中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050413

城式尋堡

學校名稱：桃園市立武陵高級中等學校

作者：	指導老師：
高二 陳正霖 高二 簡敦佑 高二 呂晉頡	劉任浩

關鍵詞：城堡多項式、塗色問題

壹、摘要

本作品旨在研究一道塗色問題:在一個$m\times n$的棋盤中對任意格子塗上黑色，相鄰方格(有共同邊)不同時塗色的所有方法數。過程中，我們運用二維的城堡多項式的概念來進行研究。首先，我們推出$1\times n$、$2\times n$單色及$1\times n$多色的方法數及公式。再來，我們嘗試估計$m\times n$單色及多色著色方法數的上界及下界。接著，我們針對它的一些性質做討論。最後，我們用程式跑出答案，並印證我們的推論。

貳、研究動機

我們在做數奧歷屆試題時，寫到了一題:有一個2×7的方格(如下圖)，將方格編號 1~14，在方格中選取若干格子塗成黑色(也可以全不選)，使得兩個黑色的格子都不共邊的方法數。(2015 APMO 初選考題第四題)

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

當時我們解法為:

$$設\begin{cases} a_n 為2\times n塗好後，最後一行為兩白的方法數 \\ b_n 為2\times n塗好後，最後一行為一黑一白的方法數 \end{cases}$$

$$得到\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1} \end{cases} \Rightarrow initial = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \; matrix = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)^{n-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$所求為 a_7 + b_7 \Rightarrow \begin{bmatrix} a_7 \\ b_7 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)^6 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 239 \\ 338 \end{bmatrix} \Rightarrow a_7 + b_7 = 239 + 338 = 577$$

我們曾嘗試用矩陣進行研究，希望能將其對角化解出通式，然而在過程中，電腦在計算反矩陣的步驟因計算不夠精密而導致出現過大的誤差。因此我們使用城堡多項式的方法，比起矩陣，它的好處是我們可以從它的x^k項係數得知在棋盤中將k格塗色的方法數，能提供我們更多資訊。

參、研究目的

利用城堡多項式解決上述問題，並嘗試將其推廣到在$m \times n$格、可塗多種顏色，並對其某些性質進行討論。

肆、研究設備及器材

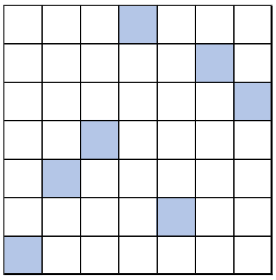
筆電(Word、Excel、Geogebra 3D 計算機、Repl.it Python2.7.Numpy)、紙、筆

伍、研究過程及方法

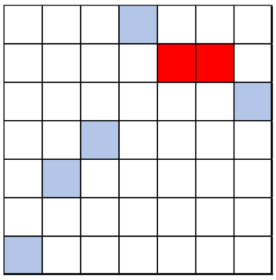
一、二維城堡多項式介紹

(一)放法規則

1 在$m \times n$個方格的棋盤上，每一行及每一列中都至多只有一個方格被放置棋子。

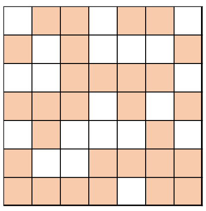


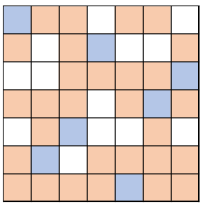
正確放法之一



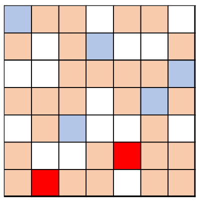
錯誤放法之一

2.若我們的放置位置是有限制的，如以下僅白色的方格能被選中，且須符合規則 1.





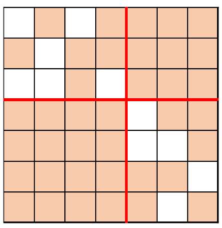
正確放法之一



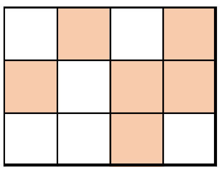
錯誤放法之一

(二)城堡多項式(rook polynomial)

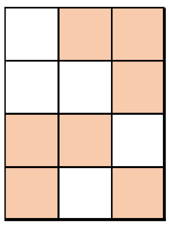
對於一棋盤B，我們根據它的限制格位置給予每一個棋盤一個多項式，記為$R(x,B)=\alpha_0 x^0+\alpha_1 x^1+\ldots+\alpha_k x^k$，其中$\alpha_p$為在$B$上選取$p$格，且每行、每列至多只選一格的總方法數，$x$代$1$所得到的即為總方法數。若棋盤$B_1$能經過行列互換得到棋盤$B_2$，則$B_1$、$B_2$等價(行列互換不影響方法數)，其城堡多項式相同。若B_s可分為B_i、B_j兩個棋盤，且兩者的可放置格彼此不在同一行、同一列上，則$R(x,B_s)=R(x,B_i)\times R(x,B_j)$。



B_s



B_i



B_j

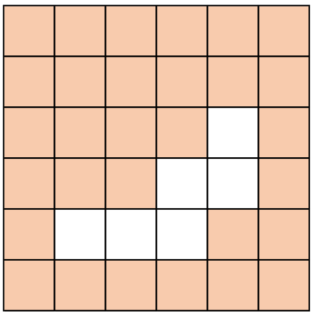
(三)降階公式

對於棋盤C與C上一格可塗色之格子S:

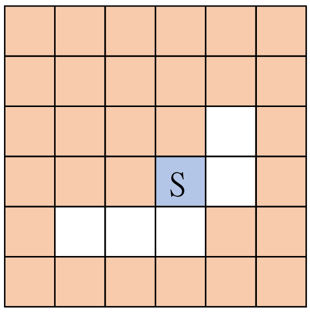
$$R\left(x,C\right)=R\left(x,C_1\right)+xR\left(x,C_2\right)$$

(其中C_1為C去除選定S不塗色的棋盤，而C_2為C選定S塗色的棋盤)

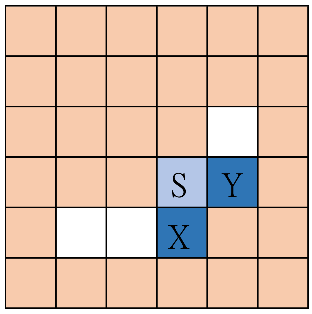
我們對S格進行討論，我們可以分為「沒選S」跟「有選S」這兩類來探討。若沒選S，同行、同列的格子不會受到影響(如圖C_1);若有選S，同行、同列的格子會受到影響(如圖C_2，X、Y為被S影響而無法被選中的格子)。由加法原理，將「沒選S」跟「有選S」兩者的方法數相加可以得出這條公式。計算棋盤的城堡多項式時，此公式可以協助我們計算。



C



C_1



C_2

二、拓展至三維的城堡多項式

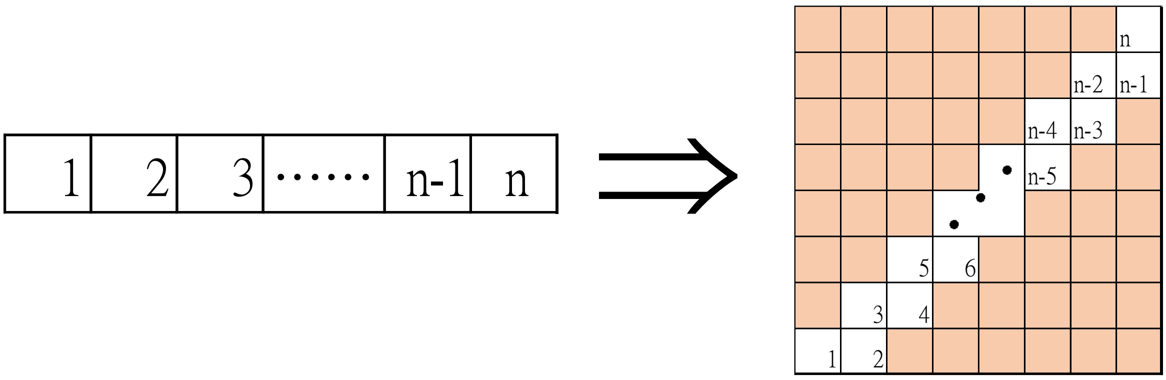
二維中，$m\times n$(令$m\geq n$)棋盤的限制條件為每一行、每一列都最多只能有一格被選，所以最多會選n格；在三維$m\times n\times h$(令$m\geq n\geq h$)的立方體棋盤中，每個單位由原本平面的方格改成立體的方塊，限制條件定為每一個垂直x,y,z軸的平面上，最多只能有一塊被選中，所以最多會選h格。而三維的降階公式也和二維的類似，當被進行降階的方塊「被選中」時，不能再被選中的方塊為和其同平面的其他方塊。

三、$1\times n$的單色方格(二維解法)

THEOREM 1:

$$R(x,B_{\overline{123\ldots n}})=\left(\frac{1+2x+\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{1+4x}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-2x+\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{1+4x}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)^n$$

其中n是正整數，而$R(x,B_{\overline{123\ldots n}})$是$1\times n$城堡多項式



當1被選擇時，2不能再被選；而2被選時，1,3均不能再被選中，因此符合條件接著對1使用降階公式:當1沒被選中時，得到的圖為$B_{\overline{234\ldots n}}$;當1有被選中時，得到的圖為$B_{\overline{345\ldots n}}$，因此我們得到: $R(x,B_n)=R(x,B_{\overline{234\ldots n}})+xR(x,B_{\overline{345\ldots n}})$，發現其為費式數列的遞迴式。

解上式的特徵方程式:

$$k^2=k+x\Rightarrow k=\frac{1\pm\sqrt{1+4x}}{2}$$

$$\Rightarrow R(x,B_{\overline{123\ldots n}})=C_1\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)^n$$

$$\begin{cases}1=R(x,B_0)=C_1+C_2\\ 1+x=R(x,B_1)=C_1\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)+C_2\left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\frac{1+2x+\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{1+4x}}\\ C_2=\frac{-1-2x+\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{1+4x}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow R(x,B_{\overline{123\ldots n}})=\left(\frac{1+2x+\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{1+4x}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-2x+\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{1+4x}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)^n$$

將$x=1$代入:

$$R(1,B_{\overline{123\ldots n}})=\frac{3+\sqrt5}{2\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n+\frac{-3+\sqrt5}{2\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+2}\right]$$

所求的方法數即此多項式的係數和($a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n$)，其為費氏數列的一般項。

n \ 係數	0	1	2	3	4	5	6	7	8		SUM
1	1	1									2
2	1	2									3
3	1	3	1								5
4	1	4	3								8
5	1	5	6	1							13
6	1	6	10	4							21
7	1	7	15	10	1						34
8	1	8	21	20	5						55
9	1	9	28	35	15	1					89
10	1	10	36	56	35	6					144
11	1	11	45	84	70	21	1				233
12	1	12	55	120	126	56	7				377
13	1	13	66	165	210	126	28	1			610
14	1	14	78	220	330	252	84	8			987
15	1	15	91	286	495	462	210	36	1		1597

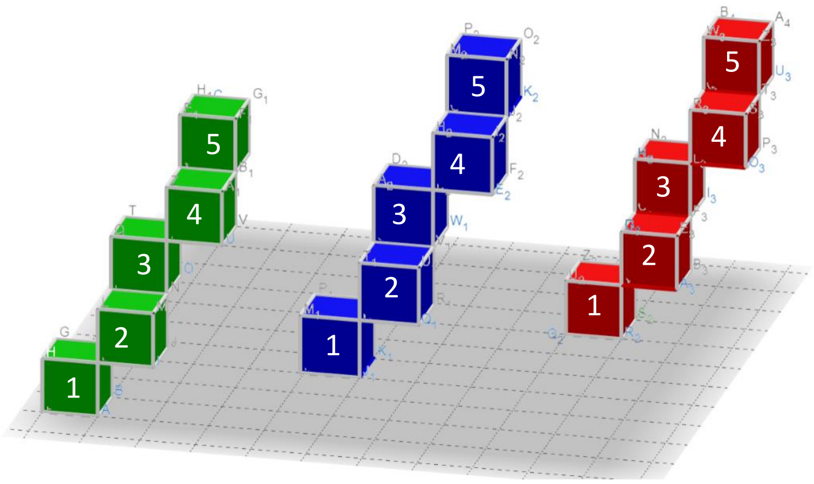
▲上表為程式跑出之結果($n=1\sim15$)，縱軸為$1\times n$所要代入的n，橫軸為城堡多項式x的次方，表中數字代表各項係數，最後一行為總方法數。

四、$1\times n$多色方格(三維解法)

THEOREM 2:

$$R(x,O_{n,\lambda})=R\left(x,O_{n-1,\lambda}\right)+\sum_{k=1}^{n-2}\lambda\left(\lambda-1\right)^{k-1}x^{k}R\left(x,O_{n-k,\lambda}\right)+\lambda\left(\lambda\text{-}1\right)^{(n-1)-1}x^{(n-1)}\left[1+\left(\lambda-1\right)x\right]$$

接著我們將$1\times n$推廣到多色。多色的限制條件為相鄰兩方格不能被同一色選中，但允許被不同色選中。先以1×5的方格塗上三個顏色(可以都不塗)為例，且同色兩兩互不相鄰。我們利用「相鄰兩方格不能塗同色」的條件畫出其立體圖。我們的定



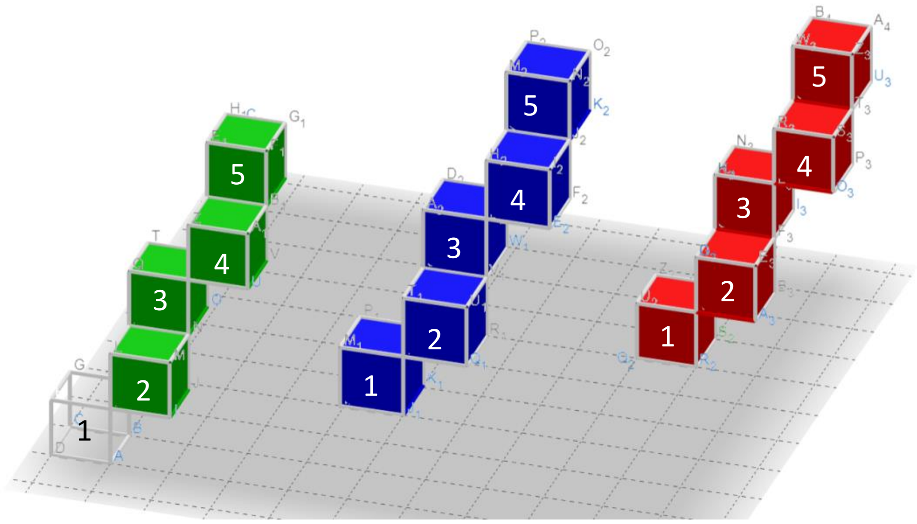
法是:當綠1被選擇時，1號方格塗上綠色，而此時藍1和紅1因和綠1同平面，因此不能再被選中，故每一格至多只會被塗上一色。而相鄰方格不同色的部分，則是將原本平面的圖拉成立體，使其符合三維城堡多項式的條件。

其平面示意圖如下:

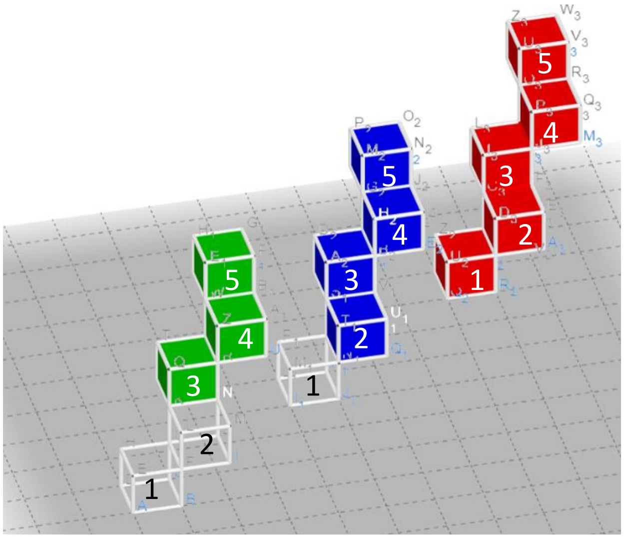
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

我們定義符號: $O_{n,\lambda}$ 為「$1\times n$的方格內塗λ種顏色的方法數」的立體圖，如上圖為$O_{5,3}$

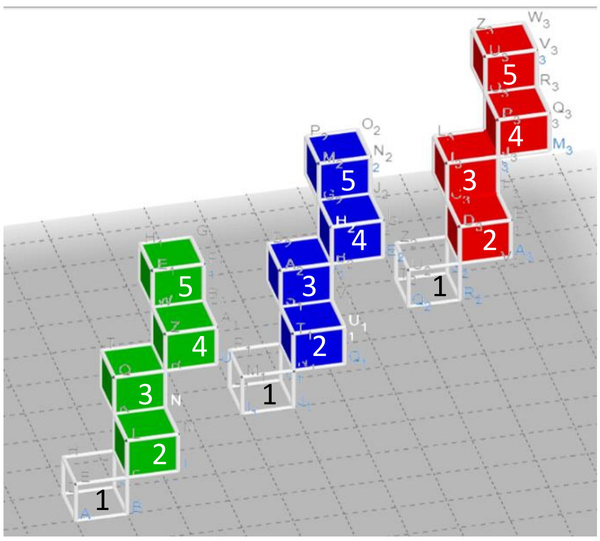
而若某色少了某些方格，我們定義“$O_{n,c}-c_{p_i,q_i}c_{p_j,q_j}\cdots c_{p_s,q_s}$”為$O_{n,c}$扣去其第$p_i$色第$q_i$格、第$p_j$色第$q_j$格⋯第$p_s$色第$q_s$格 (意即第$q_k$格不可被選為$p_k$色)。例如$O_{5,3}-c_{綠,1}$的圖形如下:



$O_{5,3}-c_{綠,1}c_{綠,2}c_{藍,1}$



$O_{5,3}-c_{綠,1}c_{藍,1}c_{紅,1}$



首先:

$$
\begin{aligned}
&R\left(x,O_{n,\lambda}\right)\\
&=R\left(x,O_{n,\lambda}-c_{a,1}\right)+xR\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{a,1}\right)\\
&=R\left(x,O_{n,\lambda}-c_{a,1}c_{b,1}\right)+xR\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{a,1}\right)+xR\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{b,1}\right)\\
&=\cdots\cdots=\underline{R\left(x,O_{n,\lambda}-c_{a,1}c_{b,1}\cdots c_{\lambda,1}\right)}+xR\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{a,1}\right)+xR\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{b,1}\right)+\cdots+xR\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{\lambda,1}\right)\\
&=\underline{R\left(x,O_{n,\lambda\text{-}1}\right)}+x\left[R\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{a,1}\right)+R\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{b,1}\right)+\cdots+R\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{\lambda,1}\right)\right]—①
\end{aligned}
$$

其中$R\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{a,1}\right)$、$R\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{b,1}\right)$、...、$R\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{\lambda,1}\right)$的圖形皆相同，僅缺去的顏色不同，並不影響方法數，故$R\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{a,1}\right)=R\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{b,1}\right)=\ldots=R\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{\lambda,1}\right)$。

因此，①可化簡成: $R\left(x,O_{n,\lambda}\right)=R\left(x,O_{n\text{-}1,\lambda}\right)+\lambda xR\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{a,1}\right)$。

$$
\begin{aligned}
&\text{而 } R\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{a,1}\right)\\
&=R\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{a,1}c_{b,1}\right)+xR\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{b,1}\right)\qquad\left(O_{n-1,\lambda}-c_{a,1}\text{對}b\text{色第1塊降階}\right)\\
&=R\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{a,1}c_{b,1}c_{c,1}\right)+xR\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{b,1}\right)+xR\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{c,1}\right)\qquad\left(O_{n-1,\lambda}-c_{a,1}c_{b,1}\text{對}c\text{色第1塊降階}\right)\\
&=\cdots\cdots\qquad\left(\text{反覆執行此動作直到出現}O_{n-2,\lambda}\right)\\
&=R\left(x,O_{n-2,\lambda}\right)+xR\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{b,1}\right)+xR\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{c,1}\right)+\ldots+xR\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{\lambda,1}\right)\\
&=R\left(x,O_{n-2,\lambda}\right)+\left(\lambda-1\right)xR\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{a,1}\right)\\
&\qquad\left(\because R\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{a,1}\right)=R\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{b,1}\right)=\ldots=R\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{\lambda,1}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{因此}R\left(x,O_{n,\lambda}\right)\\
&=R\left(x,O_{n-1,\lambda}\right)+\lambda xR\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{a,1}\right)\\
&=R\left(x,O_{n-1,\lambda}\right)+\lambda x\left[R\left(x,O_{n-2,\lambda}\right)+\left(\lambda-1\right)xR\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{a,1}\right)\right]\\
&=R\left(x,O_{n-1,\lambda}\right)+\lambda xR\left(x,O_{n-2,\lambda}\right)+\underline{\lambda\left(\lambda-1\right)x^2R\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{a,1}\right)}
\end{aligned}
$$

再對底線部分進行拆解(方法同$R\left(x,O_{n-1,\lambda}-c_{a,1}\right)$):

$$
\begin{aligned}
&R\left(x,O_{n,\lambda}\right)\\
&=R\left(x,O_{n-1,\lambda}\right)+\lambda xR\left(x,O_{n-2,\lambda}\right)+\underline{\lambda\left(\lambda-1\right)x^2R\left(x,O_{n-2,\lambda}-c_{a,1}\right)}\\
&=R\left(x,O_{n-1,\lambda}\right)+\lambda xR\left(x,O_{n-2,\lambda}\right)+\underline{\lambda\left(\lambda-1\right)x^2R\left(x,O_{n-3,\lambda}\right)+\lambda\left(\lambda-1\right)^2x^3R\left(x,O_{n-3,\lambda}-c_{a,1}\right)}\\
&=\ \cdots\cdots\ \text{(一直對最後一行降階)}\\
&=R\left(x,O_{n-1,\lambda}\right)+\lambda xR\left(x,O_{n-2,\lambda}\right)+\lambda\left(\lambda-1\right)x^2R\left(x,O_{n-3,\lambda}\right)\\
&\quad+\cdots\cdots+\lambda\left(\lambda-1\right)^{(n-2)-1}x^{(n-2)}R\left(x,O_{n-1-(n-2),\lambda}\right)+\underline{\underline{\lambda\left(\lambda-1\right)^{(n-1)-1}x^{(n-1)}R\left(x,O_{n-(n-1),\lambda}-c_{a,1}\right)}}\\
&=R\left(x,O_{n-1,\lambda}\right)+\sum_{k=1}^{n-2}\lambda\left(\lambda-1\right)^{k-1}x^kR\left(x,O_{n-k,\lambda}\right)+\underline{\underline{\lambda\left(\lambda-1\right)^{(n-1)-1}x^{(n-1)}\left[1+\left(\lambda-1\right)x\right]}}
\end{aligned}
$$

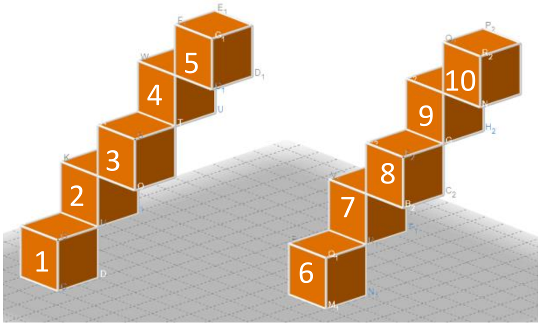
五、 $2\times n$ 單色方格(三維解法)

THEOREM 3:

$$R(x,O_{n,2})=R\left(x,O_{n-1,2}\right)+\sum_{k=1}^{n-2}2x^{k}R\left(x,O_{n-k,2}\right)+2x^{(n-1)}\left(1+x\right)$$

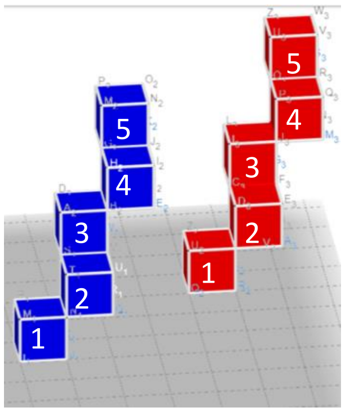
我們將 $2\times n$ 單色的方格依相鄰兩格不能同時被選中之規定畫出其立體圖，發現其和 $1\times n$ 雙色的立體圖相同，因此我們可以得知「$1\times n$ 雙色的方法數等於 $2\times n$ 單色的方法數」

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10



其平面示意圖如下:

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5



直接引用上方 $1\times n$ 多色方格的遞迴式，將 $\lambda=2$ 代入:

$$\begin{aligned}R(x,O_{n,\lambda})&=R\left(x,O_{n-1,2}\right)+\sum_{k=1}^{n-2}2\left(2-1\right)^{k-1}x^{k}R\left(x,O_{n-k,2}\right)+2\left(2-1\right)^{(n-1)-1}x^{(n-1)}\left[1+\left(2-1\right)x\right]\\&=R\left(x,O_{n-1,2}\right)+\sum_{k=1}^{n-2}2x^{k}R\left(x,O_{n-k,2}\right)+2x^{(n-1)}\left(1+x\right)\end{aligned}$$

即得「在 $2\times n$ 的方格中塗色方法數」的遞迴式。

係數 / N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	SUM
2	1	4	2														7
3	1	6	8	2													17
4	1	8	18	12	2												41
5	1	10	32	38	16	2											99
6	1	12	50	88	66	20	2										239
7	1	14	72	170	192	102	24	2									577
8	1	16	98	292	450	360	146	28	2								1393
9	1	18	128	462	912	1002	608	198	32	2							3363
10	1	20	162	688	1666	2364	1970	952	258	36	2						8119
11	1	22	200	978	2816	4942	5336	3530	1408	326	40	2					19601
12	1	24	242	1340	4482	9424	12624	10836	5890	1992	402	44	2				47303
13	1	26	288	1782	6800	16722	27008	28814	20256	9290	2720	486	48	2			114243
14	1	28	338	2312	9922	28004	53154	68464	59906	35436	14002	3608	578	52	2		275807
15	1	30	392	2938	14016	44726	97880	148626	157184	115598	58728	20330	4672	678	56	2	665857

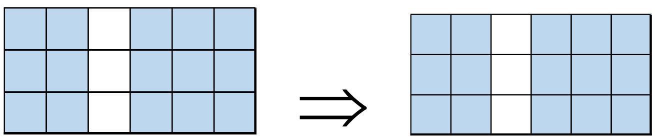
▲上表為程式跑出之結果($n=1\sim15$)，縱軸為$2\times n$所要代入的n，橫軸為城堡多項式x的次方，表中數字代表各項係數，最後一行為總方法數。

六、分拆公式

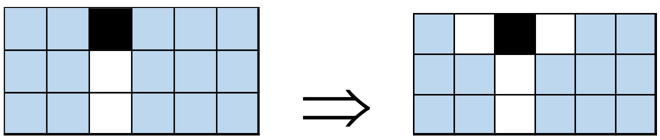
首先，我們首先以$3\times n$單色為例，我們定義$B_{m,n,k}$為一$m\times(n+1)$的棋盤上，最旁邊那排為第k種選法所生成的$m\times n$棋盤，並定義$w_{m,n,k}$為$B_{m,n,k}$總方法數。特別地，第0種為全部都不選的情況，其導致$m\times n$棋盤的最左方仍為完整的，意即$w_{m,n,0}$為$m\times n$棋盤的方法數。而我們定義$w_{m,0,k}=1$。我們在下方推導出一個公式，此公式將有助於我們接續進行討論。

> THEOREM 4:
> $$R(x,B_{m,a,0})R(x,B_{m,b,0})+R(x,B_{m,a,1})R(x,B_{m,b,1})+\ldots+R(x,B_{m,a,t})R(x,B_{m,b,t})=R(x,B_{m,a+b+1,0})$$
> 最旁邊那排有$t+1$種塗法(含第 0 種)

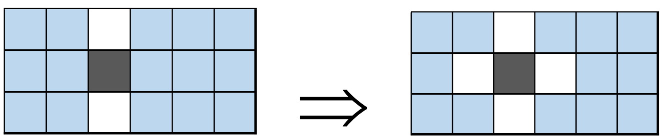
其原理是對$m\times n$棋盤上某一排的所有塗法進行討論，以下以3×6為例，我們對第三列的所有選法進行討論，有以下五種:



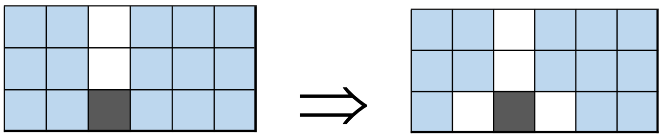
$$R(x,B_{3,2,0})\times R(x,B_{3,3,0})$$



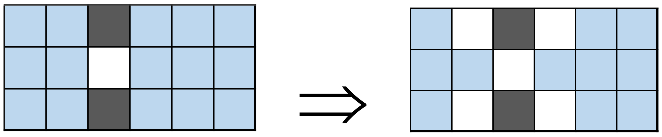
$$R(x,B_{3,2,1})\times R(x,B_{3,3,1})$$



$$R(x,B_{3,2,2})\times R(x,B_{3,3,2})$$



$$R\left(x,B_{3,2,3}\right)\times R\left(x,B_{3,3,3}\right)$$



$$R\left(x,B_{3,2,4}\right)\times R\left(x,B_{3,3,4}\right)$$

將右方五條相加即為 $R\left(x,B_{3,6,0}\right)$。

運用上述的想法，我們可以得到 THEOREM 4 。特別地，當選定的列為最左(或最右)方那列時，上述公式會變為:

$$R\left(x,B_{m,0,0}\right)\times R\left(x,B_{m,a,0}\right)+R\left(x,B_{m,0,1}\right)\times R\left(x,B_{m,a,1}\right)+\cdots+R\left(x,B_{m,0,t}\right)\times R\left(x,B_{m,a,t}\right)$$
$$=R\left(x,B_{m,a,0}\right)+R\left(x,B_{m,a,1}\right)+\cdots+R\left(x,B_{m,a,t}\right)=R\left(x,B_{m,a+1,0}\right)$$

因 $w_{m,a,k}$ 代表 $B_{m,a,k}$ 的方法數，即 $w_{m,a,k}=R\left(x,B_{m,a,k}\right)$ 故 $x=1$ 代入可得:

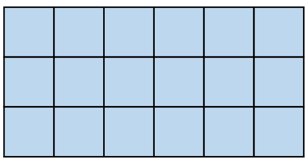
$$w_{m,a,0}w_{m,b,0}+w_{m,a,1}w_{m,b,1}+\cdots+w_{m,a,n+t}w_{m,b,t}=w_{m,a+b+1,0}$$

$$w_{m,0,0}w_{m,a,0}+w_{m,0,1}w_{m,a,1}+\cdots+w_{m,0,t}w_{m,a,t}=w_{m,a,0}+w_{m,a,1}+\cdots+w_{m,a,t}=w_{m,a+1,0}$$

我們將在後面運用這幾條公式進行討論。

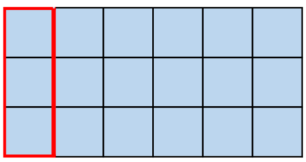
七、 $m\times n$ 單色及多色方格

以下以 3×6 為例

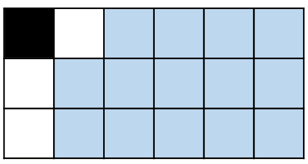


$B_{3,6,0}$

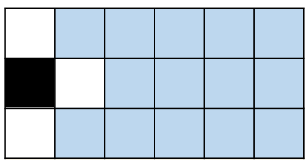
先對第一行用 THEOREM 4:



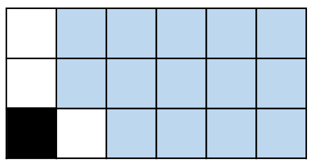
以下為第一行所有可能選取(黑色為選取的格子，白色為不選的)的方法:



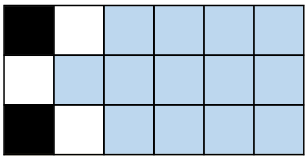
$B_{3,5,1}$



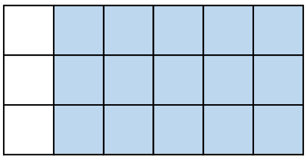
$B_{3,5,2}$



$B_{3,5,3}$



$B_{3,5,4}$



$B_{3,5,0}$

我們得到 $R(x,B_{3,6,0})=R(x,B_{3,5,0})+R(x,B_{3,5,1})+R(x,B_{3,5,2})+R(x,B_{3,5,3})+R(x,B_{3,5,4})$。我們可以藉由 THEOREM 4 得到遞迴式:

$R(x,B_{3,n,0})=R(x,B_{3,n-1,0})+R(x,B_{3,n-1,1})+R(x,B_{3,n-1,2})+R(x,B_{3,n-1,3})+R(x,B_{3,n-1,4})$ 對所有 $n>1$ 成立。同樣地，我們再分別對 $B_{3,n,1}$、$B_{3,n,2}$、$B_{3,n,3}$、$B_{3,n,4}$ 使用 THEOREM 4，得到如下的遞迴方程組:

$$\begin{cases} R(x,B_{3,n,0})=R(x,B_{3,n-1,0})+R(x,B_{3,n-1,1})+R(x,B_{3,n-1,2})+R(x,B_{3,n-1,3})+R(x,B_{3,n-1,4}) \\ R(x,B_{3,n,1})=R(x,B_{3,n-1,0})+R(x,B_{3,n-1,2})+R(x,B_{3,n-1,3}) \\ R(x,B_{3,n,2})=R(x,B_{3,n-1,0})+R(x,B_{3,n-1,1})+R(x,B_{3,n-1,3})+R(x,B_{3,n-1,4}) \\ R(x,B_{3,n,3})=R(x,B_{3,n-1,0})+R(x,B_{3,n-1,1})+R(x,B_{3,n-1,2}) \\ R(x,B_{3,n,4})=R(x,B_{3,n-1,0})+R(x,B_{3,n-1,2}) \end{cases}$$

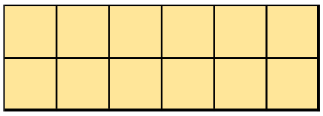
最後，我們運用程式協助我們計算，跑出結果。

N \ 係數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	sum
1	1	3	1														5
2	1	6	8	2													17
3	1	9	24	22	6	1											63
4	1	12	49	84	61	18	2										227
5	1	15	83	215	276	174	53	9	1								827
6	1	18	126	442	840	880	504	158	28	2							2999
7	1	21	178	792	2023	3063	2763	1478	472	93	12	1					10897
8	1	24	239	1292	4176	8406	10692	8604	4374	1416	297	38	2				39561
9	1	27	309	1969	7731	19591	32716	36257	26674	13035	4264	945	142	15	1		143677
10	1	30	388	2850	13201	40542	84658	121580	120521	82496	39062	12882	2982	478	48	2	521721

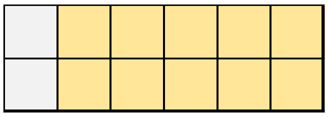
▲上表為程式跑出之結果($n=1\sim10$)，縱軸為 $1\times n$ 所要代入的 n，橫軸為城堡多項式 x 的次方，表中數字代表各項係數，最後一行為總方法數。

接著進入多色的部分，想法和單色大致相同，我們先延伸我們的定義，$B^{c}{}_{m,n,k}$、$w^{c}{}_{m,n,k}$ 的上標 c 為顏色數。

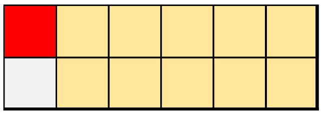
我們以 $2\times n$ 三色為例:



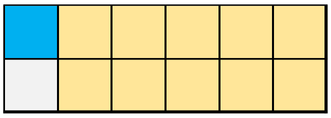
$B^{3}{}_{2,6,0}$



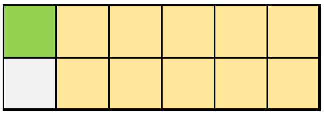
$B^{3}{}_{2,5,0}$



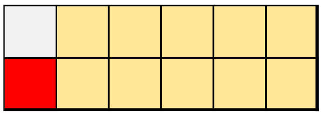
$B^{3}{}_{2,5,1}$



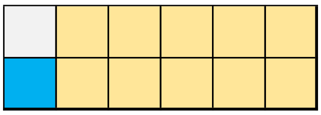
$B^{3}{}_{2,5,2}$



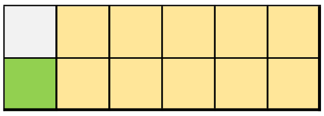
$B^{3}{}_{2,5,3}$



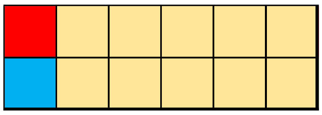
$B^{3}{}_{2,5,4}$



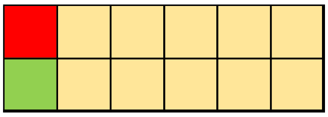
$B^{3}{}_{2,5,5}$



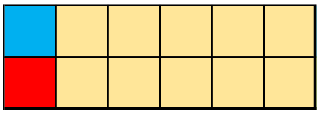
$B^{3}{}_{2,5,6}$



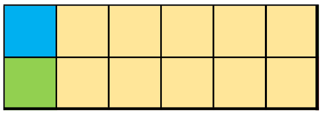
$B^{3}{}_{2,5,7}$



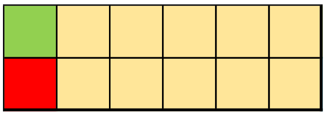
$B^{3}{}_{2,5,8}$



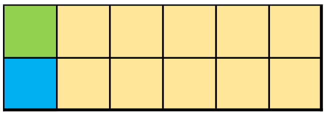
$B^{3}{}_{2,5,9}$



$B^{3}{}_{2,5,10}$



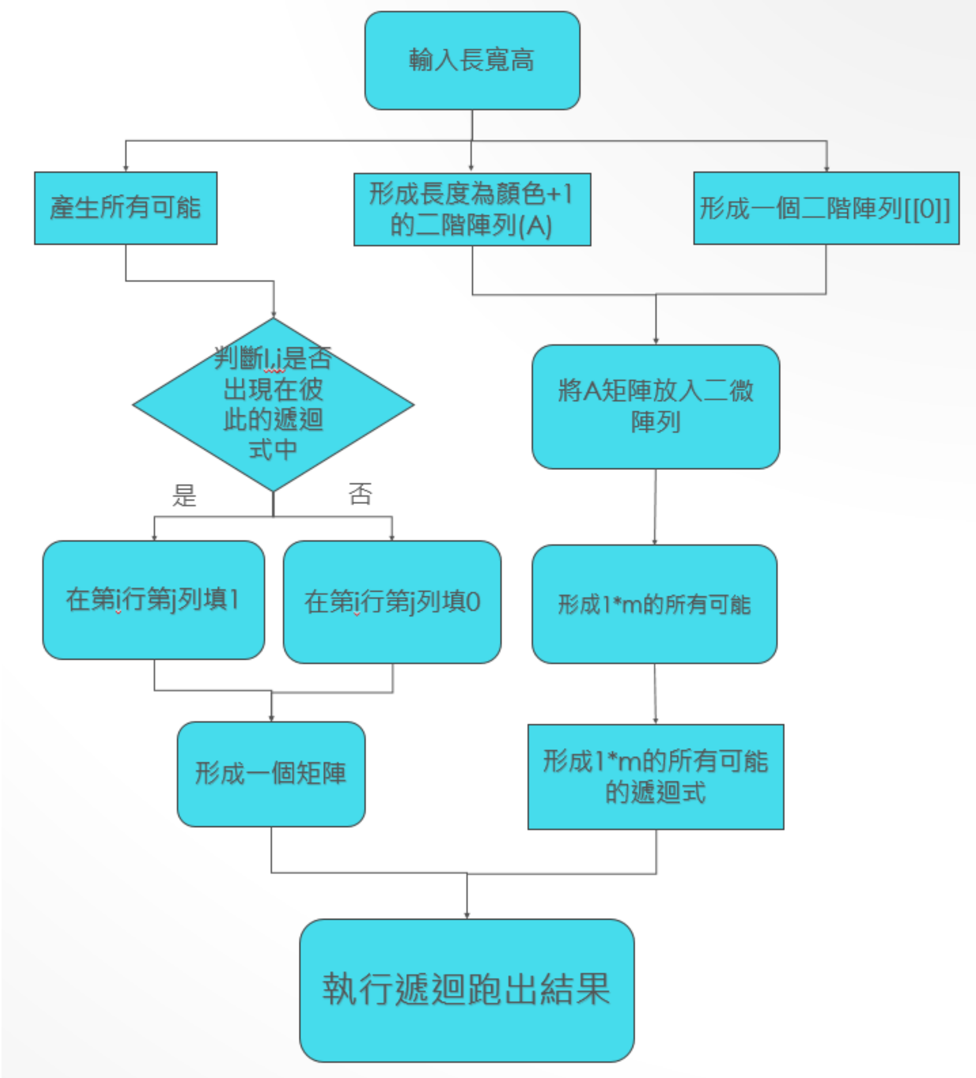
$B^{3}{}_{2,5,11}$



$B^{3}{}_{2,5,12}$

$$\begin{cases}
B^{3}{}_{2,6,0}=B^{3}{}_{2,5,0}+B^{3}{}_{2,5,1}+B^{3}{}_{2,5,2}+B^{3}{}_{2,5,3}+B^{3}{}_{2,5,4}+B^{3}{}_{2,5,5}+B^{3}{}_{2,5,6}+B^{3}{}_{2,5,7}+B^{3}{}_{2,5,8}+B^{3}{}_{2,5,9}+B^{3}{}_{2,5,10}+B^{3}{}_{2,5,11}+B^{3}{}_{2,5,12}\\
B^{3}{}_{2,6,1}=B^{3}{}_{2,5,0}+B^{3}{}_{2,5,2}+B^{3}{}_{2,5,3}+B^{3}{}_{2,5,4}+B^{3}{}_{2,5,5}+B^{3}{}_{2,5,6}+B^{3}{}_{2,5,9}+B^{3}{}_{2,5,10}+B^{3}{}_{2,5,11}+B^{3}{}_{2,5,12}\\
B^{3}{}_{2,6,2}=B^{3}{}_{2,5,0}+B^{3}{}_{2,5,1}+B^{3}{}_{2,5,3}+B^{3}{}_{2,5,4}+B^{3}{}_{2,5,5}+B^{3}{}_{2,5,6}+B^{3}{}_{2,5,7}+B^{3}{}_{2,5,8}+B^{3}{}_{2,5,11}+B^{3}{}_{2,5,12}\\
B^{3}{}_{2,6,3}=B^{3}{}_{2,5,0}+B^{3}{}_{2,5,1}+B^{3}{}_{2,5,2}+B^{3}{}_{2,5,4}+B^{3}{}_{2,5,5}+B^{3}{}_{2,5,6}+B^{3}{}_{2,5,7}+B^{3}{}_{2,5,8}+B^{3}{}_{2,5,9}+B^{3}{}_{2,5,10}\\
B^{3}{}_{2,6,4}=B^{3}{}_{2,5,0}+B^{3}{}_{2,5,1}+B^{3}{}_{2,5,2}+B^{3}{}_{2,5,3}+B^{3}{}_{2,5,5}+B^{3}{}_{2,5,6}+B^{3}{}_{2,5,7}+B^{3}{}_{2,5,8}+B^{3}{}_{2,5,10}+B^{3}{}_{2,5,12}\\
B^{3}{}_{2,6,5}=B^{3}{}_{2,5,0}+B^{3}{}_{2,5,1}+B^{3}{}_{2,5,2}+B^{3}{}_{2,5,3}+B^{3}{}_{2,5,4}+B^{3}{}_{2,5,6}+B^{3}{}_{2,5,8}+B^{3}{}_{2,5,9}+B^{3}{}_{2,5,10}+B^{3}{}_{2,5,11}\\
B^{3}{}_{2,6,6}=B^{3}{}_{2,5,0}+B^{3}{}_{2,5,1}+B^{3}{}_{2,5,2}+B^{3}{}_{2,5,3}+B^{3}{}_{2,5,4}+B^{3}{}_{2,5,5}+B^{3}{}_{2,5,7}+B^{3}{}_{2,5,9}+B^{3}{}_{2,5,11}+B^{3}{}_{2,5,12}\\
B^{3}{}_{2,6,7}=B^{3}{}_{2,5,0}+B^{3}{}_{2,5,2}+B^{3}{}_{2,5,3}+B^{3}{}_{2,5,4}+B^{3}{}_{2,5,6}+B^{3}{}_{2,5,9}+B^{3}{}_{2,5,10}+B^{3}{}_{2,5,11}\\
B^{3}{}_{2,6,8}=B^{3}{}_{2,5,0}+B^{3}{}_{2,5,2}+B^{3}{}_{2,5,3}+B^{3}{}_{2,5,4}+B^{3}{}_{2,5,5}+B^{3}{}_{2,5,9}+B^{3}{}_{2,5,11}+B^{3}{}_{2,5,12}\\
B^{3}{}_{2,6,9}=B^{3}{}_{2,5,0}+B^{3}{}_{2,5,1}+B^{3}{}_{2,5,3}+B^{3}{}_{2,5,5}+B^{3}{}_{2,5,6}+B^{3}{}_{2,5,7}+B^{3}{}_{2,5,8}+B^{3}{}_{2,5,12}\\
B^{3}{}_{2,6,10}=B^{3}{}_{2,5,0}+B^{3}{}_{2,5,1}+B^{3}{}_{2,5,3}+B^{3}{}_{2,5,4}+B^{3}{}_{2,5,5}+B^{3}{}_{2,5,7}+B^{3}{}_{2,5,11}+B^{3}{}_{2,5,12}\\
B^{3}{}_{2,6,11}=B^{3}{}_{2,5,0}+B^{3}{}_{2,5,1}+B^{3}{}_{2,5,2}+B^{3}{}_{2,5,5}+B^{3}{}_{2,5,6}+B^{3}{}_{2,5,7}+B^{3}{}_{2,5,8}+B^{3}{}_{2,5,10}\\
B^{3}{}_{2,6,12}=B^{3}{}_{2,5,0}+B^{3}{}_{2,5,1}+B^{3}{}_{2,5,2}+B^{3}{}_{2,5,4}+B^{3}{}_{2,5,6}+B^{3}{}_{2,5,8}+B^{3}{}_{2,5,9}+B^{3}{}_{2,5,10}
\end{cases}$$

最後一樣用程式協助我們跑出答案，.下方為我們程式的流程圖，程式碼附在附錄。



八、討論上下界

(一)奇數下界:

> THEOREM 5:
>
> $$w_{m,2n+3,0} > \frac{(w_{m,2n+2,0})^2}{(w_{m,2n+1,0})}\text{，即}\frac{w_{m,2n+3,0}}{w_{m,2n+2,0}} > \frac{w_{m,2n+2,0}}{w_{m,2n+1,0}}$$

$$w_{m,2n+2,0}{}^2$$

$$=(w_{m,n,0}w_{m,n+1,0}+w_{m,n,1}w_{m,n+1,1}+\dots\dots+w_{m,n,x}w_{m,n+1,x})^2$$

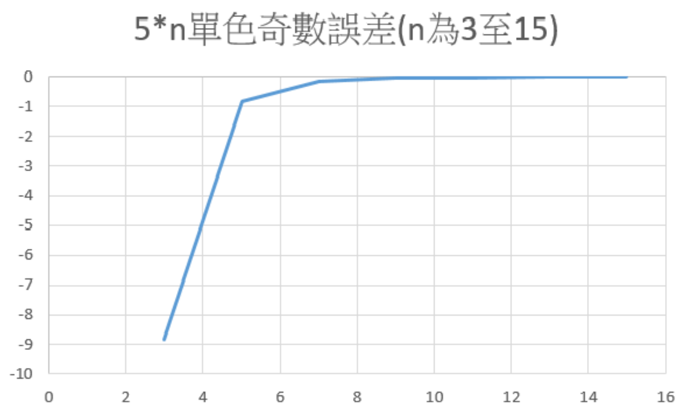
$$\le(w_{m,n,0}{}^2+w_{m,n,1}{}^2+\dots\dots+w_{m,n,x}{}^2)\,(w_{m,n+1,0}{}^2+w_{m,n+1,1}{}^2+\dots\dots+w_{m,n+1,x}{}^2)\qquad\text{(柯西不等式)}$$

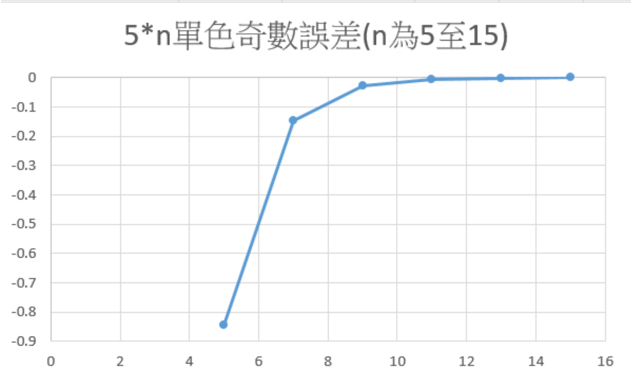
$$=w_{m,2n+1,0}\times w_{m,2n+3,0}$$

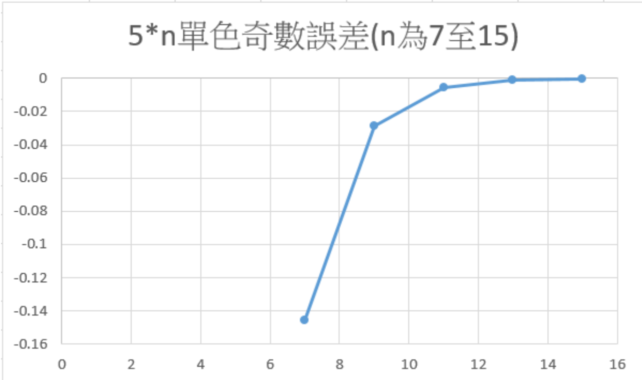
$$\Rightarrow(w_{m,2n+2,0})^2\le(w_{m,2n+1,0})\left(w_{m,2n+3,0}\right)\Rightarrow w_{m,2n+3,0}>\frac{(w_{m,2n+2,0})^2}{(w_{m,2n+1,0})}$$

我們以 $\frac{(w_{m,2n+2,0})^2}{(w_{m,2n+1,0})}$ ，來估計 $w_{m,2n+3,0}$ 的下界。

實際值	估計值	誤差(%)
827	753.9231	-8.836387313
55447	54979.5	-0.843142058
3729091	3723659	-0.145661825
250916131	2.51E+08	-0.028428992
16884649135	1.69E+10	-0.005693416
1.13622E+12	1.14E+12	-0.001147872
7.64602E+13	7.65E+13	-0.00023186







(E 為科學記號)

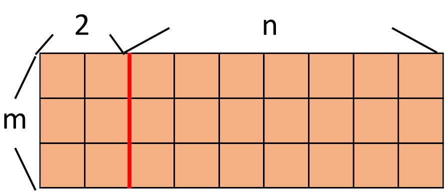
我們發現其誤差變化折線十分相近，我們將在後方有更多的討論。.

(二)奇數上界:

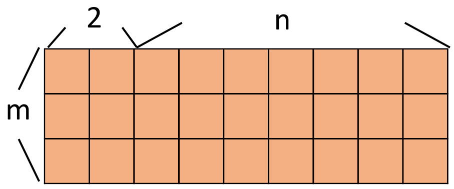
THEOREM 6:

$$w_{m,n,0} < w_{m,2,0}w_{m,n-2,0} - w_{m,n-1,0} - (w_{m,1,0}{}^2 - w_{m,1,0} - w_{m,2,0}) \times 2^{\frac{m-1}{2}} \times (\frac{m-1}{2}) \times w_{m,n-4,0}$$

我們分析圖形並推導出一組公式，得到誤差小的估計值。首先將一塊 $m \times n$ 的棋盤拆分成兩塊分別為 $m \times 2$ 、 $m \times (n-2)$ 的棋盤，其方法數分別為 $w_{m,2,0}$ 、 $w_{m,n-2,0}$ ，顯然的 $w_{m,2,0}\ w_{m,n-2,0} > w_{m,n,0}$ (令紅線部分為可不遵守相鄰兩格不能都塗之規則，則下圖一的方法數會較圖二多出原本不符合規則的塗法，因此 $w_{m,2,0}\ w_{m,n-2,0} > w_{m,n,0}$ 。)



圖一: $w_{m,2,0}\ w_{m,n-2,0}$

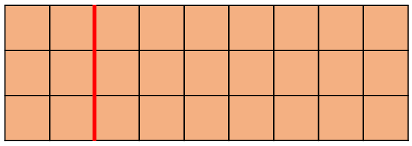


圖二: $w_{m,n,0}$

不過上述左式的方法數遠大於右式，為了減少誤差值，我們要扣掉多出的方法數:

對 $w_{m,2,0}w_{m,n-2,0}$ 及 $w_{m,n,0}$ 的第二、三列用 Theorem 4。考慮到圖二紅線左右兩列的方法數皆為 $w_{m,1,0}$ 。

這兩行所有可能塗法$\left(有w_{m,1,0}\times w_{m,1,0}=w_{m,1,0}{}^{2}項\right)$減去合乎規定的所有方法$\left(有w_{m,2,0}項\right)$即為不合格的塗法$\left(有w_{m,1,0}{}^{2}-w_{m,2,0}項\right)$

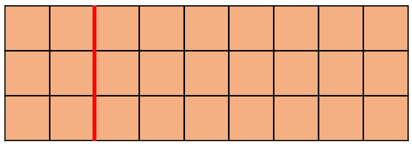


然後我們發現這些不合規定的方法中，含左右兩列塗法完全相同的 $w_{m,1,0}$ 項有精確的算法，故我們將其提出另外討論，其方法數為:

$$w_{m,1,0}w_{m,n-3,0}+w_{m,1,1}w_{m,n-3,1}+\ldots+w_{m,1,k}w_{m,n-3,k}=w_{m,n-1,0}$$

此時不合規定的方法剩下 $(w_{m,1,0}{}^{2}-w_{m,2,0}-w_{m,1,0})$:

上述兩列不合規定的所有方法當中，其相鄰行都會受其影響，如下圖:第一列的方法數受到第二列影響，第四列(含)以後的方法數受到第三列影響



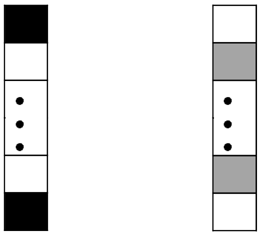
1 2 3 4 ... ...

因此我們考慮此兩列(第二列及第三列)的放法:

若將這些項分別進行討論，將會使討論變的複雜且不易計算，因此我們將其全部代換成一個極小值(設那兩列左方 $m\times1$ 的部分的方法數的極小值為 a ，右方 $m\times\left(n-3\right)$ 的部分的極小值為 b，可列出: $w_{m,n,0}<w_{m,2,0}w_{m,n-2,0}-w_{m,n-1,0}-ab\left(w_{m,1,0}{}^{2}-w_{m,1,0}-w_{m,2,0}\right)$)，以利我們計算。先討論 a。

我們發現當 m 為奇數時，將紅線左方那一行第一格塗色、第二格不塗、□□□、第 m 格塗色(即黑白相間)，此種塗法會使得其對應圖形的方法數最少$\left(a=2^{\frac{m-1}{2}}\right)$:

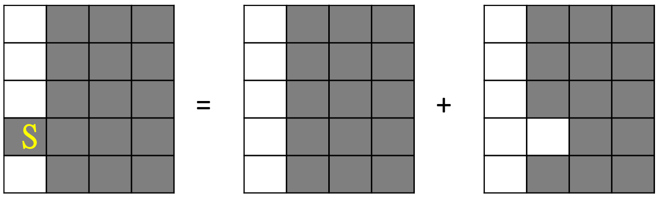
其對應圖形:



可得: $\underline{w_{m,n,0}} < \underline{w_{m,2,0}w_{m,n-2,0} - w_{m,n-1,0}} - 2^{\frac{m-1}{2}} b\left(w_{m,1,0}{}^{2} - w_{m,1,0} - w_{m,2,0}\right)$

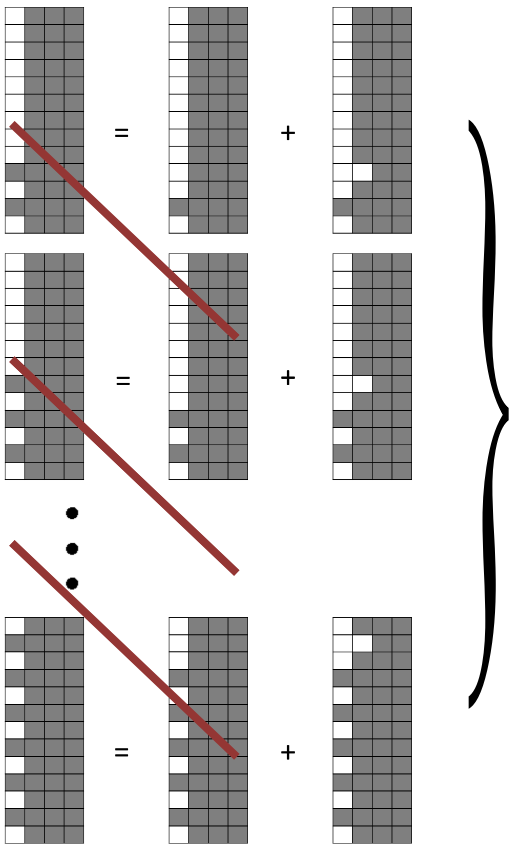
同樣的，將紅線右方那一行第一格塗色、第二格不塗、□□□、第 m 格塗色(即黑白相間)，此種塗法會使得其對應圖形的方法數最少(即為所求 b)

接著我們推導 b 的估計值:先以 $m=5$ 的其中一種圖形說明等式（下方算式中之圖形代表其方法數，同樣白色為必不塗，灰色為可塗可不塗):



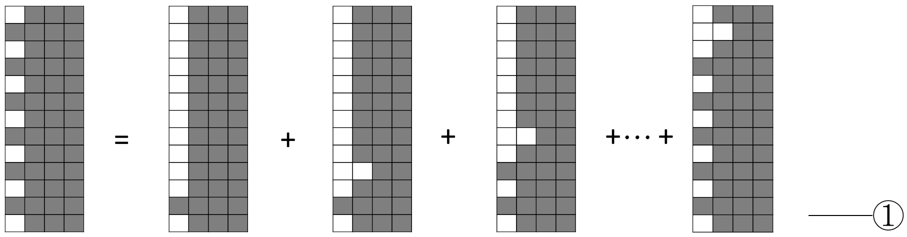
(此算式為對此圖形降階等號右方分別為不塗 S 及要塗 S 之圖形)

接著推廣到 m 為任一奇數:

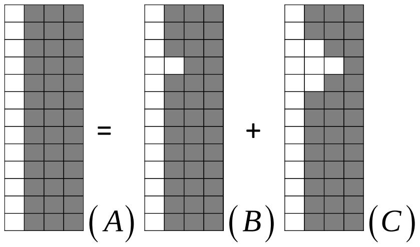


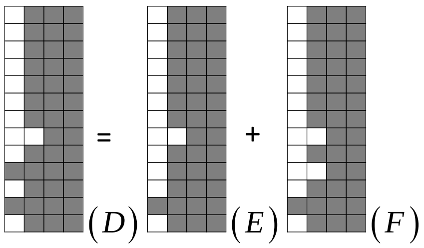
$\frac{m-1}{2}-1$ 項

將上述所有式子相加，可得:



經由降階公式可得:





其中定義$(A)\sim(F)$分別為其圖形之方法數:

顯然的:$(E)>(B)$、$(F)>(C)$

$\Rightarrow (D)=(E)+(F)>(B)+(C)=(A)$

故①式中等號右方共有$\left(\dfrac{m-1}{2}-1\right)+1=\dfrac{m-1}{2}$個圖形，且每個圖形皆$>(A)$。

$\therefore k=$ ①$>\left(\dfrac{m-1}{2}\right)(A)$

且(A)為在$m\times(n-4)$棋盤中塗色的方法數$=w_{m,n-4,0}\Rightarrow b>\dfrac{m-1}{2}\times w_{m,n-4,0}$

因此可得:

$$
\begin{aligned}
w_{m,n,0} &< w_{m,2,0}w_{m,n-2,0}-w_{m,n-1,0}-2^{\frac{m-1}{2}}b\left(w_{m,1,0}{}^{2}-w_{m,1,0}-w_{m,2,0}\right)\\
&< w_{m,2,0}w_{m,n-2,0}-w_{m,n-1,0}-2^{\frac{m-1}{2}}\times\left(\frac{m-1}{2}\right)\times w_{m,n-4,0}\times\left(w_{m,1,0}{}^{2}-w_{m,1,0}-w_{m,2,0}\right)
\end{aligned}
$$

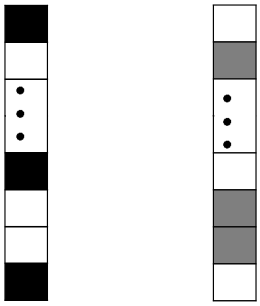
(三)偶數上界:

THEOREM 7:

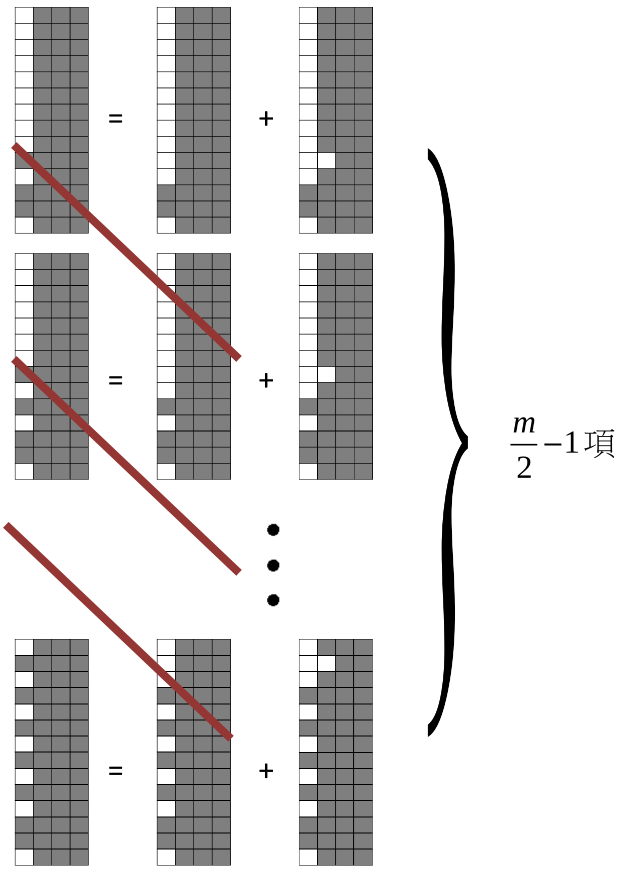
$$
w_{m,n,0}<w_{m,2,0}w_{m,n-2,0}-w_{m,n-1,0}-\left(w_{m,1,0}{}^{2}-w_{m,1,0}-w_{m,2,0}\right)\times\left(2^{\frac{m-4}{2}}\times 3\right)\times\frac{m}{2}\times w_{m,n-4,0}
$$

偶數推法跟奇數相同: 設那兩列左方$m\times1$的部分的方法數的極小值為c，右方$m\times(n-3)$的部分的極小值為d，可列出: $w_{m,n,0} < w_{m,2,0}w_{m,n-2,0} - w_{m,n-1,0} - cd\left(w_{m,1,0}{}^{2} - w_{m,1,0} - w_{m,2,0}\right)$。將紅線左方那一行第一格塗色、第二格不塗、□□□、第m-3格塗色、第m-2格不塗、第m-1格不塗、第m格塗色，此種塗法會使得其對應圖形的方法數最少$\left(c = 2^{\frac{m-4}{2}} \times 3\right)$:

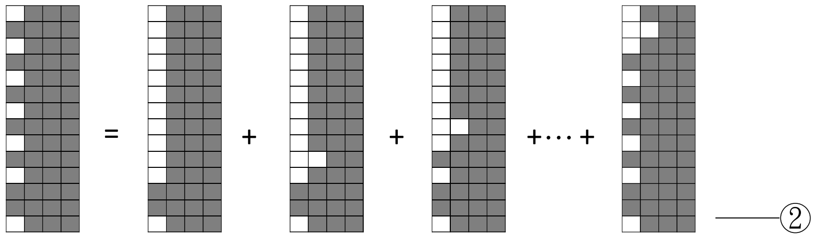
其對應圖形



同樣的，將紅線右方那一行第一格塗色、第二格不塗、□□□、第m-3格塗色、第m-2格不塗、第m-1格不塗、第m格塗色，此種塗法會使得其對應圖形的方法數最少(即為所求d):



將上述所有式子相加，可得:



故②式中等號右方共有$\left(\frac{m}{2}-1\right)+1=\frac{m}{2}$個圖形，且每個圖形皆$> w_{m,n-4,0}$ 。

$$\therefore d = ② > \left(\frac{m}{2}\right)\times w_{m,n-4,0}$$

因此可推得:

$$w_{m,n,0} < w_{m,2,0}w_{m,n-2,0} - w_{m,n-1,0} - cd\left(w_{m,1,0}{}^{2} - w_{m,1,0} - w_{m,2,0}\right)$$
$$< w_{m,2,0}w_{m,n-2,0} - w_{m,n-1,0} - \left(w_{m,1,0}{}^{2} - w_{m,1,0} - w_{m,2,0}\right)\times\left(2^{\frac{m-4}{2}}\times 3\right)\times\frac{m}{2}\times w_{m,n-4,0}$$

(四)雙色上界:

THEOREM 8:

$$w_{m,n,0} \le w_{m,2,0}w_{m,n-2,0} - w_{m,n-1,0} - (w_{m,1,0}{}^{2} - w_{m,1,0} - w_{m,2,0})\times 2^{m}\times(m+1)\times w_{m,n-4,0}$$

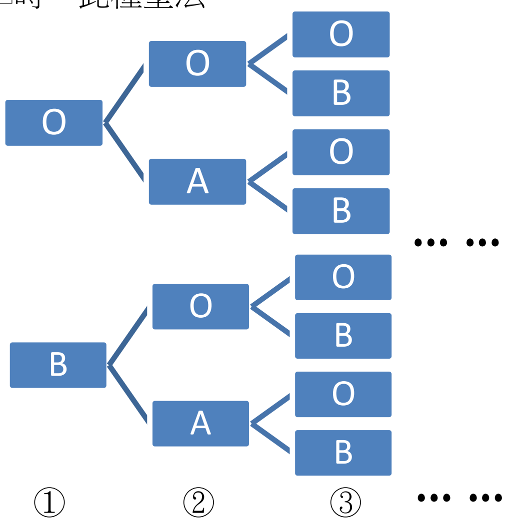
其推法與奇偶數上界相同，同樣的只有那兩列左右兩部分的最小值不同。設左方$m\times1$的部分的方法數的極小值為e ，右方$m\times(n-3)$的部分的極小值為 f ，可列出:

$w_{m,n,0} < w_{m,2,0}w_{m,n-2,0} - w_{m,n-1,0} - ef\left(w_{m,1,0}{}^{2} - w_{m,1,0} - w_{m,2,0}\right)$:當紅線左方那一行第一格塗$A$色、第二格塗$B$色、第三格塗$A$色、□□□時，此種塗法會使得其對應圖形的方法數最少$\left(e=2^{m}\right)$ ，解釋如下:

紅線左方那一行之圖形: 其對應之圖形:

紅線左方那一行之圖形	其對應之圖形
A	①
B	②
A	③
B	④
⋮	⋮

(①、②、□□□如右圖)



如果紅線左方那一行之塗法為A、B色相間，則其對應圖形之方法如右上圖:若第一格塗A色，其對應之可能塗法為不塗(令為 0)或塗B色(令為B)兩種。接著第二格塗B色，若第一格對應之塗法為 0，第二格對應之可能塗法為 0 或A兩種；若第一格對應之塗法為 0，第二格對應之

可能塗法為 0 或 A 兩種。以此類推:第一格之對應圖形有兩種塗法，且其中每個塗法在下一格都恰有兩種塗法，可得 $e=2^m$ 。

接著探討 f :同樣的當紅線右方那一行第一格塗 A 色、第二格塗 B 色、第三格塗 A 色、⋯⋯時，此種塗法會使得其對應圖形的方法數最少。同奇數上界推法，可得 $f=(m+1)$。將 e 、 f 代入:

$$w_{m,n,0} \le w_{m,2,0}w_{m,n-2,0} - w_{m,n-1,0} - ({w_{m,1,0}}^2 - w_{m,1,0} - w_{m,2,0}) \times 2^m \times (m+1) \times w_{m,n-4,0}$$

(五)三色上界:

THEOREM 9:

$$w_{m,n,0} \le w_{m,2,0}w_{m,n-2,0} - w_{m,n-1,0} - ({w_{m,1,0}}^2 - w_{m,1,0} - w_{m,2,0}) \times 2^m \times (m+1) \times f_{2m+2}$$

(其中 f_i 為費氏數列的第 i 項)

同樣只有那兩列左右兩部分的最小值不同。設左方 $m\times1$ 的部分的方法數的極小值為 g ，右方 $m\times(n-3)$ 的部分的極小值為 h ，可列出: $w_{m,n,0} < w_{m,2,0}w_{m,n-2,0} - w_{m,n-1,0} - gh\left({w_{m,1,0}}^2 - w_{m,1,0} - w_{m,2,0}\right)$ 。先討論 g :首先定義符號， A_m 、 B_m 、 C_m 分別為在其對應圖形 $(m\times1)$ 中，第 m 格規定塗 A 色、 B 色、 C 色的方法數， X_m 為第 m 格規定不塗的方法數。其中: $A_1=B_1=C_1=X_1=1$ 、 $A_2=B_1+C_1+X_1=3=B_2=C_2$ 、 $X_2=A_1+B_1+C_1+X_1=4$ 、⋯⋯以此類推，可知 $A_k=B_k=C_k$ ；且依序為費氏數列的第二項、第三項、⋯⋯， $f_2=1$ 、 $f_3=2$ 、 $f_4=3$ 、⋯⋯以此類推。令紅線左方第 m 格塗 A 色、第 m-1 格塗 B 色，其列式如下:

$$\begin{aligned} X_m+B_m+C_m &= (X_{m-1}+A_{m-1}+C_{m-1})+(X_{m-1}+A_{m-1}+C_{m-1})+(X_{m-1}+A_{m-1}) \\ &= 3X_{m-1}+3A_{m-1}+2C_{m-1}(=f_4X_{m-1}+f_4A_{m-1}+f_3C_{m-1}) \text{———①} \end{aligned}$$

接下來討論第三格:

若塗 A : $① = 3(X_{m-2}+B_{m-2}+C_{m-2})+3(X_{m-2}+B_{m-2}+C_{m-2})+2(X_{m-2}+B_{m-2}) = 8X_{m-2}+8B_{m-2}+6C_{m-2}$

若塗 C : $① = 3(X_{m-2}+A_{m-2}+B_{m-2})+3(X_{m-2}+B_{m-2})+2(X_{m-2}+A_{m-2}+B_{m-2}) = 8X_{m-2}+5A_{m-2}+8B_{m-2}$

$\therefore$ 塗 A 色的方法數會大於塗 C 色。為求出其對應圖形之方法數之極小值，故選擇塗法數較少的 C 色。

(上方證明可沿用至下方，塗的顏色選擇塗法數較少的，故可得當紅線左方那一行為 A 、 B 、 C 、 A 、 B 、 C 、⋯⋯依序塗時，其對應圖形之方法數會最少)接著繼續向下推導:

① $=8X_{m-2}+5A_{m-2}+8B_{m-2}\left(=f_6X_{m-2}+f_6B_{m-2}+f_5A_{m-2}\right)$
$=\left(f_6+f_6+f_5\right)X_{m-3}+\left(f_6+f_6+f_5\right)C_{m-3}+\left(f_6+f_5\right)B_{m-3}\left(=f_8X_{m-3}+f_8C_{m-3}+f_7B_{m-3}\right)$
$=\cdots=f_{2k+2}X_{m-k}+f_{2k+2}I_{m-k}+f_{2k+1}J_{m-k}$
$=\cdots=f_{2m}X_1+f_{2m}I'_1+f_{2m-1}J'_1=f_{2m}+f_{2m}+f_{2m-1}=f_{2m+2}$

其中I 、 J為在對應圖形第$(m-k)$格中，可能塗的兩種顏色，由$(m-k)$除以 3 的餘數來判斷:
當$m-k\equiv m\pmod 3$時，紅線右方的第$(m-k)$格塗A色其對應塗法可為塗B 、塗C或不塗，再由上方推導可知此時C_{m-k}的係數會大於B_{m-k}的係數，故可知$I=C$ 、 $J=B$。同理可知當$m-k\equiv m\text{-}1\pmod 3$: $I=A$ 、 $J=C$ ； $m-k\equiv m\text{-}2\pmod 3$: $I=B$ 、 $J=A$。 I' 、 J'亦同理。

接著探討h:同樣的當紅線右方那一行第一格塗A色、第二格塗B色、第三格塗C色、第三格塗A色、⋯時，此種塗法會使得其對應圖形的方法數最少。同雙色上界推法，可得$h=m+1$ 。

將g 、 h代入即可得: $w_{m,n,0}\le w_{m,2,0}w_{m,n-2,0}-w_{m,n-1,0}-({w_{m,1,0}}^2-w_{m,1,0}-w_{m,2,0})\times 2^m\times(m+1)\times f_{2m+2}$

(六)偶數下界

THEOREM 10:

$$w_{m,2n+2,0}>\left(w_{m,n+1,0}+w_{m,n+2,0}\right)\left(\frac{\left[\frac{m}{2}\right]}{\frac{1}{w_{m,n-1,0}}+\frac{1}{w_{m,n,0}}}\right)$$

(其中[ ]為高斯符號)

$$w_{m,2n+2,0}=w_{m,\mathrm{n},0}w_{m,n+1,0}+w_{m,\mathrm{n},0}w_{m,n+1,0}+\ldots+w_{m,\mathrm{n},0}w_{m,n+1,0}$$

$$=\left(w_{m,\mathrm{n},0}+w_{m,n+1,0}\right)\frac{w_{m,\mathrm{n},0}w_{m,n+1,0}}{w_{m,\mathrm{n},0}+w_{m,n+1,0}}+\left(w_{m,\mathrm{n},1}+w_{m,n+1,1}\right)\frac{w_{m,\mathrm{n},1}w_{m,n+1,1}}{w_{m,\mathrm{n},1}+w_{m,n+1,1}}+\ldots$$

$$+\left(w_{m,\mathrm{n,k}}+w_{m,n+1,\mathrm{k}}\right)\frac{w_{m,\mathrm{n,k}}w_{m,n+1,\mathrm{k}}}{w_{m,\mathrm{n,k}}+w_{m,n+1,\mathrm{k}}}$$

$$>\left(w_{m,\mathrm{n},0}+w_{m,n+1,0}\right)\frac{w_{m,\mathrm{n,min}}w_{m,n+1,\mathrm{min}}}{w_{m,\mathrm{n,min}}+w_{m,n+1,\mathrm{min}}}+\left(w_{m,\mathrm{n},1}+w_{m,n+1,1}\right)\frac{w_{m,\mathrm{n,min}}w_{m,n+1,\mathrm{min}}}{w_{m,\mathrm{n,min}}+w_{m,n+1,\mathrm{min}}}+\ldots$$

$$+\left(w_{m,\mathrm{n,k}}+w_{m,n+1,\mathrm{k}}\right)\frac{w_{m,\mathrm{n,min}}w_{m,n+1,\mathrm{min}}}{w_{m,\mathrm{n,min}}+w_{m,n+1,\mathrm{min}}}$$

$$=\left(w_{m,\mathrm{n},0}+w_{m,\mathrm{n},1}+\ldots+w_{m,\mathrm{n,k}}+w_{m,n+1,0}+w_{m,n+1,1}+\ldots+w_{m,n+1,\mathrm{k}}\right)\frac{w_{m,\mathrm{n,min}}w_{m,n+1,\mathrm{min}}}{w_{m,\mathrm{n,min}}+w_{m,n+1,\mathrm{min}}}$$

$$=\left(w_{m,\mathrm{n}+1,0}+w_{m,n+2,0}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{w_{m,\mathrm{n,min}}}+\frac{1}{w_{m,n+1,\mathrm{min}}}}\right)$$

其中 $w_{\mathrm{a,b,min}}$ 為 $w_{\mathrm{a,b,0}}$、$w_{\mathrm{a,b,1}}$、...$w_{\mathrm{a,b},t}$ 中最小的一個，而接著我們將對 m 的奇偶性進行討論，我們將利用討論上界時所使用的不等式(奇數: $b=\frac{m-1}{2}$ ，偶數 $d=\frac{m}{2}$)。當 m 為奇數時:

$$w_{m,2n+2,0}>\left(w_{m,\mathrm{n}+1,0}+w_{m,n+2,0}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{w_{m,\mathrm{n,min}}}+\frac{1}{w_{m,n+1,\mathrm{min}}}}\right)$$

$$=\left(w_{m,\mathrm{n}+1,0}+w_{m,n+2,0}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{m-1}{2}w_{m,n-1,0}}+\frac{1}{\frac{m-1}{2}w_{m,n,0}}}\right)$$

$$=\left(w_{m,\mathrm{n}+1,0}+w_{m,n+2,0}\right)\left(\frac{\frac{m-1}{2}}{\frac{1}{w_{m,n-1,0}}+\frac{1}{w_{m,n,0}}}\right)$$

當 m 為偶數時:

$$w_{m,2n+2,0}>\left(w_{m,\mathrm{n}+1,0}+w_{m,n+2,0}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{w_{m,\mathrm{n,min}}}+\frac{1}{w_{m,n+1,\mathrm{min}}}}\right)$$

$$=\left(w_{m,\mathrm{n}+1,0}+w_{m,n+2,0}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{m}{2}w_{m,n-1,0}}+\frac{1}{\frac{m}{2}w_{m,n,0}}}\right)$$

$$=\left(w_{m,\mathrm{n}+1,0}+w_{m,n+2,0}\right)\left(\frac{\frac{m}{2}}{\frac{1}{w_{m,n-1,0}}+\frac{1}{w_{m,n,0}}}\right)$$

綜合來說，我們可寫成:

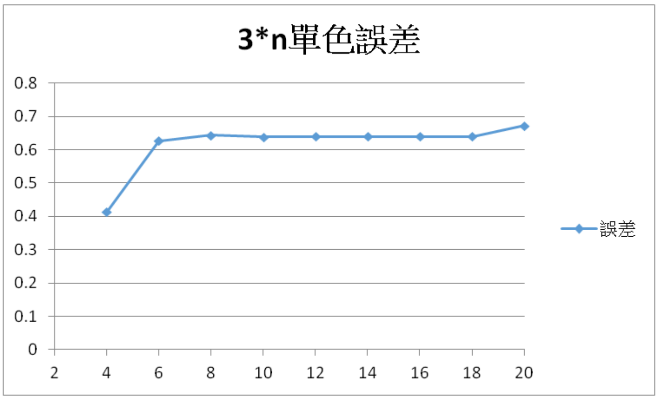
$$w_{m,2n+2,0} > \left(w_{m,n+1,0} + w_{m,n+2,0}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{w_{m,n,\min}} + \frac{1}{w_{m,n+1,\min}}}\right)$$

$$= \left(w_{m,n+1,0} + w_{m,n+2,0}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]w_{m,n-1,0}} + \frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]w_{m,n,0}}}\right)$$

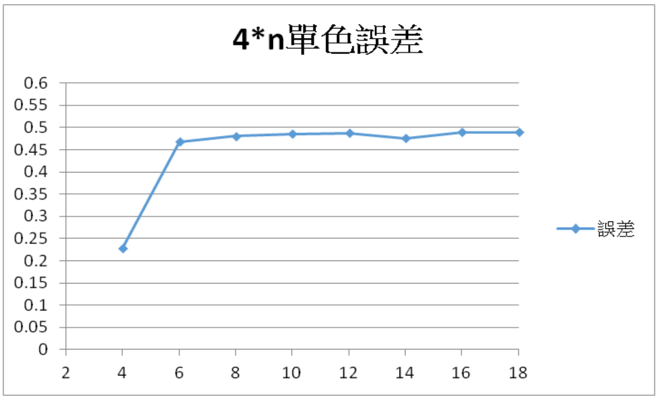
$$= \left(w_{m,n+1,0} + w_{m,n+2,0}\right)\left(\frac{\left[\frac{m}{2}\right]}{\frac{1}{w_{m,n-1,0}} + \frac{1}{w_{m,n,0}}}\right)$$

(其中[ ]為高斯符號)

2t+2(t=)	n	實際值	估計值	誤差
1	4	227	133.3333333	0.41263
2	6	2999	1120.454545	0.62639
3	8	39561	14110.425	0.64332
4	10	521721	188674.5724	0.63836
5	12	6879979	2475030.535	0.64026
6	14	90725999	32708983.07	0.63948
7	16	1196397873	430932406	0.63981
8	18	15776816033	5684937187	0.63967
9	20	1.99463E+11	65337869669	0.67243



2t+2(t=)	n	實際值	估計值	誤差
1	4	1234	952.8888889	0.2278
2	6	36787	19559.5102	0.4683
3	8	1095841	569185.5597	0.48059
4	10	32641916	16775636.23	0.48607
5	12	972290957	498141415.4	0.48766
6	14	28961194501	15179900888	0.47585
7	16	8.62654E+11	4.40059E+11	0.48988
8	18	2.56955E+13	1.31108E+13	0.48976



九、其他性質討論

1. 同樣格子數的圖形之方法數比較:

我們發現，對於擁有相同格子數的矩形，其方法數存在著一定的規律。利用程式跑出下方($m\times n$單色)的數據， 可以發現形狀越接近長條形的矩形，其方法數越大。

1×72	1,304,969,544,928,657
2×36	72,722,761,475,561
3×24	36,178,491,743,225
4×18	25,695,485,730,239
6×12	19,675,706,193,157
8×9	18,403,310,404,291

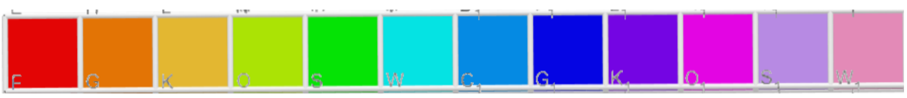
THEOREM 11:

$$w_{m,n,c}\le w_{1,m\times n,c}\text{ 等號成立於 } m=1 \text{ 或 } n=1 \text{ 時}$$

而以下證明$1\times n$長條比其他同方格數的方法數還多，以下為證明:

假設圖一上之黃色邊可以不需遵守相臨格子不能都塗的規定，也就是可視為將圖一沿著黃色線剪開並拉成長條，則此時圖一之圖形會和圖二相同，即兩者方法數會相同。藉由一一對應原理，對於畫線前圖一中的每一種塗法，在圖二都有對應的塗法，代表圖二的塗法大於圖一，即在$1\times n$長條中的塗法會大於同格數的其他種圖形。

(圖一)



(圖二)

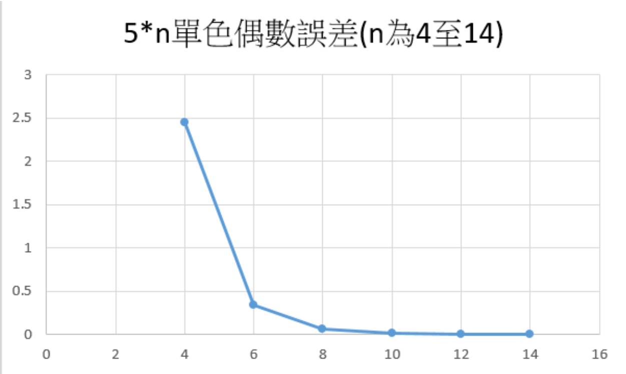
2.估計值公式

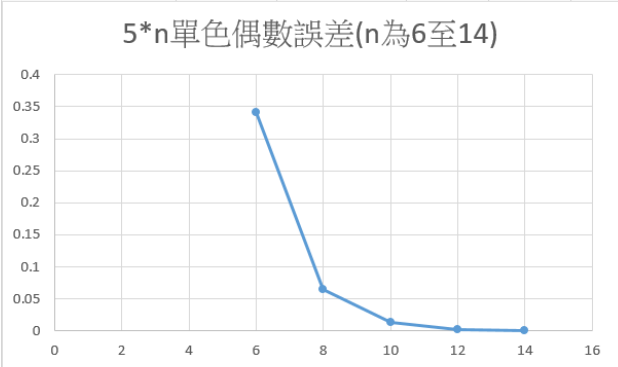
在上面的研究中，我們證明了奇數下界的不等式，而我們透過程式發現，其值十分接近。於是我們猜想偶數也有相同的性質。藉由程式，我們發現這是對的，和奇數不同的是，其不等號會顛倒，對偶數來說為上界。

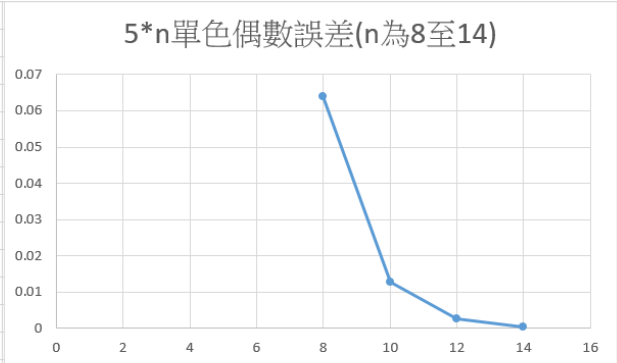
發現 1:

$$w_{m,2n+2,0}<\frac{(w_{m,2n+1,0})^2}{(w_{m,2n,0})}$$

	實際值	估計值	誤差(%)
4	6743	6908.374	2.452524653
6	454385	455935	0.34112381
8	30584687	30604267	0.064017709
10	2058249165	2.06E+09	0.012705641
12	1.38508E+11	1.39E+11	0.002555477
14	9.3207E+12	9.32E+12	0.000515837







其誤差折線也和奇數一樣，各項間的變化率十分相近。

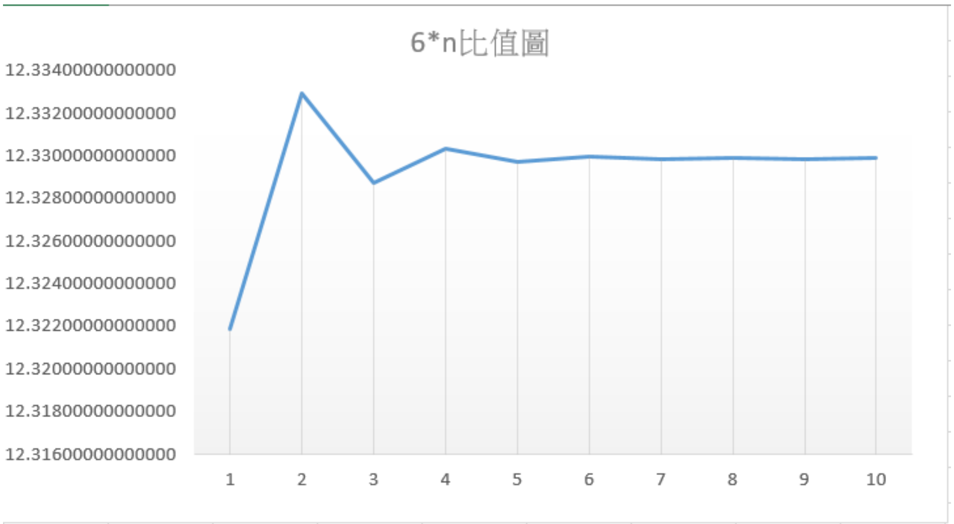
發現 2:

$$w_{m,n+3,0} \approx \frac{(w_{m,n+2,0})^2}{(w_{m,n+1,0})} \to \frac{w_{m,n+3,0}}{w_{m,n+2,0}} \approx \frac{w_{m,n+2,0}}{w_{m,n+1,0}}$$

綜合 Theorem 5 和發現 1，我們得到發現 2，即得到估計值的推論公式。

以下為 $6\times n$ 程式跑出來的結果，我們發現它比值十分接近，且上下來回跳動，逐漸向某個值收斂。而誤差則逐漸趨近於零。

	估計	比值	誤差(%)
21		11.38095238095240	
239	2720	12.54811715481170	-9.303101033677890000
2999	37631	12.26642214071360	2.294288743306060000
36787	451244	12.35178187946830	-0.691264016197718000
454385	5612464	12.32184381086520	0.242960130640857000
5598861	68988290	12.33291074738240	-0.089736094087812000
69050253	8.52E+08	12.32873149646530	0.033898427370011600
8.51E+08	1.05E+10	12.33032113799880	-0.012892143007069300
1.05E+10	1.29E+11	12.32971456327950	0.004919616778448320
1.29E+11	1.6E+12	12.32994629699660	-0.001879438209235930
1.6E+12	1.97E+13	12.32985771442270	0.000718439544747638
1.97E+13	2.43E+14	12.32989158432820	-0.000274697512937894
2.43E+14	2.99E+15	12.32987863242190	0.000105044880849095
2.99E+15	3.69E+16	12.32988358552930	-0.0000401715668433757



由上圖，我們可以其比值逐漸趨近於某個數。其橫軸為分母的 N，其縱軸為比值。

而我們認為這個性質對所有形狀的圖都通用，我們一樣用程式來證明這點

發現 3:

$$w_{m,n+3,x} \approx \frac{(w_{m,n+2,x})^2}{(w_{m,n+1,x})} \rightarrow \frac{w_{m,n+3,x}}{w_{m,n+2,x}} \approx \frac{w_{m,n+2,x}}{w_{m,n+1,x}}$$

藉由程式，我們得知 $\frac{w_{m,n,x+2}}{w_{m,n,x+1}} \approx \frac{w_{m,n,x+1}}{w_{m,n,x}}$ ，而這也可以和上述的發現互相應證。下圖為 $6\times n$ 各個圖形的每一階的比值(6,a,b 表示 $w_{6,a,b}$)

6,0,0	6,1,0	6,2,0	6,3,0	6,4,0	6,5,0	6,6,0	a1/a0	a2/a1	a3/a2	a4/a3	a5/a4	a6/a5
1	21	239	2999	36787	454385	5598861	0.047619	0.087866	0.079693	0.081523	0.08096	0.081157
6,0,1	6,1,1	6,2,1	6,3,1	6,4,1	6,5,1	6,6,1						
1	13	169	2036	25338	311313	3843618	0.076923	0.076923	0.083006	0.080354	0.081391	0.080995
6,0,2	6,1,2	6,2,2	6,3,2	6,4,2	6,5,2	6,6,2						
1	16	181	2308	28092	348110	4283912	0.0625	0.088398	0.078423	0.082159	0.080699	0.08126
6,0,3	6,1,3	6,2,3	6,3,3	6,4,3	6,5,3	6,6,3						
1	15	179	2225	27380	337777	4164050	0.066667	0.083799	0.080449	0.081264	0.081059	0.081117
6,0,4	6,1,4	6,2,4	6,3,4	6,4,4	6,5,4	6,6,4						
1	10	133	1592	19855	243727	3010261	0.1	0.075188	0.083543	0.080181	0.081464	0.080965
6,0,5	6,1,5	6,2,5	6,3,5	6,4,5	6,5,5	6,6,5						
1	15	179	2225	27380	337777	4164050	0.066667	0.083799	0.080449	0.081264	0.081059	0.081117
6,0,6	6,1,6	6,2,6	6,3,6	6,4,6	6,5,6	6,6,6						
1	9	124	1478	18465	226542	2798590	0.111111	0.072581	0.083897	0.080043	0.081508	0.080949
6,0,7	6,1,7	6,2,7	6,3,7	6,4,7	6,5,7	6,6,7						
1	12	141	1780	21741	269038	3312625	0.083333	0.085106	0.079213	0.081873	0.08081	0.081216
6,0,8	6,1,8	6,2,8	6,3,8	6,4,8	6,5,8	6,6,8						
1	16	181	2308	28092	348110	4283912	0.0625	0.088398	0.078423	0.082159	0.080699	0.08126
6,0,9	6,1,9	6,2,9	6,3,9	6,4,9	6,5,9	6,6,9						
1	10	129	1579	19498	240331	2963486	0.1	0.077519	0.081697	0.080983	0.08113	0.081097
6,0,10	6,1,10	6,2,10	6,3,10	6,4,10	6,5,10	6,6,10						
1	12	135	1752	21149	262984	3231947	0.083333	0.088889	0.077055	0.082841	0.080419	0.08137
6,0,11	6,1,11	6,2,11	6,3,11	6,4,11	6,5,11	6,6,11						
1	12	141	1780	21741	269038	3312625	0.083333	0.085106	0.079213	0.081873	0.08081	0.081216
6,0,12	6,1,12	6,2,12	6,3,12	6,4,12	6,5,12	6,6,12						
1	8	105	1276	15795	194486	2399167	0.125	0.07619	0.082288	0.080785	0.081214	0.081064

陸、研究結果

我們論證了:

1.1×n單色的城堡多項式公式:

$$R(x,B_{\overline{123\ldots n}})=\left(\frac{1+2x+\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{1+4x}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{-1-2x+\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{1+4x}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)^{n}$$

2.1×n,λ色的城堡多項式公式

$$R(x,O_{n,\lambda})=R\left(x,O_{n-1,\lambda}\right)+\sum_{k=1}^{n-2}\lambda\left(\lambda-1\right)^{k-1}x^{k}R\left(x,O_{n-k,\lambda}\right)+\lambda\left(\lambda-1\right)^{(n-1)-1}x^{(n-1)}\left[1+\left(\lambda-1\right)x\right]$$

3. 2×n單色的城堡多項式公式:

$$R(x,O_{n,2})=R\left(x,O_{n-1,2}\right)+\sum_{k=1}^{n-2}2x^{k}R\left(x,O_{n-k,2}\right)+2x^{(n-1)}\left(1+x\right)$$

4.奇數下界估計公式:

$$w_{m,2n+3,0}>\frac{(w_{m,2n+2,0})^{2}}{(w_{m,2n+1,0})}\rightarrow\frac{w_{m,2n+3,0}}{w_{m,2n+2,0}}>\frac{w_{m,2n+2,0}}{w_{m,2n+1,0}}$$

5.奇數上界估計公式:

$$w_{m,n,0}<w_{m,2,0}w_{m,n-2,0}-w_{m,n-1,0}-(w_{m,1,0}{}^{2}-w_{m,1,0}-w_{m,2,0})\times2^{\frac{m-1}{2}}\times\left(\frac{m-1}{2}\right)\times w_{m,n-4,0}$$

6.偶數上界估計公式:

$$w_{m,n,0}<w_{m,2,0}w_{m,n-2,0}-w_{m,n-1,0}-\left(w_{m,1,0}{}^{2}-w_{m,1,0}-w_{m,2,0}\right)\times\left(2^{\frac{m-4}{2}}\times3\right)\times\frac{m}{2}\times w_{m,n-4,0}$$

7.雙色上界估計公式:

$$w_{m,n,0}\le w_{m,2,0}w_{m,n-2,0}-w_{m,n-1,0}-(w_{m,1,0}{}^{2}-w_{m,1,0}-w_{m,2,0})\times2^{m}\times\left(m+1\right)\times w_{m,n-4,0}$$

8.三色上界估計公式:

$$w_{m,n,0}\le w_{m,2,0}w_{m,n-2,0}-w_{m,n-1,0}-(w_{m,1,0}{}^{2}-w_{m,1,0}-w_{m,2,0})\times2^{m}\times\left(m+1\right)\times f_{2m+2}$$

9.偶數下界估計公式:

$$w_{m,2n+2,0}>\left(w_{m,n+1,0}+w_{m,n+2,0}\right)\left(\frac{\left[\frac{m}{2}\right]}{\frac{1}{w_{m,n-1,0}}+\frac{1}{w_{m,n,0}}}\right)$$

10.同格數最大值公式:

$$w_{m,n,c}\le w_{1,m\times n,c}$$

我們發現了:

1.偶數上界公式

$$w_{m,2n+2,0} < \frac{(w_{m,2n+1,0})^2}{(w_{m,2n,0})}$$

2.估計值:

$$w_{m,n+3,0} \approx \frac{(w_{m,n+2,0})^2}{(w_{m,n+1,0})} \to \frac{w_{m,n+3,0}}{w_{m,n+2,0}} \approx \frac{w_{m,n+2,0}}{w_{m,n+1,0}}$$

3.比值相近公式:

$$w_{m,n+3,x} \approx \frac{(w_{m,n+2,x})^2}{(w_{m,n+1,x})} \to \frac{w_{m,n+3,x}}{w_{m,n+2,x}} \approx \frac{w_{m,n+2,x}}{w_{m,n+1,x}}$$

柒、未來展望

本研究在$m \times n$的部分，藉由求出遞迴式及利用電腦輔助運算求出答案。未來，我們希望能推倒出其通式。以及在上界及下界討論的部分，我們希望能求出更精準的公式，以降低我們的誤差，並且在發現的部分給予嚴謹的證明。

捌、參考資料

Appliad combinatories/5th Edition/2007/Wiley/Alan Tucker

Rook Polynomials in three and higher dimensions/Feryal Alayont and Nicholas Krzywonos

數學奧林匹亞辦公室: http://imotwn.math.ncu.edu.tw/index.php

附錄:

```
import numpy as np
def plus(m,n1,n2,p,q):
  m[p+q]=(m[p+q]+((n1[p])*(n2[q])))
  return m
def multiple(a,b,r):
  ll = (len(a)+len(b)-1)
  ccc=np.zeros((ll,), dtype=int)
  for i in range(len(a)):
    for j in range(len(b)):
      ccc=plus(ccc,a,b,i,j)
  if(len(ccc)>r):
    for de in range(len(ccc)-r):
      ccc=np.delete(ccc,-1)
  return ccc
def sp(x,lis,col):
  if(len(lis)>x):
    return np.array(lis[x])
  else:
    array=np.zeros((1,x),dtype=int)
    print(array)
    for i in
range(len(sp(x-1,lis,col))):

if(sp(x-1,lis,col)[i][-1]==0):
        for ii in range(col+1):

h=np.append((sp(x-1,lis,col)[i]),[
ii],axis=0)
          hh=np.array(h)

array=np.append(array,[hh],axis=0)
      else:
        q=sp(x-1,lis,col)[i][-1]
        for ii in range(col+1):
          if(ii!=q):

h=np.append((sp(x-1,lis,col)[i]),[
ii],axis=0)
            hh=np.array(h)

array=np.append(array,[hh],axis=0)

array=np.delete(array,[0],axis=0)
    lis=lis.append(array)
    return array
def coef(www):

coe=np.ones((len(www),len(www)),dt
ype=int)
  for h1 in range(len(www)):
    for h2 in range(len(www)):
      for i in range(len(www[0])):
        if (www[h1][i]!=0):

if(www[h2][i]==www[h1][i]):
            coe[h1][h2]=0
            continue
  return coe
def p(www):
  p=np.zeros(len(www),dtype=int)
  for i in range(len(www)):
    c=0
    for j in range(len(www[0])):
      if(www[i][j]!=0):
        c=c+1
    p[i]=c
  return p
def xxx(n,a):
  for i in range(n):
    a=np.insert(a,0,0)
    a=np.delete(a,-1)
  return a
def ite(x,www,s,coeff,ai,pp):
  onee=np.zeros(s,dtype=int)
```

```
  onee[0]=1
  if(memory[ai][x][0]==1):
    return memory[ai][x]
  else:
      if(x==0):
        for ii in range(len(www)):
          if (coeff[ai][ii]==1):

memory[ai][x]=memory[ai][x]+xxx(pp
[ii],onee)

memory[ai][x]=memory[ai][x]+onee
        return memory[ai][x]
      else:
        for ii in range(len(www)):
          if(coeff[ai][ii]==1):

memory[ai][x]=memory[ai][x]+xxx(pp
[ii],ite(x-1,www,s,coeff,ii,pp))
        return memory[ai][x]
m=input("m=")
n=input("n=")
```

```
if(m>n):
  c=m
  m=n
  n=c
colors=input("colors=")
r=m+1
s=m*n+1
li=[]
listt=[[0]]
for i in range(colors+1):
  li.append([i])
listt.append(li)
hhh=sp(m,listt,colors)
memory=np.zeros((len(hhh),n+1,s),d
type=int)
for i in range(len(hhh)):
  memory[i][0][0]=1
coefficient=coef(hhh)
ppp=p(hhh)
ans=ite(n,hhh,s,coefficient,0,ppp)
print(ans,"ans",sum(ans))
```

【評語】050413

1. 本作品探討棋盤中塗色的相關問題，作者透過 Rook polynomial 的討論，得到不少的結果，特別是到高維度的推廣與程式的撰寫，都有可觀之處，整體來說是尚稱完整的作品。

2. 本作品探討棋盤上方格的塗色問題，僅限制相鄰方格不塗相同顏色。作品主要結果是 1xn; 2xn 雙色；以及 1xn 多色的方法數。作者所使用的工具是計算排列個數常見的 rook polynomial，其中 1x 雙色的方法數恰為費氏數列應該算是常見結果，比較不一樣的結果是 1xn 多色方格個三維解法。可能是由於題目難度提高，這個解法僅提供 1xn 多色方格個遞迴式，也因此隨後的 2xn 雙色的排列數也是以遞迴式表示。至於 3xn 以上情形，不管是雙色或多色，所得的遞迴式都已經是屬於「conceptual」(概念性)的，太過複雜以至於實質效果不高。作者因此使用計算機計算出前幾項，或用來做上界、下界的估計。這些估計也是以遞迴式呈現。整個作品有相當的侷限性，且三維方法的說明上，並不易有好的結果。

3. 塗色問題乃是常見題材，研究題目雖然自 2015 年 APMO 考題於以推廣，且本研究運用二維的城堡多項式的概念來探討，宜作文獻探討，說明本研究方法是否為過去文獻未見到。

4. 在 p.11 及 p.12 提及借助電腦程式協助作者得到解，如果不用程式處理，是否仍可得到相同解？

5. 對於 m x n 的問題引入分拆公式，以得到估計值。除了估計值，建議研究方向可以選擇精確的上、下界。

作品海報

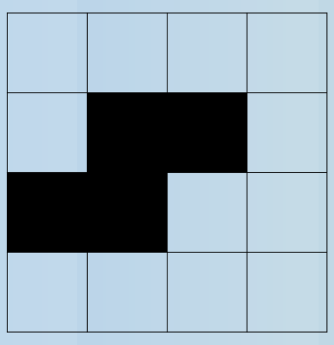
摘要: 本作品旨在研究一道塗色問題:在一個$m\times n$的棋盤中對任意格子塗上黑色，相鄰方格不同時塗色的所有方法數。我們運用城堡多項式推出$1\times n$單色、多色及$2\times n$單色的方法數的公式。並藉由遞迴、利用程式求出$m\times n$棋盤的方法數。接著討論上下界，並對其一些性質做討論，再由程式印證我們的推論。

原題: 有一個2×7的方格(如右圖)，將方格編號1~14，在方格中選取若干格子塗成黑色(也可以全不選)，使得兩個黑色的格子都不共邊的方法數。

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

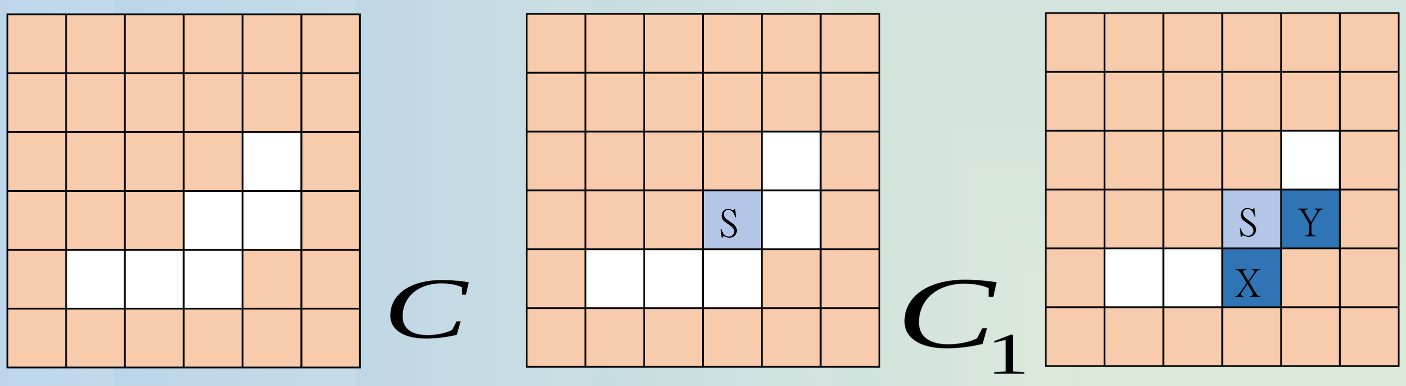
使用工具-城堡多項式

$R(x,B)=r_0(B)+r_1(B)x+r_2(B)x^2+\cdots$ 其中$r_k(B)$為在B中黑色方格中選k個不在同行同列的方格的方法數。



以左圖為例，其城堡多項式為:$R(x,B)=1+4x+3x^2$

降階公式:

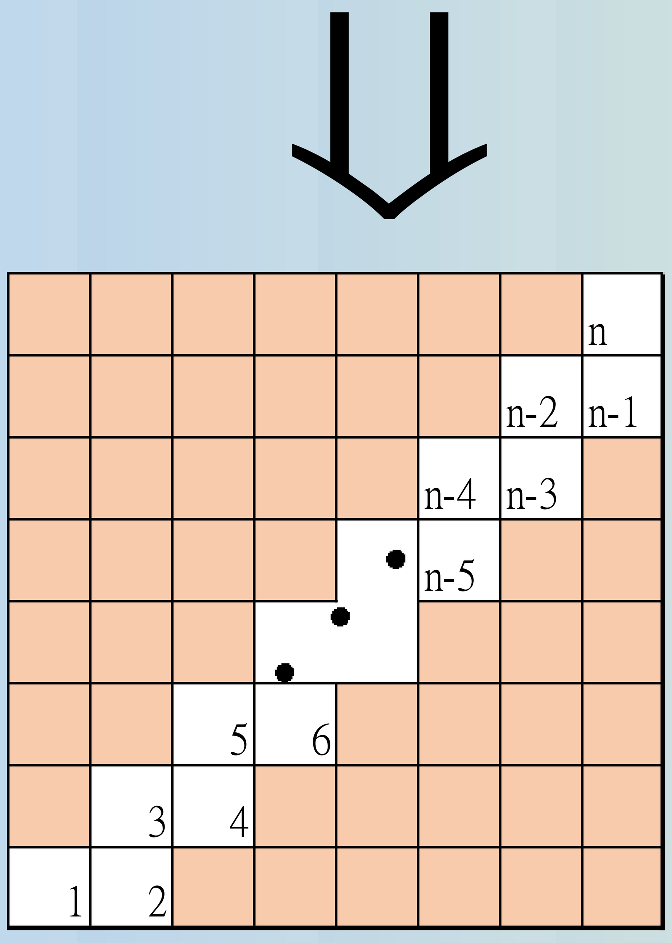


C C_1 C_2

$$r_k(C)=r_k(C_1)+r_{k-1}(C_2)$$

1×n的單色方格:

1	2	3	……	n-1	n



$B_{123\ldots n}$

THEOREM 1:

$$R(x,B_{123\ldots n})=\left(\frac{1+2x+\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{1+4x}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-2x+\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{1+4x}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)^n$$

$$R(x,B_n)=R(x,B_{234\ldots n})+xR(x,B_{345\ldots n})$$ 降階公式

解上式的特徵方程式:

$$\Rightarrow R(x,B_{123\ldots n})=\left(\frac{1+2x+\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{1+4x}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{1+4x}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-2x+\sqrt{1+4x}}{2\sqrt{1+4x}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right)^n$$

$x=1$代入即可得證

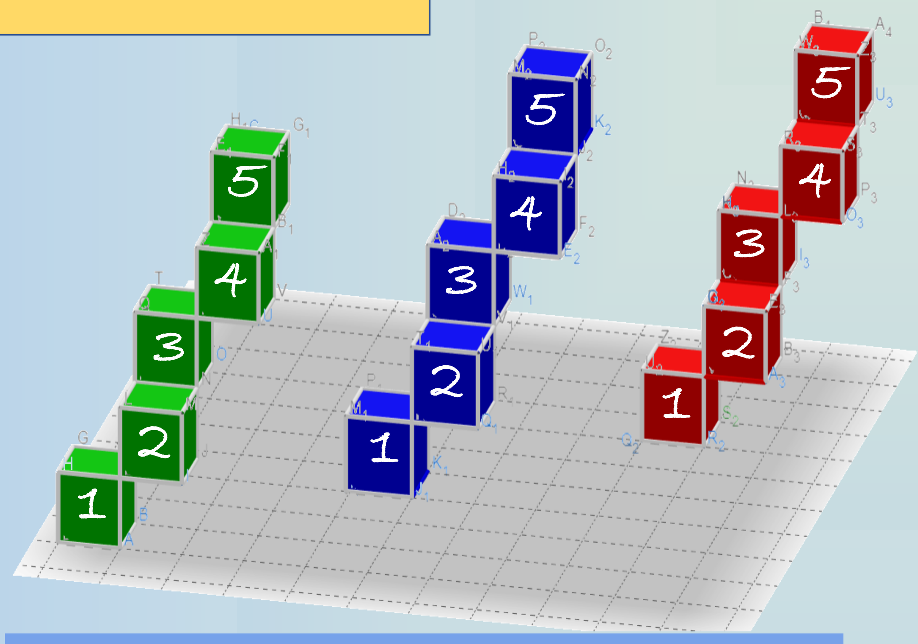
$$R(1,B_{123\ldots n})=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right]$$

1×n的多色方格:

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

THEOREM 2:

$$R(x,O_{n,\lambda})=R\left(x,O_{n-1,\lambda}\right)+\sum_{k=1}^{n-2}\lambda(\lambda-1)^{k-1}x^kR\left(x,O_{n-k,\lambda}\right)+\lambda(\lambda-1)^{(n-1)-1}x^{(n-1)}\left[1+(\lambda-1)x\right]$$



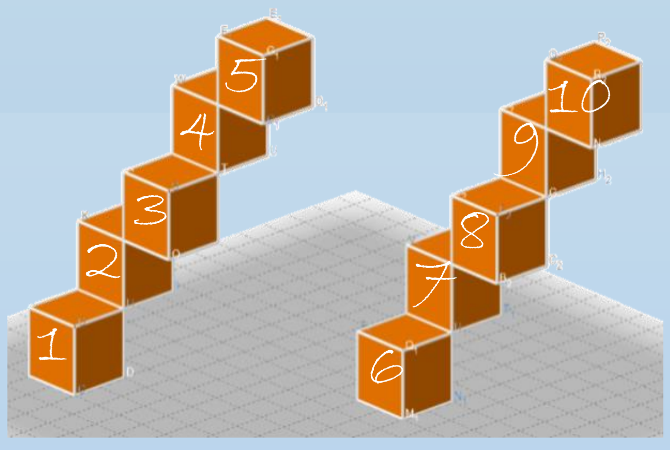
左圖以1×5的方格塗上三個顏色(可以都不塗)為例。

2×n的單色方格:

THEOREM 3:

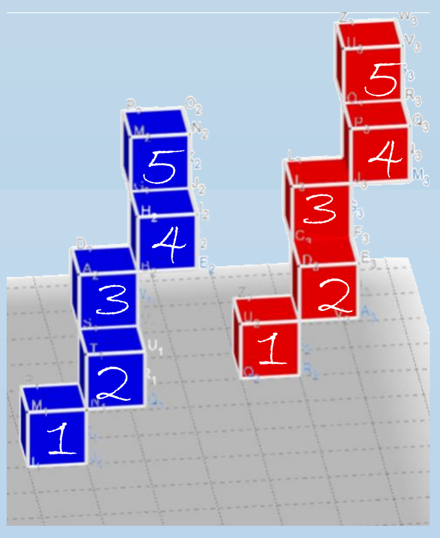
$$R(x,O_{n,2})=R\left(x,O_{n-1,2}\right)+\sum_{k=1}^{n-2}2x^kR\left(x,O_{n-k,2}\right)+2x^{(n-1)}(1+x)$$

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10



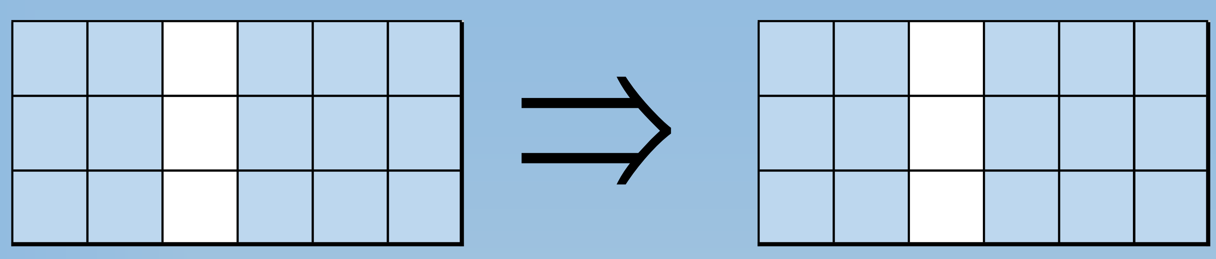
$\Longrightarrow$

1	2	3	4	5
1	2	3	4	5

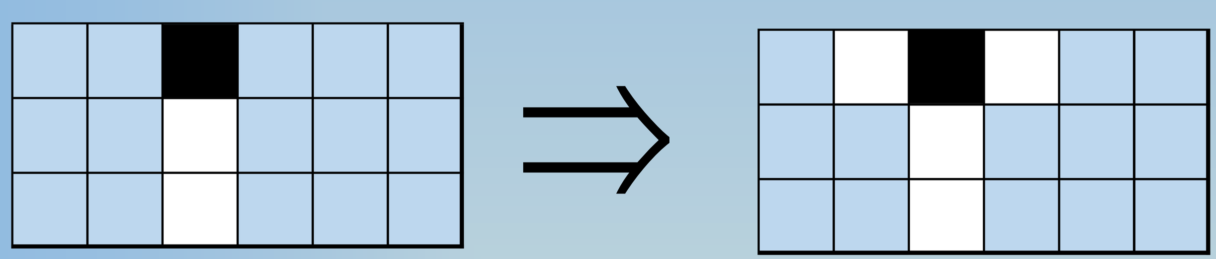


拆分公式: $R\left(x,B_{m,a,0}\right)R\left(x,B_{m,b,0}\right)+R\left(x,B_{m,a,1}\right)R\left(x,B_{m,b,1}\right)+\dots+R\left(x,B_{m,a,t}\right)R\left(x,B_{m,b,t}\right)=R\left(x,B_{m,a+b+1,0}\right)$

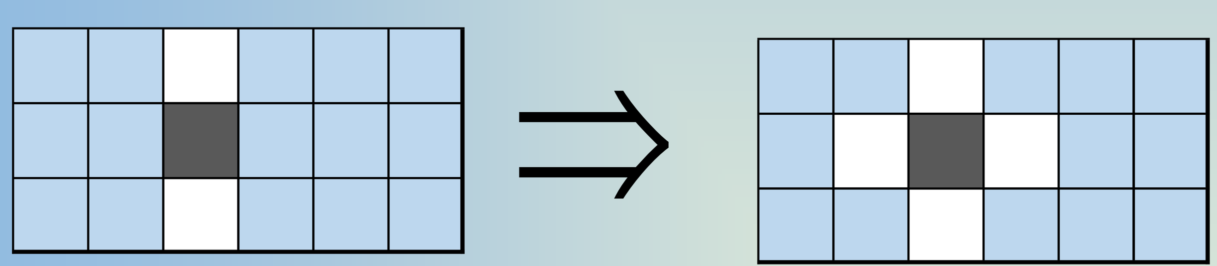
其原理是對$m\times n$棋盤上某一排的所有塗法進行討論，以下以3×6為例，我們對第三列的所有選法進行討論，有以下五種:



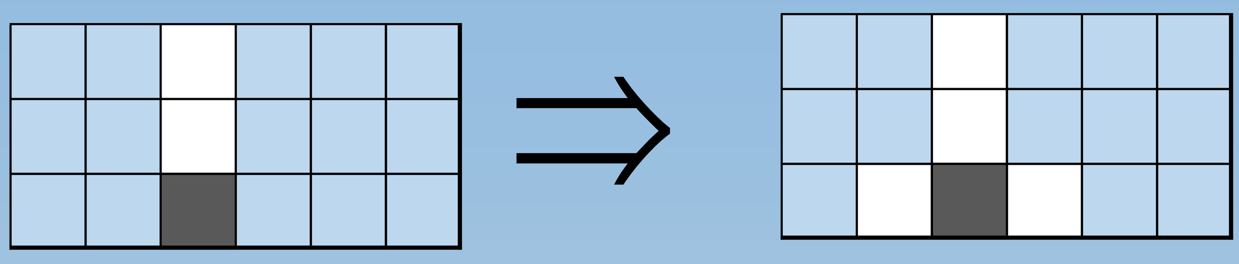
$$R\left(x,B_{3,2,0}\right)\times R\left(x,B_{3,3,0}\right)$$



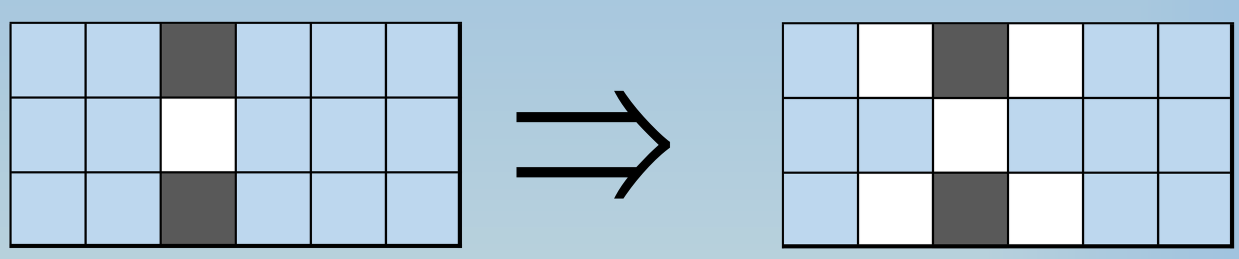
$$R\left(x,B_{3,2,1}\right)\times R\left(x,B_{3,3,1}\right)$$



$$R\left(x,B_{3,2,2}\right)\times R\left(x,B_{3,3,2}\right)$$



$$R\left(x,B_{3,2,3}\right)\times R\left(x,B_{3,3,3}\right)$$



$$R\left(x,B_{3,2,4}\right)\times R\left(x,B_{3,3,4}\right)$$

將所有方法加總可得:

$$R\left(x,B_{3,2,0}\right)\times R\left(x,B_{3,3,0}\right)+R\left(x,B_{3,2,1}\right)\times R\left(x,B_{3,3,1}\right)+\cdots+R\left(x,B_{3,2,4}\right)\times R\left(x,B_{3,3,4}\right)=R\left(x,B_{3,6,0}\right)$$

運用相同想法可得:

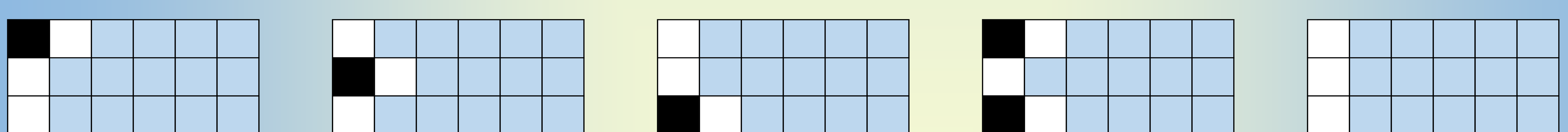
$$R\left(x,B_{m,a,0}\right)R\left(x,B_{m,b,0}\right)+R\left(x,B_{m,a,1}\right)R\left(x,B_{m,b,1}\right)+\dots+R\left(x,B_{m,a,t}\right)R\left(x,B_{m,b,t}\right)=R\left(x,B_{m,a+b+1,0}\right)$$

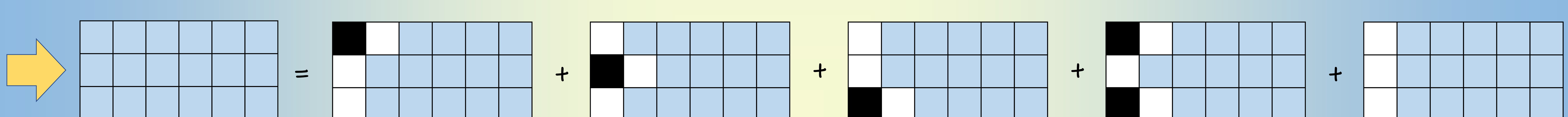
特別地當選定的列為最左(或最右)方那列時，上述公式會變為:

$$R\left(x,B_{m,0,0}\right)R\left(x,B_{m,a,0}\right)+R\left(x,B_{m,0,1}\right)R\left(x,B_{m,a,1}\right)+\dots+R\left(x,B_{m,0,t}\right)R\left(x,B_{m,a,t}\right)=R\left(x,B_{m,a+1,0}\right)$$

$m\times n$單色及多色方格(單色以$3\times n$單色為例)

先考慮第一行(最左邊那行)的所有可能塗法(黑色為選取的格子，白色為不選的)如下:

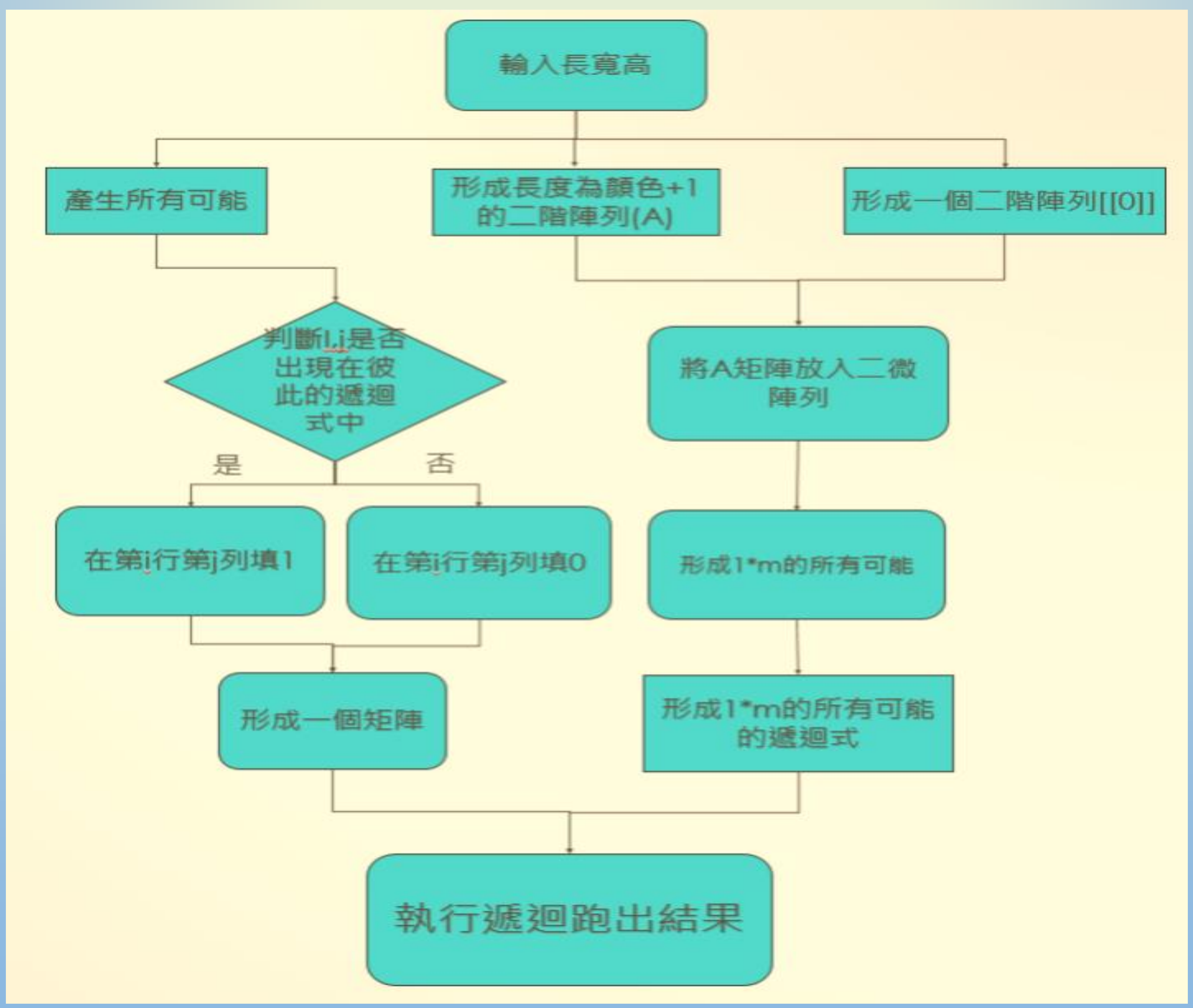




$B_{3,5,1}$ $B_{3,5,2}$ $B_{3,5,3}$ $B_{3,5,4}$ $B_{3,5,0}$

$$\Rightarrow\begin{cases}R\left(x,B_{3,n,0}\right)=R\left(x,B_{3,n-1,0}\right)+R\left(x,B_{3,n-1,1}\right)+R\left(x,B_{3,n-1,2}\right)+R\left(x,B_{3,n-1,3}\right)+R\left(x,B_{3,n-1,4}\right)\\R\left(x,B_{3,n,1}\right)=R\left(x,B_{3,n-1,0}\right)+R\left(x,B_{3,n-1,2}\right)+R\left(x,B_{3,n-1,3}\right)\\R\left(x,B_{3,n,2}\right)=R\left(x,B_{3,n-1,0}\right)+R\left(x,B_{3,n-1,1}\right)+R\left(x,B_{3,n-1,3}\right)+R\left(x,B_{3,n-1,4}\right)\\R\left(x,B_{3,n,3}\right)=R\left(x,B_{3,n-1,0}\right)+R\left(x,B_{3,n-1,1}\right)+R\left(x,B_{3,n-1,2}\right)\\R\left(x,B_{3,n,4}\right)=R\left(x,B_{3,n-1,0}\right)+R\left(x,B_{3,n-1,2}\right)\end{cases}$$

利用降階可將圖形藉由遞迴一直分解(如上圖)，直到降到只剩一行，於是我們運用其想法寫出了能以較快速度運算的程式，程式的想法如下流程圖:



奇數下界

THEOREM 4:

$$w_{m,2n+3,0} > \frac{(w_{m,2n+2,0})^2}{(w_{m,2n+1,0})} \rightarrow \frac{w_{m,2n+3,0}}{w_{m,2n+2,0}} > \frac{w_{m,2n+2,0}}{w_{m,2n+1,0}}$$

證明:

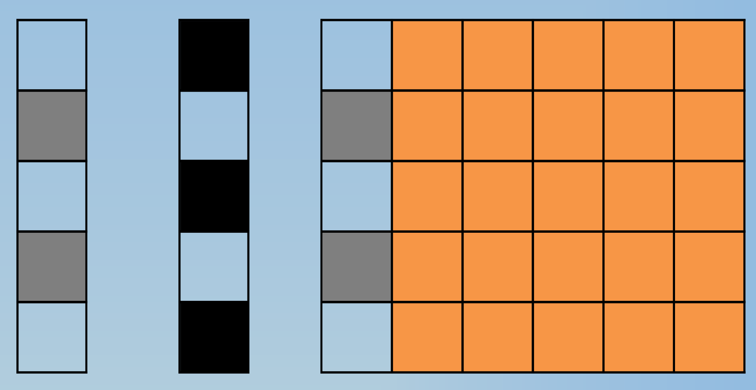
$$w_{m,2n+2,0}^{\;2}$$
$$=(w_{m,n,0}w_{m,n+1,0}+w_{m,n,1}w_{m,n+1,1}+\dots\dots+w_{m,n,x}w_{m,n+1,x})^2$$
$$\le(w_{m,n,0}^{\;2}+w_{m,n,1}^{\;2}+\dots\dots+w_{m,n,x}^{\;2})\,(w_{m,n+1,0}^{\;2}+w_{m,n+1,1}^{\;2}+\dots\dots+w_{m,n+1,x}^{\;2})$$
$$=w_{m,2n+1,0}\times w_{m,2n+3,0}$$

柯西不等式

奇數單色上界

THEOREM 5:

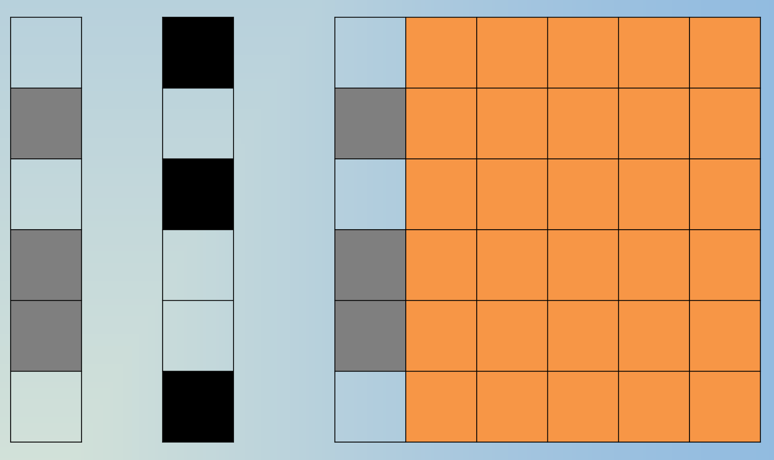
$$w_{m,n,0} \le w_{m,2,0}w_{m,n-2,0} - w_{m,n-1,0} - (w_{m,1,0}^{\;2} - w_{m,1,0} - w_{m,2,0}) \times 2^{\frac{m-1}{2}} \times (\frac{m-1}{2}) \times w_{m,n-4,0}$$



偶數單色上界

THEOREM 6:

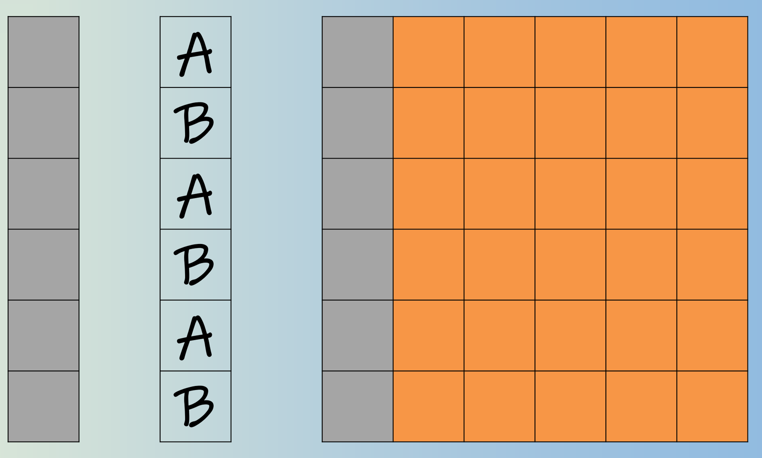
$$w_{m,n,0} \le w_{m,2,0}w_{m,n-2,0} - w_{m,n-1,0} - \left(w_{m,1,0}^{\;2} - w_{m,1,0} - w_{m,2,0}\right) \times \left(2^{\frac{m-4}{2}} \times 3\right) \times \frac{m}{2} \times w_{m,n-4,0}$$



雙色上界

THEOREM 7:

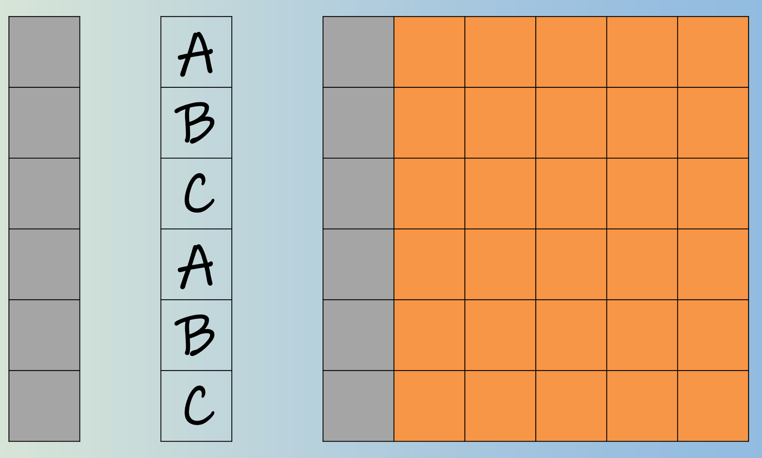
$$w_{m,n,0} \le w_{m,2,0}w_{m,n-2,0} - w_{m,n-1,0} - (w_{m,1,0}^{\;2} - w_{m,1,0} - w_{m,2,0}) \times 2^m \times (m+1) \times w_{m,n-4,0}$$



三色上界

THEOREM 8:

$$w_{m,n,0} \le w_{m,2,0}w_{m,n-2,0} - w_{m,n-1,0} - (w_{m,1,0}^{\;2} - w_{m,1,0} - w_{m,2,0}) \times 2^m \times (2m\text{-}1) \times a_{2m+1}$$



偶數下界

THEOREM 9:

$$w_{m,2n+2,0} > \left(w_{m,n+1,0} + w_{m,n+2,0}\right)\left(\frac{\left[\frac{m}{2}\right]}{\frac{1}{w_{m,n-1,0}} + \frac{1}{w_{m,n,0}}}\right)$$

同格子數之方法數比較

THEOREM 10:

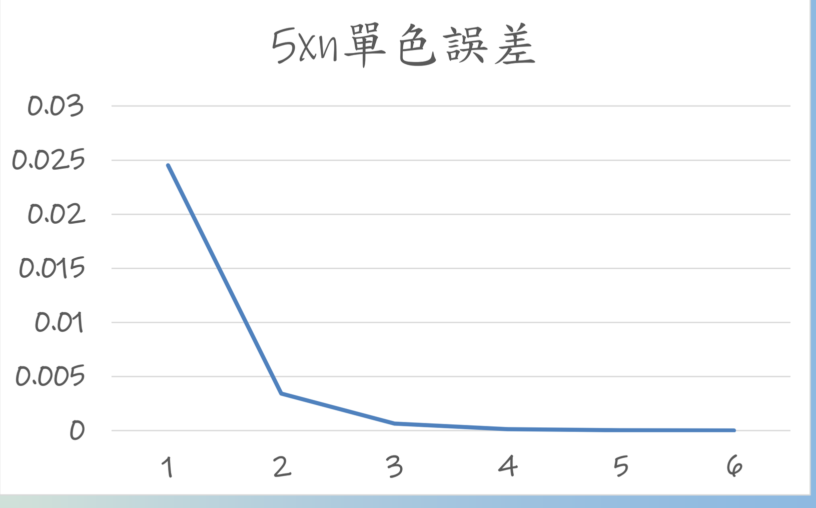
$$w_{1,m\times n,c} \ge w_{m,n,c}$$

偶數下界:

發現 1:

$$w_{m,2n+2,0} < \frac{(w_{m,2n+1,0})^2}{(w_{m,2n,0})} \rightarrow \frac{w_{m,2n+2,0}}{w_{m,2n+1,0}} < \frac{w_{m,2n+1,0}}{w_{m,2n,0}}$$

5*n單色			
	估計值	實際值	誤差
4	6908.373737	6743	0.024525247
6	455935.0154	454385	0.003411238
8	30604266.62	30584687	0.000640177
10	2058510679	2058249165	0.000127056
12	1.38512E+11	1.38508E+11	2.55548E-05
14	9.32075E+12	9.3207E+12	5.15837E-06

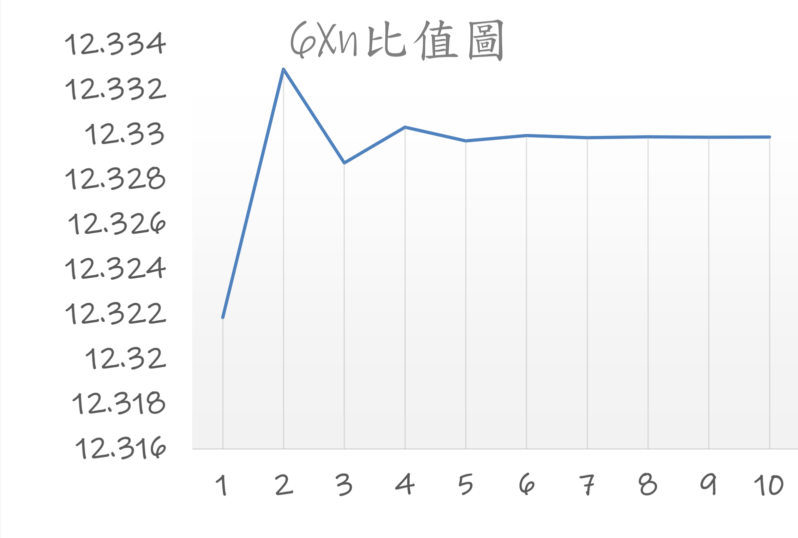


估計值公式:

發現 2:

$$w_{m,n+3,0} \approx \frac{(w_{m,n+2,0})^2}{(w_{m,n+1,0})} \rightarrow \frac{w_{m,n+3,0}}{w_{m,n+2,0}} \approx \frac{w_{m,n+2,0}}{w_{m,n+1,0}}$$

	估計	比值	誤差
21		11.38095238095240	
239	2720	12.54811715481170	-0.09303101033677890
2999	37631	12.26642214071360	0.02294288743306060
36787	451244	12.35178187946830	-0.00691264016197718
454385	5612464	12.32184381086520	0.00242960130640857
5598861	68988290	12.33291074738240	-0.00089736094087881
69050253	8.52E+08	12.32873149646530	0.00033898427370011
8.51E+08	1.05E+10	12.33032113799880	-0.00012892143007069
1.05E+10	1.29E+11	12.32971456327950	0.00004919616778448
1.29E+11	1.6E+12	12.32994629699660	-0.00001879438209235



比值相近公式

發現 3:

$$w_{m,n+3,x} \approx \frac{(w_{m,n+2,x})^2}{(w_{m,n+1,x})} \rightarrow \frac{w_{m,n+3,x}}{w_{m,n+2,x}} \approx \frac{w_{m,n+2,x}}{w_{m,n+1,x}}$$

6,0,0	6,1,0	6,2,0	6,3,0	6,4,0	6,5,0	6,6,0	a1/a0	a2/a1	a3/a2	a4/a3	a5/a4	a6/a5
1	21	239	2999	36787	454385	5598861	0.047619	0.087866	0.079693	0.081523	0.08096	0.081157
6,0,1	6,1,1	6,2,1	6,3,1	6,4,1	6,5,1	6,6,1						
1	13	169	2036	25338	311313	3843618	0.076923	0.076923	0.083006	0.080354	0.081391	0.080995
6,0,2	6,1,2	6,2,2	6,3,2	6,4,2	6,5,2	6,6,2						
1	16	181	2308	28092	348110	4283912	0.0625	0.088398	0.078423	0.082159	0.080699	0.08126
6,0,3	6,1,3	6,2,3	6,3,3	6,4,3	6,5,3	6,6,3						
1	15	179	2225	27380	337777	4164050	0.066667	0.083799	0.080449	0.081264	0.081059	0.081117
6,0,4	6,1,4	6,2,4	6,3,4	6,4,4	6,5,4	6,6,4						
1	10	133	1592	19855	243727	3010261	0.1	0.075188	0.083543	0.080181	0.081464	0.080965
6,0,5	6,1,5	6,2,5	6,3,5	6,4,5	6,5,5	6,6,5						
1	15	179	2225	27380	337777	4164050	0.066667	0.083799	0.080449	0.081264	0.081059	0.081117
6,0,6	6,1,6	6,2,6	6,3,6	6,4,6	6,5,6	6,6,6						
1	9	124	1478	18465	226542	2798590	0.111111	0.072581	0.083897	0.080043	0.081508	0.080949
6,0,7	6,1,7	6,2,7	6,3,7	6,4,7	6,5,7	6,6,7						
1	12	141	1780	21741	269038	3312625	0.083333	0.085106	0.079213	0.081873	0.08081	0.081216
6,0,8	6,1,8	6,2,8	6,3,8	6,4,8	6,5,8	6,6,8						
1	16	181	2308	28092	348110	4283912	0.0625	0.088398	0.078423	0.082159	0.080699	0.08126
6,0,9	6,1,9	6,2,9	6,3,9	6,4,9	6,5,9	6,6,9						
1	10	129	1579	19498	240331	2963486	0.1	0.077519	0.081697	0.080983	0.08113	0.081097
6,0,10	6,1,10	6,2,10	6,3,10	6,4,10	6,5,10	6,6,10						
1	12	135	1752	21149	262984	3231947	0.083333	0.088889	0.077055	0.082841	0.080419	0.08137
6,0,11	6,1,11	6,2,11	6,3,11	6,4,11	6,5,11	6,6,11						
1	12	141	1780	21741	269038	3312625	0.083333	0.085106	0.079213	0.081873	0.08081	0.081216
6,0,12	6,1,12	6,2,12	6,3,12	6,4,12	6,5,12	6,6,12						
1	8	105	1276	15795	194486	2399167	0.125	0.07619	0.082288	0.080785	0.081214	0.081064