 為反演冪，再對 $\angle BAC$ 的角平分線($L$)做對稱變換，

$\because \angle OAC=\angle HAB=\angle HCB=\angle HA_H'B$，

$\therefore \triangle OAC\sim\triangle BAA_H'$ ($AA$相似) $\Rightarrow \overline{AB}\cdot\overline{AC}=\overline{AO}\cdot\overline{AA_H'}$，

故 $\varphi(O)=A_H'$，同理，$\varphi(H)=A_O'$，

故 $\overline{AO}\cdot\overline{AA_H'}=\overline{AH}\cdot\overline{AA_O'}$，得 $\frac{\overline{AO}}{\overline{AA_O'}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{AA_H'}}$，$\frac{\overline{AO}}{\overline{OA_O'}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{HA_H'}}$ 。#

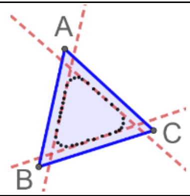
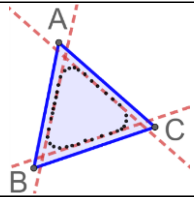
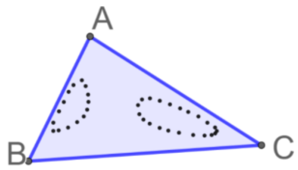
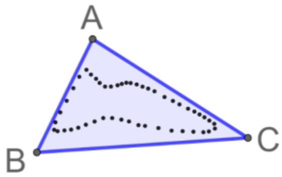


$\boxed{推廣}$若 $P$ 與 $P'$ 互為等角共軛點，則 $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=\dfrac{\overline{P'A'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{P'B'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{P'C'}}{\overline{PC}}$ 。

由於外心和垂心互為等角共軛點，所以我們猜測若 $P$ 與 $P'$ 互為等角共軛點，比值就會相等，而透過前面證明所使用到的相似形，可以輕易完成證明。

## 二、任意點 $P$ 在比值固定時的軌跡變化

在以上的報告中，任意給定 $\triangle ABC$ ， $P$ 為其內任意一點，向外做三個外接圓得到 $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\geq 8$，於是我們好奇在固定比值下 $P$ 點對應的軌跡為何。

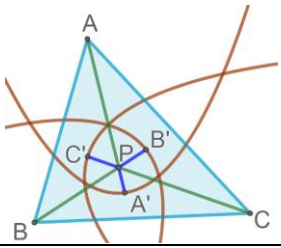
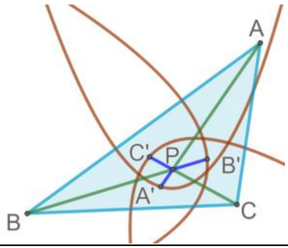
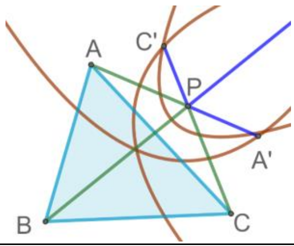
| 當 $\triangle ABC$ 為正三角形 | | 當 $\triangle ABC$ 為任意三角形 | |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=9$ | $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=10$ | $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=9$ | $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=10$ |
|  |  |  |  |

在 $\triangle ABC$ 為正三角形且比值 $>8$ 的情況下， $P$ 點軌跡呈現御飯糰的形狀，而我們希望能找出御飯糰三個邊的方程式為何；至於在任意三角形的部分，我們發現 $P$ 點軌跡會呈現一個詭異的曲線，似乎也可以用三角恆等式求出，這是我們正在努力的部分。

## 三、將圓換成其他圖形探討比值關係

(一) 給定任意 $\triangle ABC$ 與一點 $P$ 內任意一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$ 分別交以 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 為準線，$P$ 為焦點的拋物線於另一點 $A'$、 $B'$、 $C'$，我們想去探討 $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}$ 的不等式關係。

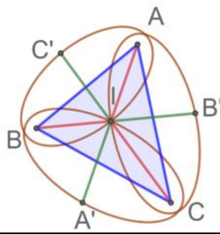
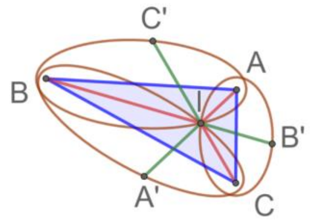
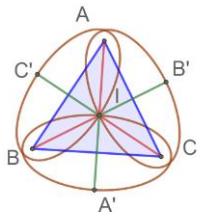
<GGB 測試結果> 猜測： $P$ 在任意 $\triangle ABC$ 內，恆滿足 $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\leq\dfrac{1}{64}$ 。

| 當 $\triangle ABC$ 是銳角三角形<br>且 $P$ 在 $\triangle ABC$ 內。 | 當 $\triangle ABC$ 是鈍角三角形<br>且 $P$ 在 $\triangle ABC$ 內。 | 當 $P$ 在 $\triangle ABC$ 外。 |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\approx 0.01502<\dfrac{1}{64}$ | $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\approx 0.01166<\dfrac{1}{64}$ | $\dfrac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\dfrac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\dfrac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\approx 36.67423>\dfrac{1}{64}$ |

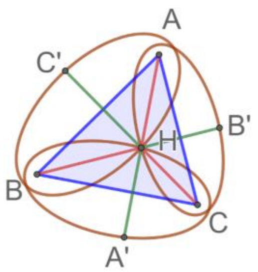
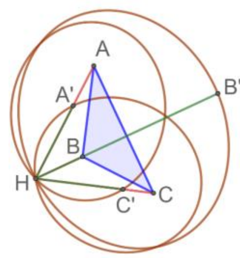
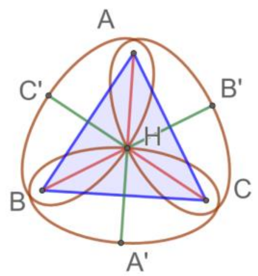
**(二)** 在 2017 年國際科展[1](石博允、錢昀)和前面報告中的 Corollary 3、Corollary 4，都有討論到外接圓中比值相加的性質，而在這篇報告中又有討論到橢圓，所以我們想去觀察在橢圓中的比值相加是否有好的性質。

1. 重心：顯然 $\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}+\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}+\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=3$。

2. 內心：猜測任意給定 $\triangle ABC$，滿足 $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}+\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\geq 3$。

| $\triangle ABC$ 為銳角三角形 | $\triangle ABC$ 為鈍角三角形 | $\triangle ABC$ 為正三角形 |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}+\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\approx 3.02884>3$ | $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}+\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\approx 3.42192>3$ | $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}+\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}=3$ |

3. 垂心；猜測任意給定 $\triangle ABC$，滿足 $\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}+\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}+\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\geq 3$。

| $\triangle ABC$ 為銳角三角形 | $\triangle ABC$ 為鈍角三角形 | $\triangle ABC$ 為正三角形 |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}+\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}+\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\approx 3.05916>3$ | $\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}+\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}+\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\approx 5.26325>3$ | $\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}+\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}+\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=3$ |

## 四、製造更多的三角不等式

我們希望能由三角形的特殊點加上任意點點結論，來製造或快速解出更多的三角函數不等式關係，例如布洛卡點、甚至空間中的費馬點。

# 柒、結論

一、在平面上，任意給定三角形$\triangle ABC$，$P$為其內的費馬點、外心、內心、垂心、重心等特殊點或任意點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$的外接圓於$A'$、$B'$、$C'$，滿足$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=1$及$\frac{\overline{PA'}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{PC'}}{\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}}\geq 8$，等號成立時$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=2$，且當$P$為外心、內心、垂心、重心、費馬點時，等式成立時$\triangle ABC$為正三角形。

二、在$\mathbb{R}^n$空間中，任意給定$n+1$單體$A_1A_2...A_{n+1}$，$P$為其內部任意一點，$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、…、$\overleftrightarrow{A_{n+1}P}$分別與$P-A_2A_3...A_{n+1}$、$P-A_1A_3...A_{n+1}$、…、$P-A_1A_2...A_n$的外接$n-1$維球面交於$A_1'$、$A_2'$、…、$A_{n+1}'$，滿足$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k'}}=1$及$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\geq n^{n+1}$，等號成立時，$\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=n$，$\forall k\in\{1,2,...,n+1\}$。

三、由任意點的結論，可以製造或快速解出三角函數的不等式，例如：

$$\frac{\left(\sqrt{3}\sin A-2\sin B\sin C\right)\cdot\left(\sqrt{3}\sin B-2\sin C\sin A\right)\cdot\left(\sqrt{3}\sin C-2\sin A\sin B\right)}{\sin A\sin B\sin C\cdot\left(\sqrt{3}\cos A-\sin A\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cos B-\sin B\right)\cdot\left(\sqrt{3}\cos C-\sin C\right)}\geq 8$$ 。

四、任意給定$\triangle ABC$，$P$為其內一點，以三邊為焦距、$P$為橢圓上一點建構橢圓$\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$於$A'$、$B'$、$C'$，當$P$為$\triangle ABC$的外心、垂心時滿足$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\leq 1$，而當$P$為$\triangle ABC$的重心時，$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=1$。

# 捌、參考資料


1. 石博允、錢昀(2017)。三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討。

   取自：https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2017/pdf/010029.pdf。

2. 趙文敏(1997)。三線性坐標與面積(一)-(五)。科學教育月刊 198-202 期。

3. 黃家禮(1997)。幾何明珠。台北市：九章出版社。

4. 10th Bay Area Mathematical Olympiad (2008)。取自：

   http://hosted.msri.org/bamo/attachments/bamo2008examsol.pdf。

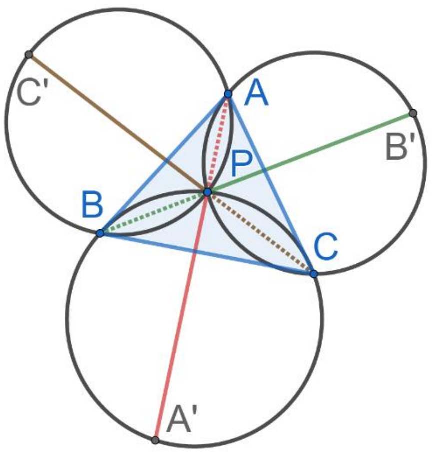
## 【評語】050415

本作品研究三角形上各個特殊點延伸至外接圓的各種比例的情形，作者透過一些不等式的討論，可以得到不錯的結論，並推斷出等號成立之充要條件，並且試圖將不等式與恆等式推廣結論至 n 維空間。整體而言架構清晰完整。

可以改進的面向像是本研究題目名稱不易理解研究內容，題目命名建議應與內容有關為佳。此外本題材推廣自參考資料第一筆 2017 年國際科展題目，須說明其他參考資料在本研究內引用那些內容。

# 作品海報

## 摘要

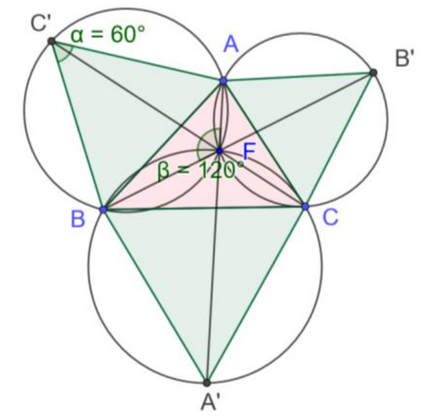
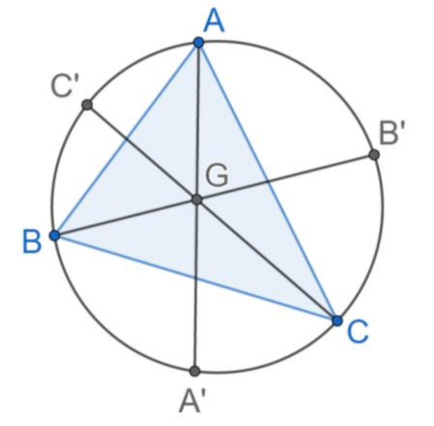
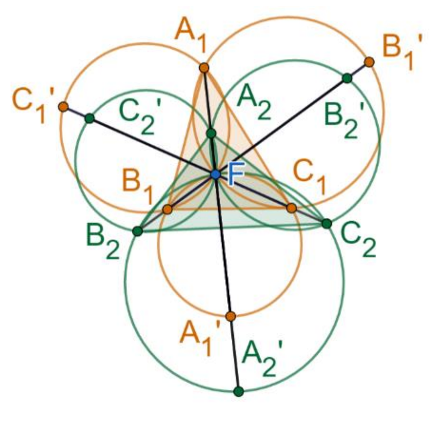
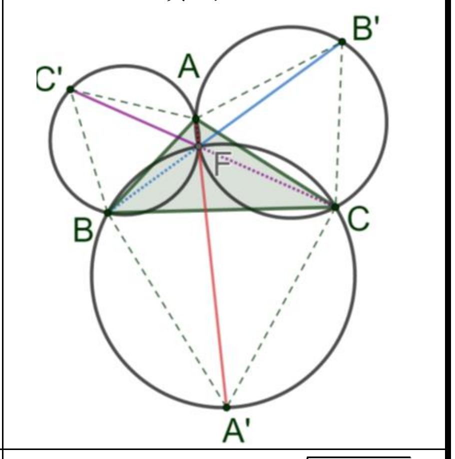



平面上，$P$點為$\triangle ABC$內部任意一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$這三個三角形的外接圓於$A'$、$B'$、$C'$。若$\triangle ABC$為銳角三角形，則$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\ge 8$，等號成立時若且唯若$\triangle ABC$為正三角形，此外，並以三角形的三內角來表示$P$點為費馬點、外心、內心、垂心、重心時的確切比值，接下來推廣至$n$維空間，當$P$為任意$n+1$單體$A_1A_2\ldots A_{n+1}$內任意一點，$\overleftrightarrow{A_1P}$、…、$\overleftrightarrow{A_{n+1}P}$分別與$n+1$單體$P-A_2A_3\ldots A_{n+1}$、…、$P-A_1A_2\ldots A_n$的外接$n-1$維球面交於$A_1'$、…、$A_{n+1}'$，則$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\ge n^{n+1}$，等號成立時若且唯若$\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=n$，$k=1,2,\ldots,n+1$，其中$n\ge 2$。再藉由任意點的結論，可以應用於直接生成或快速解出許多特殊類型的三角函數不等式。此外，從主要的不等式還可以得到$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k'}}=1$，此時$P$點為$n$維空間中任意一點，最後，我們把圓改為圓錐曲線，再進行線段比值的探討。


## 研究動機

在 2017 國際科展[1]的題目：「給定$\triangle ABC$與其外接圓$O$和重心$G$，若$\overline{AG}$、$\overline{BG}$、$\overline{CG}$分別交$O$於$A'$、$B'$、$C'$，則$\frac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{GB'}}+\frac{\overline{CC'}}{\overline{GC'}}=6$」。恰巧當時數學課在介紹費馬點$F$，於是我們先用 GGB 觀察線段的比值關係，設法找出相關的性質，以下是我們的測試結果，發現$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\ge 8$，等號成立時$\triangle ABC$為正三角形，而且三內角都需小於$120^\circ$，費馬點才會在$\triangle ABC$內部。

研究平面上各個特殊點的情形 → 利用三角函數及三線性坐標探討不等式 → 用向量觀點探討任意點的不等式與恆等式 → 推廣結論至n維空間 → 在平面上外接橢圓及拋物線 → 結論與討論

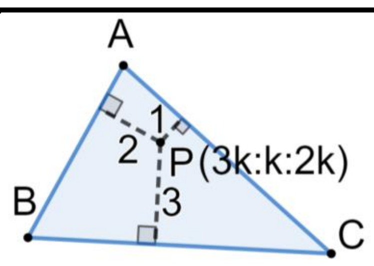
| 費馬點性質 | 2017 國際科展[1] | 測試結果 | 費馬證明 |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| $A$、$F$、$A'$三點共線<br>$\overline{AA'}=\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}$<br>$F$、$B$、$A'$、$C$四點共圓 | $\frac{\overline{AA'}}{\overline{GA'}}+\frac{\overline{BB'}}{\overline{GB'}}+\frac{\overline{CC'}}{\overline{GC'}}=6$ | $\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\approx 8.53332\ge 8$<br>$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\approx 10.11297\ge 8$ | $\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}=\frac{\overline{FB}+\overline{FC}}{\overline{FA}}\ge\frac{2\sqrt{\overline{FB}\cdot\overline{FC}}}{\overline{FA}}$<br>$\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}\ge 8$ |

## 研究方法與過程

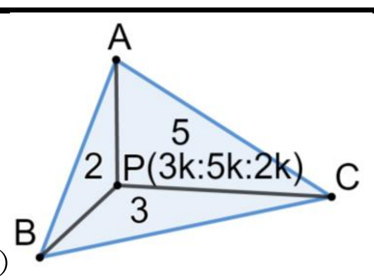
### Ⅰ 預備定理

**<Definition 1>[3]**設$\triangle ABC$為平面上一個三角形，$P$為平面上任意一點。若點$P$至$\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$的有向距離分別為$a$、$b$和$c$，則對每個非零實數$k$，有序三實數$(ka:kb:kc)$稱為點$P$對$\triangle ABC$的一組齊次三線性坐標。(圖一)

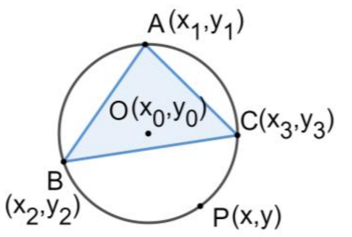
**<Lemma 1>[3]**若$(v_1:v_2:v_3)$是點$P$對$\triangle ABC$的一組三線性坐標，$A$、$B$、$C$的直角坐標分別為$(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$、$(x_3,y_3)$，$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=a:b:c$，則點$P$的直角坐標$(x,y)$為$\left(\frac{a_1\cdot v_1\cdot x_1+a_2\cdot v_2\cdot x_2+a_3\cdot v_3\cdot x_3}{a_1\cdot v_1+a_2\cdot v_2+a_3\cdot v_3},\frac{a_1\cdot v_1\cdot y_1+a_2\cdot v_2\cdot y_2+a_3\cdot v_3\cdot y_3}{a_1\cdot v_1+a_2\cdot v_2+a_3\cdot v_3}\right)$。




(圖一)




(圖二)




(圖三)

**<Definition 2>[3]**設$\triangle ABC$為平面上一個三角形，$P$為平面上任意一點。若$\triangle PBC$、$\triangle PAC$、$\triangle PAB$的有向面積分別為$a$、$b$和$c$，則對每個非零實數$k$，有序三實數$(ka:kb:kc)$稱為點$P$對$\triangle ABC$的一組齊次面積坐標。(圖二)

**<Lemma 4 外接圓方程式>[3]**設圓$O(x_0,y_0)$為$\triangle ABC$外接圓，$A$、$B$、$C$直角坐標為$(x_1,y_1)$、$(x_2,y_2)$、$(x_3,y_3)$，$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=a:b:c$，若有一點$P(x,y)$在圓$O$上，且$P$對$\triangle ABC$的面積坐標為$(u_1:u_2:u_3)$，則$a^2\cdot u_2\cdot u_3+b^2\cdot u_3\cdot u_1+c^2\cdot u_1\cdot u_2=0$。(圖三)

**<Lemma 5(1)>** 若$P$為$\triangle ABC$內部一點，若${}_a\triangle BPC:{}_a\triangle APC:{}_a\triangle APB=l:m:n$，則 $l\cdot\overrightarrow{PA}+m\cdot\overrightarrow{PB}+n\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$。

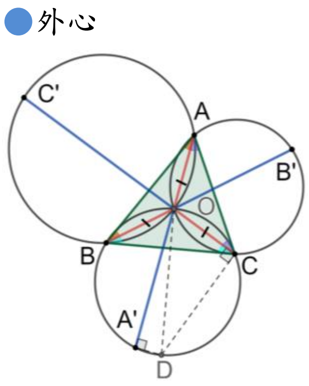
**<Lemma 5(3)>** 若$P$為$n+1$單體$A_1A_2\ldots A_{n+1}$內一點，若$V_{PA_2A_3\ldots A_{n+1}}:V_{PA_1A_3\ldots A_{n+1}}:\ldots:V_{A_1A_2\ldots A_n}=a_1:a_2:\ldots:a_{n+1}$，則$a_1\cdot\overrightarrow{PA_1}+a_2\cdot\overrightarrow{PA_2}+\ldots+a_{n+1}\cdot\overrightarrow{PA_{n+1}}=\overrightarrow{0}$。

## Ⅱ 主定理

(一)任意給定三角形$\triangle ABC$，$P$為其內任意一點，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\triangle BPC$、$\triangle CPA$、$\triangle APB$的外接圓於$A'$、$B'$、$C'$，則$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\ge 8$，且僅有$\triangle ABC$為正三角形時等號成立。

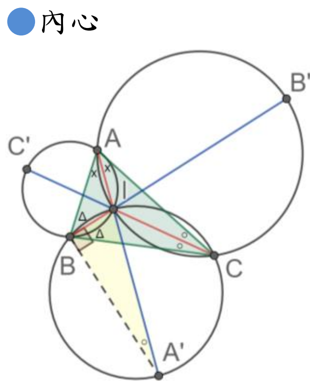
| | $P$為特殊點 | 真實比值 | $\triangle ABC$條件 |
|---|---|---|---|
| **Theorem 1** | $F$ 費馬點 | $\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}}\cdot\frac{\overline{FB'}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{FC'}}{\overline{FC}}=\frac{\left(\sqrt3\sin A-2\cdot\sin B\sin C\right)\cdot\left(\sqrt3\sin B-2\cdot\sin A\sin C\right)\cdot\left(\sqrt3\sin C-2\cdot\sin A\sin B\right)}{\sin A\sin B\sin C\cdot\left(\sqrt3\cos A-\sin A\right)\cdot\left(\sqrt3\cos B-\sin B\right)\cdot\left(\sqrt3\cos C-\sin C\right)}\ge 2^3$ | 三內角小於$120^\circ$ |
| **Theorem 2** | $O$ 外心 | $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\frac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\cdot\frac{1+\cot C\cot A}{1-\cot C\cot A}\cdot\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\ge 2^3$ | 銳角三角形 |
| **Theorem 3** | $I$ 內心 | $\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\times\sin\frac{B}{2}\times\sin\frac{C}{2}}\ge 2^3$ | 任意三角形 |
| **Theorem 4** | $H$ 垂心 | $\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=\frac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\cdot\frac{1+\cot C\cot A}{1-\cot C\cot A}\cdot\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\ge 2^3$ | 銳角三角形 |
| **Theorem 5** | $G$ 重心 | $\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=\prod_{cyc}\frac{\left[\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+2\cdot\overline{BC}^2+\overline{BC}\cdot\left(\overline{AB}\cdot\cos B+\overline{AC}\cdot\cos C\right)\right]}{\left(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2+\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A\right)}\ge 2^3$ | 任意三角形 |

●外心



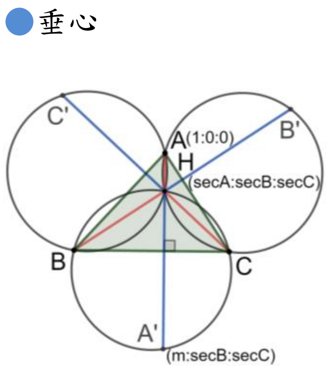

<proof>三角函數
三角恆等式
算幾不等式

●內心



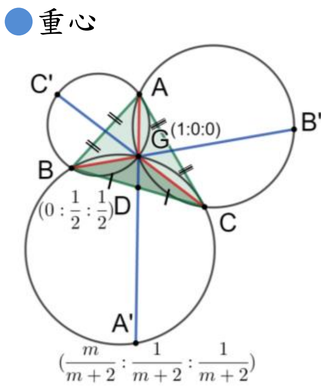

<proof>
三角函數不等式

●垂心



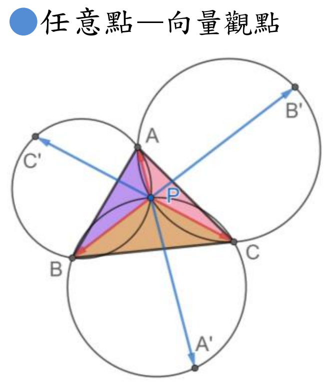

<proof>三線性座標
三角恆等式
算幾不等式

●重心



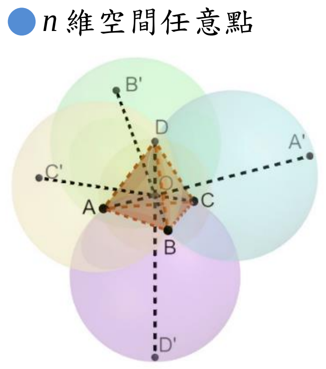

<proof>面積座標
外接圓方程式
中線定理
算幾不等式

●任意點—向量觀點




$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\frac{m\cdot\overline{PB}^2+n\cdot\overline{PC}^2}{l\cdot\overline{PA}^2}$

●$n$維空間任意點




(此圖以三維為例)

$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\ge n^{n+1}$

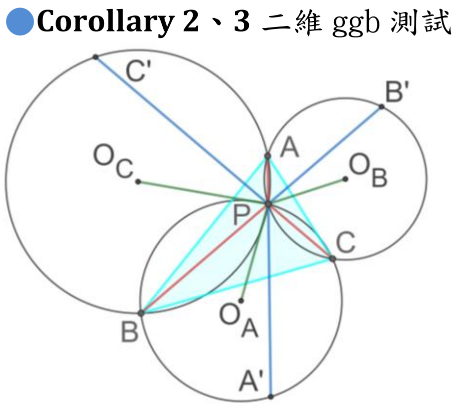
**Theorem 6** 任意給定三角形$\triangle ABC$，$P$為其內任意一點，滿足$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\ge 8$，等號成立時若且唯若$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}=\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=2$。

**Corollary 1** 在$\mathbb{R}^n$空間中，任意給定$n+1$胞體$A_1A_2\ldots A_{n+1}$，$P$為其內部任意一點，$\overleftrightarrow{A_1P}$、$\overleftrightarrow{A_2P}$、⋯、$\overleftrightarrow{A_{n+1}P}$分別與$n+1$胞體$P-A_2A_3\ldots A_{n+1}$、⋯、$P-A_1A_2\ldots A_n$的外接$n-1$維球面交於$A_1'$、⋯、$A_{n+1}'$，滿足$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\ge n^{n+1}$，等號成立時若且唯若$\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}=n$，$\forall k\in\{1,2,\ldots,n+1\}$，$n\ge 2$，$n\in\mathbb{N}$。

**Corollary 2** $P$為$\triangle ABC$內任意一點，$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}=1$[4]；$P$為$n+1$單體$A_1A_2\ldots A_{n+1}$內任意一點，$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k'}}=1$，$n\ge 2$，$n\in\mathbb{N}$。

**Corollary 3** $P$為$\triangle ABC$內任意一點，$\frac{r_A}{\overline{PA}}\cdot\frac{r_B}{\overline{PB}}\cdot\frac{r_C}{\overline{PC}}\ge 1$；$P$為$n+1$單體$A_1A_2\ldots A_{n+1}$內任意一點$\prod_{k=1}^{n+1}\frac{r_k}{\overline{PA_k}}\ge\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}$，$n\ge 2$，$n\in\mathbb{N}$。

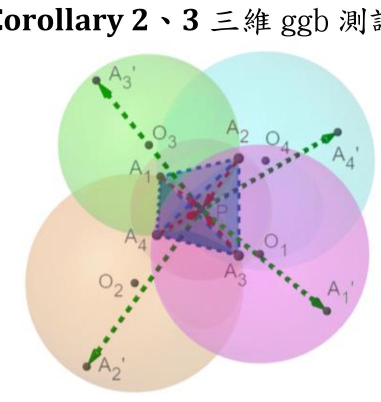
●**Corollary 2、3** 二維 ggb 測試




(1) $\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AA'}}+\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{BB'}}+\frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CC'}}$
$\approx 0.199+0.529+0.272=1$

(2) $\frac{r_A}{\overline{PA}}\cdot\frac{r_B}{\overline{PB}}\cdot\frac{r_C}{\overline{PC}}$
$\approx 2.091\cdot 0.483\cdot 1.567$
$\approx 1.57515\ge 1$

●**Corollary 2、3** 三維 ggb 測試



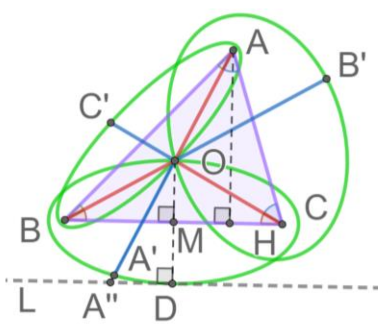
(1) $\frac{\overrightarrow{A_1P}}{\overrightarrow{A_1A_1'}}+\frac{\overrightarrow{A_2P}}{\overrightarrow{A_2A_2'}}+\frac{\overrightarrow{A_3P}}{\overrightarrow{A_3A_3'}}+\frac{\overrightarrow{A_4P}}{\overrightarrow{A_4A_4'}}$
$\approx 0.238+0.251+0.263+0.248=1$

(2) $\frac{r_1}{\overline{PA_1}}\cdot\frac{r_2}{\overline{PA_2}}\cdot\frac{r_3}{\overline{PA_3}}\cdot\frac{r_4}{\overline{PA_4}}$
$\approx 1.542\cdot 1.573\cdot 1.406\cdot 1.538$
$\approx 5.24511\ge\left(\frac{3}{2}\right)^4$

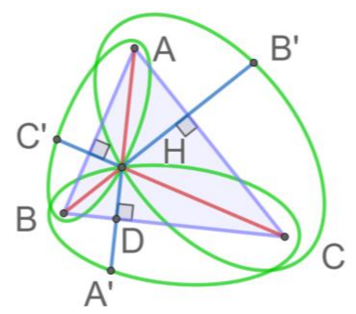
(二)任意給定$\triangle ABC$與一點$P$，分別以三邊為焦距與其上一點$P$建構橢圓$\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$，$\overleftrightarrow{AP}$、$\overleftrightarrow{BP}$、$\overleftrightarrow{CP}$分別交$\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$於$A'$、$B'$、$C'$。

| | $P$為特殊點 | 橢圓作法 | $\triangle ABC$條件 | 滿足性質 | 真實比值 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Theorem 7** | $O$ 外心 | 以三邊為焦距 | 銳角三角形 | $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$ | $\frac{\overline{OA''}}{\overline{OA}}=2\cdot\frac{1-\cot B\cot C}{1+\cot B\cot C}$ |
| **Theorem 8** | $H$ 垂心 | 以三邊為焦距 | 銳角三角形 | $\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\le 1$ | $\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}=\frac{2\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}$ |
| **Theorem 9** | $G$ 重心 | 以三邊為焦距 | 任意三角形 | $\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=1$ | $\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}=\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=1$ |
| **Theorem 10** | $O$ 外心 | 以三邊為長軸 | $45^\circ\le\angle A,\angle B,\angle C<90^\circ$ | $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\le 1$ | $\frac{\overline{OA''}}{\overline{OA}}=2\cdot\frac{1-\cot B\cot C}{1+\cot B\cot C}$ |

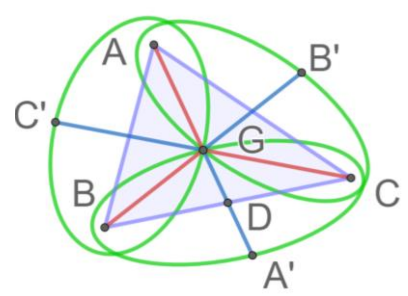
●外心(以三邊為焦距)



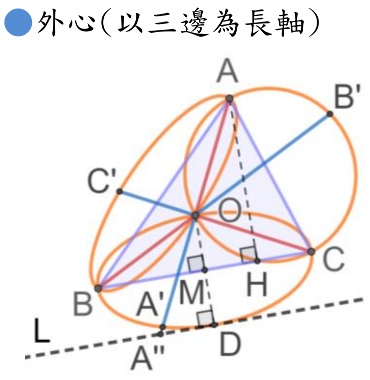

●垂心



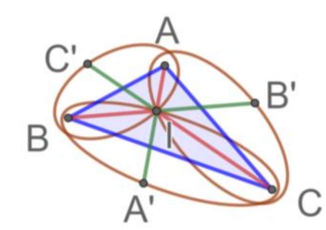

●重心




●外心(以三邊為長軸)




●內心沒有特殊性質




$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}\cdot\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}\cdot\frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\approx 1.063>1$

## Ⅲ 討論

討論 1 外心和垂心的幾何直觀：整組比值 $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=\prod_{cyc}\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}$，相對應的比值 $\frac{\overline{OA_O'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{HA_H'}}{\overline{HA}}$、$\frac{\overline{OB_O'}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{HB_H'}}{\overline{HB}}$、$\frac{\overline{OC_O'}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{HC_H'}}{\overline{HC}}$ 也相同。(圖四)

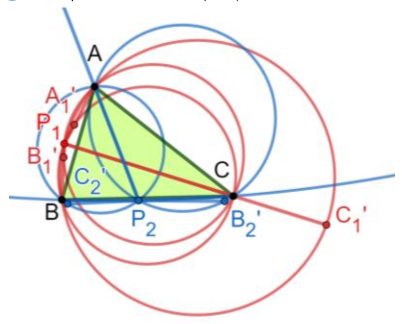
討論 2 定理六中，$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}$、$\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}$、$\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}$ 三個比值不會同時大於 2，卻可以得到 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\geq 8$。(圖五)

討論 3 定理六中，僅當 $\triangle ABC$ 為正三角形且 $P$ 在四心共點的位置時，$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=8$。也就是說當 $\triangle ABC$ 不為正三角形或 $P$ 不在正三角形四心共點的位置時，$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}>8$。

討論 4 $\triangle ABC$ 中，$P$ 為其內一點滿足 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=8$，則下列兩個性質必成立。

(1) $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$ 且 $\overline{AB}//\overline{A'B'}$、$\overline{BC}//\overline{B'C'}$、$\overline{AC}//\overline{A'C'}$。 (2) $\overline{PA}\sin\angle BPC=\overline{PB}\sin\angle APC=\overline{PC}\sin\angle APB$。(圖六)

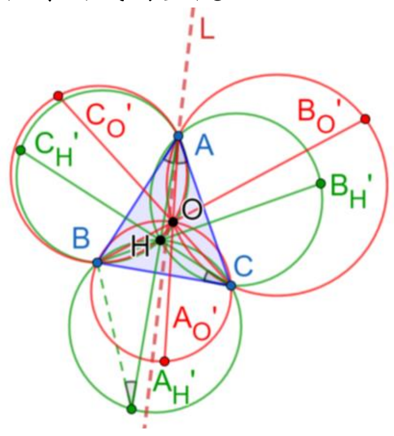
● $P$ 在 $\triangle ABC$ 外部



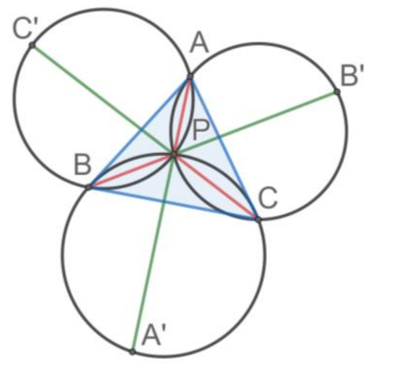
$\frac{\overline{P_1A_1'}}{\overline{P_1A}}\cdot\frac{\overline{P_1B_1'}}{\overline{P_1B}}\cdot\frac{\overline{P_1C_1'}}{\overline{P_1C}}\approx 0.126<2^3$

$\frac{\overline{P_2A_2'}}{\overline{P_2A}}\cdot\frac{\overline{P_2B_2'}}{\overline{P_2B}}\cdot\frac{\overline{P_2C_2'}}{\overline{P_2C}}\approx 20.238>2^3$

● 圖四—外心及垂心比值相等的幾何直觀

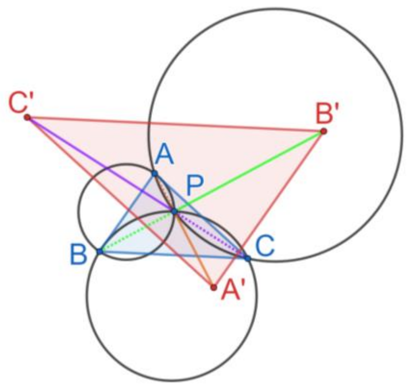


● 圖五—三段比值不會同時大於 2



$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\approx 2.53,\ \frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\approx 1.91,\ \frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\approx 1.68$

● 圖六



已知 $\overline{AB}//\overline{A'B'}$ 且 $2\cdot\overline{AB}=\overline{A'B'}$

## Ⅳ 應用

一、透過任意點的結果，我們可以輕易得到許多特殊的三角函數不等式的結果：

1. $\frac{(\sqrt{3}\sin A-2\cdot\sin B\sin C)\cdot(\sqrt{3}\sin B-2\cdot\sin A\sin C)\cdot(\sqrt{3}\sin C-2\cdot\sin A\sin B)}{\sin A\sin B\sin C\cdot(\sqrt{3}\cos A-\sin A)\cdot(\sqrt{3}\cos B-\sin B)\cdot(\sqrt{3}\cos C-\sin C)}\geq 8$ 2. $\frac{1+\cot B\cot C}{1-\cot B\cot C}\cdot\frac{1+\cot A\cot C}{1-\cot A\cot C}\cdot\frac{1+\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\geq 8$。

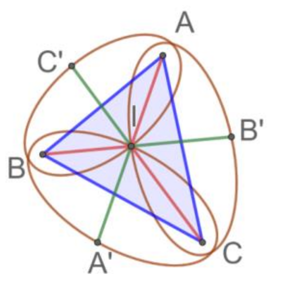
## 研究結果

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ 維空間 | 任意 $n+1$ 單體內任意一點 | | 1. $\prod_{k=1}^{n+1}\frac{\overline{PA_k'}}{\overline{PA_k}}\geq n^{n+1}$ 2. $\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\overrightarrow{A_kP}}{\overrightarrow{A_kA_k'}}=1$ 3. $\prod_{k=1}^{n+1}\frac{r_k}{\overline{PA_k}}\geq\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}$ | | |
| 橢圓 | 以三邊為焦距 | 銳角三角形時成立 | 1. $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\leq 1$ 2. $\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\leq 1$ | 任意三角形時成立 | $\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=1$ |
| | 以三邊為長軸 | $45^\circ\leq$ 三內角 $<90^\circ$ | 1. $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\cdot\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}\cdot\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\leq 1$ 2. $\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}\cdot\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}\cdot\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}=\prod_{cyc}\frac{2\cot A\cot B}{1-\cot A\cot B}\leq 1$ 3. $\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}\cdot\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}\cdot\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=1$ | | |

## 未來展望

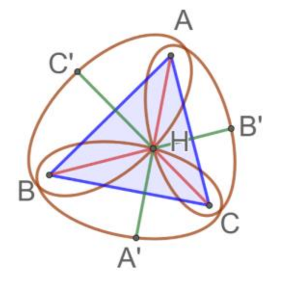
(一)任意給定 $\triangle ABC$ 與一點 $P$，分別以三邊為焦距與其上一點 $P$ 建構橢圓 $\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$，$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{BP}$、$\overrightarrow{CP}$ 分別交 $\Gamma_A$、$\Gamma_B$、$\Gamma_C$ 於 $A'$、$B'$、$C'$。

● 內心



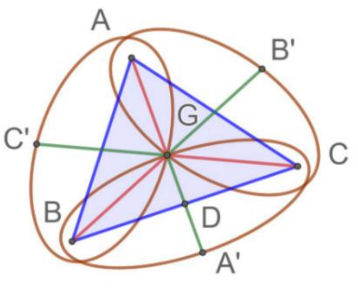
$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}}+\frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}}+\frac{\overline{IC'}}{\overline{IC}}\approx 3.02884>3$

● 垂心



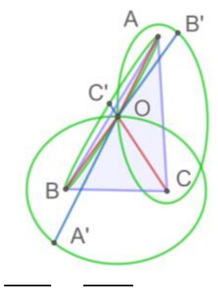
$\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}}+\frac{\overline{HB'}}{\overline{HB}}+\frac{\overline{HC'}}{\overline{HC}}\approx 3.05916>3$

● 重心



$\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}}+\frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}}+\frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}}=3$

● 外心沒有特殊性質

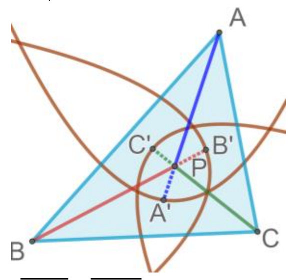


$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}+\frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}+\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}\approx 2.94077<3$

(二)將圓換成拋物線探討比值關係：令 $P$ 為任意 $\triangle ABC$ 內任意一點，$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{BP}$、$\overrightarrow{CP}$ 分別交以 $\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{AB}$ 為準線，$P$ 為焦點的拋物線於另一點 $A'$、$B'$、$C'$，我們發現 $\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\leq\frac{1}{64}$。

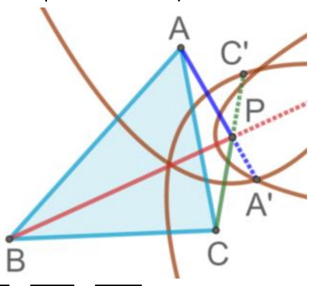
(三)在固定比值下探討任意點軌跡：

● 當 $P$ 在 $\triangle ABC$ 內



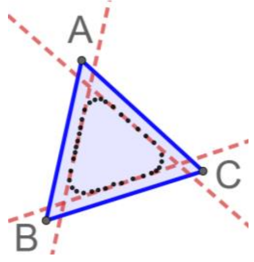
$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\approx 0.01473<\frac{1}{64}$

● 當 $P$ 在 $\triangle ABC$ 外



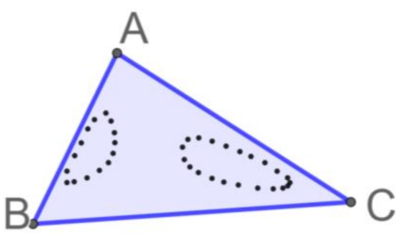
$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}\approx 1.55972>\frac{1}{64}$

● $\triangle ABC$ 為正三角形



$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=9$

● $\triangle ABC$ 為任意三角形



$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}\cdot\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}=9$

## 參考資料


1. 石博允、錢昀(2017)，三角形與其外接錐線的生成錐線性質探討。 2. 黃家禮(1997)，*幾何明珠*，台北市：九章出版社。

3. 趙文敏(1997)，三線性坐標與面積(一)-(五)，*科學教育月刊 198-202 期*。 4. 10th Bay Area Mathematical Olympiad (2008)。