中華民國第60屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050407

「餘式」，費氏與盧卡斯在遞迴中相遇

學校名稱：臺中市私立弘文高級中學

作者：	指導老師：
高一 黃文聖	余政和
高一 張婷瑢	柯子信
高一 吳家儀	

關鍵詞：餘式定理、遞迴數列、特徵方程式

摘要

我們從課堂中挑戰題出發，從高中數學的「餘式定理」、「數學歸納法」與「遞迴關係式」來對「費氏數列」進行討論。在簡單的多項式除法問題中，找到關於費氏數列的規律，並延伸找到與之密切相關的「盧卡斯數列」。此外，我們將研究中的費氏數列推廣至廣義費氏數列，以及遞迴關係更一般的廣義二階遞迴數列。我們將觀察得到對於二階遞迴數列的結果，用「數學歸納法」的方式證明。更將二次方的研究，延伸至三階遞迴、四階遞迴等高階遞迴的規律。並且找到當高次方時，符合前述關係的係數為對應階數特定矩陣特徵方程式的性質。我們也找出高次方中，特徵方程式各項係數的遞迴規律與巴斯卡三角形的特定關係。

壹、研究動機

我們在學習多項式乘除的單元時，老師在課堂上額外出了一題延伸的挑戰題給我們，原本的題目如下：「a、b為整數且x^2-x-1是$ax^{17}+bx^{16}+1$的因式，求a。」這題目一開始看似簡單，動手認真做之後才發現，次方過大使得我們的計算量也隨之變大，衍伸而來的便是正確性的問題。因此，回家上網查了這個題目後，發現這個題目最早出現於 1988 年的 AIME 考題之中，並在這三十年間，類似的考題已經出現在國內各高中段考試題或大小數學競賽的試題中。這不禁讓我們油然升起一股挑戰高中競賽題目之心，我們希望除了最基本的求解之外，能發展出規律的算式，讓大家一窺此類型題目的各種「巧合」。

一開始我們用了短除法的方式直接求解，但由於原題目次方過大，我們對於費氏數列的巧合也不敢過度推論。因此，在詢問了老師之後，老師提示利用餘式定理（貝祖定理）去解。在求解的過程中，竟發現不僅只有原題目有費氏數列的規律，在原題目中其他係數時，亦存在著費氏數列的蹤影，讓我們覺得非常有趣，進而開始尋找更多的規律，並嘗試將之推廣至一般化的結果。

貳、研究目的

大量利用如餘式定理及費氏數列的規律，且利用高中數學的計算技巧及證明方法，如數學歸納法、盧卡斯數列與費氏數列的關係，來分析方程式中係數與費氏數列之關係。

一、在原題目中，利用高中餘式定理，觀察係數跟費氏數列各項之關係。

二、利用窮舉的方式，觀察其他係數的除式，是否能與原題之係數一樣，與費氏數列有關。

三、尋找其他與費氏數列有關的係數，並觀察研究該係數之間是否存在著其他關係，進而希望去找到所有符合關係的係數。

四、將觀察到的結果，利用高中數學中的數學歸納法，來證明存在於所有整數的情形。

五、將費氏數列的規律，推廣至不同初始項的二階遞迴數列。

六、將二次方結果推廣至高次方及類費氏數列的高階遞迴關係式。

參、研究設備及器材

計算紙、筆、電腦、Microsoft Office Excel 2013、數學計算軟體 Matlab

肆、研究過程或方法

一、文獻探討與前置作業

（一）小貝祖定理（Little Bezout Theorem or Polynomial Remainder Theorem）

引理 1：多項式$f(x)$除以$(x-r)$後，餘數為$f(r)$，即$x=r$代入原多項式$f(x)$的值。且當$(x-r)$為$f(x)$的因式時，則有$f(r)=0$

（二）費氏數列（Fibonacci sequence）

定義：數列$\langle F_n\rangle$滿足：$\begin{cases} F_1=1 \\ F_2=1 \\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n\text{，}n\in N \end{cases}$，則稱$\langle F_n\rangle$為費氏數列。

（三）盧卡斯數列（Lucas number）

定義：數列$\langle L_n\rangle$滿足：$\begin{cases} L_1=1 \\ L_2=3 \\ L_{n+2}=L_{n+1}+L_n\text{，}n\in N \end{cases}$，則稱$\langle L_n\rangle$為盧卡斯數列。

從通式的關係式中得到費氏數列與盧卡斯數列之間的關係：$L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$

以下列出用於解原題目的引理性質：

引理 2：令F_n為費氏數列第 n 項，則有$F_n^2-F_{n-1}F_{n+1}=(-1)^{n+1}$

以下列出研究時需要用到的性質：

引理 3：若F_n代表費氏數列第 n 項，L_n代表盧卡斯數列第 n 項。

則$L_n^2-4(-1)^n=5F_n^2$

引理 4：若F_n代表費氏數列第 n 項，則$F_n=F_mF_{n-m+1}+F_{m-1}F_{n-m}$

引理 5：若F_n代表費氏數列第 n 項，L_n代表盧卡斯數列第 n 項，

則$F_{n+1}L_n+(-1)^{n+1}=F_{2n+1}$

二、研究流程架構

（一）原題目解題，並推廣：

利用餘式定理將高次方降階
觀察得費氏數列規律

一、利用費氏數列的性質，解出原題答案。
二、尋找其他符合降階後有費氏數列的係數。
三、觀察得$x^2=ax+b$在高次方降階後的係數，a的正負不影響降階後數值（不計正負）。
四、觀察得$x^2=3x-1$，降階後的係數亦有費氏數列的規律。
五、當 Lucas 數列為係數時，降階後係數經線性組合可得費氏數列。

（二）推廣至其他廣義二階遞迴的係數狀況：

利用二階遞迴數列的性質
推廣至其他係數的情形

一、推廣至廣義費氏數列為線性組合係數時。
二、推廣至常數項不為正負 1 的情況。
三、推廣至廣義二階遞迴的情況。

（三）推廣至其他高次方在廣義高階遞迴的係數狀況：

利用窮舉法及二次方經驗
觀察並寫出詳細規律

一、觀察得到三、四、五、六、七次方的係數。
二、找到相關係數規律。
三、利用矩陣特徵方程式求得關係式規律。

三、研究過程

首先，我們從 1988 年 AIME 的競賽題出發，原題目如下：「a、b為整數且x^2-x-1是$ax^{17}+bx^{16}+1$的因式，求a。」因為原題目提及到因式與倍式關係，因此我們很自然

地想到了長除法這個解題選項。但很快地我們便受到了挫折，因為原題目中的次方數，遠遠超出平常課堂上練習的次數，使得我們陷入了求解的困難。因此在詢問老師時，老師給了我們「餘式定理」的提示，希望我們能夠自行去尋找答案。

我們查到「餘式定理」的解題精神，便是將除式令為零，得到某一關係式後，代入被除式中，將被除式的次方降低，以達到降次求解的效果。

因此，我們令$x^2-x-1=0 \quad => x^2=x+1 \ldots\ldots$①

我們將①式等號兩邊同乘以x，得到：$x^3=x^2+x \ldots\ldots$②

此時將①式代入②，得到：$x^3=x^2+x=2x+1$

同理，我們持續以上操作，可以得到：

$=> x^4=x^3+x^2=3x+2 \qquad => x^5=x^4+x^3=5x+3 \qquad => x^6=x^5+x^4=8x+5$

至此，我們發現到降階過後的一次方係數與常數項，皆呈現費氏數列的關係成長。

定理 1：若$x^2=x+1$，則$x^n=F_nx+\ F_{n-1}$，對所有正整數 $n\geq 2$ 皆成立。

〈證明〉：

我們利用數學歸納法來證明原式對所有正整數 n 皆成立。

1°. 當$n=2$時，左式$=x^2=x+1=F_2x+F_1=$右式

當$n=3$時，左式$=x^3=x^2+x=(x+1)+x=2x+1=F_3x+F_2=$右式

2°. 設$n=k-1$時成立，即：左式$=x^{k-1}=F_{k-1}x+F_{k-2}=$右式

且設$n=k$時亦成立，即：左式$=x^k=F_kx+F_{k-1}=$右式

則當$n=k+1$時，左式$=x^{k+1}=x^k+x^{k-1}=(F_kx+F_{k-1})+(F_{k-1}x+F_{k-2})$

$$=(F_k+F_{k-1})x+(F_{k-1}+F_{k-2})=F_{k+1}x+F_k=\text{右式}$$

根據1°.、2°.及數學歸納法得知**定理 1** 成立。

由**定理** 1 可以得到，若$x^2-x-1=0$，則$x^n=F_nx+F_{n-1}$

因此，$ax^{17}=a(F_{17}x+F_{16})=a(1597x+987)=1597ax+987a$

$bx^{16}=b(F_{16}x+F_{15})=b(987x+610)=987bx+610b$

$=> ax^{17}+bx^{16}+1=(1597a+987b)x+987a+610b+1 \ldots\ldots$③

根據**引理** 1，且由於我們一開始令除式為零：$x^2-x-1=0$

$=> ax^{17}+bx^{16}+1=0\ldots\ldots$④

將③、④列等式後：$=> \begin{cases} 1597a+987b=0 \\ 987a+610b=-1 \end{cases}$

上式亦可表達成：$=> \begin{cases} F_{17}a+F_{16}b=0 \\ F_{16}a+F_{15}b=-1 \end{cases}$

為了解開上面的聯立方程組，我們需要**引理** 2。

我們利用**引理 2** 及公式解來解上面的聯立方程組：$\begin{cases} F_{17}a+F_{16}b=0 \\ F_{16}a+F_{15}b=-1 \end{cases}$

$$=> \begin{cases} a=\dfrac{F_{16}}{F_{17}F_{15}-F_{16}^2}=\dfrac{F_{16}}{-(F_{16}^2-F_{17}F_{15})}=\dfrac{F_{16}}{-(-1)}=987 \\ b=\dfrac{-F_{17}}{F_{17}F_{15}-F_{16}^2}=\dfrac{-F_{17}}{-(F_{16}^2-F_{17}F_{15})}=\dfrac{-F_{17}}{-(-1)}=-1597 \end{cases}$$

至此，我們將原題目完整求解出來了。在這過程中，從**定理** 1 得知當$x^2-x-1=0$時，高次方後的x^n若利用餘式定理中，令除式為零的技巧降次方至一次方與常數項後，有著$x^n=F_nx+F_{n-1}$，其一次方係數與常數項皆為費氏數列的性質。在前面文獻探討（二）時，一些大學微分方程的課本中，使用齊次方程式的方法來求解費氏數列這種二階遞迴的通式時，就會出現類似於除式的特徵解方程組$\lambda^2-\lambda-1=0$出現在求解過程中。

讓我們感到興趣的，是除了**定理** 1 中的$x^2-x-1=0$外，還有沒有其他二次方程式，其高次方後的x^n，若利用餘式定理中，令除式為零的技巧降次方至一次方與常數項後，其係數也能是與費氏數列有關的係數。

一開始，我們先假設方程式形式為：$x^2=ax+b$。我們透過前面的計算方式，分別以a、b來表示x在高次方之後的一次項與常數項係數。我們將結果記錄於下頁〈表一〉：

	一次項係數	常數項係數
x^2	a	b
x^3	a^2+b	ab
x^4	a^3+2ab	a^2b+b^2
x^5	$a^4+3a^2b+b^2$	a^3b+2ab^2
x^6	$a^5+4a^3b+3ab^2$	$a^4b+3a^2b^2+b^3$
x^7	$a^6+5a^4b+6a^2b^2+b^3$	$a^5b+4a^3b^2+3ab^3$

〈表一〉$x^2=ax+b$時，x高次方降階後的一次項係數與常數項係數

從〈表一〉計算與整理的過程中，我們可以對每一次方之間的係數轉換得心應手，但卻仍無法確切說出當a、b為多少的時候，其係數才能與費氏數列有關。但我們對於〈表一〉也不是全然沒有收穫。我們經由觀察後發現，不管是哪一個次方的一次項係數與常數項係數，其 a 的次方都是全為奇數或全為偶數。例如：x^3的一次項係數為（a^2+b），雖然是由兩式相加得來，但兩式中 a 的次方為 2 與 0，皆為偶數。因此 a 值的正負性，對於求出來的係數影響，只會影響其正負與否，並不會影響到不計正負時數字的變化。因此，我們知道不用再另外去討論 a 值取負數時的變化。

而接下來我們利用窮舉法討論在$b=\pm1$時，a的不同取值，降階後係數變化：

	(1,1)		(2,1)		(3,1)		(4,1)		(5,1)		(6,1)	
次方	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數
2	1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
3	2	1	5	2	10	3	17	4	26	5	37	6
4	3	2	12	5	33	10	72	17	135	26	228	37
5	5	3	29	12	109	33	305	72	701	135	1405	228
6	8	5	70	29	360	109	1292	305	3640	701	8658	1405
7	13	8	169	70	1189	360	5473	1292	18901	3640	53353	8658
8	21	13	408	169	3927	1189	23184	5473	98145	18901	328776	53353
9	34	21	985	408	12970	3927	98209	23184	509626	98145	2026009	328776
10	55	34	2378	985	42837	12970	416020	98209	2646275	509626	12484830	2026009

〈表二〉$b=1$時的係數表現

	(1,-1)		(2,-1)		(3,-1)		(4,-1)		(5,-1)		(6,-1)	
次方	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數
2	1	-1	2	-1	3	-1	4	-1	5	-1	6	-1
3	0	-1	3	-2	8	-3	15	-4	24	-5	35	-6
4	-1	0	4	-3	21	-8	56	-15	115	-24	204	-35
5	-1	1	5	-4	55	-21	209	-56	551	-115	1189	-204
6	0	1	6	-5	144	-55	780	-209	2640	-551	6930	-1189
7	1	0	7	-6	377	-144	2911	-780	12649	-2640	40391	-6930
8	1	-1	8	-7	987	-377	10864	-2911	60605	-12649	235416	-40391
9	0	-1	9	-8	2584	-987	40545	-10864	290376	-60605	1372105	-235416
10	-1	0	10	-9	6765	-2584	151316	-40545	1391275	-290376	7997214	-1372105

〈表三〉$b=-1$時的係數表現

由上面〈表二〉及〈表三〉中，我們看到了只有當$(a,b)=(3,-1)$時，其係數結果皆為費氏數列中的數字（不計正負號）。這個結果讓我們非常開心，但我們認為應該還會有更多的(a,b)係數存在著類似的規律。然而就在我們看著「$b=2$時的係數表現」、「$b=-2$時的係數表現」等的表格時，卻總是徒呼負負，毫無收穫。

於是，我們便開始進行資料蒐集，開始查找那些整除類型求某項係數的數學競賽試題。然而在查找了許多網站之後，找到的多是除式係數為$(a,b)=(1,1)$與$(a,b)=(-1,1)$的題目。皇天不負苦心人，我們在中山大學雙週解題中找到一題，題目如下：「假如 a 與 b 為整數使得x^2-3x+1為$ax^{12}+bx^{11}-1$的因式，試求(a,b)的值？」找到這個競賽題，無疑是證實了我們這樣的觀察是沒有錯的。而接下來，就是查找更多與費氏數列有關的係數了。

在查找的過程中，我們一直沒有辦法找到直接性的係數關係。然而就在一次偶然之間，我們其中一位成員有了以下發現：

當$x^2-x-1=0$時，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$；當$x^2-3x+1=0$時，$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

而$\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$。因此，我們猜測當$x=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^3=\dfrac{4\pm2\sqrt{5}}{2}$，亦有其規律。

於是，我們將$x=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^3=\dfrac{4\pm2\sqrt{5}}{2}$，還原後的方程式為：$x^2-4x-1=0$

而$x^2=4x+1$時，高次方降階後的係數表現如下：

	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
一次方係數	4	17	72	305	1292	5473	23184	98209
常數項係數	1	4	17	72	305	1292	5473	23184

〈表四〉$(a,b)=(4,1)$時的係數

然而，乍看之下的〈表四〉似乎並沒有什麼費氏數列的數字藏在其中。正當我們認為找錯方向之時，該位同學發現，只要將一次方係數與常數項係數相加，便可以得到費氏數列中的一連串數字。詳細情形如下〈表五〉。

	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
一次方係數	4	17	72	305	1292	5473	23184	98209
常數項係數	1	4	17	72	305	1292	5473	23184
係數總和	5	21	89	377	1597	6765	28657	121393

〈表五〉$(a,b)=(4,1)$時的係數與總和

我們從〈表五〉中發現，總和竟然都是費氏數列中的數。除此之外，我們還發現了一個有趣的小定理：

> **定理2**：當$x^2-x-1=0$時，得到$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，則可得到$x^n=\dfrac{L_n\pm F_n\sqrt{5}}{2}$。
>
> 其中L_n為 Lucas 數列，且$L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$。

〈證明〉：我們利用**定理1**來證明原式對所有正整數 n 皆成立。

當$x^2-x-1=0$時，$x^2=x+1$，則$x^n=F_nx+F_{n-1}$(**定理1**)

到$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$代入，$x^n=F_n\times\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+F_{n-1}=\frac{F_n\pm F_n\sqrt{5}+2F_{n-1}}{2}=\frac{F_{n+1}\pm F_n\sqrt{5}+F_{n-1}}{2}=\frac{L_n\pm F_n\sqrt{5}}{2}$得證。

研究至此，我們從前面發現的規律，猜測當$x=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^n=\dfrac{L_n\pm F_n\sqrt{5}}{2}$，將方程式還原回一元二次方程式後，其高次方降次後，其係數表現若經過適當的線性函數轉換，都可以變成費氏數列中的數字。

接下來，由一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$的公式解中，我們可以得到：

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。當我們將$x=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^n=\dfrac{L_n\pm F_n\sqrt{5}}{2}$，還原回方程式時，

根據**引理3**：$L_n^2-4(-1)^n=5F_n^2 \Rightarrow x^2-L_nx+(-1)^n=0$

$$\Rightarrow x^2=L_nx-(-1)^n \quad \Rightarrow x^2=L_nx+(-1)^{n+1}$$

即當$(a,b)=(L_n,(-1)^{n+1})$時，我們猜測其高次方降次後，一次方係數與常數項，可經由線性函數的轉換，將其轉變成費氏數列中的數字。

為了驗證猜測是正確的，我們先將$(a,b)=(L_n,(-1)^{n+1})$，$1\le n\le 6$時的情形列出。再以簡單的線性係數積之和，去尋找分別需要如何相乘再相加，才能使之得到費氏數列的結果。

	(1,1)		(3,-1)		(4,1)		(7,-1)		(11,1)		(18,-1)	
次方	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數
2	1	1	3	-1	4	1	7	-1	11	1	18	-1
3	2	1	8	-3	17	4	48	-7	122	11	323	-18
4	3	2	21	-8	72	17	329	-48	1353	122	5796	-323
5	5	3	55	-21	305	72	2255	-329	15005	1353	104005	-5796
6	8	5	144	-55	1292	305	15456	-2255	166408	15005	1866294	-104005
7	13	8	377	-144	5473	1292	105937	-15456	1845493	166408	33489287	-1866294
8	21	13	987	-377	23184	5473	726103	-105937	20466831	1845493	600940872	-33489287
9	34	21	2584	-987	98209	23184	4976784	-726103	226980634	20466831	10783446409	-600940872
10	55	34	6765	-2584	416020	98209	34111385	-4976784	2517253805	226980634	193501094490	-10783446409

〈**表六**〉$(a,b)=(L_n,(-1)^{n+1})$時，降階後的係數

	(1,1)		(3,-1)		(4,1)		(7,-1)		(11,1)		(18,-1)	
次方	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數
倍數組合	1	0	1	1	1	-1	1	2	1	-3	1	5
	1	1	1	0	1	1	1	-1	1	2	1	-3
	2	1	2	1	2	0	2	1	2	-1	2	2
	3	2	3	1	3	1	3	0	3	1	3	-1
	5	3	5	2	5	1	5	1	5	0	5	1
	8	5	8	3	8	2	8	1	8	1	8	0
	13	8	13	5	13	3	13	2	13	1	13	1
	21	13	21	8	21	5	21	3	21	2	21	1
	34	21	34	13	34	8	34	5	34	3	34	2

〈表七〉$(a,b) = (L_n, (-1)^{n+1})$時，係數積之和可為費氏數列的倍數情形

例如：我們從〈表六〉中取$(a,b) = (4,1)$時，$x^7 = 5473x + 1292$。則取〈表七〉中的$(8,2)$作為倍數。則$8 \times 5473 + 2 \times 1292 = 46368 = F_{24}$。

而從〈表七〉之中，我們可以發現，當係數積存在某些「廣義」費氏數列的規律時，其係數積之和皆可為費氏數列的倍數。因此，這不僅僅是只有單一係數積的可能，而是存在著無窮多種係數積之和的情形。

為了證明我們發現的規律，我們在完整證明我們猜想之前，我們先找到了關於費氏數列的恆等式（**引理 4**）、費氏數列與盧卡斯數列的關係式（**引理 5**），進而再來證明我們發現的規律，並非只是空穴來風，而是經得起驗證的真材實料。

我們先由自己證明過，確認這些恆等式的計算細節後，接下來便要利用這些關係式，證明我們前面猜想的一些特定有規律的係數積之和會與費氏數列的數字有關。

定理 3：若$x^2 = L_n x + (-1)^{n+1}$，且令$x^m = a_m x + b_m$，

可得$a_{m+1} = a_m L_n + b_m$，$b_m = a_m \times (-1)^{n+1}$，則有以下結論：

(1) $a_m F_n = F_{mn}$

(2) $F_{n-1} \times a_m + b_m = F_{mn-1}$

(3) $F_{n+k} \times a_m + F_k \times b_m = F_{mn+k}$

〈證明〉：(1) $a_m F_n = F_{mn}$　我們利用**引理 2**、**引理 4** 及**引理 5**，並利用數學歸納法證明。

1°. 當$m = 2$時：

$a_2 \times F_n = L_n \times F_n = (F_{n+1} + F_{n-1}) \times F_n = F_{n-1}F_n + F_{n+1}F_n = F_{2n}$ … 成立

（根據**引理 4**，$F_{n-1}F_n + F_{n+1}F_n = F_{2n-n+1}F_n + F_{2n-n}F_{n-1} = F_{2n}$）

當$m = 3$時：

$a_3 \times F_n = (a_2 L_n + b_2) \times F_n = (L_n L_n + b_2) \times F_n = (L_n L_n + (-1)^{n+1}) \times F_n$

$= (L_n^2 + (-1)^{n+1}) \times F_n = L_n^2 \times F_n + (-1)^{n+1} \times F_n$

（根據引理 **2**，$(-1)^{n+1} = (F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1})$）

$= L_n^2 \times F_n + (F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1}) \times F_n = -(F_{n-1} + F_{n+1})^2 \times (F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1}) \times F_n$

$= (F_{n-1} + F_{n+1})^2 \times F_n + F_n^3 - F_{n-1}F_nF_{n+1} = F_{n-1}^2 F_n + F_{n+1}^2 F_n + F_{n-1}F_nF_{n+1} + F_n^3$

$= (F_{n-1}^2 F_n + F_n^3) + (F_{n-1}F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 F_n) = F_n(F_{n-1}^2 + F_n^2) + (F_{n-1}F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 F_n)$

$= F_n(F_{n-1}^2 + F_n^2) + F_{n+1}(F_{n-1}F_n + F_{n+1}F_n)$

（根據引理 **4**，$F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{n-1}F_{n-1} + F_nF_n = F_{(2n-1)-n+1}F_n + F_{(2n-1)-n}F_{n-1} = F_{2n-1}$）

$= F_n \times F_{2n-1} + F_{n+1}(F_{n-1}F_n + F_{n+1}F_n) = F_n \times F_{2n-1} + F_{n+1}F_{2n} = F_{3n}$ …成立

（根據引理 **4**，$F_{n-1}F_n + F_{n+1}F_n = F_{2n-n+1}F_n + F_{2n-n}F_{n-1} = F_{2n}$）

（根據引理 **4**，$F_nF_{2n-1} + F_{n+1}F_{2n} = F_{3n-2n+1}F_{2n} + F_{3n-2n}F_{2n-1} = F_{3n}$）

2°. 設$m = p - 1$及$m = p$時成立，即$a_{p-1}F_n = F_{(p-1)n}$、$a_pF_n = F_{pn}$

則$a_{p+1}F_n = (a_pL_n + b_p)F_n = a_pF_nL_n + b_pF_n = a_pF_nL_n + a_{p-1} \times (-1)^{n+1}F_n$

$= F_{pn}L_n + a_{p-1} \times F_n(-1)^{n+1} = F_{pn}L_n + F_{(p-1)n}(-1)^{n+1} = F_{pn}(F_{n-1} + F_{n+1}) + F_{(p-1)n}(-1)^{n+1}$

（根據引理 **2**，$(-1)^{n+1} = (F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1})$）

$= F_{pn}(F_{n-1} + F_{n+1}) + (F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1}) \times F_{pn-n}$

$= F_{pn}F_{n-1} + F_{pn}F_{n+1} + (F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1}) \times F_{pn-n}$

$= F_{pn}F_{n-1} + F_{pn}F_{n+1} + F_n^2F_{pn-n} - F_{n+1}F_{n-1}F_{pn-n}$

$= F_{pn}F_{n-1} + F_{pn}F_{n+1} + F_n^2F_{pn-n} - (F_{n+1} - F_n)F_{n+1}F_{pn-n}$

$= F_{pn}F_{n-1} + F_{pn}F_{n+1} + F_n^2F_{pn-n} - \left(F_{n+1}^2F_{pn-n} - F_nF_{n+1}F_{pn-n}\right)$

$= F_{pn}F_{n-1} + F_{pn}F_{n+1} + F_n^2F_{pn-n} - F_{n+1}^2F_{pn-n} + F_nF_{n+1}F_{pn-n}$

$= F_{pn}F_{n-1} + F_{pn}F_{n+1} + F_n\left(F_nF_{pn-n} + F_{n+1}F_{pn-n}\right) - F_{n+1}^2F_{pn-n}$

$= F_{pn}F_{n-1} + F_n\left[F_nF_{pn-n} + F_{n+1} \times \left(F_{pn-n+1} - F_{pn-n-1}\right)\right] + F_{pn}F_{n+1} - F_{n+1}^2F_{pn-n}$

$= F_{pn}F_{n-1} + F_n(F_nF_{pn-n} + F_{n+1}F_{pn-n+1} - F_{n+1}F_{pn-n-1}) + F_{pn}F_{n+1} - F_{n+1}^2F_{pn-n}$

$= F_{pn}F_{n-1} + F_n\big(F_nF_{pn-n} + F_{n+1}F_{pn-n+1}\big) - F_nF_{n+1}F_{pn-n-1} + F_{pn}F_{n+1} - F_{n+1}^2F_{pn-n}$

$= F_{pn}F_{n-1} + F_n\big(F_nF_{pn-n} + F_{n+1}F_{pn-n+1}\big) + F_{pn}F_{n+1} - \big(F_{n+1}^2F_{pn-n} + F_nF_{n+1}F_{pn-n-1}\big)$

（根據**引理 4**，$F_nF_{pn-n} + F_{n+1}F_{pn-n+1} = F_{pn+1-(n+1)+1}F_{n+1} + F_{pn+1-(n+1)}F_{n+1-1} = F_{pn+1}$）

$= F_{pn}F_{n-1} + F_{pn+1}F_n + F_{pn}F_{n+1} - \big(F_{n+1}^2F_{pn-n} + F_nF_{n+1}F_{pn-n-1}\big)$

$= F_{pn}F_{n-1} + F_{pn+1}F_n + F_{pn}F_{n+1} - F_{n+1}\big(F_{n+1}F_{pn-n} + F_nF_{pn-n-1}\big)$

（根據**引理 4**，$F_{n+1}F_{pn-n} + F_nF_{pn-n-1} = F_{pn-(n+1)+1}F_{n+1} + F_{pn-(n+1)}F_{n+1-1} = F_{pn}$）

$= F_{pn}F_{n-1} + F_{pn+1}F_n + F_{pn}F_{n+1} - F_{pn}F_{n+1}$

（根據**引理 4**，$F_{pn+1}F_n + F_{pn}F_{n-1} = F_{pn+n-n+1}F_n + F_{pn+n-n}F_{n-1} = F_{pn+n}$）

$= F_{pn+n} + F_{pn}F_{n+1} - F_{pn}F_{n+1} = F_{(p+1)n}$

3°. 根據1°.，2°. 及數學歸納法

當$x^2 = L_nx + (-1)^{n+1}$時，令$x^m = a_mx + b_m$

且$a_{m+1} = a_mL_n + b_m$，$b_m = a_m \times (-1)^{n+1}$時，$a_mF_n = F_{mn}$成立

〈證明〉：(2) $F_{n-1} \times a_m + b_m = F_{mn-1}$

1°. 當$m = 2$時，$F_{n-1} \times a_2 + b_2$

$= F_{n-1} \times L_n + (-1)^{n+1} = F_{n-1} \times L_n + (F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1})$

$= F_{n-1}(F_{n-1} + F_{n+1}) + F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = F_{n-1}^2 + F_n^2 = F_{2n-1}$ ……成立

2°. 設$m = p$時成立，即$F_{n-1} \times a_p + b_p = F_{pn-1}$

則當$m = p + 1$時

$x^{p+1} = a_{p+1}x + b_{p+1} = \big(a_pL_n + b_p\big)x + a_p(F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1})$

$F_{n-1} \times a_{p+1} + b_{p+1}$

$= F_{n-1}\big(a_pL_n + b_p\big) + a_p(F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1}) = F_{n-1}a_pL_n + F_{n-1}b_p + a_pF_n^2 - a_pF_{n+1}F_{n-1}$

$= F_{n-1}a_p(F_{n-1} + F_{n+1}) + F_{n-1}b_p + a_pF_n^2 - a_mF_{n+1}F_{n-1}$

$= F_{n-1}^2a_p + F_{n-1}a_pF_{n+1} + F_{n-1}b_p + a_pF_n^2 - a_pF_{n+1}F_{n-1}$

$= F_{n-1}^2a_p + F_{n-1}b_p + a_pF_n^2 = F_{n-1}\big(F_{n-1}a_p + b_p\big) + a_pF_n^2$

$= F_{n-1}F_{pn-1} + F_nF_{pn} = F_{pn+n-1} = F_{(p+1)n-1}$ …成立

3°. 根據1°.、2°.及數學歸納法得

若$x^2 = L_n x + (-1)^{n+1}$，令$x^m = a_m x + b_m$，

且$a_{m+1} = a_m L_n + b_m$，$b_{m+1} = a_m \times (-1)^{n+1}$

則$F_{n-1} \times a_m + b_m = F_{mn-1}$

好不容易地證明完了兩個定理，但對於〈表七〉中所提及的係數積，也只有證明兩種係數積的結果而已。然而，我們所觀察得到的結果卻遠比這兩個證明要來得多。

	(1,1)		(3,-1)		(4,1)		(7,-1)		(11,1)		(18,-1)	
次方	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數
	1	0	1	1	1	-1	1	2	1	-3	1	5
	1	1	1	0	1	1	1	-1	1	2	1	-3
	2	1	2	1	2	0	2	1	2	-1	2	2
	3	2	3	1	3	1	3	0	3	1	3	-1
倍數組合	5	3	5	2	5	1	5	1	5	0	5	1
	8	5	8	3	8	2	8	1	8	1	8	0
	13	8	13	5	13	3	13	2	13	1	13	1
	21	13	21	8	21	5	21	3	21	2	21	1
	34	21	34	13	34	8	34	5	34	3	34	2

〈表七〉$(a,b) = (L_n, (-1)^{n+1})$時，係數積之和可為費氏數列的倍數情形（灰底顯影提醒）

因此，接下來要來證明所有〈表七〉中的其他情況。我們將利用到(1) $a_m F_n = F_{mn}$與(2) $F_{n-1} \times a_m + b_m = F_{mn-1}$的基礎，去做延伸，將〈表七〉的所有情形作完整的證明。

〈證明〉(3) $F_{n+k} \times a_m + F_k \times b_m = F_{mn+k}$

同樣地，我們利用數學歸納法來進行證明：

此外，我們希望推廣至廣義的費氏數列，即$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n，n \in \mathbb{Z} \end{cases}$，我們利用$F_1$、$F_2$之值去回推$F_0 = F_2 - F_1 = 0$，$F_{-1} = F_1 - F_0 = 1$，$F_{-2} = F_0 - F_{-1} = -1$等。

(1) $a_m F_n = F_{mn}$：此結論亦可表示為$F_n a_m + F_0 \times b_m = F_{mn}$

(2) $F_{n-1} \times a_m + b_m = F_{mn-1}$：此結論亦可表示為$F_{n-1} a_m + F_{-1} \times b_m = F_{mn-1}$

1°. 當$k = -1$時，$F_{n-1} \times a_m + F_{-1} b_m = F_{mn-1}$（(2) $F_{n-1} \times a_m + b_m = F_{mn-1}$）成立

當$k = 0$時，$F_n \times a_m + F_0 b_m = F_{mn+0}$（(1) $a_m F_n = F_{mn}$）成立

2°. 設$k = p - 1$時成立，即$F_{n+(p-1)} \times a_m + F_{p-1} b_m = F_{mn+(p-1)}$

及$k = p$時成立，即$F_{n+p} \times a_m + F_p b_m = F_{mn+p}$

則$k=p+1$時

$F_{n+(p+1)}\times a_m+F_{(p+1)}b_m$

$=(F_{n+(p-1)}+F_{n+p})\times a_m+(F_{(p-1)}+F_p)\times b_m$

$=(F_{n+(p-1)}\times a_m+F_{n+p}\times a_m)+(F_{(p-1)}\times b_m+F_p\times b_m)$

$=(F_{n+(p-1)}\times a_m+F_{(p-1)}\times b_m)+(F_{n+p}\times a_m+F_p\times b_m)$

$=F_{mn+(p-1)}+F_{mn+p}$（根據(1) $a_mF_n=F_{mn}$及(2) $F_{n-1}\times a_m+b_m=F_{mn-1}$）

$=F_{mn+(p+1)}$ ……成立

至此，我們完成往數字大的數學歸納法推論。

3°. 接著要完成往數字小的數學歸納法推論：

根據費氏數列的性質：$F_{mn+(p-2)}=F_{mn+p}-F_{mn+(p-1)}$

則$k=p-2$時

$F_{n+(p-2)}\times a_m+F_{(p-2)}b_m$

$=(F_{n+p}-F_{n+(p-1)})\times a_m+(F_{n+p}-F_{n+(p-1)})\times b_m$

$=(F_{n+p}\times a_m-F_{n+(p-1)}\times a_m)+(F_{n+p}\times b_m-F_{n+(p-1)}\times b_m)$

$=\left(F_{n+p}\times a_m+F_{n+p}\times b_m\right)-(F_{n+(p-1)}\times a_m+F_{n+(p-1)}\times b_m)$

$=F_{mn+p}-F_{mn+(p-1)}$（根據(1) $a_mF_n=F_{mn}$及(2) $F_{n-1}\times a_m+b_m=F_{mn-1}$）

$=F_{mn+(p-2)}$ ……成立

4°. 根據1°.、2°.、3°.及數學歸納法得

若$x^2=L_nx+(-1)^{n+1}$，令$x^m=a_mx+b_m$，

且$a_{m+1}=a_mL_n+b_m$，$b_{m+1}=a_m\times(-1)^{n+1}$

則$F_{n+k}\times a_m+F_k\times b_m=F_{mn+k}$，$\forall k\in Z$

研究至此，我們完成了我們猜想的證明，成功地找到一些規律。當我們的關係式中，一次方係數為盧卡斯數列、常數項為$(-1)^{n+1}$時，利用餘式定理（小貝祖定理）來將高次方降次方後的係數，藉由適當的費氏數列數字當倍數，係數積之後的結果，會變成費氏數列的其中一項。

以上的研究，主要討論一次方係數為盧卡斯數列的情形，我們知道$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$。於是我們猜測，若有其他數列與費氏數列的關係跟F_{n+2}、F_{n-2}、F_{n+3}、F_{n-3}...有關時，將之當作一次方係數，應也可配合相對應的常數項，使之利用餘式定理降次後，係數積為某一項費氏數列。

我們原先從F_{n+2}、F_{n-2}來看，發現若一數列與費氏數列的關係為$F_{n+2} - F_{n-2}$，則形成的前幾項為：3，4，7，11，18 ...為盧卡斯數列往前一項且第一項為$F_4 - F_0$，當然也跟費氏數列有相對應的關係。接下來我們看到$F_{n+3} + F_{n-3}$，形成數列為：8，14，22，36 ...第一項為$F_6 + F_0$。不難發現，此數列為原盧卡斯數列往前 2 項，再乘以 2 倍。而除此之外，我們也大膽推測，擁有類似性質的一次方係數，所形成的數列規律應為$F_{n+k} + F_{n-k} \times (-1)^{k+1}$，而盧卡斯數列就是成立於$k = 1$時。

而若將以$F_{n+3} + F_{n-3}$形成的數列，作為原二次方程式中的一次方係數，由〈表八〉、〈表九〉可知，當常數項為4、-4時，若將特定規律的費氏數列作為倍數，分別乘上係數得出的積，為某一項之費氏數列，乘上2的冪次，且冪次隨著次方遞增。

	(8,4)		(14,-4)		(22,4)		(36,-4)		(58,4)	
次方	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數
2	8	4	14	-4	22	4	36	-4	58	4
3	68	32	192	-56	488	88	1292	-144	3368	232
4	576	272	2632	-768	10824	1952	46368	-5168	195576	13472
5	4880	2304	36080	-10528	240080	43296	1664080	-185472	11356880	782304
6	41344	19520	494592	-144320	5325056	960320	59721408	-6656320	659481344	45427520
7	350272	165376	6779968	-1978368	118111552	21300224	2143314368	-238885632	38295345472	2637925376
8	2967552	1401088	92941184	-27119872	2619754368	472446208	76920431616	-8573257472	223767962752	153181381888
9	25141504	11870208	1274056704	-371764736	58107042304	10479017472	2760562280704	-307681726464	12913172322150 4	8895071851008
10	213002240	100566016	17465029120	-5096226816	1288833948160	232428169216	99072560378880	-11042249122816	7.49854E+15	516526892886016

〈表八〉一次方係數為$F_{n+3} + F_{n-3}$，降階後係數情形

	(8,4)		(14,-4)		(22,4)		(36,-4)		(58,4)		(94,-4)	
次方	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數
	0	1	1	1	1	1	2	1	3	1	5	1
	2	0	3	0	5	0	8	0	13	0	21	0
	8	1	13	1	21	1	34	1	55	1	89	1
倍數	34	4	55	4	89	4	144	4	233	4	377	4
組合	144	17	233	17	377	17	610	17	987	17	1597	17
	610	72	987	72	1597	72	2584	72	4181	72	6765	72
	2584	305	4181	305	6765	305	10946	305	17711	305	28657	305
	10946	1292	17711	1292	28657	1292	46368	1292	75025	1292	121393	1292
	46368	5473	75025	5473	121393	5473	196418	5473	317811	5473	514229	5473

〈表九〉$F_{n+3} + F_{n-3}$形成之數列的相關倍數情形

例如：取〈表八〉中$(a,b)=(22,4)$時，$x^4=10824x+1952$ 、〈表九〉中的倍數組合$(89,4)$來看，$89\times 10824+4\times 1952=971144=8\times 121393=8F_{26}$。

而在$F_{n+1}+F_{n-1}$、$F_{n+2}-F_{n-2}$、$F_{n+3}+F_{n-3}$的研究中，我們在討論時都遵守一個規則，就是第一項必為F_0+F_{2k}。例如在$k=3$時，第一項為$F_0+F_6=8$。

而當$F_{n+k}+F_{n-k}\times(-1)^{k+1}$，若以$F_{n-1}$為基準討論，等價於$F_{n+2k-1}+F_{n-1}\times(-1)^{k+1}$。這樣可以在後面的過程中，形成數列的第一項，可直接以$n=1$代入關係式，不會像$F_{n+2}-F_{n-2}$、$F_{n+3}+F_{n-3}$的研究中，n代入仍有變數k。例如在$F_{n+2}-F_{n-2}$中，第一項為$n=2$代入後的F_4-F_0。但以$F_{n+3}+F_{n-3}$形成的數列的第一項卻為$n=3$代入後的F_0+F_6。而若以$F_{n+2k-1}+F_{n-1}\times(-1)^{k+1}$改寫，$n=1$，$k=2$代入後，即可直接生成$F_4-F_0$、$F_0+F_6$。

於是在接續的研究中，我們以$F_{n+2k-1}+F_{n-1}\times(-1)^{k+1}$來改寫$F_{n+k}+F_{n-k}\times(-1)^{k+1}$，使$n=1$代入後可直接生成數列的第一項，以便之後的研究。

接下來，我們同樣利用窮舉法，去驗證我們的猜測。發現當$k=4$、5時，也符合其規律。而係數積得出的結果，還需要乘上某費氏數列的冪次，才可得到其預期的結果，而將以k值決定乘上哪一項費氏數列之冪次。有趣的是，常數項的倍數，為兩費氏數列相除，且倍數的值與一次項為盧卡斯時，高次方降次後的一次項係數相同。

首先，我們需要原本費氏數列恆等式(**引理**4)的延伸，將其右式的F_n足碼差無限制。

引理 6(已知)：若F_n代表費氏數列第 n 項，則$F_kF_n=F_mF_{n-m+k}+F_{m-k}F_{n-m}\times(-1)^{k+1}$

〈證明〉：利用數學歸納法證明，在此不再贅述。定理證明整理於：https：//reurl.cc/1x7lQ8

除此之外，我們還發現另一個小性質：

引理 7(已知)：若F_n代表費氏數列第 n 項，且L_n代表盧卡斯數列第 n 項，

則$F_{n-1}\times(-1)^{k+1}+F_{n+2k-1}=F_kL_{n+k-1}$

〈證明〉利用數學歸納法證明，在此不再贅述。定理證明整理於：https：//reurl.cc/1x7lQ8

到此，我們猜測，可能以$F_{n+2k-1}+F_{n-1}\times(-1)^{k+1}$形成的數列都可當作係數，使係數積也成為其數列的其中一項。而此時的常數項，將不僅限於$(-1)^{n+1}$。

定理 4：設$A_n=F_{n-1}\times(-1)^{k+1}+F_{n+2k-1}=F_kL_{n+k-1}$，若$x^2=A_nx+F_k^2\times(-1)^{n+k}$

令$x^m=a_mx+b_m$，可得$a_{m+1}=a_mA_n+b_m$，$b_{m+1}=a_m\times F_k^2\times(-1)^{n+k}$，則

(1) $a_mF_{n+k-1}=F_{m(n+k-1)}\times F_k^{m-1}$

(2) $a_mF_{n-1}+b_m\times(-1)^{k+1}=F_{m(n-1)+(m-1)k}\times F_k^{m-1}$

(3) $a_mF_{n-1+(t+1)k}+b_m\times\dfrac{F_{tk}}{F_k}=F_{m(n-1)+(t+m)k}\times F_k^{m-1}$

〈證明〉：利用數學歸納法證明，在此不再贅述。定理證明整理於：https：//reurl.cc/1x71Q8

至此，我們發現，常數項的倍數，跟在**定理** 3 中的a_m的形式相同。這表示，若我們放大一次項的係數，則常數項的倍數形成的數列特徵方程式為：$x^2 = L_k x + (-1)^{k+1}$。與最一開始的研究規律相同。

到此，我們完成了對於係數上的推廣。接下來我們以倍數出發，我們猜測，倍數不只僅限於狹義費氏數列，可能對於廣義費氏數列，皆有相似規律。

而在此，我們先將廣義費氏數列定義，後續的研究中，皆以此定義來討論。

定義：數列$\langle H_n\rangle$滿足：$\begin{cases} H_1 = h_1 \\ H_2 = h_2 \\ H_{n+2} = H_{n+1} + H_n，n \in N \end{cases}$，則稱$\langle H_n\rangle$為廣義費氏數列。

為了驗證猜測，我們隨意固定$H_0 = 1$、$H_1 = 4$，進行試算。而根據前述中的〈表六〉及下述的〈表十〉，可以發現廣義費氏數列也跟狹義費氏數列一樣，若一次項為盧卡斯數列，常數項為$(-1)^{n+1}$時，利用餘式定理將高次方降次後的係數，分別將之乘上廣義費氏數列，則會得出一廣義費氏數列。

	(1,1)		(3,-1)		(4,1)		(7,-1)		(11,1)		(18,-1)	
次方	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數
	1	3	4	3	5	3	9	3	14	3	23	3
	4	1	5	1	9	1	14	1	23	1	37	1
	5	4	9	5	14	9	23	14	37	23	60	37
倍數	9	5	14	9	23	14	37	23	60	37	97	60
組合	14	9	23	14	37	23	60	37	97	60	157	97
	23	14	37	23	60	37	97	60	157	97	254	157
	37	23	60	37	97	60	157	97	254	157	411	254
	60	37	97	60	157	97	254	157	411	254	665	411
	97	60	157	97	254	157	411	254	665	411	1076	665

〈表十〉$(a,b) = (L_n, (-1)^{n+1})$時，係數積之和可為廣義費氏數列的倍數情形

例如：取〈表六〉中$(a,b) = (11,1)$時，$x^5 = 15005x + 1353$。然後取〈表十〉中$(a,b) = (11,1)$時的倍數組合$(14,3)$，則$14 \times 15005 + 3 \times 1353 = 346468 = H_{25}$

而同樣的，我們需要**引理** 6 的延伸，來輔助我們證明：

引理 8(已知)：若H_n代表一廣義費氏數列第 n 項，且F_n代表費氏數列第 n 項， 則$F_k H_n = F_m H_{n-m+k} + F_{m-k} H_{n-m} \times (-1)^{k+1}$

〈證明〉：利用數學歸納法證明，在此不再贅述。定理證明整理於：https：//reurl.cc/1x71Q8

接下來是我們在廣義費氏數列的研究：

定理 5：若$x^2 = L_n x + (-1)^{n+1}$，且令$x^m = a_m x + b_m$， 可得$a_{m+1} = a_m L_n + b_m$，$b_{m+1} = a_m \times (-1)^{n+1}$，則： (1) $a_m H_n + b_m H_0 = H_{mn}$ (2) $a_m H_{n-1} + b_m H_{-1} = H_{mn-1}$ (3) $a_m H_{n+k} + b_m H_k = H_{mn+k}$，$\forall k \in Z$

〈證明〉：利用數學歸納法證明，在此不再贅述。定理證明整理於：https：//reurl.cc/1x7lQ8

證明完**定理** 5 之後，我們嘗試對比前面的研究，將係數推廣至$F_{n+k}+F_{n-k}\times(-1)^{k+1}$。但當我們以$F_{n+2}-F_{n-2}$、$F_{n+3}+F_{n-3}$當作係數時，卻找不到與前提研究相符的規律。

於是，我們將前面的研究重新檢閱一遍，發現〈表一〉中方程式形式：$x^2=ax+b$，其也滿足$B_n=aB_{n-1}+bB_{n-2}$之遞迴關係的B_n的特徵方程式。於是，我們靈機一動，想要將前述有關費氏數列的研究推廣至一個跟費氏數列有相似之處的二階遞迴數列。

費氏數列的充要條件除了有$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$之外，還有$F_0=0$、$F_1=1$，由於要推廣至任意遞迴關係式，我們將重點放在初始項的設定。我們猜測，當初始兩項為固定值或者是符合一特定規律時，也能找到一對應的數列與此特殊的二項遞迴數列有相似的關係。

因此我們開始蒐集資料，希望能夠找到相關的數列。在尋找了許多網站後，終於找到：盧卡斯序列(Lucas sequence)。與前面的盧卡斯數列(Lucas number)不同。但為了不跟前提的盧卡斯數列搞混，我們以「廣義二階遞迴」代替盧卡斯序列，以下是廣義二階遞迴的定義：

定義：數列$\langle B_n\rangle$滿足：$\begin{cases} B_0=0 \\ B_1=1 \\ B_{n+2}=a\times B_{n+1}+b\times B_n，a、b\in Z、n\in N \end{cases}$，

則稱$\langle B_n\rangle$為廣義二階遞迴。

接下來，若以$B_{n+1}+b\times B_{n-1}$形成之數列作為係數，也可對應到另一數列當作倍數，使係數積為其對應的二階遞迴數列的其中一項。如同前提的研究，先證明**引理 7** 的延伸

引理 9(已知)：C_n為一二階遞迴數列第n項，且$C_{n+2}=a\times C_{n+1}+b\times C_n$，$a$、$b$、$n\in N$，
B_n為一廣義二階遞迴數列第n項，且$B_{n+2}=a\times B_{n+1}+b\times B_n$，$a$、$b$、$n\in N$
則$B_kC_n=B_mC_{n-m+k}+B_{m-k}C_{n-m}\times(-1)^{k+1}\times b^k$

〈證明〉：利用數學歸納法證明，在此不再贅述。定理證明整理於：https：//reurl.cc/1x7lQ8

在證明完廣義二階遞迴的相關性質後，我們將〈B_n〉類比為前述研究的費氏數列；將〈C_n〉類比為前述研究中相乘的廣義費氏數列至於前述研究中一次方係數的盧卡斯數列，則以〈D_n〉（後面定理中會做〈D_n〉的定義敘述）來類比。因此，我們得到了以下的定理：

定理 6：若C_n為一二階遞迴數列第n項，且$C_{n+2}=a\times C_{n+1}+b\times C_n$，$a$、$b$、$n\in N$
B_n為一廣義二階遞迴數列第n項，且$B_{n+2}=a\times B_{n+1}+b\times B_n$，$a$、$b$、$n\in N$
且$D_n=B_{n+1}+b\times B_{n-1}$，若$x^2=D_nx+(-1)^{n+1}\times b^n$，且令$x^m=a_mx+b_m$，
則：(1) $a_mC_n+b_mC_0=C_{mn}$
(2) $a_mC_{n+1}+b_mC_1=C_{mn+1}$
(3) $a_mC_{n+k}+b_mC_k=C_{mn+k}$

〈證明〉：利用數學歸納法證明，在此不再贅述。定理證明整理於：https：//reurl.cc/1x7lQ8

而我們也將廣義二階遞迴數列的規律對比**定理 4**。這裡先寫出需要的係數規律(同**引理** 7)

引理 10(已知)：B_n為廣義二階遞迴的第n項，且$B_{n+2}=a\times B_{n+1}+b\times B_n$，$a$、$b$、$n\in N$
且$D_n=B_{n+1}+b\times B_{n-1}$，則$B_{n-1}\times(-1)^{k+1}\times b^k+B_{n+2k-1}=B_kD_{n+k-1}$

〈證明〉：利用數學歸納法證明，在此不再贅述。定理證明整理於：https：//reurl.cc/1x7lQ8

最後，我們將原題目的係數關係，做所有廣義二階遞迴的延伸推廣。

定理 7：B_n代表一廣義二階遞迴的第n項，且$B_{n+2} = a \times B_{n+1} + b \times B_n$，$a$、$b$、$n \in N$
且$D_n = B_{n+1} + b \times B_{n-1}$，$G_n = B_{n-1} \times (-1)^{k+1} \times b^k + B_{n+2k*1} = B_k D_{n+k-1}$
若$x^2 = G_n x + B_k^2 \times (-1)^{n+k} \times b^{n+k-1}$，且令$x^m = a_m x + b_m$，則：
(1) $B_{n+k-1} a_m = B_{m(n+k-1)} \times B_k^{m-1}$
(2) $B_{n-1} a_m + \frac{1}{b^k} \times (-1)^{k+1} \times b_m = B_{m(n-1)+(m-1)k} \times B_k^{m-1}$
(3) $B_{n-1+(t+1)k} a_m + \frac{B_{tk}}{B_k} \times b_m = B_{m(n-1)+(m+t)k} \times B_k^{m-1}$

〈證明〉：利用數學歸納法證明，在此不再贅述。定理證明整理於：https：//reurl.cc/1x7lQ8

至此，我們完成了對於二次方全部的推論。而令我們好奇的是，若將次方數推至三次、四次甚至更高次，是否會有其他數列能夠當作係數和倍數，使之產生規律。於是，我們開始進行三次方的研究。由於費氏數列的性質，我們試著寫出三階遞迴的費氏數列，即類似於$T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$形式的數列，來當作是二次方的係數。至於一次方係數與常數項，則是利用窮舉法的方式尋找規律。皇天不負苦心人，在多次嘗試失敗之後，我們終於慢慢找出前幾項有規律的係數，詳見下表〈表十一〉。也發現：1，1，2，4，7，13，…，此一符合三階遞迴的數列。

	2	1	1		24	4	1	
次方	x^2係數	x係數	常數	係數積和	x^2係數	x係數	常數	係數積和
3	1	1	1	4	7	-5	1	149
4	2	2	1	7	44	-34	7	927
5	4	3	2	13	274	-213	44	5768
6	7	6	4	24	1705	-1326	274	35890
7	13	11	7	44	10609	-8251	1705	223317
8	24	20	13	81	66012	-51340	10609	1389537
9	44	37	24	149	410744	-319451	66012	8646064
10	81	68	44	274	2555757	-1987708	410744	53798080
11	149	125	81	504	15902591	-1.2E+07	2555757	3.35E+08

	7	2	1		81	7	1	
次方	x^2係數	x係數	常數	係數積和	x^2係數	x係數	常數	係數積和
3	3	1	1	24	11	5	1	927
4	10	4	3	81	126	56	11	10609
5	34	13	10	274	1442	641	126	121415
6	115	44	34	927	16503	7336	1442	1389537
7	389	149	115	3136	188869	83957	16503	15902591
8	1316	504	389	10609	2161516	960848	188869	1.82E+08
9	4452	1705	1316	35890	24737524	10996449	2161516	2.08E+09
10	15061	5768	4452	121415	2.83E+08	1.26E+08	24737524	2.38E+10
11	50951	19513	15061	410744	3.24E+09	1.44E+09	2.83E+08	2.73E+11

〈**表十一**〉三次方降次後的係數觀察

經過查找資料後，發現1，1，2，4，7，13，…是名為 Tribonacci 的三階費氏數列。

定義：數列$\langle T_n \rangle$滿足：$\begin{cases} T_0 = 0 \\ T_1 = 1 \\ T_2 = 1 \\ T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n，n \in N \end{cases}$，則稱$\langle T_n \rangle$為 Tribonacci sequence

例如：〈表十一〉的右上角中，以 4 次方降階後的結果為例，$24 \times 44 + 4 \times (-34) + 1 \times 1 = 927 = T_{13}$

〈表十一〉中，我們發現x^2的係數有著跟 Tribonacci 數列一樣的遞迴關係，即$11 = 7 + 3 + 1$；各項係數所對應的倍數分別為T_{2n+1}、T_{n+1}、T_1。此外，二次方係數亦可表示為$T_n + 2T_{n-1} + 3T_{n-2}$（舉例來說：右下角表格中的 11 為第四個$x^2$項係數，即$T_4 + 2T_3 + 3T_2 = 4 + 2 \times 2 + 3 \times 1 = 11$），這與二次方時$L_n = F_{n+1} + F_{n-1} = F_n + 2F_{n-1}$的規律相似。

而我們也嘗試寫出一次項係數與 Tribonacci 數列的關係，而在多次嘗試過後毫無結果。於是在我們探討文獻過後，找到了${T_n}^2 - 2{T_{n-1}}^2 - 3{T_{n-2}}^2 + 2T_nT_{n-1} - 2T_nT_{n-2} - 4T_{n-1}T_{n-2}$此關係式。但由於過於冗長。我們決定探討更高次方，嘗試找到之間的關係。

以下是我們在三次方到六次方，找到符合降階後的特定係數積和為特定高階費氏數列的係數：

	三次方二次項	三次方一次項	三次方常數項	四次方三次項	四次方二次項	四次方一次項	四次方常數項
第1組	1	1	1	1	1	1	1
第2組	3	1	1	3	3	-1	-1
第3組	7	-5	1	7	1	1	1
第4組	11	5	1	15	-17	7	-1
第5組	21	1	1	26	16	6	1
第6組	39	-11	1	51	15	-1	-1
第7組	71	15	1	99	-13	1	1
第8組	131	-3	1	191	-81	15	-1
第9組	241	-23	1	367	127	19	1
第10組	443	41	1	708	58	4	-1
第11組	815	-21	1	1365	-175	1	1
第12組	1499	-43	1	2631	-329	31	-1

〈**表十二**〉三次方、四次方符合降次後係數積和為特定高階費氏數列的係數

	五次方四次項	五次方三次項	五次方二次項	五次方一次項	五次方常數項	六次方五次項	六次方四次項	六次方三次項	六次方二次項	六次方一次項	六次方常數項
第1組	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
第2組	3	3	1	1	1	3	3	3	-1	-1	-1
第3組	7	4	4	1	1	7	7	-5	-5	1	1
第4組	15	-1	1	1	1	15	7	7	-1	-1	-1
第5組	31	-49	31	-9	1	31	-9	1	1	1	1
第6組	57	42	22	7	1	63	-129	111	-49	11	-1
第7組	113	57	1	1	1	120	99	64	29	8	1
第8組	223	31	33	1	1	239	159	31	-1	-1	-1
第9組	439	-140	4	1	1	475	187	-5	-23	1	1
第10組	863	-497	141	-19	1	943	-17	83	19	-1	-1
第11組	1695	815	199	23	1	1871	-967	89	1	1	1
第12組	3333	758	10	-5	1	3711	-2753	1063	-217	23	-1
第13組	6553	-311	209	1	1	7359	4447	1535	287	27	1
第14組	12883	-3021	113	1	1	14598	5617	276	-15	6	-1
第15組	25327	-3796	604	-39	1	28957	3057	1105	-95	1	1
第16組	49791	13759	1473	65	1	57439	-10465	799	255	-1	-1
第17組	97887	7039	375	-33	1	113935	-39473	3775	-33	1	1

〈**表十三**〉五次方、六次方符合降次後係數積和為特定高階費氏數列的係數

例如：在五次方時，我們找到的第二組為 (3,3,1,1,1)。而由二次方和三次方的規則，我們推測五次方時要的倍數所形成的數列為一個類似於費氏數列的五階遞迴數列：1，1，2，4，8，16，31，61，120，236，464，……。

$$\text{即：}\begin{cases} a_1 = 1\text{，}a_2 = 1\text{，}a_3 = 2\text{，}a_4 = 4\text{，}a_5 = 8 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4} + a_{n-5}\text{，}n \geq 6\text{，}\forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

我們可以得到：$3 \times a_9 + 3 \times a_7 + 1 \times a_5 + 1 \times a_3 + 1 \times a_1$

$$= 3 \times 120 + 3 \times 31 + 1 \times 8 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 464\text{。}$$

其中，464為數列中的其中一項。除此之外，乘上的倍數在數列中的項數差 2，如120、31、8、2、1分別為數列中的第 9、7、5、3、1 項。甚至，只要是項數數字是公差為 n 的數列項，都可以是五次方表格中，第 n 組數字的乘積倍，其乘積和也會成為該五階遞迴數列的其中一項。於是，我們在還沒完整證明之前，猜測在任意高次方的規律中，隨著係數的不同，所乘倍數之間在高階費氏數列的項數差也會隨之改變。

而在尋找這些係數時，我們無法只利用窮舉法找出所有數字。於是，我們利用$Excel$中的功能，將用窮舉法找出來的係數，構造聯立方程式並跑線性規劃，嘗試找出這些係數的遞迴關係，並在這些遞迴關係中找到規律。

此後，為了方便說明，我們先定義一些符號：

定義：數列〈 $P_{a,b,c}$ 〉為a次方關係式中，符合係數積和為特定高階費氏數列之b次方項的第c組數字。

例如：在〈表十三〉，六次方表格的五次方項，在第 13 組為 7359，那即可表示為 $P_{6,5,13} = 7359$，而第 13 組中其他次方的係數皆可寫成$P_{6,4,13} = 4447$、$P_{6,3,13} = 1535$、$P_{6,2,13} = 27$、$P_{6,1,13} = 1$。而藉由$Excel$的功能，並利用這個符號，寫出了各項係數的遞迴關係，如下〈表十四〉：

三次方二次項：$P_{3,2,n} = P_{3,2,n-1} + P_{3,2,n-2} + P_{3,2,n-3}$
三次方一次項：$P_{3,1,n} = -P_{3,1,n-1} - P_{3,1,n-2} + P_{3,1,n-3}$

四次方三次項：$P_{4,3,n}=P_{4,3,n-1}+P_{4,3,n-2}+P_{4,3,n-3}+P_{4,3,n-4}$	
四次方二次項：$P_{4,2,n}=-P_{4,2,n-1}-2P_{4,2,n-2}-2P_{4,2,n-3}+2P_{4,2,n-4}-P_{4,2,n-5}+P_{4,2,n-6}$	
四次方一次項：$P_{4,1,n}=P_{4,1,n-1}-P_{4,1,n-2}+P_{4,1,n-3}+P_{4,1,n-4}$	
五次方四次項：$P_{5,4,n}=P_{5,4,n-1}+P_{5,4,n-2}+P_{5,4,n-3}+P_{5,4,n-4}+P_{5,4,n-5}$	
五次方三次項：$P_{5,3,n}=-P_{5,3,n-1}-2P_{5,3,n-2}-3P_{5,3,n-3}-3P_{5,3,n-4}+6P_{5,3,n-5}-P_{5,3,n-6}+P_{5,3,n-7}+0P_{5,3,n-8}+P_{5,3,n-9}-P_{5,3,n-10}$	
五次方二次項：$P_{5,2,n}=P_{5,2,n-1}+0P_{5,2,n-2}+P_{5,2,n-3}-P_{5,2,n-4}+6P_{5,2,n-5}-3P_{5,2,n-6}-3P_{5,2,n-7}-2P_{5,2,n-8}-P_{5,2,n-9}-P_{5,2,n-10}$	
五次方一次項：$P_{5,1,n}=-P_{5,1,n-1}-P_{5,1,n-2}-P_{5,1,n-3}-P_{5,1,n-4}+P_{5,1,n-5}$	
六次方五次項：$P_{6,5,n}=P_{6,5,n-1}+P_{6,5,n-2}+P_{6,5,n-3}+P_{6,5,n-4}+P_{6,5,n-5}+P_{6,5,n-6}$	
六次方四次項：$P_{6,4,n}=-P_{6,4,n-1}-2P_{6,4,n-2}-4P_{6,4,n-3}-6P_{6,4,n-4}-6P_{6,4,n-5}+12P_{6,4,n-6}-4P_{6,4,n-7}-2P_{6,4,n-8}+6P_{6,4,n-9}+0P_{6,4,n-10}+2P_{6,4,n-11}-2P_{6,4,n-12}+0P_{6,4,n-13}+P_{6,4,n-14}-P_{6,4,n-15}$	
六次方三次項：$P_{6,3,n}=P_{6,3,n-1}+P_{6,3,n-2}-3P_{6,3,n-3}+3P_{6,3,n-4}+P_{6,3,n-5}+13P_{6,3,n-6}-4P_{6,3,n-7}-24P_{6,3,n-8}+36P_{6,3,n-9}-16P_{6,3,n-10}-36P_{6,3,n-11}-24P_{6,3,n-12}+4P_{6,3,n-13}+13P_{6,3,n-14}-P_{6,3,n-15}+3P_{6,3,n-16}+3P_{6,3,n-17}+P_{6,3,n-18}-P_{6,3,n-19}-P_{6,3,n-20}$	
六次方二次項：$P_{6,2,n}=-P_{6,2,n-1}+0P_{6,2,n-2}+2P_{6,2,n-3}+2P_{6,2,n-4}+0P_{6,2,n-5}+6P_{6,2,n-6}+2P_{6,2,n-7}-4P_{6,2,n-8}-12P_{6,2,n-9}-6P_{6,2,n-10}+6P_{6,2,n-11}-4P_{6,2,n-12}+2P_{6,2,n-13}-P_{6,2,n-14}+P_{6,2,n-15}$	
六次方一次項：$P_{6,1,n}=P_{6,1,n-1}-P_{6,1,n-2}+P_{6,1,n-3}-P_{6,1,n-4}+P_{6,1,n-5}+P_{6,1,n-6}$	

〈表十四〉高次方符合降次後係數積和為特定高階費氏數列的係數遞迴關係

從上表的遞迴關係中，我們雖然能用硬算的方式去求出各自的遞迴關係，但是卻無法從表格中得到係數之間的關係。但我們在表格中也不是全然沒有收穫，我們由他們遞迴關係的項數來看，發現在三次方中，由三次方到常數項中的遞迴關係項數分別是：(1,3,3,1)。而四次方中則為(1,4,6,4,1)。不難發現，這些數為巴斯卡三角形中，對應層數的數字。藉由這個結果，我們可以推測出高次方時，各次方係數遞迴關係的項數，以便於我們尋找規律。

而我們也嘗試以項數對於巴斯三角形的規律求出更高次方的各項係數遞迴關係，但由於七次方後的巴斯卡三角形數有 35，計算的數字太大，光是六次項係數的第 35 項，就已經達到 11 位數，298 億之多的數字。於是我們不得不停下來，去思考其係數之間的關係。

而後，我們終於在「數列大全」的網站中，找到高次方後的係數算法。例如：三次方的 $P_{3,2,n}$、$P_{3,1,n}$、$P_{3,0,n}$為三階矩陣$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^n$特徵方程式之對應次方項係數。同理，四次方、五次方的係數則分別為$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}^n$、$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}^n$特徵方程式之對應次方項係數。如〈表十五〉。

而以下研究，我們以$poly(A)$代表矩陣A之特徵方程式

	若$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$，則：	若$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$，則：
$poly(A)$	$x^4-x^3-x^2-x-1$	$-x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$
$poly(A^2)$	$x^4-3x^3-3x^2+x+1$	$-x^5+3x^4+3x^3+x^2+x+1$
$poly(A^3)$	$x^4-7x^3-x^2-x-1$	$-x^5+7x^4+4x^3+4x^2+x+1$
$poly(A^4)$	$x^4-15x^3+17x^2-7x+1$	$-x^5+15x^4-x^3+x^2+x+1$
$poly(A^5)$	$x^4-26x^3-16x^2-6x-1$	$-x^5+31x^4-49x^3+31x^2-9x+1$
$poly(A^6)$	$x^4-51x^3-15x^2+x+1$	$-x^5+57x^4+42x^3+22x^2+7x+1$
$poly(A^7)$	$x^4-99x^3+13x^2-x-1$	$-x^5+113x^4+57x^3+x^2+x+1$

〈表十五〉四階及五階矩陣高次方後的特徵方程式

例如取〈表十二〉中四次方表格的第 7 組，$(P_{4,3,7},P_{4,2,7},P_{4,1,7},P_{4,0,7})=(99,-13,1,1)$。-而在〈表十五〉中，四階矩陣的$poly(A^7)=x^4-99x^3+13x^2-x-1$。若令$poly(A^7)=0$，則$x^4=99x^3-13x^2+x+1$，與〈表十二〉得到的結果相同。

而為了推廣至高次方，我們在這定義高階費氏數列：

定義：數列$\langle F_{n_k}\rangle$：$\begin{cases}F_{0_k}=0\\F_{1_k}=1\\F_{2_k}=1\\F_{k-1_k}=2^{k-3}\\F_{n+k_k}=F_{n+k-1_k}+F_{n+k-2_k}+\cdots F_{n_k}\text{，}n\in N\\\text{此時}k>2\end{cases}$，則稱$\langle F_{n_k}\rangle$為$k$階費氏數列

首先，在**〈表十二〉**、**〈表十三〉**中，我們將上述$P_{3,2,n}=T_n+2T_{n-1}+3T_{n-2}$的結果延伸得到$P_{k,n-1,n}$與$F_{n_k}$之間的關係如下：$P_{k,k-1,n}=F_{n_k}+2F_{n-1_k}+3F_{n-2_k}+\cdots\cdots+nF_{n-k+1_k}$。此關係式可從〈表十四〉與高階費氏數列的定義中，輕鬆證明得到。

接著，我們推測在高次方時，利用餘式定理，當係數為對應階數矩陣特徵方程式，倍數為特定之高階費氏數列時，得出的係數積和為一高階費氏數列，如**推測** 1。而**定理** 3 即為**推測** 1 成立於在二階矩陣的情況。

我們利用一些自訂的數字去推演，得到了類似**推測** 1 的高次方推廣，雖然我們因為對於矩陣的認知不足，導致我們無法完美寫出相關的證明，但以下兩推論，我們都已做過許多數字的推演及驗證。而在推測中，我們需要的方程式為$poly(A)$移項後的結果。但由於$poly(A)$的最高次方係數會因為矩陣的階數而正負改變，如〈表十五〉。故我們以$x^k = -poly(A) + (-x)^k$表示其方程式，使生成的方程式不用再去討論正負的關係。

推測 1：若$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}^q$ 之$k \times k$矩陣

且從第二列開始，第n列的第$n-1$個數為 1，其餘為 0。

令$poly(A) = 0$ 其中$poly(A)$代表矩陣A之特徵方程式

$x^k = -poly(A) + (-x)^k$ 且$x^m = a_{m_k}x^{k-1} + a_{m_{k-1}}x^{k-2} + \ldots\ldots + a_{m_2}x + a_{m_1}$

則$F_{n+q(k-1)_k}a_{m_k} + F_{n+q(k-2)_k}a_{m_{k-1}} + \cdots F_{n_k}a_{m_1} = F_{n+qm_k}$，$\forall k \in Z$

我們猜測在高次方中，應也可對應一個廣義高階費氏數列

我們以下先定義出高階的廣義費氏數列

定義：$\langle H_{n_k} \rangle$滿足：$\begin{cases} H_1 = h_1 ，H_2 = h_2 ，H_3 = h_3 \ldots H_k = h_k \\ H_{n+k_k} = H_{n+k-1_k} + H_{n+k-2_k} + \cdots H_{n_k}，n \in N，稱之k階廣義費氏數列 \\ 此時k > 2 \end{cases}$

而高階的廣義費氏數列的猜測：

推測 2：若$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}^q$ 之$k \times k$矩陣，

且從第二列開始，第n列的第$n-1$個數為 1，其餘為 0

令$poly(A) = 0$ 其中$poly(A)$代表矩陣A之特徵方程式

$x^k = -poly(A) + (-x)^k$ 且$x^m = a_{m_k}x^{k-1} + a_{m_{k-1}}x^{k-2} + \ldots\ldots + a_{m_2}x + a_{m_1}$

則$H_{n+q(k-1)_k}a_{m_k} + H_{n+q(k-2)_k}a_{m_{k-1}} + \cdots H_{n_k}a_{m_1} = H_{n+qm_k}$，$\forall k \in Z$

伍、研究結果

一、若$x^2 = x + 1$時，其高次方若降次方至一次方與常數項，其表示式有以下性質。

定理 1：若$x^2 = x + 1$，則$x^n = F_n x + F_{n-1}$，對所有正整數 $n \geq 2$ 皆成立。

二、觀察當$x^2=ax+b$時，其任意高次方降次後，一次方係數與常數項係數，其 a 的次方都是全為奇數或全為偶數，如〈表一〉。因此 a 值的正負性，對於求出來的係數影響，只會影響其正負與否，並不會影響到不計正負時數字的變化。

	一次項係數	常數項係數
x^2	a	b
x^3	a^2+b	ab
x^4	a^3+2ab	a^2b+b^2
x^5	$a^4+3a^2b+b^2$	a^3b+2ab^2
x^6	$a^5+4a^3b+3ab^2$	$a^4b+3a^2b^2+b^3$
x^7	$a^6+5a^4b+6a^2b^2+b^3$	$a^5b+4a^3b^2+3ab^3$

三、當$x^2=x+1$時，將根值高次方計算後，可以得到與費氏數列即盧卡斯數列的關係。

定理2：當$x^2-x-1=0$ 時，得到$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，則可得到$x^n=\dfrac{L_n\pm F_n\sqrt{5}}{2}$。

其中L_n為 Lucas 數列，且$L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$。

此外，當我們將$x=\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^n=\dfrac{L_n\pm F_n\sqrt{5}}{2}$，還原回方程式時，可以得到下列式子：

$=> x^2-L_nx+(-1)^n=0 => x^2=L_nx-(-1)^n \quad => x^2=L_nx+(-1)^{n+1}$

四、在以下條件中「若$x^2=L_nx+(-1)^{n+1}$，令$x^m=a_mx+b_m$，

且$a_{m+1}=a_mL_n+b_m$，$b_{m+1}=a_m\times(-1)^{n+1}$」我們可以得到：

定理 3：若$x^2=L_nx+(-1)^{n+1}$，且令$x^m=a_mx+b_m$，

可得$a_{m+1}=a_mL_n+b_m$，$b_m=a_m\times(-1)^{n+1}$，則有以下結論：

(1) $a_mF_n=F_{mn}$

(2) $F_{n-1}\times a_m+b_m=F_{mn-1}$

(3) $F_{n+k}\times a_m+F_k\times b_m=F_{mn+k}$

五、將**定理 3** 延伸至常數項不為正負 1 的情形：

定理 4：設$A_n=F_{n-1}\times(-1)^{k+1}+F_{n+2k-1}=F_kL_{n+k-1}$，若$x^2=A_nx+F_k^2\times(-1)^{n+k}$

令$x^m=a_mx+b_m$，可得$a_{m+1}=a_mA_n+b_m$，$b_{m+1}=a_m\times F_k^2\times(-1)^{n+k}$，則

(1) $a_mF_{n+k-1}=F_{m(n+k-1)}\times F_k^{m-1}$

(2) $a_mF_{n-1}+b_m\times(-1)^{k+1}=F_{m(n-1)+(m-1)k}\times F_k^{m-1}$

(3) $a_mF_{n-1+(t+1)k}+b_m\times\dfrac{F_{tk}}{F_k}=F_{m(n-1)+(t+m)k}\times F_k^{m-1}$

五、將**定理 3** 推廣至廣義費氏數列：

定理 5：若$x^2=L_nx+(-1)^{n+1}$，且令$x^m=a_mx+b_m$，

可得$a_{m+1}=a_mL_n+b_m$，$b_{m+1}=a_m\times(-1)^{n+1}$，則：

(1) $a_mH_n + b_mH_0 = H_{mn}$ (2) $a_mH_{n-1} + b_mH_{-1} = H_{mn-1}$ (3) $a_mH_{n+k} + b_mH_k = H_{mn+k}$，$\forall k \in Z$

七、推廣至廣義二階遞迴：

定理 6：若C_n為一二階遞迴數列第n項，且$C_{n+2} = a \times C_{n+1} + b \times C_n$，$a$、$b$、$n \in N$ B_n為一廣義二階遞迴數列第n項，且$B_{n+2} = a \times B_{n+1} + b \times B_n$，$a$、$b$、$n \in N$ 且$D_n = B_{n+1} + b \times B_{n-1}$，若$x^2 = D_nx + (-1)^{n+1} \times b^n$，且令$x^m = a_mx + b_m$， 則：(1) $a_mC_n + b_mC_0 = C_{mn}$ (2) $a_mC_{n+1} + b_mC_1 = C_{mn+1}$ (3) $a_mC_{n+k} + b_mC_k = C_{mn+k}$

八、最後，我們將原題目的係數關係，做所有廣義二階遞迴的延伸推廣：

定理 7：B_n代表一廣義二階遞迴的第n項，且$B_{n+2} = a \times B_{n+1} + b \times B_n$，$a$、$b$、$n \in N$ 且$D_n = B_{n+1} + b \times B_{n-1}$，$G_n = B_{n-1} \times (-1)^{k+1} \times b^k + B_{n+2k*1} = B_kD_{n+k-1}$ 若$x^2 = G_nx + B_k^2 \times (-1)^{n+k} \times b^{n+k-1}$，且令$x^m = a_mx + b_m$，則： (1) $B_{n+k-1}a_m = B_{m(n+k-1)} \times B_k^{m-1}$ (2) $B_{n-1}a_m + \frac{1}{b^k} \times (-1)^{k+1} \times b_m = B_{m(n-1)+(m-1)k} \times B_k^{m-1}$ (3) $B_{n-1+(t+1)k}a_m + \frac{B_{t(k+1)}}{B_{k+1}} \times b_m = B_{m(n-1)+(m+t)k} \times B_k^{m-1}$

九、利用觀察法，得到高次方的各低次項的遞迴關係，如第 24 頁〈表十四〉。且經由窮舉與查找資料，得高次方的各項係數為對應階數矩陣特徵方程式之對應次方項係數。如 22 頁〈表十五〉：

	若$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，則：	若$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，則：
$poly(A)$	$x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$	$-x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
$poly(A^2)$	$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 1$	$-x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 1$
$poly(A^3)$	$x^4 - 7x^3 - x^2 - x - 1$	$-x^5 + 7x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x + 1$
$poly(A^4)$	$x^4 - 15x^3 + 17x^2 - 7x + 1$	$-x^5 + 15x^4 - x^3 + x^2 + x + 1$
$poly(A^5)$	$x^4 - 26x^3 - 16x^2 - 6x - 1$	$-x^5 + 31x^4 - 49x^3 + 31x^2 - 9x + 1$
$poly(A^6)$	$x^4 - 51x^3 - 15x^2 + x + 1$	$-x^5 + 57x^4 + 42x^3 + 22x^2 + 7x + 1$
$poly(A^7)$	$x^4 - 99x^3 + 13x^2 - x - 1$	$-x^5 + 113x^4 + 57x^3 + x^2 + x + 1$

〈表十五〉四階及五階矩陣高次方後的特徵方程式

十、符合係數積和為費氏數列之高次方的各次方項係數，與矩陣的特徵方程式係數。

推測 1：若 A=$\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&0\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}^q$ 之$k\times k$矩陣

且從第二列開始，第n列的第$n-1$個數為 1，其餘為 0。

令$poly(A)=0$ 其中$poly(A)$代表矩陣A之特徵方程式

$x^k=-poly(A)+(-x)^k$ 且$x^m=a_{m_k}x^{k-1}+a_{m_{k-1}}x^{k-2}+\ldots\ldots+\ a_{m_2}x+a_{m_1}$

則$F_{n+q(k-1)_k}a_{m_k}+F_{n+q(k-2)_k}a_{m_{k-1}}+\cdots F_{n_k}a_{m_1}=F_{n+qm_k}$，$\forall k\in Z$

十一、高階的廣義費氏數列的猜測：

推測 2：若 A= $k\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&0\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}^q$ 之$k\times k$矩陣，

且從第二列開始，第n列的第$n-1$個數為 1，其餘為 0

令$poly(A)=0$ 其中$poly(A)$代表矩陣A之特徵方程式

$x^k=-poly(A)+(-x)^k$ 且$x^m=a_{m_k}x^{k-1}+a_{m_{k-1}}x^{k-2}+\ldots\ldots+\ a_{m_2}x+a_{m_1}$

則$H_{n+q(k-1)_k}a_{m_k}+H_{n+q(k-2)_k}a_{m_{k-1}}+\cdots H_{n_k}a_{m_1}=H_{n+qm_k}$，$\forall k\in Z$

陸、結論與未來展望

一、結論：

（一）、原題目解題，並推廣：

1. 利用費氏數列的性質，解出原題答案。$\begin{cases}a=987\\b=-1597\end{cases}$

2. $x^2=ax+b$在高次方降階後的係數，a的正負不影響降階後數值（不計正負）。

3. 推廣至常數項不為$(-1)^{n+1}$時：

定理 4：設$A_n=F_{n-1}\times(-1)^{k+1}+F_{n+2\mathrm{k}-1}=F_kL_{n+k-1}$，若$x^2=A_nx+F_k^2\times(-1)^{n+k}$

令$x^m=a_mx+b_m$，可得$a_{m+1}=a_mA_n+b_m$，$b_{m+1}=a_m\times F_k^2\times(-1)^{n+k}$，則

(1) $a_mF_{n+k-1}=F_{m(n+k-1)}\times F_k^{m-1}$

(2) $a_mF_{n-1}+b_m\times(-1)^{k+1}=F_{m(n-1)+(m-1)k}\times F_k^{m-1}$

(3) $a_mF_{n-1+(t+1)k}+b_m\times\dfrac{F_{tk}}{F_k}=F_{m(n-1)+(t+m)k}\times F_k^{m-1}$

4. 當 Lucas 數列為係數時，降階後係數經線性組合可得廣義費氏數列：

定理 5：若$x^2=L_nx+(-1)^{n+1}$，且令$x^m=a_mx+b_m$，

可得$a_{m+1}=a_mL_n+b_m$，$b_{m+1}=a_m\times(-1)^{n+1}$，則：

(1) $a_mH_n+b_mH_0=H_{mn}$

(2) $a_mH_{n-1}+b_mH_{-1}=H_{mn-1}$

(3) $a_mH_{n+k}+b_mH_k=H_{mn+k}$，$\forall k\in Z$

5. 推廣至廣義二階遞迴為線性組合係數時：

定義：數列$\langle B_n \rangle$滿足：$\begin{cases} B_0 = 0 \\ B_1 = 1 \\ B_{n+2} = a \times B_{n+1} + b \times B_n \text{，} a \text{、} b \in Z \text{、} n \in N \end{cases}$，

則稱$\langle B_n \rangle$為廣義二階遞迴。

我們得到一些特定有規律的係數積之和會與廣義二階遞迴有關。

定理 6：若C_n為一廣義二階遞迴數列第n項，且$C_{n+2} = a \times C_{n+1} + b \times C_n$，$a$、$b$、$n \in N$

B_n為一廣義二階遞迴數列第n項，且$B_{n+2} = a \times B_{n+1} + b \times B_n$，$a$、$b$、$n \in N$

且$D_n = B_{n+1} + b \times B_{n-1}$，若$x^2 = D_n x + (-1)^{n+1} \times b^n$，且令$x^m = a_m x + b_m$，

則：(1) $a_m C_n + b_m C_0 = C_{mn}$

(2) $a_m C_{n+1} + b_m C_1 = C_{mn+1}$

(3) $a_m C_{n+k} + b_m C_k = C_{mn+k}$

我們將原題目的係數關係，做所有廣義二階遞迴的延伸推廣。

定理 7：B_n代表一廣義二階遞迴的第n項，且$B_{n+2} = a \times B_{n+1} + b \times B_n$，$a$、$b$、$n \in N$

且$D_n = B_{n+1} + b \times B_{n-1}$，$G_n = B_{n-1} \times (-1)^{k+1} \times b^k + B_{n+2k*1} = B_k D_{n+k-1}$

若$x^2 = G_n x + B_k^2 \times (-1)^{n+k} \times b^{n+k-1}$，且令$x^m = a_m x + b_m$，則：

(1) $B_{n+k-1} a_m = B_{m(n+k-1)} \times B_k^{m-1}$

(2) $B_{n-1} a_m + \dfrac{1}{b^k} \times (-1)^{k+1} \times b_m = B_{m(n-1)+(m-1)k} \times B_k^{m-1}$

(3) $B_{n-1+(t-1)k} a_m + \dfrac{B_{t(k+1)}}{B_{k+1}} \times b_m = B_{m(n-1)+(m-t)k} \times B_k^{m-1}$

〈表十五〉四階及五階矩陣高次方後的特徵方程式

（二）、找到六次方以內的係數規律：

1. 觀察得到三、四、五、六次方的係數、遞迴關係：〈表十二〉、〈表十三〉、〈表十四〉

	五次方四次項	五次方三次項	五次方二次項	五次方一次項	五次方常數項	六次方五次項	六次方四次項	六次方三次項	六次方二次項	六次方一次項	六次方常數項
第1組	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
第2組	3	3	1	1	1	3	3	3	-1	-1	-1
第3組	7	4	4	1	1	7	7	-5	-5	1	1
第4組	15	-1	1	1	1	15	7	7	-1	-1	-1
第5組	31	-49	31	-9	1	31	-9	1	1	1	1
第6組	57	42	22	7	1	63	-129	111	-49	11	-1
第7組	113	57	1	1	1	120	99	64	29	8	1
第8組	223	31	33	1	1	239	159	31	-1	-1	-1
第9組	439	-140	4	1	1	475	187	-5	-23	1	1
第10組	863	-497	141	-19	1	943	-17	83	19	-1	-1
第11組	1695	815	199	23	1	1871	-967	89	1	1	1
第12組	3333	758	10	-5	1	3711	-2753	1063	-217	23	-1
第13組	6553	-311	209	1	1	7359	4447	1535	287	27	1
第14組	12883	-3021	113	1	1	14598	5617	276	-15	6	-1
第15組	25327	-3796	604	-39	1	28957	3057	1105	-95	1	1
第16組	49791	13759	1473	65	1	57439	-10465	799	255	-1	-1
第17組	97887	7039	375	-33	1	113935	-39473	3775	-33	1	1

	三次方二次項	三次方一次項	三次方常數項	四次方三次項	四次方二次項	四次方一次項	四次方常數項
第1組	1	1	1	1	1	1	1
第2組	3	1	1	3	3	-1	-1
第3組	7	-5	1	7	1	1	1
第4組	11	5	1	15	-17	7	-1
第5組	21	1	1	26	16	6	1
第6組	39	-11	1	51	15	-1	-1
第7組	71	15	1	99	-13	1	1
第8組	131	-3	1	191	-81	15	-1
第9組	241	-23	1	367	127	19	1
第10組	443	41	1	708	58	4	-1
第11組	815	-21	1	1365	-175	1	1
第12組	1499	-43	1	2631	-329	31	-1

三次方二次項：$P_{3,2,n}=P_{3,2,n-1}+P_{3,2,n-2}+P_{3,2,n-3}$
三次方一次項：$P_{3,1,n}=-P_{3,1,n-1}-P_{3,1,n-2}+P_{3,1,n-3}$
四次方三次項：$P_{4,3,n}=P_{4,3,n-1}+P_{4,3,n-2}+P_{4,3,n-3}+P_{4,3,n-4}$
四次方二次項：$P_{4,2,n}=-P_{4,2,n-1}-2P_{4,2,n-2}-2P_{4,2,n-3}+2P_{4,2,n-4}-P_{4,2,n-5}+P_{4,2,n-6}$
四次方一次項：$P_{4,1,n}=P_{4,1,n-1}-P_{4,1,n-2}+P_{4,1,n-3}+P_{4,1,n-4}$
五次方四次項：$P_{5,4,n}=P_{5,4,n-1}+P_{5,4,n-2}+P_{5,4,n-3}+P_{5,4,n-4}+P_{5,4,n-5}$
五次方三次項：$P_{5,3,n}=-P_{5,3,n-1}-2P_{5,3,n-2}-3P_{5,3,n-3}-3P_{5,3,n-4}+6P_{5,3,n-5}-P_{5,3,n-6}$ $+P_{5,3,n-7}+0P_{5,3,n-8}+P_{5,3,n-9}-P_{5,3,n-10}$
五次方二次項：$P_{5,2,n}=P_{5,2,n-1}+0P_{5,2,n-2}+P_{5,2,n-3}-P_{5,2,n-4}+6P_{5,2,n-5}-3P_{5,2,n-6}$ $-3P_{5,2,n-7}-2P_{5,2,n-8}-P_{5,2,n-9}-P_{5,2,n-10}$
五次方一次項：$P_{5,1,n}=-P_{5,1,n-1}-P_{5,1,n-2}-P_{5,1,n-3}-P_{5,1,n-4}+P_{5,1,n-5}$
六次方五次項：$P_{6,5,n}=P_{6,5,n-1}+P_{6,5,n-2}+P_{6,5,n-3}+P_{6,5,n-4}+P_{6,5,n-5}+P_{6,5,n-6}$
六次方四次項：$P_{6,4,n}=-P_{6,4,n-1}-2P_{6,4,n-2}-4P_{6,4,n-3}-6P_{6,4,n-4}-6P_{6,4,n-5}+$ $12P_{6,4,n-6}-4P_{6,4,n-7}-2P_{6,4,n-8}+6P_{6,4,n-9}+0P_{6,4,n-10}+2P_{6,4,n-11}-2P_{6,4,n-12}+$ $0P_{6,4,n-13}+P_{6,4,n-14}-P_{6,4,n-15}$
六次方三次項：$P_{6,3,n}=P_{6,3,n-1}+P_{6,3,n-2}-3P_{6,3,n-3}+3P_{6,3,n-4}+P_{6,3,n-5}+13P_{6,3,n-6}-$ $4P_{6,3,n-7}-24P_{6,3,n-8}+36P_{6,3,n-9}-16P_{6,3,n-10}-36P_{6,3,n-11}-24P_{6,3,n-12}+4P_{6,3,n-13}+$ $13P_{6,3,n-14}-P_{6,3,n-15}+3P_{6,3,n-16}+3P_{6,3,n-17}+P_{6,3,n-18}-P_{6,3,n-19}-P_{6,3,n-20}$
六次方二次項：$P_{6,2,n}=-P_{6,2,n-1}+0P_{6,2,n-2}+2P_{6,2,n-3}+2P_{6,2,n-4}+0P_{6,2,n-5}+$ $6P_{6,2,n-6}+2P_{6,2,n-7}-4P_{6,2,n-8}-12P_{6,2,n-9}-6P_{6,2,n-10}+6P_{6,2,n-11}-4P_{6,2,n-12}+$ $2P_{6,2,n-13}-P_{6,2,n-14}+P_{6,2,n-15}$
六次方一次項：$P_{6,1,n}=P_{6,1,n-1}-P_{6,1,n-2}+P_{6,1,n-3}-P_{6,1,n-4}+P_{6,1,n-5}+P_{6,1,n-6}$

（三）利用矩陣特徵方程式求得關係式規律：

	若$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$，則：	若$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$，則：
$poly(A)$	$x^4-x^3-x^2-x-1$	$-x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$
$poly(A^2)$	$x^4-3x^3-3x^2+x+1$	$-x^5+3x^4+3x^3+x^2+x+1$
$poly(A^3)$	$x^4-7x^3-x^2-x-1$	$-x^5+7x^4+4x^3+4x^2+x+1$
$poly(A^4)$	$x^4-15x^3+17x^2-7x+1$	$-x^5+15x^4-x^3+x^2+x+1$
$poly(A^5)$	$x^4-26x^3-16x^2-6x-1$	$-x^5+31x^4-49x^3+31x^2-9x+1$
$poly(A^6)$	$x^4-51x^3-15x^2+x+1$	$-x^5+57x^4+42x^3+22x^2+7x+1$
$poly(A^7)$	$x^4-99x^3+13x^2-x-1$	$-x^5+113x^4+57x^3+x^2+x+1$

二、未來展望：

（一）、推廣至高階狹義費氏數列：

定義：數列$\langle F_{n_k}\rangle$：$\begin{cases} F_0=0 \\ F_1=1 \\ F_2=1 \\ F_{k-1}=2^{k-3} \\ F_{n+k_k}=F_{n+k-1_k}+F_{n+k-2_k}+\cdots F_{n_k}，n\in N \\ 此時k>2 \end{cases}$，則稱$\langle F_{n_k}\rangle$為$k$階費氏數列

符合降次後係數積和為高階費氏數列的係數關係：

推測 1：若$A=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&0&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&0\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}^q$ 之$k\times k$矩陣

且從第二列開始，第n列的第$n-1$個數為 1，其餘為 0。

令$poly(A)=0$ 其中$poly(A)$代表矩陣A之特徵方程式

$x^k=-poly(A)+(-x)^k$ 且$x^m=a_{m_k}x^{k-1}+a_{m_{k-1}}x^{k-2}+\ \ldots\ldots+\ a_{m_2}x+a_{m_1}$

則$F_{n+q(k-1)_k}a_{m_k}+F_{n+q(k-2)_k}a_{m_{k-1}}+\cdots F_{n_k}a_{m_1}=F_{n+qm_k}$，$\forall k\in Z$

（二）、推廣至高階廣義費氏數列：

定義：數列$\langle H_{n_k}\rangle$滿足：$\begin{cases} H_1=h_1\ ，H_2=h_2\ ，H_3=h_3\ldots H_k=h_k \\ H_{n+k_k}=H_{n+k-1_k}+H_{n+k-2_k}+\cdots H，n\in N \\ 此時k>2 \end{cases}$，則稱$\langle H_{n_k}\rangle$為$k$階廣義費氏數列。

符合降次後係數積和為高階廣義費氏數列的係數關係：

推測 2：若$A=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&0&\cdots&0&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&0\\0&0&\cdots&0&0\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}^q$ 之$k\times k$矩陣，

且從第二列開始，第n列的第$n-1$個數為 1，其餘為 0

令$poly(A)=0$ 其中$poly(A)$代表矩陣A之特徵方程式

$x^k=-poly(A)+(-x)^k$ 且$x^m=a_{m_k}x^{k-1}+a_{m_{k-1}}x^{k-2}+\ \ldots\ldots+\ a_{m_2}x+a_{m_1}$

則$H_{n+q(k-1)_k}a_{m_k}+H_{n+q(k-2)_k}a_{m_{k-1}}+\cdots H_{n_k}a_{m_1}=H_{n+qm_k}$，$\forall k\in Z$

（三）、將矩陣改寫，使高次方的數列能夠更一般化。

在**定理 6** 及**定理 7** 中，可以看到在二階矩陣的情況中，我們能將遞迴關係推廣至廣義高階遞迴。但是當我們推廣至了高次方，隨著未知數的增加、矩陣的複雜運算，我們無法將高階費氏數列的遞迴關係延伸討論。但我們在**定理 6** 發現，其係數為$\begin{bmatrix}a&b\\1&0\end{bmatrix}^n$的特徵方程式。

於是我們猜測，若要將高次方的係數關係推廣：

定義：$\langle B_{n_k}\rangle$：$\begin{cases} B_0 = 0 \\ B_1 = 1 \\ B_2 = 1 \\ B_{k-1} = 2^{k-3} \\ B_{n+k_k} = a_1 B_{n+k-1_k} + a_2 B_{n+k-2_k} + \cdots a_k B_{n_k}，n \in N \\ 此時 k > 2 \end{cases}$，稱之為廣義$k$階遞迴

則應也會有以下規律：

推測 3：若B_{n_k}表一廣義k階遞迴數列、

C_{n_k}為一高階遞迴數列，且$C_{n+k_k} = a_1 C_{n+k-1_k} + a_2 C_{n+k-2_k} + \cdots a_k C_{n_k}$

若$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}^q$之$k \times k$矩陣，

且從第二列開始，第n列的第$n-1$個數為 1，其餘為 0

令$poly(A) = 0$ 其中$poly(A)$代表矩陣A之特徵方程式

$x^k = -poly(A) + (-x)^k$ 且$x^m = a_{m_k} x^{k-1} + a_{m_{k-1}} x^{k-2} + \ldots\ldots + a_{m_2} x + a_{m_1}$

則$C_{n+q(k-1)_k} a_{m_k} + C_{n+q(k-2)_k} a_{m_{k-1}} + \cdots C_{n_k} a_{m_1} = C_{n+qm_k}$，$\forall k \in Z$

（四）、探討在高次方後，是否有更多的係數關係(如同**定理4**和**定理7**)。

在**定理 4** 和**定理 7** 中，我們可以藉由費氏數列和盧卡斯數列的關係式，讓係數更一般化，甚至能推廣到廣義二階遞迴。但是在高次方的推測中，我們無法一一求出矩陣特徵方程各項係數之間的關係。於是我們想要探討，能否改寫矩陣，或者是利用**引理 7** 和**引理 10** 的變化，使高次方後的係數能夠更多變。

柒、參考資料及其他

1. 游森棚 (2013)。高中數學第一、二冊。翰林出版社，108 年 4 月、9 月初版。

2. Piotr Rudnicki（2004）。Little Bezout Theorem, *Formalized Mathematics*. *12*, 1。

3. Kenneth Hoffman（1971）。Linear Algebra, 2nd Edition. Prentice Hall. 1971 年 4 月二版。

4. Robert C Johnson（2009）。Fibonacci numbers and matrices, Durham City, DH1 3LE, UK

5. 中山大學應用數學系雙週一題有獎徵答。http：//www.math.nsysu.edu.tw/~problem/

【評語】050407

本作品探討費氏數列與盧卡斯數列之間的關係。利用 $x^2=ax+b$ 對多項方程式高次式降階，從中觀察到降階後係數產生費式數列子序列，這一部分相當有趣，可惜並沒有朝著求出完整解集合的方向論述，而是去觀察某些線性組合可以轉換成費式數列的子序列。但是要得到這些觀察與定理並非易事，作者並沒有交代這些觀察與定理的動機，而是「猜」到這個關係後直接用數學歸納法證明。

作品的後段則對高階的遞迴有一些嘗試，不過結果還停留在比較原始的階段。

另外，文獻探討時需交代內容引用自那些文獻，說明參考資料與本研究之相關性。

作品海報

摘要

我們從課堂中挑戰題出發，從高中數學的「餘式定理」、「數學歸納法」與「遞迴關係式」來對「費氏數列」進行討論。在簡單的多項式除法問題中，找到關於費氏數列的規律，並延伸找到與之密切相關的「盧卡斯數列」。此外，我們將研究中的費氏數列推廣至廣義費氏數列，以及遞迴關係更一般的廣義二階遞迴數列。我們將觀察得到對於二階遞迴數列的結果，用「數學歸納法」的方式證明。更將二次方的研究，延伸至三階遞迴、四階遞迴等高階遞迴的規律。並且找到當高次方時，符合前述關係的係數為對應階數特定矩陣特徵方程式的性質。我們也找出高次方中，特徵方程式各項係數的遞迴規律與巴斯卡三角形的特定關係。

壹、研究動機

多項式乘除中，課堂上額外的挑戰題，題目如下：「a、b為整數且x^2-x-1是$ax^{17}+bx^{16}+1$的因式，求a。」這題目次方過大使得我們的計算量也隨之變大，衍伸而來的便是正確性的問題。因此，上網查了這個題目後，發現這個題目最早出現於1988年的AIME考題之中，並在這三十年間，類似的考題已經出現在國內各高中段考試題或大小數學競賽的試題中。這不禁讓我們油然升起一股挑戰高中競賽題目之心，我們希望除了最基本的求解之外，能發展出規律的算式，讓大家一窺此類型題目的各種「巧合」。

貳、研究目的

一、 在原題目中，利用高中餘式定理，觀察係數跟費氏數列各項之關係。

二、 利用窮舉方式，觀察其他係數的除式，是否與原題之係數一樣，與費氏數列有關。

三、 尋找其他與費氏數列有關的係數，並觀察研究該係數之間是否存在著其他關係，進而希望去找到所有符合關係的係數。

四、 將觀察到的結果，利用高中數學中的數學歸納法，來證明存在於所有整數的情形。

五、 將費氏數列的規律，推廣至不同初始項的二階遞迴數列。

六、 將二次方結果推廣至高次方及類費氏數列的高階遞迴關係式。

參、研究設備及器材

紙、筆、電腦、Excel 2007

肆、研究過程方法與結果

一、文獻探討與前置作業

（一）小貝祖定理

引理1：多項式$f(x)$除以$(x-r)$後，餘數為$f(r)$，即$x=r$代入原多項式$f(x)$的值。且當$(x-r)$為$f(x)$的因式時，則有$f(r)=0$

（二）費氏數列

定義：數列$\langle F_n\rangle$滿足：$F_1=1$，$F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，$n\in N$，稱$\langle F_n\rangle$為費氏數列

（三）盧卡斯數列

定義：數列$\langle L_n\rangle$滿足：$L_1=1$，$L_2=3$，$L_{n+2}=L_{n+1}+L_n$，$n\in N$，稱$\langle L_n\rangle$為盧卡斯數列。

從通式的關係式中得到費氏數列與盧卡斯數列之間的關係：$L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$

二、研究流程架構

（一）原題目解題，並推廣：

一、利用費氏數列性質，解出原題答案。
二、尋找其他降階後有費氏數列的係數。
三、觀察得$x^2=ax+b$在高次方降階後的係數，a的正負不影響降階後數值。
四、觀察得$x^2=3x-1$，降階後的係數亦有費氏數列的規律。
五、當 Lucas 數列為係數時，降階後係數經線性組合可得費氏數列。

（二）推廣至其他廣義二階遞迴的係數狀況：

一、廣義費氏數列為線性組合係數時。
二、推廣至常數項不為正負 1 的情況。
三、推廣至廣義二階遞迴的情況。

（三）其他高次方在廣義高階遞迴係數狀況：

一、觀察得三、四、五、六、七次方係數。
二、找到相關係數規律。
三、利用矩陣特徵方程式求得關係式規律。

三、研究過程與結論

從「a、b為整數且x^2-x-1是$ax^{17}+bx^{16}+1$的因式，求a。」出發。利用餘式定理令$x^2-x-1=0$，將x^{17}、x^{16}降階。

定理1：若$x^2=x+1$，則$x^n=F_nx+F_{n-1}$，對所有正整數 $n\geq 2$ 皆成立。

根據**定理1**和**餘式定理**，=> $ax^{17}+bx^{16}+1=(1597a+987b)x+987a+610b+1=0$：

$$\begin{cases}1597a+987b=0\\987a+610b=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}F_{17}a+F_{16}b=0\\F_{16}a+F_{15}b=-1\end{cases}$$

接著利用**引理2**：$F_n^2-F_{n-1}F_{n+1}=(-1)^{n+1}$。

解得$a=987$、$b=-1597$。

以下假設方程式：$x^2=ax+b$。將x^n降次方後的情形。

x^2	a	b
x^3	a^2+b	ab
x^4	a^3+2ab	a^2b+b^2
x^5	$a^4+3a^2b+b^2$	a^3b+2ab^2
x^6	$a^5+4a^3b+3ab^2$	$a^4b+3a^2b^2+b^3$
x^7	$a^6+5a^4b+6a^2b^2+b^3$	$a^5b+4a^3b^2+3ab^3$

由上表得，不用另外討論a取負數時的變化。

令$x^m=a_mx+b_m$則$a_{m+1}=a\times a_m+b_m$，$b_m=a_m\times b$。利用窮舉法尋找相關係數，找到$(a,b)=(3,-1)$時符合。

定理2：$\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^n=\frac{L_n\pm F_n\sqrt{5}}{2}$ 其中L_n為Lucas數列，且$L_n=F_{n-1}+F_{n+1}$。

將$x=\frac{L_n\pm F_n\sqrt{5}}{2}$還原方程式，並利用**引理3**：$L_n^2-4(-1)^n=5F_n^2$，得到$x^2=L_nx+(-1)^{n+1}$。

接著，探討若一次項係數與費氏數列的關係跟F_{n+k}、F_{n-k}有關的情況：

我們發現$F_{n+2}-F_{n-2}$、$F_{n+3}+F_{n-3}$形成的數列分別為盧卡斯數列往前1、2項再乘以1、2倍。得此規律為$F_{n+k}+F_{n-k}\times(-1)^{k+1}$。

使$n=1$代入後，可直接生成第一項，以$F_{n+2k-1}+F_{n-1}\times(-1)^{k+1}$來改寫$F_{n+k}+F_{n-k}\times(-1)^{k+1}$。

下左表為$(a,b)=(L_n,(-1)^{n+1})$，係數積和為廣義費氏數列的倍數情形，以及下右表以$F_{n+3}+F_{n-3}$作為一次項係數係數積為某費氏數列乘上2的冪次。

	(1,1)		(3,-1)		(4,1)		(7,-1)		(11,1)		(18,-1)	
次方	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數
	1	3	4	3	5	3	9	3	14	3	23	3
	4	1	5	1	9	1	14	1	23	1	37	1
	5	4	9	5	14	9	23	14	37	23	60	37
倍數	9	5	14	9	23	14	37	23	60	37	97	60
組合	14	9	23	14	37	23	60	37	97	60	157	97
	23	14	37	23	60	37	97	60	157	97	254	157
	37	23	60	37	97	60	157	97	254	157	411	254
	60	37	97	60	157	97	254	157	411	254	665	411
	97	60	157	97	254	157	411	254	665	411	1076	665

	(8,4)		(14,-4)		(22,4)		(36,-4)		(58,4)		(94,-4)	
次方	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數	x係數	常數
	0	1	1	1	1	1	2	1	3	1	5	1
	2	0	3	0	5	0	8	0	13	0	21	0
	8	1	13	1	21	1	34	1	55	1	89	1
倍數	34	4	55	4	89	4	144	4	233	4	377	4
組合	144	17	233	17	377	17	610	17	987	17	1597	17
	610	72	987	72	1597	72	2584	72	4181	72	6765	72
	2584	305	4181	305	6765	305	10946	305	17711	305	28657	305
	10946	1292	17711	1292	28657	1292	46368	1292	75025	1292	121393	1292
	46368	5473	75025	5473	121393	5473	196418	5473	317811	5473	514229	5473

研究推廣至廣義二階遞迴：以下C_n表與B_n有相同遞迴關係的數列，而$D_n = B_{n+1} + b \times B_{n-1}$

定理6：若$x^2 = D_n x + (-1)^{n+1} \times b^n$，令$x^m = a_m x + b_m$，
(1) $a_m C_n + b_m C_0 = C_{mn}$　(2) $a_m C_{n+1} + b_m C_1 = C_{mn+1}$　(3) $a_m C_{n+k} + b_m C_k = C_{mn+k}$

做所有廣義二階遞迴的延伸推廣：

定理7:若$x^2 = G_n x + B_{k+1}^2 \times (-1)^{n+k+1} \times b^{n+k}$，令$x^m = a_m x + b_m$

(1) $B_{n+k} a_m = B_{m(n+k)} \times B_{k+1}^{m-1}$　(2) $B_{n-1} a_m + \frac{1}{b^{k+1}} \times (-1)^k \times b_m = B_{m(n+k)-(k+1)} \times B_{k+1}^{m-1}$

(3) $B_{n+k-t(k+1)} a_m + \frac{B_{t(k+1)}}{B_{k+1}} \times b_m = B_{m(n+k)-t(k+1)} \times B_{k+1}^{m-1}$

接著，討論更高次方是否有相似規律：以遞迴關係為$T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$形成的數列當作二次方的係數。

	2	1	1		24	4	1	
次方	x^2係數	x係數	常數	係數積和	x^2係數	x係數	常數	係數積和
3	1	1	1	4	7	-5	1	149
4	2	2	1	7	44	-34	7	927
5	4	3	2	13	274	-213	44	5768
6	7	6	4	24	1705	-1326	274	35890
7	13	11	7	44	10609	-8251	1705	223317
8	24	20	13	81	66012	-51340	10609	1389537
9	44	37	24	149	410744	-319451	66012	8646064
10	81	68	44	274	2555757	-1987708	410744	53798080
11	149	125	81	504	15902591	-1.2E+07	2555757	3.35E+08

	7	2	1		81	7	1	
次方	x^2係數	x係數	常數	係數積和	x^2係數	x係數	常數	係數積和
3	3	1	1	24	11	5	1	927
4	10	4	3	81	126	56	11	10609
5	34	13	10	274	1442	641	126	121415
6	115	44	34	927	16503	7336	1442	1389537
7	389	149	115	3136	188869	83957	16503	15902591
8	1316	504	389	10609	2161516	960848	188869	1.82E+08
9	4452	1705	1316	35890	24737524	10996449	2161516	2.08E+09
10	15061	5768	4452	121415	2.83E+08	1.26E+08	24737524	2.38E+10
11	50951	19513	15061	410744	3.24E+09	1.44E+09	2.83E+08	2.73E+11

從左邊表格發現倍數的1、1、2、4、7、13……是名為Tribonacci的三階費氏數列。且發現x^2係數有相同遞迴關係。

定義Tribonacci sequence：

定義：數列$\langle T_n \rangle$滿足：$\begin{cases} T_0 = 0，T_1 = 1，T_2 = 1 \\ T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n，n \in N \end{cases}$，
則稱$\langle T_n \rangle$為Tribonacci sequence

為了方便說明，先定義一些符號：

定義：數列〈$P_{a,b,c}$〉為a次方關係式中，符合係數積和為特定高階費氏數列之b次方項的第c個數字。

定義高階費氏數列:

定義：$\langle F_{n_k} \rangle$：$\begin{cases} F_{0_k} = 0，F_{1_k} = 1，F_{2_k} = 1，F_{k-1_k} = 2^{k-3} \\ F_{n+k_k} = F_{n+k-1_k} + F_{n+k-2_k} + \cdots + F_{n_k} \\ n \in N，k > 2 \end{cases}$
則稱$\langle F_{n_k} \rangle$為k階費氏數列

下兩表列出三次方到六次方符合降次後係數積和為特定高階費氏數列的係數

	三次方二次項	三次方一次項	三次方常數項	四次方三次項	四次方二次項	四次方一次項	四次方常數項
第1組	1	1	1	1	1	1	1
第2組	3	1	1	3	3	-1	-1
第3組	7	-5	1	7	1	1	1
第4組	11	5	1	15	-17	7	-1
第5組	21	1	1	26	16	6	1
第6組	39	-11	1	51	15	-1	-1
第7組	71	15	1	99	-13	1	1
第8組	131	-3	1	191	-81	15	-1
第9組	241	-23	1	367	127	19	1
第10組	443	41	1	708	58	4	-1
第11組	815	-21	1	1365	-175	1	1
第12組	1499	-43	1	2631	-329	31	-1

	五次方四次項	五次方三次項	五次方二次項	五次方一次項	五次方常數項	六次方五次項	六次方四次項	六次方三次項	六次方二次項	六次方一次項	六次方常數項
第1組	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
第2組	3	3	1	1	1	3	3	3	-1	-1	-1
第3組	7	4	4	1	1	7	7	-5	-5	1	1
第4組	15	-1	1	1	1	15	7	7	-1	-1	-1
第5組	31	-49	31	-9	1	31	-9	1	1	1	1
第6組	57	42	22	7	1	63	-129	111	-49	11	-1
第7組	113	57	1	1	1	120	99	64	29	8	1
第8組	223	31	33	1	1	239	159	31	-1	-1	-1
第9組	439	-140	4	1	1	475	187	-5	-23	1	1
第10組	863	-497	141	-19	1	943	-17	83	19	-1	-1
第11組	1695	815	199	23	1	1871	-967	89	1	1	1
第12組	3333	758	10	-5	1	3711	-2753	1063	-217	23	-1
第13組	6553	-311	209	1	1	7359	4447	1535	287	27	1
第14組	12883	-3021	113	1	1	14598	5617	276	-15	6	-1
第15組	25327	-3796	604	-39	1	28957	3057	1105	-95	1	1
第16組	49791	13759	1473	65	1	57439	-10465	799	255	-1	-1
第17組	97887	7039	375	-33	1	113935	-39473	3775	-33	1	1

從上兩表中，我們有得到高次方符合降次後係數積和為特定高階費氏數列的係數遞迴關係，但光是六次項係數的第35項，就達到11位數，298億多的數字。我們不得不停下來，去思考其係數之間的關係。在「數列大全」的網站中，找到高次方後的係數算法。三、四、五次方的係數分別為$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n$、$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n$、$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n$特徵方程式之對應次方項係數。以下以$poly(A)$表示矩陣$A$之特徵方程式並得到高次方的推廣：

推測1：若$A = k\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}^q$之$k \times k$矩陣，且從第二列開始，第$n$列的第$n-1$個數為1，其餘為0。
令$poly(A) = 0$，$x^k = -poly(A) + (-x)^k$　且$x^m = a_{m_k} x^{k-1} + a_{m_{k-1}} x^{k-2} + \ldots\ldots + a_{m_2} x + a_{m_1}$
則$F_{n+q(k-1)_k} a_{m_k} + F_{n+q(k-2)_k} a_{m_{k-1}} + \cdots F_{n_k} a_{m_1} = F_{n+qm_k}$，$\forall k \in Z$

以下先定義高階的廣義費氏數列：

定義：數列$\langle H_{n_k} \rangle$：$\begin{cases} H_{1_k} = h_1，H_{2_k} = h_2，H_{3_k} = h_3，\cdots，H_{k_k} = h_k， \\ H_{n+k_k} = H_{n+k-1_k} + H_{n+k-2_k} + \cdots H_{n_k}，n \in N，k > 2 \end{cases}$，則$\langle H_{n_k} \rangle$為$k$階廣義費氏數列。

而高階的廣義費氏數列的推廣：

推測2：若$A = k\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}\right\}^q$之$k \times k$矩陣，且從第二列開始，第$n$列的第$n-1$個數為1，其餘為0。令$poly(A)=0$
$x^k = -poly(A) + x^k$ 且$x^m = a_{m_k}x^{k-1} + a_{m_{k-1}}x^{k-2} + \ldots\ldots + a_{m_2}x + a_{m_1}$
則$H_{n+q(k-1)_k}a_{m_k} + H_{n+q(k-2)_k}a_{m_{k-1}} + \cdots H_{n_k}a_{m_1} = H_{n+qm_k}$，$\forall k \in Z$

伍、結論與未來展望

（一）原題目解題，並推廣：

1. 利用費氏數列的性質，解出原題答案
2. $x^2 = ax + b$在高次方降階後的係數，a的正負不影響降階後數值（不計正負）。
3. 推廣至常數項不為$(-1)^{n+1}$時：

定理5：$A_n = F_{n-1} \times (-1)^k + F_{n+2k+1} = F_{k+1}L_{n+k}$，若$x^2 = A_n x + F_{k+1}^2 \times (-1)^{n+k+1}$
令$x^m = a_m x + b_m$，則：
(1) $a_m F_{n+k} = F_{m(n+k)} \times F_{k+1}^{m-1}$
(2) $a_m F_{n-1} + b_m \times (-1)^k = F_{m(n+k)-(k+1)} \times F_{k+1}^{m-1}$
(3) $a_m F_{n+k+t(k+1)} + b_m \times \dfrac{F_{t(k+1)}}{F_{k+1}} = F_{m(n+k)+t(k+1)} \times F_{k+1}^{m-1}$

4. 當Lucas數列為係數時，降階後係數經線性組合可得廣義費氏數列：
5. 推廣至廣義二階遞迴為線性組合係數時：

定理6：若$x^2 = D_n x + (-1)^{n+1} \times b^n$，令$x^m = a_m x + b_m$，
(1) $a_m C_n + b_m C_0 = C_{mn}$
(2) $a_m C_{n+1} + b_m C_1 = C_{mn+1}$
(3) $a_m C_{n+k} + b_m C_k = C_{mn+k}$

做所有廣義二階遞迴的延伸推廣:

定理7：$x^2 = G_n x + B_{k+1}^2 \times (-1)^{n+k+1} \times b^{n+k}$
令$x^m = a_m x + b_m$
(1) $B_{n+k}a_m = B_{m(n+k)} \times B_{k+1}^{m-1}$
(2) $B_{n-1}a_m + \dfrac{1}{b^{k+1}} \times (-1)^k \times b_m = B_{m(n+k)-(k+1)} \times B_{k+1}^{m-1}$
(3) $B_{n+k-t(k+1)}a_m + \dfrac{B_{t(k+1)}}{B_{k+1}} \times b_m = B_{m(n+k)-t(k+1)} \times B_{k+1}^{m-1}$

（二）、找到六次方以內的係數規律：

（三）利用矩陣特徵方程式求得關係式規律：

二、未來展望：

（一）、推廣至高階狹義費氏數列：

定義：數列$\langle F_{n_k}\rangle$：
$$\begin{cases}F_{0_k} = 0，F_{1_k} = 1，F_{2_k} = 1，F_{k-1_k} = 2^{k-3}\\ F_{n+k_k} = F_{n+k-1_k} + F_{n+k-2_k} + \cdots + F_{n_k}\\ \qquad n \in N，k > 2\end{cases}$$
則稱$\langle F_{n_k}\rangle$為k階費氏數列

以$poly(A)$表示矩陣A之特徵方程式，並以令$poly(A) = 0$，得到：$x^k = -poly(A) + x^k$來進行高次方的推廣。

而A矩陣中的元素為：從第二列開始，第n列的第$n-1$行為1，其餘為0。

以下進行高次方的推廣：

推測1：若$A = k\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}\right\}^q$之$k \times k$矩陣
且$x^m = a_{m_k}x^{k-1} + a_{m_{k-1}}x^{k-2} + \ldots\ldots + a_{m_2}x + a_{m_1}$
則$F_{n+q(k-1)_k}a_{m_k} + F_{n+q(k-2)_k}a_{m_{k-1}} + \cdots F_{n_k}a_{m_1} = F_{n+qm_k}$，$\forall k \in Z$

（二）、推廣至高階廣義費氏數列：

定義高階的廣義費氏數列：

定義：數列$\langle H_{n_k}\rangle$：
$$\begin{cases}H_{1_k} = h_1，H_{2_k} = h_2，H_{3_k} = h_3 \cdots，H_{k_k} = h_k\\ \quad H_{n+k_k} = H_{n+k-1_k} + H_{n+k-2n_k} + \cdots H_{n_k}\end{cases}$$
，則$\langle H_{n_k}\rangle$為k階廣義費氏數列。

降次後係數積和為高階廣義費氏數列的推測：

推測2：若$A = k\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}\right\}^q$之$k \times k$矩陣，
且$x^m = a_{m_k}x^{k-1} + a_{m_{k-1}}x^{k-2} + \ldots\ldots + a_{m_2}x + a_{m_1}$
則$H_{n+q(k-1)_k}a_{m_k} + H_{n+q(k-2)_k}a_{m_{k-1}} + \cdots H_{n_k}a_{m_1} = H_{n+qm_k}$，$\forall k \in Z$

（三）改寫矩陣，使高階的規律能更一般化。

1. 發現**定理6**中的係數為$\begin{bmatrix}a & b\\ 1 & 0\end{bmatrix}^n$的特徵方程式
2. 定義廣義高階遞迴：

定義：數列$\langle B_{n_k}\rangle$：
$$\begin{cases}B_{0_k} = 0，B_{1_k} = 1，B_{2_k} = 1，B_{k-1_k} = 2^{k-3}\\ \quad B_{n+k_k} = a_1B_{n+k-1_k} + a_2B_{n+k-2_k}\\ \qquad + \cdots a_kB_{n_k}、n \in N，k > 2\end{cases}$$
則稱$\langle B_{n_k}\rangle$為廣義k階數列

3. 猜測廣義高階遞迴的規律：

推測3：C_{n_k}為一高階遞迴數列，且$C_{n+k_k} = a_1C_{n+k-1_k} + a_2C_{n+k-2_k} + \cdots a_kC_{n_k}$
若$A = \begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}^q$
且$x^m = a_{m_k}x^{k-1} + a_{m_{k-1}}x^{k-2} + \ldots\ldots + a_{m_2}x + a_{m_1}$
則$C_{n+q(k-1)_k}a_{m_k} + C_{n+q(k-2)_k}a_{m_{k-1}} + \cdots C_{n_k}a_{m_1} = C_{n+qm_k}$，$\forall k \in Z$

陸、參考資料及其他

1. 游森棚（2013）。高中數學第一、二冊。翰林出版社，108年4、9月初版。
2. Piotr Rudnicki（2004）。Little Bezout Theorem, Formalized Mathematics. *12*, 1。
3. Kenneth Hoffman（1971）。Linear Algebra, 2nd Edition. Prentice Hall. 1971年4月二版。
4. Robert C Johnson（2009）。Fibonacci numbers and matrices, formerly Maths Dept, Durham University, Durham City, DH1 3LE, UK
5. 中山大學應用數學系雙週一題有獎徵答。http://www.math.nsysu.edu.tw/~problem/