中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050403

公園跑切線

學校名稱：國立鳳山高級中學

作者：	指導老師：
高二 余秉宸 高二 林佑家 高二 張睿宸	鍾永鴻

關鍵詞：跑切線、收斂點

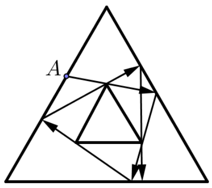
摘 要

本篇作品旨在探討一個正三角形公園，內有一個邊長為公園邊長$\frac{1}{3}$的小正三角形綠地，公園和綠地兩者方向相同，而且中心重合。一位民眾從公園邊上的某一點出發，每次都朝著綠地的頂點跑「切線」，跑到公園的另一邊上某一點。然後再從這個點出發，反覆一直跑下去。觀察這樣的規則模式，最後會有什麼結果？其次，如果公園和綠地都是一般的三角形，其結果與正三角形的情況是否相同？最後，再將公園和綠地的形狀推廣為正n邊形，其結果又會是如何？

壹、研究動機

在科學研習月刊中第57-7期(2018年10月份)的「森棚教官數學教室」題目：「如圖(一)，正三角形的公園中有一個邊長為公園邊長$\frac{1}{3}$的小正三角形綠地，公園和綠地兩者方向相同，而且中心重合。兩三角形之間為開放空間，民眾可自由活動。小志從公園邊上的A點出發，每次都朝著綠地的頂點跑「切線」，跑到公園的另一邊的一點。然後再從這個點出發，反覆一直跑下去。圖(一)是跑了五趟之後的結果。觀察這個結構並做一些實驗。請問聰明的讀者，你能得到什麼結論？」

這是一道有趣的題目，將數學與生活情境作聯結，這正好是第二冊的數列與遞迴關係式的觀念，經網路查詢之後，無相關的文獻資料，於是，我們就以這題目開始我們的研究。



圖(一)

貳、研究目的

一、探討綠地邊長為公園邊長的$\frac{1}{3}$倍、$\frac{1}{4}$倍的情況。

二、探討綠地邊長為公園邊長的λ倍的情況，$0<\lambda<1$。

三、探討公園與綠地是相似的任意三角形，綠地邊長為公園邊長的λ倍的情況，$0<\lambda<1$。

四、探討公園與綠地是相似的正n邊形，$n\geq 4$，綠地邊長為公園邊長的λ倍的情況，$0<\lambda<1$。

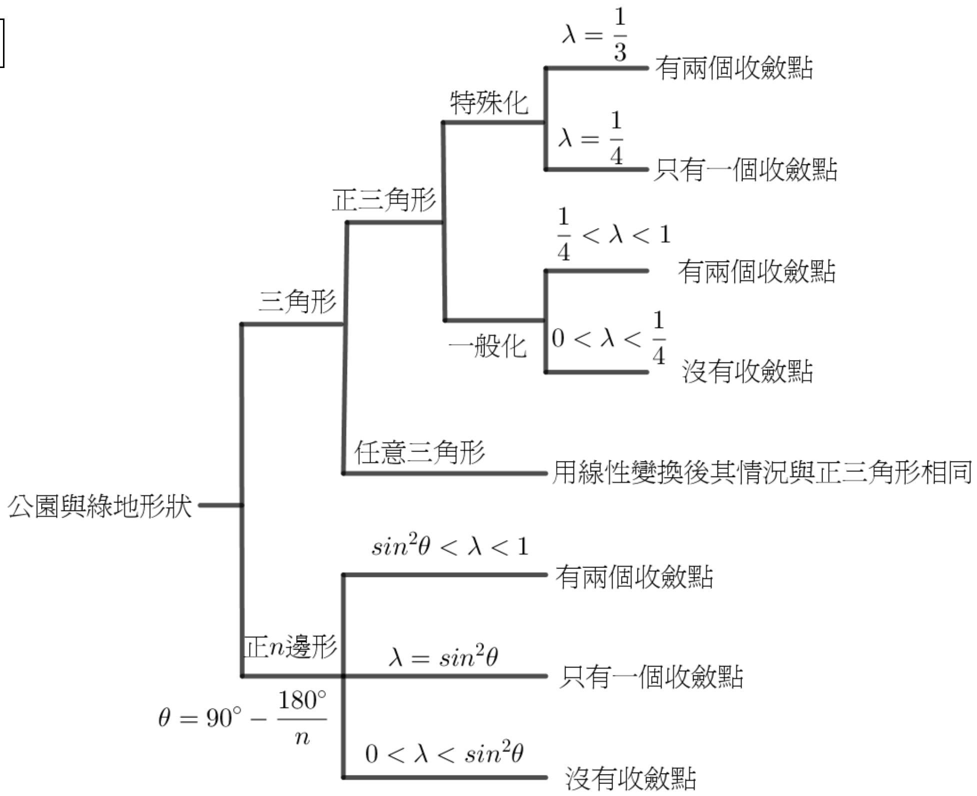
參、研究設備及器材

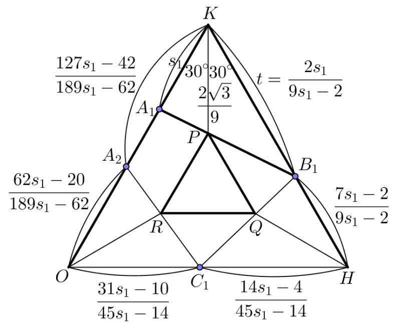
電腦、word、Geogebra 繪圖軟體、紙、筆。

肆、研究過程及方法

設綠地邊長為公園邊長的λ倍，$0<\lambda<1$。

研究地圖





圖(二)

研究一：$\lambda=\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$。

設正三角形公園邊長為 1，正三角形綠地邊長為$\lambda=\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$。

一、$\lambda=\frac{1}{3}$：如圖(二)。

設小志從$\overline{OK}$上與K點距離s_1的A_1出發，由A_1跑經P到$\overleftrightarrow{HK}$上與K點距離t的B_1，由

ΔKA_1B_1面積 $=\Delta KA_1P$面積 $+\Delta KPB_1$面積，得$\frac{1}{2}s_1t\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}s_1\cdot\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}t\cdot\sin 30^\circ$

$\Rightarrow 9s_1t=2s_1+2t\Rightarrow t=\frac{2s_1}{9s_1-2}\Rightarrow\overline{HB_1}=s_2=1-t=\frac{7s_1-2}{9s_1-2}$，再由$B_1$跑經$Q$到$\overleftrightarrow{OH}$上與$O$距離

$s_3=\frac{31s_1-10}{45s_1-14}$的$C_1$，再由$C_1$跑經$R$到$\overleftrightarrow{OK}$上與$K$距離$s_4=\frac{127s_1-42}{189s_1-62}$的$A_2$，如此重複。因

直線PQ和$\overline{OK}$的交點與K點距離為$\frac{2}{9}$，所以在過程中，若$\overline{OA_n}\geq\frac{7}{9}$，則小志因無法跑切線而停在$A_n$；若$\overline{KB_n}\geq\frac{7}{9}$，則停在$B_n$；若$\overline{HC_n}\geq\frac{7}{9}$，則停在$C_n$。

設以符號 $A_n(x)$，$B_n(y)$，$C_n(z)$ 分別代表點 A_n，B_n，C_n 與點 K，H，O 的距離為 x，y，z，則小志跑步的動線為 $A_1(s_1) \to B_1(\frac{7s_1-2}{9s_1-2}) \to C_1(\frac{31s_1-10}{45s_1-14}) \to A_2(\frac{127s_1-42}{189s_1-62}) \to \cdots$。若 $A_n(s_{3n-2})$，$B_n(s_{3n-1})$，$C_n(s_{3n})$，則數列 $\langle s_n \rangle$ 滿足 $s_{n+1}=\frac{7s_n-2}{9s_n-2}$，令 $x=\frac{7x-2}{9x-2} \Rightarrow 9x^2-9x+2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$。

定理 1.1.1：

當 $\lambda=\frac{1}{3}$，且 $\frac{1}{3} \le s_1 \le 1$ 時，數列 $\langle s_n \rangle$ 收斂。(1)當 $s_1=\frac{1}{3}$ 時，$\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{1}{3}$。

(2)當 $\frac{1}{3} < s_1 \le 1$ 時，$\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{2}{3}$。

證明:

(1)當 $s_1=\frac{1}{3}$ 時，$s_n=\frac{1}{3}$，$\forall n \in N$，故 $\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{1}{3}$。

(2)當 $s_1=\frac{2}{3}$ 時，$s_n=\frac{2}{3}$，$\forall n \in N$，故 $\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{2}{3}$。

當 $\frac{1}{3} < s_1 < \frac{2}{3}$ 或 $\frac{2}{3} < s_1 \le 1$ 時，$s_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{7s_n-2}{9s_n-2}-\frac{1}{3}=\frac{4(s_n-\frac{1}{3})}{9s_n-2}$，$s_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{7s_n-2}{9s_n-2}-\frac{2}{3}=\frac{s_n-\frac{2}{3}}{9s_n-2}$。

兩式相除得 $\frac{s_{n+1}-\frac{1}{3}}{s_{n+1}-\frac{2}{3}}=4\cdot\frac{s_n-\frac{1}{3}}{s_n-\frac{2}{3}}$，即 $\left\langle \frac{s_n-\frac{1}{3}}{s_n-\frac{2}{3}} \right\rangle$ 形成一個公比為 $r=4$ 的等比數列，

$$\frac{s_n-\frac{1}{3}}{s_n-\frac{2}{3}}=\frac{s_1-\frac{1}{3}}{s_1-\frac{2}{3}}\cdot 4^{n-1} \Rightarrow s_n=\frac{1}{3}\times\left[1+\frac{s_1-\frac{1}{3}}{s_1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{n-1}}(s_1-\frac{2}{3})}\right]$$，此時 $\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{1}{3}(1+1)=\frac{2}{3}$。◆

註：當數列 $\langle s_n \rangle$ 收斂到 $\frac{2}{3}$(或 $\frac{1}{3}$)時，其三個子數列 $\langle s_{3n-2} \rangle$、$\langle s_{3n-1} \rangle$、$\langle s_{3n} \rangle$ 也收斂到 $\frac{2}{3}$(或 $\frac{1}{3}$)，若 A'(或 A'')、B'(或 B'')、C'(或 C'') 分別為線段 $\overline{OK}$、$\overline{KH}$、$\overline{HO}$ 上分別與 K、H、O 距離為 $\frac{2}{3}$(或 $\frac{1}{3}$)的點，則我們稱 A'(或 A'')、B'(或 B'')、C'(或 C'')分別為線段 $\overline{OK}$、$\overline{KH}$、$\overline{HO}$ 上的一個收斂點。

接下來我們要證明：當小志(往後改稱「跑者」)出發的位置與頂點 K 的距離小於 $\frac{1}{3}$ 時，他會在某個邊上因為無法跑切線而停住。考慮 $0 \le s_1=\frac{1}{3}-p<\frac{1}{3}$，$0<p\le\frac{1}{3}$，則小志的動線為

$A_1(\frac{1}{3}-p) \to B_1(\frac{1}{3}-\frac{4p}{1-9p}) \to C_1(\frac{1}{3}-\frac{16p}{1-45p}) \to A_2(\frac{1}{3}-\frac{64p}{1-189p}) \to \cdots$。

引理 1.1.2：

設 $A_n(\frac{1}{3}-z_{3n-2})$，$B_n(\frac{1}{3}-z_{3n-1})$，$C_n(\frac{1}{3}-z_{3n})$，$n \ge 1$，則 $z_{3n-2}=\frac{2^{6n-6}p}{1-3(2^{6n-6}-1)p}$，

$z_{3n-1}=\frac{2^{6n-4}p}{1-3(2^{6n-4}-1)p}$，$z_{3n}=\frac{2^{6n-2}p}{1-3(2^{6n-2}-1)p}$。

證明:

當 $n=1$ 時，$\frac{2^{6-6}p}{1-3(2^{6-6}-1)p}=p=z_1$，$\frac{2^{6-4}p}{1-3(2^{6-4}-1)p}=\frac{4p}{1-9p}=z_2$，$\frac{2^{6-2}p}{1-3(2^{6-2}-1)p}=\frac{16p}{1-45p}=z_3$，

所以 $n=1$ 時成立。

設 $n=k$ 時成立，即 $z_{3k-2}=\frac{2^{6k-6}p}{1-3(2^{6k-6}-1)p}$，$z_{3k-1}=\frac{2^{6k-4}p}{1-3(2^{6k-4}-1)p}$，$z_{3k}=\frac{2^{6k-2}p}{1-3(2^{6k-2}-1)p}$。

當 $n=k+1$ 時，$z_{3(k+1)\text{-}2}=z_{3k+1}=\frac{4z_{3k}}{1-9z_{3k}}=\frac{4\cdot\frac{2^{6k-2}p}{1-3(2^{6k-2}-1)p}}{1-9\cdot\frac{2^{6k-2}p}{1-3(2^{6k-2}-1)p}}=\frac{2^{6k}p}{1-3(2^{6k}-1)p}$，

$$z_{3(k+1)\text{-}1}=z_{3k+2}=\frac{4z_{3k+1}}{1-9z_{3k+1}}=\frac{4\cdot\frac{2^{6k}p}{1-3(2^{6k}-1)p}}{1-9\cdot\frac{2^{6k}p}{1-3(2^{6k}-1)p}}=\frac{2^{6k+2}p}{1-3(2^{6k+2}-1)p}，$$

$z_{3(k+1)}=z_{3k+3}=\frac{4z_{3k+2}}{1-9z_{3k+2}}=\frac{4\cdot\frac{2^{6k+2}p}{1-3(2^{6k+2}-1)p}}{1-9\cdot\frac{2^{6k+2}p}{1-3(2^{6k+2}-1)p}}=\frac{2^{6k+4}p}{1-3(2^{6k+4}-1)p}$。所以 $n=k+1$ 時亦成立，

故由數學歸納法得證。 ◆

從規則模式得: 若 $z_{3n-2}\ge\frac{1}{9}$，則停在 A_n；若 $z_{3n-1}\ge\frac{1}{9}$，則停在 B_n；若 $z_{3n}\ge\frac{1}{9}$，則停在 C_n。

定理 1.1.3：

當 $\lambda=\frac{1}{3}$，且 $0\le s_1<\frac{1}{3}$ 時，跑者會在某一個邊停住。定義數列 $\langle a_n\rangle$：$a_0=\frac{1}{3}$，$a_n=\frac{1}{3(2^{2n}-1)}$，

$n\ge1$，則 $p=a_0=\frac{1}{3}$ 時，停在 A_1； $a_{3(n-1)+1}\le p<a_{3(n-1)}$ 時，停在 A_n； $a_{3(n-1)+2}\le p<a_{3(n-1)+1}$ 時，

停在 B_n； $a_{3(n-1)+3}\le p<a_{3(n-1)+2}$ 時，停在 C_n。

證明:

當 $p=a_0=\dfrac{1}{3}$ 時，停在 $A_1=K$ ；當 $\dfrac{1}{9}=a_1\le p<a_0=\dfrac{1}{3}$ 時，停在 A_1 ；當 $\dfrac{1}{45}=a_2\le p<a_1=\dfrac{1}{9}$ 時，停在 B_1 ；當 $\dfrac{1}{189}=a_3\le p<a_2=\dfrac{1}{45}$ 時，停在 C_1 ；

若 $n\ge 2$ ，當 $a_{3(n-1)+1}\le p<a_{3(n-1)}$ 時， $\dfrac{1}{3(2^{6n-4}-1)}\le p<\dfrac{1}{3(2^{6n-6}-1)}\Rightarrow \dfrac{2^{6n-6}-1}{2^{6n-4}-1}\le 3(2^{6n-6}-1)p<1$

$$\Rightarrow \frac{3\cdot 2^{6n-6}}{2^{6n-4}-1}\ge 1-3(2^{6n-6}-1)p>0\Rightarrow \frac{2^{6n-4}-1}{3\cdot 2^{6n-6}}\cdot 2^{6n-6}\cdot p\le \frac{2^{6n-6}p}{1-3(2^{6n-6}-1)p}=z_{3n-2}$$

$\Rightarrow z_{3n-2}\ge \dfrac{2^{6n-4}-1}{3}\cdot\dfrac{1}{3(2^{6n-4}-1)}=\dfrac{1}{9}$ ，故停在 A_n ；

當 $a_{3(n-1)+2}\le p<a_{3(n-1)+1}$ 時， $\dfrac{1}{3(2^{6n-2}-1)}\le p<\dfrac{1}{3(2^{6n-4}-1)}\Rightarrow \dfrac{2^{6n-4}-1}{2^{6n-2}-1}\le 3(2^{6n-4}-1)p<1$

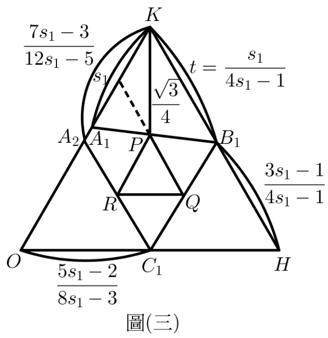
$$\Rightarrow \frac{3\cdot 2^{6n-4}}{2^{6n-2}-1}\ge 1-3(2^{6n-4}-1)p>0\Rightarrow \frac{2^{6n-2}-1}{3\cdot 2^{6n-4}}\cdot 2^{6n-4}p\le \frac{2^{6n-4}p}{1-3(2^{6n-4}-1)p}=z_{3n-1}$$

$\Rightarrow z_{3n-1}\ge \dfrac{2^{6n-2}-1}{3}\cdot\dfrac{1}{3(2^{6n-2}-1)}=\dfrac{1}{9}$ ，故停在 B_n 。

當 $a_{3(n-1)+3}\le p<a_{3(n-1)+2}$ 時， $\dfrac{1}{3(2^{6n}-1)}\le p<\dfrac{1}{3(2^{6n-2}-1)}\Rightarrow \dfrac{2^{6n-2}-1}{2^{6n}-1}\le 3(2^{6n-2}-1)p<1$

$$\Rightarrow \frac{3\cdot 2^{6n-2}}{2^{6n}-1}\ge 1-3(2^{6n-2}-1)p>0\Rightarrow \frac{2^{6n}-1}{3\cdot 2^{6n-2}}\cdot 2^{6n-2}p\le \frac{2^{6n-2}p}{1-3(2^{6n-2}-1)p}=z_{3n}$$

$\Rightarrow z_{3n}\ge \dfrac{2^{6n}-1}{3}\cdot\dfrac{1}{3(2^{6n}-1)}=\dfrac{1}{9}$ ，故停在 C_n 。 ◆



圖(三)

二、 $\lambda=\dfrac{1}{4}$ **：**如圖(三)。

設跑者從 $\overline{OK}$ 上與 K 點距離 s_1 的 A_1 出發，由 A_1 跑經 P 到 $\overleftrightarrow{HK}$ 上與 K 點距離 t 的 B_1 ，由 ΔKA_1B_1 面積 $=\Delta KA_1P$ 面積 $+\Delta KPB_1$ 面積，得

$\dfrac{1}{2}s_1t\cdot\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}s_1\cdot\sin 30^\circ+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}t\cdot\sin 30^\circ\Rightarrow t=\dfrac{s_1}{4s_1-1}\Rightarrow \overline{HB_1}=s_2=1-t=\dfrac{3s_1-1}{4s_1-1}$ ，進而推得 $\overline{OC_1}=s_3=\dfrac{5s_1-2}{8s_1-3}$ ， $\overline{KA_2}=s_4=\dfrac{7s_1-3}{12s_1-5}$ ，如此重複。因直線 PQ 和 $\overline{OK}$ 的交點與 K 點距離為 $\dfrac{1}{4}$ ，所以在過程中，若 $\overline{OA_n}\ge\dfrac{3}{4}$ ，則跑者因無法跑切線而停在 A_n ；若 $\overline{KB_n}\ge\dfrac{3}{4}$ ，則停在 B_n ；若 $\overline{HC_n}\ge\dfrac{3}{4}$ ，則停在 C_n 。

設以符號 $A_n(x)$，$B_n(y)$，$C_n(z)$ 分別代表點 A_n，B_n，C_n 與點 K，H，O 的距離為 x，y，z，則跑者的動線為 $A_1(s_1)\to B_1(\frac{3s_1-1}{4s_1-1})\to C_1(\frac{5s_1-2}{8s_1-3})\to A_2(\frac{7s_1-3}{12s_1-5})\to \cdots$。若 $A_n(s_{3n-2})$，$B_n(s_{3n-1})$，$C_n(s_{3n})$，則數列 $\langle s_n\rangle$ 滿足 $s_{n+1}=\frac{3s_n-1}{4s_n-1}$，令 $x=\frac{3x-1}{4x-1}\Rightarrow 4x^2-4x+1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ (重根)。

定理 1.2.1：

當 $\lambda=\frac{1}{4}$，且 $\frac{1}{2}\le s_1\le 1$ 時，數列 $\langle s_n\rangle$ 收斂，$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{2}$。

證明:

(1)當 $s_1=\frac{1}{2}$ 時，$s_n=\frac{1}{2}$，$\forall n\in N$，故 $\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{2}$。

(2)當 $\frac{1}{2}<s_1\le 1$ 時，$s_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{3s_n-1}{4s_n-1}-\frac{1}{2}=\frac{s_n-\frac{1}{2}}{4s_n-1}$，取倒數得 $\frac{1}{s_{n+1}-\frac{1}{2}}=\frac{4s_n-1}{s_n-\frac{1}{2}}=4+\frac{1}{s_n-\frac{1}{2}}$，令

$b_n=\frac{1}{s_n-\frac{1}{2}}$，則 $b_{n+1}=b_n+4$，即 $\langle b_n\rangle$ 形成一個首項為 $b_1=\frac{1}{s_1-\frac{1}{2}}$，公差為 $d=4$ 的等差數列，

$b_n=b_1+4(n-1)\Rightarrow \frac{1}{s_n-\frac{1}{2}}=\frac{1}{s_1-\frac{1}{2}}+4(n-1)=\frac{1+4(n-1)(s_1-\frac{1}{2})}{s_1-\frac{1}{2}}$，取倒數得

$s_n-\frac{1}{2}=\frac{s_1-\frac{1}{2}}{1+4(n-1)(s_1-\frac{1}{2})}\Rightarrow s_n=\frac{1}{2}+\frac{s_1-\frac{1}{2}}{1+4(n-1)(s_1-\frac{1}{2})}$，此時 $\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{2}$。◆

註：當數列 $\langle s_n\rangle$ 收斂到 $\frac{1}{2}$ 時，其三個子數列 $\langle s_{3n-2}\rangle$、$\langle s_{3n-1}\rangle$、$\langle s_{3n}\rangle$ 也收斂到 $\frac{1}{2}$，若 A'、B'、C' 分別為線段 $\overline{OK}$、$\overline{KH}$、$\overline{HO}$ 上分別與 *K*、*H*、*O* 距離為 $\frac{1}{2}$ 的點，則我們稱 A'、B'、C' 分別為線段 $\overline{OK}$、$\overline{KH}$、$\overline{HO}$ 上的一個收斂點。

接下來我們要證明：當跑者出發的位置與頂點 K 的距離小於 $\frac{1}{2}$ 時，他會在某個邊上因為無法跑切線而停住。考慮 $0\le s_1=\frac{1}{2}-p<\frac{1}{2}$，$0<p\le\frac{1}{2}$，則跑者的動線為

$A_1(\frac{1}{2}-p)\to B_1(\frac{1}{2}-\frac{p}{1-4p})\to C_1(\frac{1}{2}-\frac{p}{1-8p})\to A_2(\frac{1}{2}-\frac{p}{1-12p})$。

引理 1.2.2 :

設 $A_n(\frac{1}{2}-z_{3n-2})$，$B_n(\frac{1}{2}-z_{3n-1})$，$C_n(\frac{1}{2}-z_{3n})$，$n\geq 1$，則 $z_{3n-2}=\dfrac{p}{1-4(3n-3)p}$，

$z_{3n-1}=\dfrac{p}{1-4(3n-2)p}$，$z_{3n}=\dfrac{p}{1-4(3n-1)p}$。

證明:

當 $n=1$ 時，$\dfrac{p}{1-4(3-3)p}=p=z_1$，$\dfrac{p}{1-4(3-2)p}=\dfrac{p}{1-4p}=z_2$，$\dfrac{p}{1-4(3-1)p}=\dfrac{p}{1-8p}=z_3$，

所以 $n=1$ 時成立。

設 $n=k$ 時成立，即 $z_{3k-2}=\dfrac{p}{1-4(3k-3)p}$，$z_{3k-1}=\dfrac{p}{1-4(3k-2)p}$，$z_{3k}=\dfrac{p}{1-4(3k-1)p}$。

當 $n=k+1$ 時，$z_{3(k+1)\text{-}2}=z_{3k+1}=\dfrac{z_{3k}}{1-4z_{3k}}=\dfrac{\dfrac{p}{1-4(3k-1)p}}{1-4\cdot\dfrac{p}{1-4(3k-1)p}}=\dfrac{p}{1-4\cdot 3kp}$，

$$z_{3(k+1)\text{-}1}=z_{3k+2}=\frac{z_{3k+1}}{1-4z_{3k+1}}=\frac{\dfrac{p}{1-4\cdot 3kp}}{1-4\dfrac{p}{1-4\cdot 3kp}}=\frac{p}{1-4(3k+1)p},$$

$z_{3(k+1)}=z_{3k+3}=\dfrac{z_{3k+2}}{1-4z_{3k+2}}=\dfrac{\dfrac{p}{1-4(3k+1)p}}{1-4\dfrac{p}{1-4(3k+1)p}}=\dfrac{p}{1-4(3k+2)p}$。所以 $n=k+1$ 時亦成立，故由數學歸納法得證。◆

從規則模式得: 若 $z_{3n-2}\geq\frac{1}{4}$，則停在 A_n；若 $z_{3n-1}\geq\frac{1}{4}$，則停在 B_n；若 $z_{3n}\geq\frac{1}{4}$，則停在 C_n。

定理 1.2.3 :

當 $\lambda=\frac{1}{4}$，且 $0\leq s_1<\frac{1}{2}$ 時，跑者會在某一個邊停住。定義數列 $\langle a_n\rangle$：$a_0=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{1}{4n}$，$n\geq 1$，

則 $p=a_0=\frac{1}{2}$ 時，停在 A_1；$a_{3(n-1)+1}\leq p<a_{3(n-1)}$ 時，停在 A_n；$a_{3(n-1)+2}\leq p<a_{3(n-1)+1}$ 時，停在 B_n；

$a_{3(n-1)+3}\leq p<a_{3(n-1)+2}$ 時，停在 C_n。

證明:

當 $p=a_0=\frac{1}{2}$ 時，停在 $A_1=K$；當 $n=1$ 時，若 $\frac{1}{4}=a_1\leq p<a_0=\frac{1}{2}$，停在 A_1；

若$\frac{1}{8}=a_2\le p<a_1=\frac{1}{4}$，則$\frac{1}{2}\le 4p<1\Rightarrow\frac{1}{2}\ge 1-4p>0\Rightarrow\frac{1}{4}\le 2p\le\frac{p}{1-4p}=z_2$，停在$B_1$；

若$\frac{1}{12}=a_3\le p<a_2=\frac{1}{8}$，則$\frac{2}{3}\le 8p<1\Rightarrow\frac{1}{4}\le 3p\le\frac{p}{1-8p}=z_3$，停在$C_1$；

當$n\ge 2$時，若$a_{3(n-1)+1}\le p<a_{3(n-1)}$，則$\frac{1}{4(3n-2)}\le p<\frac{1}{4(3n-3)}\Rightarrow\frac{3n-3}{3n-2}\le 4(3n-3)p<1$

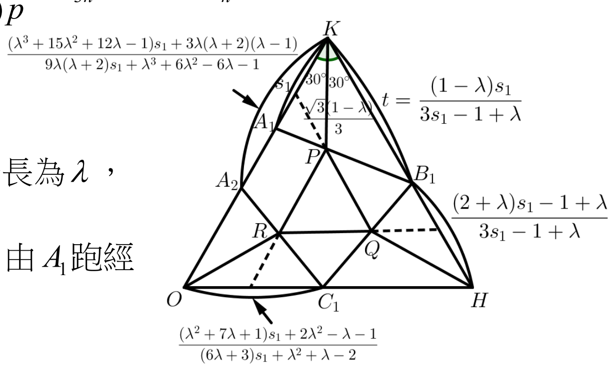
$\Rightarrow\frac{1}{3n-2}\ge 1-4(3n-3)p>0\Rightarrow\frac{1}{4}\le(3n-2)p\le\frac{p}{1-4(3n-3)p}=z_{3n-2}$，停在$A_n$；

若$a_{3(n-1)+2}\le p<a_{3(n-1)+1}$，則$\frac{1}{4(3n-1)}\le p<\frac{1}{4(3n-2)}\Rightarrow\frac{3n-2}{3n-1}\le 4(3n-2)p<1$

$\Rightarrow\frac{1}{3n-1}\ge 1-4(3n-2)p>0\Rightarrow\frac{1}{4}\le(3n-1)p\le\frac{p}{1-4(3n-2)p}=z_{3n-1}$，停在$B_n$；

若$a_{3(n-1)+3}\le p<a_{3(n-1)+2}$，則$\frac{1}{4\cdot 3n}\le p<\frac{1}{4(3n-1)}\Rightarrow\frac{3n-1}{3n}\le 4(3n-1)p<1$

$\Rightarrow\frac{1}{3n}\ge 1-4(3n-1)p>0\Rightarrow\frac{1}{4}\le 3np\le\frac{p}{1-4(3n-1)p}=z_{3n}$，停在$C_n$。◆



圖(四)

研究二：$0<\lambda<1$。

設正三角形公園邊長為 1，正三角形綠地邊長為λ，$0<\lambda<1$。跑者從$\overline{OK}$上與K距離s_1的A_1出發，由A_1跑經P到$\overleftrightarrow{HK}$上與K點距離t的B_1，如圖(四)。由

ΔKA_1B_1面積 $=\Delta KA_1P$面積 $+\Delta KPB_1$面積，得$(3s_1-1+\lambda)t=(1-\lambda)s_1\Rightarrow t=\frac{(1-\lambda)s_1}{3s_1-1+\lambda}$

$\Rightarrow\overline{HB_1}=s_2=1-t=\frac{(2+\lambda)s_1-1+\lambda}{3s_1-1+\lambda}$，再由$B_1$跑經$Q$到$\overleftrightarrow{OH}$上與$O$距離

$s_3=\frac{(\lambda^2+7\lambda+1)s_1+(2\lambda^2-\lambda-1)}{(6\lambda+3)s_1+(\lambda^2+\lambda-2)}$的$C_1$，再由$C_1$跑經$R$到$\overleftrightarrow{OK}$上與$K$距離

$s_4=\frac{(\lambda^3+15\lambda^2+12\lambda-1)s_1+(3\lambda^3+3\lambda^2-6\lambda)}{9\lambda(\lambda+2)s_1+(\lambda^3+6\lambda^2-6\lambda-1)}$的$A_2$，如此重複。因直線$PQ$和$\overline{OK}$的交點與$K$點距離為$\frac{1-\lambda}{3}$，所以在過程中，若$\overline{OA_n}\ge\frac{2+\lambda}{3}$，則跑者因無法跑切線而停在$A_n$；若$\overline{KB_n}\ge\frac{2+\lambda}{3}$，則停在$B_n$；若$\overline{HC_n}\ge\frac{2+\lambda}{3}$，則停在$C_n$。

設以 $A_n(x)$，$B_n(y)$，$C_n(z)$ 分別代表點 A_n，B_n，C_n 與點 K，H，O 的距離分別為 x，y，z，則跑者的動線為 $A_1(s_1)\to B_1(\dfrac{(2+\lambda)s_1-1+\lambda}{3s_1-1+\lambda})\to C_1(\dfrac{(\lambda^2+7\lambda+1)s_1+(2\lambda^2-\lambda-1)}{(6\lambda+3)s_1+(\lambda^2+\lambda-2)})$

$\to A_2(\dfrac{(\lambda^3+15\lambda^2+12\lambda-1)s_1+(3\lambda^3+3\lambda^2-6\lambda)}{9\lambda(\lambda+2)s_1+(\lambda^3+6\lambda^2-6\lambda-1)})\to\ \cdots$ 。若 $A_n(s_{3n-2})$，$B_n(s_{3n-1})$，$C_n(s_{3n})$，則數列 $\langle s_n\rangle$ 滿足 $s_{n+1}=\dfrac{(2+\lambda)s_n-1+\lambda}{3s_n-1+\lambda}$，令 $x=\dfrac{(2+\lambda)x-1+\lambda}{3x-1+\lambda}\Rightarrow 3x^2-3x+1-\lambda=0$。若 $\dfrac{1}{4}\le\lambda<1$，則判別式 $D=9-12(1-\lambda)\ge 0$，此時方程式 $3x^2-3x+1-\lambda=0$ 有兩實根 $\alpha=\dfrac{3-\sqrt{12\lambda-3}}{6}$、$\beta=\dfrac{3+\sqrt{12\lambda-3}}{6}$，令 $v=\dfrac{\beta}{\alpha}$，則 $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=\dfrac{1-\lambda}{3}$，$\dfrac{1}{\alpha}=v+1$。

定理 2.1：

當 $\dfrac{1}{4}\le\lambda<1$，且 $\alpha\le s_1\le 1$ 時，數列 $\langle s_n\rangle$ 收斂。(1)當 $s_1=\alpha$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\alpha$。

(2)當 $\alpha<s_1\le 1$ 時，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\beta$。

證明：

當 $\lambda=\dfrac{1}{4}$ 時，即是定理 1.2.1。往證 $\lambda>\dfrac{1}{4}$ 的一般性情況。

(1)當 $s_1=\alpha$ 時，$s_n=\alpha$，$\forall n\in N$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\alpha$。

(2)當 $s_1=\beta$ 時，$s_n=\beta$，$\forall n\in N$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\beta$。

當 $\alpha<s_1<\beta$ 或 $\beta<s_1\le 1$ 時，$s_{n+1}-\alpha=\dfrac{(2+\lambda)s_n-1+\lambda}{3s_n-1+\lambda}-\alpha=\dfrac{(2+\lambda-3\alpha)s_n+(\lambda-1)(1-\alpha)}{3s_n-1+\lambda}$，

以 $s_n=\alpha$ 代入分子得 $2\alpha+\lambda\alpha-3\alpha^2+\lambda(1-\alpha)-1+\alpha=0$，分子分解為

$(s_n-\alpha)(2+\lambda-3\alpha)=3(\alpha-1)^2(s_n-\alpha)=3\beta^2(s_n-\alpha)$，故 $s_{n+1}-\alpha=\dfrac{3\beta^2(s_n-\alpha)}{3s_n-1+\lambda}$，同理，

$s_{n+1}-\beta=\dfrac{3\alpha^2(s_n-\beta)}{3s_n-1+\lambda}$，兩式相除得 $\dfrac{s_{n+1}-\alpha}{s_{n+1}-\beta}=v^2\cdot\dfrac{s_n-\alpha}{s_n-\beta}$，即 $\left\langle\dfrac{s_n-\alpha}{s_n-\beta}\right\rangle$ 形成一個公比為 $r=v^2>1$ 的等比數列。

由 $\dfrac{s_n-\alpha}{s_n-\beta}=\dfrac{s_1-\alpha}{s_1-\beta}\cdot r^{n-1}\Rightarrow s_n=\beta+\dfrac{(s_1-\beta)(\beta-\alpha)}{(s_1-\alpha)r^{n-1}-(s_1-\beta)}$。此時 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\beta$。◆

註：當數列$\langle s_n \rangle$收斂到β(或α)時，其三個子數列$\langle s_{3n-2} \rangle$、$\langle s_{3n-1} \rangle$、$\langle s_{3n} \rangle$也收斂到β(或α)，若A'(或A'')、B'(或B'')、C'(或C'') 分別為線段$\overline{OK}$、$\overline{KH}$、$\overline{HO}$上分別與 K、H、O 距離為β(或α)的點，則我們稱A'(或A'')、B'(或B'')、C'(或C'')分別為線段$\overline{OK}$、$\overline{KH}$、$\overline{HO}$上的一個收斂點。

接下來我們要證明：當跑者出發的位置與頂點K的距離小於α時，他會在某個邊上因為無法跑切線而停住。考慮$0 \le s_1 = \alpha - p < \alpha$，$0 < p \le \alpha$，則我們描述跑者的動線如下：首先

$A_1(\alpha - p) \to B_1(\alpha - \dfrac{(\lambda + 2 - 3\alpha)p}{3(\alpha - p) - 1 + \lambda})$，其中$B_1$中的分數為

$$\frac{(\lambda+2-3\alpha)p}{3(\alpha-p)-1+\lambda} = \frac{(3\alpha^2-3\alpha+3-3\alpha)p}{3\alpha-3p+3\alpha^2-3\alpha} = \frac{(\alpha-1)^2 p}{\alpha^2-p} = \frac{\beta^2 p}{\alpha^2-p} = \frac{v^2 p}{1-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha}p} = \frac{v^2 p}{1-(v+1)^2 p},$$

當$v \ne 1$時，上式可表為$\dfrac{v^2 p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^2-1}{v-1}p}$。

故由$A_1(\alpha-p) \to B_1(\alpha - \dfrac{v^2 p}{1-(v+1)^2 p}) \to C_1(\alpha - \dfrac{v^2 \cdot \dfrac{v^2 p}{1-(v+1)^2 p}}{1-(v+1)^2 \cdot \dfrac{v^2 p}{1-(v+1)^2 p}})$，

C_1中的分數$\dfrac{v^2 \cdot \dfrac{v^2 p}{1-(v+1)^2 p}}{1-(v+1)^2 \cdot \dfrac{v^2 p}{1-(v+1)^2 p}} = \dfrac{v^4 p}{1-(v+1)^2(v^2+1)p}$，當$v \ne 1$時，表為$\dfrac{v^4 p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^4-1}{v-1}p}$。

再推得A_2中的分數為$\dfrac{v^6 p}{1-(v+1)(v^5+v^4+v^3+v^2+v+1)p}$，當$v \ne 1$時，表為$\dfrac{v^6 p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^6-1}{v-1}p}$。

因此，當$v \ne 1$時，動線銜接為$A_1(\alpha-p) \to B_1(\alpha - \dfrac{v^2 p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^2-1}{v-1}p}) \to C_1(\alpha - \dfrac{v^4 p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^4-1}{v-1}p})$

$\to A_2(\alpha - \dfrac{v^6 p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^6-1}{v-1}p}) \to \cdots$。

引理 2.2：

設 $A_n(\alpha - z_{3n-2})$，$B_n(\alpha - z_{3n-1})$，$C_n(\alpha - z_{3n})$，$n \ge 1$，$v \ne 1$，則 $z_{3n-2} = \dfrac{v^{6n-6}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6n-6}-1}{v-1}p}$，

$z_{3n-1} = \dfrac{v^{6n-4}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6n-4}-1}{v-1}p}$，$z_{3n} = \dfrac{v^{6n-2}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6n-2}-1}{v-1}p}$。

證明：

當 $n=1$ 時，$\dfrac{v^{6-6}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6-6}-1}{v-1}p} = p = z_1$，$\dfrac{v^{6-4}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6-4}-1}{v-1}p} = \dfrac{v^{2}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{2}-1}{v-1}p} = z_2$，

$\dfrac{v^{6-2}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6-2}-1}{v-1}p} = \dfrac{v^{4}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{4}-1}{v-1}p} = z_3$，所以 $n=1$ 時成立。

設 $n=k$ 時成立，即 $z_{3k-2} = \dfrac{v^{6k-6}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6k-6}-1}{v-1}p}$，$z_{3k-1} = \dfrac{v^{6k-4}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6k-4}-1}{v-1}p}$，

$z_{3k} = \dfrac{v^{6k-2}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6k-2}-1}{v-1}p}$。

當 $n=k+1$ 時，$z_{3(k+1)\text{-}2} = z_{3k+1} = \dfrac{v^2 z_{3k}}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^2-1}{v-1}z_{3k}} = \dfrac{v^2\dfrac{v^{6k-2}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6k-2}-1}{v-1}p}}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^2-1}{v-1}\cdot\dfrac{v^{6k-2}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6k-2}-1}{v-1}p}}$

$$= \frac{v^{6k}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6k-2}-1}{v-1}p-(v+1)\cdot\dfrac{v^2-1}{v-1}v^{6k-2}p} = \frac{v^{6k}p}{1-\dfrac{(v+1)(v^{6k-2}-1)+(v+1)(v^2-1)v^{6k-2}}{v-1}p}$$

$$= \frac{v^{6k}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6k}-1}{v-1}p}\text{，}$$

$$z_{3(k+1)\text{-}1} = z_{3k+2} = \frac{v^2 z_{3k+1}}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^2-1}{v-1}z_{3k+1}} = \frac{v^2\dfrac{v^{6k}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6k}-1}{v-1}p}}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^2-1}{v-1}\cdot\dfrac{v^{6k}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6k}-1}{v-1}p}}$$

$$=\frac{v^{6k+2}p}{1-(v+1)\cdot\frac{v^{6k}-1}{v-1}p-(v+1)\cdot\frac{v^2-1}{v-1}v^{6k}p}=\frac{v^{6k+2}p}{1-\frac{(v+1)(v^{6k}-1)+(v+1)(v^2-1)v^{6k}}{v-1}p}$$

$$=\frac{v^{6k+2}p}{1-(v+1)\cdot\frac{v^{6k+2}-1}{v-1}p},$$

$$z_{3(k+1)}=z_{3k+3}=\frac{v^2z_{3k+2}}{1-(v+1)\cdot\frac{v^2-1}{v-1}z_{3k+2}}=\frac{v^2\frac{v^{6k+2}p}{1-(v+1)\cdot\frac{v^{6k+2}-1}{v-1}p}}{1-(v+1)\cdot\frac{v^2-1}{v-1}\cdot\frac{v^{6k+2}p}{1-(v+1)\cdot\frac{v^{6k+2}-1}{v-1}p}}$$

$$=\frac{v^{6k+4}p}{1-(v+1)\cdot\frac{v^{6k+2}-1}{v-1}p-(v+1)\cdot\frac{v^2-1}{v-1}v^{6k+2}p}=\frac{v^{6k+4}p}{1-\frac{(v+1)(v^{6k+2}-1)+(v+1)(v^2-1)v^{6k+2}}{v-1}p}$$

$=\dfrac{v^{6k+4}p}{1-(v+1)\cdot\frac{v^{6k+4}-1}{v-1}p}$。所以 $n=k+1$ 時亦成立，故由數學歸納法得證。 ◆

從規則模式得: 若 $\alpha-z_{3n-2}\le\dfrac{1-\lambda}{3}$，即 $z_{3n-2}\ge\alpha-\dfrac{1-\lambda}{3}=\alpha^2=\dfrac{1}{(v+1)^2}$，則停在 A_n；

若 $z_{3n-1}\ge\alpha^2=\dfrac{1}{(v+1)^2}$，則停在 B_n；若 $z_{3n}\ge\alpha^2=\dfrac{1}{(v+1)^2}$，則停在 C_n。

定理 2.3：

當 $\dfrac{1}{4}\le\lambda<1$，且 $0\le s_1<\alpha=\dfrac{1}{v+1}$時，跑者會在某一個邊停住。當 $v\ne1$時，定義數列 $\langle a_n\rangle$：

$a_0=\alpha=\dfrac{1}{v+1}$， $a_n=\dfrac{v-1}{(v+1)(v^{2n}-1)}$， $n\ge1$，則 $p=a_0=\alpha=\dfrac{1}{v+1}$時，停在 A_1； $a_{3(n-1)+1}\le p<a_{3(n-1)}$時，停在 A_n； $a_{3(n-1)+2}\le p<a_{3(n-1)+1}$時，停在 B_n； $a_{3(n-1)+3}\le p<a_{3(n-1)+2}$時，停在 C_n。

證明:

當 $\lambda=\dfrac{1}{4}$時， $3x^2-3x+1-\lambda=0$ 有重根 $\dfrac{1}{2}$，$v=1$，即是定理 1.2.3。往證 $\lambda>\dfrac{1}{4}$ 的一般性情況。

若 $p=a_0=\alpha=\dfrac{1}{v+1}$時，停在 $A_1=K$；當 $n=1$ 時，若 $a_1\le p<a_0\Rightarrow\dfrac{1}{(v+1)^2}\le p<\dfrac{1}{v+1}$，停在 A_1；

若 $a_2\le p<a_1\Rightarrow\dfrac{v-1}{(v+1)(v^4-1)}\le p<\dfrac{v-1}{(v+1)(v^2-1)}\Rightarrow\dfrac{v^2-1}{v^4-1}\le(v+1)\cdot\dfrac{v^2-1}{v-1}p<1$

$$\Rightarrow 1-\frac{v^2-1}{v^4-1}\geq 1-(v+1)\cdot\frac{v^2-1}{v-1}p>0\Rightarrow\frac{v^4-1}{v^4-v^2}\leq\frac{1}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^2-1}{v-1}p}$$

$$\Rightarrow\frac{v^4-1}{v^2-1}p=\frac{v^4-1}{v^4-v^2}\cdot v^2p\leq\frac{v^2p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^2-1}{v-1}p}=z_2\Rightarrow z_2\geq\frac{v^4-1}{v^2-1}\cdot\frac{v-1}{(v+1)(v^4-1)}=\frac{1}{(v+1)^2}$$ ，停在 B_1；

若 $a_3\leq p<a_2\Rightarrow\dfrac{v-1}{(v+1)(v^6-1)}\leq p<\dfrac{v-1}{(v+1)(v^4-1)}\Rightarrow\dfrac{v^4-1}{v^6-1}\leq(v+1)\dfrac{v^4-1}{v-1}p<1$

$$\Rightarrow 1-\frac{v^4-1}{v^6-1}\geq 1-(v+1)\frac{v^4-1}{v-1}p>0\Rightarrow z_3=\frac{v^4p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^2-1}{v-1}p}\geq\frac{v^6-1}{v^6-v^4}\cdot v^4p=\frac{1}{(v+1)^2}$$ ，停在 C_1；

當 $n\geq 2$ 且 $a_{3(n-1)+1}\leq p<a_{3(n-1)}$ 時，$\dfrac{v-1}{(v+1)(v^{6n-4}-1)}\leq p<\dfrac{v-1}{(v+1)(v^{6n-6}-1)}$

$$\Rightarrow\frac{v^{6n-6}-1}{v^{6n-4}-1}\leq(v+1)\frac{v^{6n-6}-1}{v-1}p<1\Rightarrow 1-\frac{v^{6n-6}-1}{v^{6n-4}-1}\geq 1-(v+1)\frac{v^{6n-6}-1}{v-1}p>0$$

$$\Rightarrow\frac{v^{6n-4}-1}{v^2-1}p\leq\frac{v^{6n-6}p}{1-(v+1)\dfrac{v^{6n-6}-1}{v-1}p}=z_{3n-2}\Rightarrow z_{3n-2}\geq\frac{1}{(v+1)^2}$$ ，故停在 A_n；

$a_{3(n-1)+2}\leq p<a_{3(n-1)+1}$ 時，$\dfrac{v-1}{(v+1)(v^{6n-2}-1)}\leq p<\dfrac{v-1}{(v+1)(v^{6n-4}-1)}$

$$\Rightarrow\frac{v^{6n-4}-1}{v^{6n-2}-1}\leq(v+1)\frac{v^{6n-4}-1}{v-1}p<1\Rightarrow 1-\frac{v^{6n-4}-1}{v^{6n-2}-1}\geq 1-(v+1)\frac{v^{6n-4}-1}{v-1}p>0$$

$$\Rightarrow\frac{v^{6n-2}-1}{v^2-1}p\leq\frac{v^{6n-4}p}{1-(v+1)\dfrac{v^{6n-4}-1}{v-1}p}=z_{3n-1}\Rightarrow z_{3n-1}\geq\frac{1}{(v+1)^2}$$ ，故停在 B_n；

$a_{3(n-1)+3}\leq p<a_{3(n-1)+2}$ 時，$\dfrac{v-1}{(v+1)(v^{6n}-1)}\leq p<\dfrac{v-1}{(v+1)(v^{6n-2}-1)}\Rightarrow\dfrac{v^{6n-2}-1}{v^{6n}-1}\leq(v+1)\dfrac{v^{6n-2}-1}{v-1}p<1$

$$\Rightarrow 1-\frac{v^{6n-2}-1}{v^{6n}-1}\geq 1-(v+1)\frac{v^{6n-2}-1}{v-1}p>0\Rightarrow\frac{v^{6n}-1}{v^2-1}p\leq\frac{v^{6n-2}p}{1-(v+1)\dfrac{v^{6n-2}-1}{v-1}p}=z_{3n}\Rightarrow z_{3n}\geq\frac{1}{(v+1)^2}$$ ，

故停在 C_n。 ◆

定理 2.4：

當 $0<\lambda<\dfrac{1}{4}$ 時，沒有收斂點。即跑者不論從哪一點起跑，都會在某一個邊停住。

證明:

由 $0<\lambda<\frac{1}{4}\Rightarrow\lambda-\frac{1}{4}<0$。$s_{n+1}-s_n=\frac{(2+\lambda)s_n-1+\lambda}{3s_n-1+\lambda}-s_n=\frac{3s_n(1-s_n)-1+\lambda}{3s_n-1+\lambda}$，由算幾不等式得 $s_n(1-s_n)\le\frac{1}{4}$，故分子 $3s_n(1-s_n)-1+\lambda\le\frac{3}{4}-1+\lambda=\lambda-\frac{1}{4}<0$。由 $s_n>\frac{1-\lambda}{3}$ 得 $3s_n-1+\lambda>0$，故 $s_{n+1}-s_n<0$，即 $\langle s_n\rangle$ 為遞減數列。若 $\langle s_n\rangle$ 有下界，則由實數的完備性知：$\langle s_n\rangle$ 收斂，令 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}s_{n+1}=s\in R$，得 $s=\frac{(2+\lambda)s-1+\lambda}{3s-1+\lambda}\Rightarrow 3s^2-3s+1-\lambda=0$，但此方程式無實根，矛盾。因此，$\langle s_n\rangle$ 無下界，故存在足夠大的 n 使 $s_n\le\frac{1-\lambda}{3}$，此時即停住無法再跑切線。◆

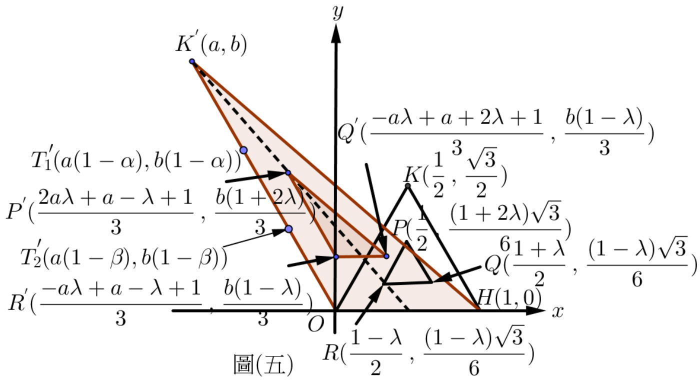
研究三：一般的三角形。

設 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 為坐標平面上相異兩點，二階方陣 $M=\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\end{bmatrix}$，$\det(M)\ne 0$。若 $P(x,y)$ 為 $\overline{AB}$ 上任一點，則 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))$，$0\le t\le 1$。今以 M 將 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x,y)$ 分別變換到 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，$Q(x',y')$，則 $\begin{bmatrix}x_3\\ y_3\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}x_4\\ y_4\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\end{bmatrix}$，且 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}x_1+(x_2-x_1)t\\ y_1+(y_2-y_1)t\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}+tM\begin{bmatrix}x_2-x_1\\ y_2-y_1\end{bmatrix}$，即 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{CD}$，故 P 點也變換到 $\overline{CD}$ 上一點 Q，且 $\frac{\overline{CQ}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=t$。因此，線性變換將線段變換到線段，且線段上的點保持原來的相對順序與比例。

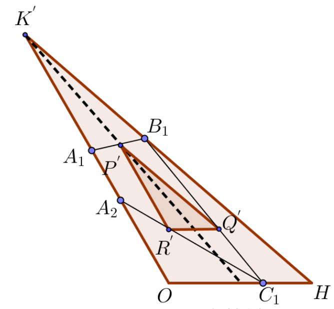
現在將邊長為 1 的正三角形公園 KOH 置於坐標平面上，使 $O(0,0)$，$H(1,0)$，$K(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$。設 $M=\begin{bmatrix}p & q\\ r & s\end{bmatrix}$ 將 $H(1,0)$ 變換到 $H(1,0)$，將 $K(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 變換到 $K'(a,b)$，則 $M=\begin{bmatrix}1 & \frac{2a-1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2b}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$。

邊長為 λ 的正三角形綠地三頂點為 $P(\frac{1}{2},\frac{(1+2\lambda)\sqrt{3}}{6})$，$Q(\frac{1+\lambda}{2},\frac{(1-\lambda)\sqrt{3}}{6})$，$R(\frac{1-\lambda}{2},\frac{(1-\lambda)\sqrt{3}}{6})$，$0<\lambda<1$，$M$ 將 P、Q、R 分別變換到 $P'(\frac{2a\lambda+a-\lambda+1}{3},\frac{(1+2\lambda)b}{3})$，$Q'(\frac{-a\lambda+a+2\lambda+1}{3},\frac{(1-\lambda)b}{3})$，$R'(\frac{-a\lambda+a-\lambda+1}{3},\frac{(1-\lambda)b}{3})$，$M$ 將 $\overline{OK}$ 上的收斂點

$T_1(\frac{1-\alpha}{2},\frac{(1-\alpha)\sqrt{3}}{2})$、$T_2(\frac{1-\beta}{2},\frac{(1-\beta)\sqrt{3}}{2})$分別變換到$T_1'(a(1-\alpha),b(1-\alpha))$，$T_2'(a(1-\beta),b(1-\beta))$，其中$\alpha=\frac{3-\sqrt{12\lambda-3}}{6}$、$\beta=\frac{3+\sqrt{12\lambda-3}}{6}$為研究二中方程式$3x^2-3x+1-\lambda=0$的兩根；此時$\Delta OHK'$的重心為$(\frac{a+1}{3},\frac{b}{3})$，$\Delta P'Q'R'$的重心為$(\frac{a+1}{3},\frac{b}{3})$，故公園和綠地經$M$變換後，重心仍為同一點，如下圖(五)。



圖(五)



圖(六)

在變換後的三角形$K'OH$中，跑者從$\overline{OK'}$上一點A_1出發，由A_1跑經P'到$\overline{K'H}$上一點B_1，再由B_1跑經Q'到$\overline{HO}$上一點C_1，再由C_1跑經R'到$\overline{OK'}$上一點A_2，如此重複，如圖(六)。

若$\frac{1}{4}<\lambda<1$，跑者從$\overline{OK'}$上距離K'為$\alpha\overline{OK'}$的A_1出發，跑經P'到$\overline{K'H}$上距離H為$\alpha\overline{K'H}$的B_1，再跑經Q'到$\overline{HO}$上距離O為$\alpha\overline{HO}$的C_1，再跑經R'到$\overline{OK'}$上距離K'為$\alpha\overline{OK'}$的A_2，此時$A_2=A_1=A''$為一個收斂點。同理，若從$\overline{OK'}$上距離K'為$\beta\overline{OK'}$的A_1出發，跑經P'到$\overline{K'H}$上距離H為$\beta\overline{K'H}$的B_1，再跑經Q'到$\overline{HO}$上距離O為$\beta\overline{HO}$的C_1，再跑經R'到$\overline{OK'}$上距離K'為$\beta\overline{OK'}$的A_2，此時$A_2=A_1=A'$為另一個收斂點。定義數列$\langle s_n\rangle$：$s_{3n-2}=\frac{\overline{A_nK'}}{\overline{OK'}}$，$s_{3n-1}=\frac{\overline{B_nH}}{\overline{K'H}}$，$s_{3n}=\frac{\overline{C_nO}}{\overline{HO}}$，若$\alpha<s_1<\beta$或$\beta<s_1\le 1$時，則由定理 2.1 的討論可得$\langle s_n\rangle$的三個子數列$\langle s_{3n-2}\rangle$、$\langle s_{3n-1}\rangle$、$\langle s_{3n}\rangle$都會收斂到$\beta$，即$\overline{OK'}$上距離$K'$為$\beta\overline{OK'}$的$A'$，$\overline{K'H}$上距離$H$為$\beta\overline{K'H}$的$B'$，$\overline{HO}$上距離$O$為$\beta\overline{HO}$的$C'$，此三點都是其邊上的收斂點。若$0\le s_1<\alpha$，則跑者必定會在某一邊因無法跑切線而停住。

若$\lambda=\frac{1}{4}$，且$\frac{1}{2}\le s_1\le 1$時，由定理 1.2.1 的討論可得$\langle s_n\rangle$的三個子數列$\langle s_{3n-2}\rangle$、$\langle s_{3n-1}\rangle$、$\langle s_{3n}\rangle$都會收斂到$\frac{1}{2}$，即$\overline{OK'}$上距離K'為$\frac{1}{2}\overline{OK'}$的$A'$，$\overline{K'H}$上距離$H$為$\frac{1}{2}\overline{K'H}$的$B'$，$\overline{HO}$上距離$O$為$\frac{1}{2}\overline{HO}$的$C'$，此三點都是其邊上唯一的收斂點。若$0\le s_1<\frac{1}{2}$，則跑者必定會在某一邊因無法跑切線而停住。

若$0<\lambda<\frac{1}{4}$，由定理 2.4 的討論可得：跑者不論從哪一點起跑，都會在某一個邊停住。因此在研究二之中的相對收斂位置及其性質，在此研究三之中也都會成立。

研究四：正 n 邊形，$n\ge 4$，$0<\lambda<1$。

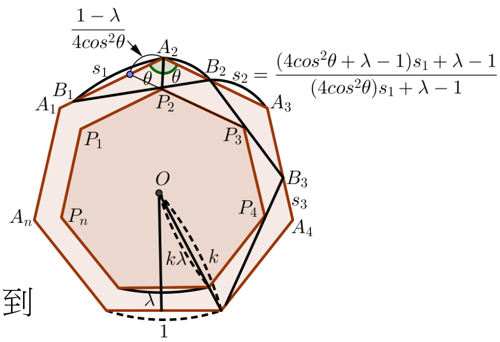
設正n邊形公園$A_1A_2A_3\cdots A_n$邊長為 1，每個內角2θ，正n邊形綠地$P_1P_2P_3\cdots P_n$邊長為λ，$0<\lambda<1$，中心點均在O，如圖(七)。跑者從$\overline{A_1A_2}$上與A_2距離s_1的B_1出發，由B_1跑經P_2到$\overleftrightarrow{A_2A_3}$上與$A_2$距離$t$的$B_2$。設$\overline{OA_2}=k$，則$k=\frac{1}{2\cos\theta}$，$\overline{A_2P_2}=k-k\lambda=\frac{1-\lambda}{2\cos\theta}$，由

$\Delta B_1A_2B_2$面積 $=\Delta B_1A_2P_2$面積 $+\Delta P_2A_2B_2$面積，得

$$\frac{1}{2}s_1t\sin 2\theta=\frac{1}{2}\cdot s_1\cdot\frac{1-\lambda}{2\cos\theta}\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{1-\lambda}{2\cos\theta}\cdot\sin\theta$$

$$\Rightarrow(4\cos^2\theta\cdot s_1-1+\lambda)t=(1-\lambda)s_1\Rightarrow t=\frac{(1-\lambda)s_1}{4\cos^2\theta\cdot s_1-1+\lambda}$$

$$\Rightarrow\overline{A_3B_2}=1-t=\frac{(4\cos^2\theta-1+\lambda)s_1-1+\lambda}{(4\cos^2\theta)s_1-1+\lambda}$$



圖(七)

，再由B_2跑經P_3到$\overleftrightarrow{A_3A_4}$上與$A_4$距離$s_3$的$B_3$，如此重複。因直線$P_{q(1-\left[\frac{q}{n}\right])+1}P_{q(1-\left[\frac{q}{n}\right])+2}$和$\overline{A_{q(1-\left[\frac{q}{n}\right])}A_{q(1-\left[\frac{q}{n}\right])+1}}$的交點與$A_{q(1-\left[\frac{q}{n}\right])+1}$的距離均為$\frac{1-\lambda}{4\cos^2\theta}$，其中$q=1$，2，3，⋯，$n$，符號$A_0$代表點$A_n$，符號$P_{n+1}$代表點$P_1$，所以在過程中，若$\overline{A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n}B_m}\ge\frac{4\cos^2\theta-1+\lambda}{4\cos^2\theta}$，則跑者會因為無法跑切線而停在$B_m$。若$m$為$n$的整數倍時，符號$A_0$代表點$A_n$。

設$B_m(s_m)$代表點B_m與點$A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}$的距離為$s_m$，則$s_{m+1}=\frac{(4\cos^2\theta-1+\lambda)s_m-1+\lambda}{(4\cos^2\theta)s_m-1+\lambda}$，令

$x=\dfrac{(4\cos^2\theta-1+\lambda)x-1+\lambda}{(4\cos^2\theta)x-1+\lambda} \Rightarrow (4\cos^2\theta)x^2-(4\cos^2\theta)x+1-\lambda=0$，若$1>\lambda\geq 1-\cos^2\theta=\sin^2\theta$，則判別式$D=16\cos^2\theta(\cos^2\theta-1+\lambda)\geq 0$，此時方程式有兩實根。

一、當$\lambda=\sin^2\theta$時，$4x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$(重根)。

定理 4.1.1：

當$\lambda=\sin^2\theta$，且$\dfrac{1}{2}\leq s_1\leq 1$時，數列$\langle s_m\rangle$收斂，$\lim\limits_{m\to\infty}s_m=\dfrac{1}{2}$。

證明：

(1)當$s_1=\dfrac{1}{2}$時，$s_m=\dfrac{1}{2}$，$\forall m\in N$，故$\lim\limits_{m\to\infty}s_m=\dfrac{1}{2}$。

(2)當$\dfrac{1}{2}<s_1\leq 1$時，$s_{m+1}=\dfrac{(4\cos^2\theta-1+\lambda)s_m-1+\lambda}{(4\cos^2\theta)s_m-1+\lambda}=\dfrac{3s_m-1}{4s_m-1}$，$s_{m+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3s_m-1}{4s_m-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{s_m-\frac{1}{2}}{4s_m-1}$，

取倒數得$\dfrac{1}{s_{m+1}-\frac{1}{2}}=\dfrac{4s_m-1}{s_m-\frac{1}{2}}=4+\dfrac{1}{s_m-\frac{1}{2}}$，令$b_m=\dfrac{1}{s_m-\frac{1}{2}}$，則$b_{m+1}=b_m+4$，即$\langle b_m\rangle$形成一個首項為$b_1=\dfrac{1}{s_1-\frac{1}{2}}$，公差為 4 的等差數列，$b_m=b_1+4(m-1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{s_m-\frac{1}{2}}=\frac{1}{s_1-\frac{1}{2}}+4(m-1)=\frac{1+4(m-1)(s_1-\frac{1}{2})}{s_1-\frac{1}{2}}$$，取倒數得$s_m-\dfrac{1}{2}=\dfrac{s_1-\frac{1}{2}}{1+4(m-1)(s_1-\frac{1}{2})}$

$$\Rightarrow s_m=\frac{1}{2}+\frac{s_1-\frac{1}{2}}{1+4(m-1)(s_1-\frac{1}{2})}$$。此時$\lim\limits_{m\to\infty}s_m=\dfrac{1}{2}$。◆

接下來我們要證明：當跑者出發的位置與頂點A_2的距離小於$\dfrac{1}{2}$時，他會在某個邊上因為無法跑切線而停住。考慮$0\leq s_1=\dfrac{1}{2}-p<\dfrac{1}{2}$，$0<p\leq\dfrac{1}{2}$。則跑者的動線為

$B_1(s_1)\to B_2(\dfrac{3s_1-1}{4s_1-1})\to B_3(\dfrac{5s_1-2}{8s_1-3})\to B_4(\dfrac{7s_1-3}{12s_1-5})\to \cdots$，得到

$B_1(\dfrac{1}{2}-p)\to B_2(\dfrac{1}{2}-\dfrac{p}{1-4p})\to B_3(\dfrac{1}{2}-\dfrac{p}{1-8p})\to B_4(\dfrac{1}{2}-\dfrac{p}{1-12p})\to \cdots$。

引理 4.1.2：

設 $B_m(\frac{1}{2}-z_m)$，$m\geq 1$，則 $z_m=\dfrac{p}{1-4(m-1)p}$。

證明:

當 $m=1$ 時，$\dfrac{p}{1-4(1-1)p}=p=z_1$，所以 $m=1$ 時成立。設 $m=k$ 時成立， 即 $z_k=\dfrac{p}{1-4(k-1)p}$。

當 $m=k+1$ 時，$z_{k+1}=\dfrac{z_k}{1-4z_k}=\dfrac{\dfrac{p}{1-4(k-1)p}}{1-4\cdot\dfrac{p}{1-4(k-1)p}}=\dfrac{p}{1-4kp}=\dfrac{1}{1-4\left[(k+1)-1\right]p}$。所以 $m=k+1$ 時亦成立，故由數學歸納法得證。 ◆

從規則模式得: 若 $z_m\geq\frac{1}{4}$，則停在 B_m。定理 4.1.3 告訴我們：對於 $0<p\leq\frac{1}{2}$，跑者都會因為無法跑切線而停在 B_m 中的某一點，而 B_m 落在線段 $\overline{A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n}A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}}$ 上。

定理 4.1.3：

定義數列 $\langle a_m\rangle$：$a_0=\dfrac{1}{2}$，$a_m=\dfrac{1}{4m}$，$m\geq 1$，則 $p=a_0=\dfrac{1}{2}$ 時，停在 B_1；$a_m\leq p<a_{m-1}$ 時，停在 B_m。

證明:

$m=1$ 時，$a_1\leq p<a_0$，停在 B_1；$m\geq 2$ 時，若 $a_m\leq p<a_{m-1}$，則

$$\frac{1}{4m}\leq p<\frac{1}{4(m-1)}\Rightarrow\frac{m-1}{m}\leq 4(m-1)p<1\Rightarrow 1-\frac{m-1}{m}\geq 1-4(m-1)p>0$$

$$\Rightarrow mp\leq\frac{p}{1-4(m-1)p}=z_m\Rightarrow z_m\geq m\cdot\frac{1}{4m}=\frac{1}{4}$$，停在 B_m。 ◆

二、當 $\sin^2\theta<\lambda<1$ 時，設 $(4\cos^2\theta)x^2-(4\cos^2\theta)x+1-\lambda=0$ 的兩根為 $\alpha=\dfrac{\cos\theta-\sqrt{\lambda-\sin^2\theta}}{2\cos\theta}$，

$\beta=\dfrac{\cos\theta+\sqrt{\lambda-\sin^2\theta}}{2\cos\theta}$，令 $v=\dfrac{\beta}{\alpha}$，則 $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=\dfrac{1-\lambda}{4\cos^2\theta}$，$v>1$，$\dfrac{1}{\alpha}=v+1$。

定理 4.2.1：

當 $\sin^2\theta<\lambda<1$，且 $\alpha\leq s_1\leq 1$ 時，數列 $\langle s_m\rangle$ 收斂。(1)當 $s_1=\alpha$ 時，$\lim\limits_{m\to\infty}s_m=\alpha$。

(2)當 $\alpha<s_1\leq 1$ 時，$\lim\limits_{m\to\infty}s_m=\beta$。

證明：

(1)當 $s_1=\alpha$ 時，$s_m=\alpha$，$\forall m\in N$，故 $\lim\limits_{m\to\infty}s_m=\alpha$。

(2)當 $s_1=\beta$ 時，$s_m=\beta$，$\forall m\in N$，故 $\lim_{m\to\infty}s_m=\beta$。

當 $\alpha<s_1<\beta$ 或 $\beta<s_1\le 1$ 時，

$$s_{m+1}-\alpha=\frac{(4\cos^2\theta-1+\lambda)s_m-1+\lambda}{(4\cos^2\theta)s_m-1+\lambda}-\alpha=\frac{(4\cos^2\theta-1+\lambda-4\cos^2\theta\cdot\alpha)(s_m-\alpha)}{(4\cos^2\theta)s_m-1+\lambda}$$

$$=\frac{4\cos^2\theta\cdot(\alpha-1)^2(s_m-\alpha)}{(4\cos^2\theta)s_m-1+\lambda}=\frac{4\cos^2\theta\cdot\beta^2(s_m-\alpha)}{(4\cos^2\theta)s_m-1+\lambda}，$$

同理，$s_{m+1}-\beta=\dfrac{4\cos^2\theta\cdot\alpha^2(s_m-\beta)}{(4\cos^2\theta)s_m-1+\lambda}$，兩式相除得 $\dfrac{s_{m+1}-\alpha}{s_{m+1}-\beta}=v^2\cdot\dfrac{s_m-\alpha}{s_m-\beta}$，即 $\left\langle\dfrac{s_m-\alpha}{s_m-\beta}\right\rangle$ 形成一個公比為 $r=v^2>1$ 的等比數列。

由 $\dfrac{s_m-\alpha}{s_m-\beta}=\dfrac{s_1-\alpha}{s_1-\beta}\cdot r^{m-1}\Rightarrow s_m=\beta+\dfrac{(s_1-\beta)(\beta-\alpha)}{(s_1-\alpha)r^{m-1}-(s_1-\beta)}$。此時 $\lim_{m\to\infty}s_m=\beta$。◆

註：由研究一和研究二，此時每個邊上都有兩個收斂點 $B_q{}'$ 與 $B_q{}''$ 分別和 $A_{q(1-\left[\frac{q}{n}\right])+1}$ 距離 β 與 α，其中 $q=1,2,3,\cdots,n$。

接下來我們要證明：當跑者出發的位置與頂點 A_2 的距離小於 α 時，他會在某個邊上因為無法跑切線而停住。考慮 $0\le s_1=\alpha-p<\alpha$，$0<p\le\alpha$，則跑者的動線為

$$B_1(\alpha-p)\to B_2\left(\alpha-\frac{v^2p}{1-(v+1)\cdot\frac{v^2-1}{v-1}p}\right)\to B_3\left(\alpha-\frac{v^4p}{1-(v+1)\cdot\frac{v^4-1}{v-1}p}\right)\to\cdots。$$

引理 4.2.2：

設 $B_m(\alpha-z_m)$，$m\ge 1$，則 $z_m=\dfrac{v^{2(m-1)}p}{1-(v+1)\cdot\frac{v^{2(m-1)}-1}{v-1}p}$。

證明：

當 $m=1$ 時，$\dfrac{v^{2(1-1)}p}{1-(v+1)\cdot\frac{v^{2(1-1)}-1}{v-1}p}=p=z_1$，所以 $m=1$ 時成立。

設 $m=k$ 時成立， 即 $z_k=\dfrac{v^{2(k-1)}p}{1-(v+1)\cdot\frac{v^{2(k-1)}-1}{v-1}p}$，

當 $m=k+1$ 時，$z_{k+1}=\dfrac{v^2 z_k}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^2-1}{v-1}z_k}=\dfrac{v^2\dfrac{v^{2(k-1)}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{2(k-1)}-1}{v-1}p}}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^2-1}{v-1}\cdot\dfrac{v^{2(k-1)}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{2(k-1)}-1}{v-1}p}}$

$=\dfrac{v^{2(k+1-1)}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{2(k+1-1)}-1}{v-1}p}$，所以 $n=k+1$ 時亦成立，故由數學歸納法得證。◆

從規則模式得: 若 $\alpha-z_m\le\dfrac{1-\lambda}{4\cos^2\theta}=\alpha-\alpha^2$，即 $z_m\ge\alpha^2=\dfrac{1}{(v+1)^2}$ 時，則停在 B_m。定理 4.2.3 告訴我們：對於 $0<p\le\alpha=\dfrac{1}{v+1}$，跑者都會因為無法跑切線而停在 B_m 中的某一點。

定理 4.2.3：

定義數列 $\langle a_m\rangle$：$a_0=\alpha=\dfrac{1}{v+1}$，$a_m=\dfrac{v-1}{(v+1)(v^{2m}-1)}$，$m\ge1$，則 $p=a_0=\alpha=\dfrac{1}{v+1}$ 時，停在 B_1；$a_m\le p<a_{m-1}$ 時，停在 B_m。

證明:

當 $m=1$ 時，若 $a_1\le p<a_0\Rightarrow\dfrac{1}{(v+1)^2}\le p<\dfrac{1}{v+1}$，停在 B_1；

當 $m\ge2$ 時，若 $a_m\le p<a_{m-1}\Rightarrow\dfrac{v-1}{(v+1)(v^{2m}-1)}\le p<\dfrac{v-1}{(v+1)(v^{2m-2}-1)}$

$$\Rightarrow 1-\frac{v^{2m-2}-1}{v^{2m}-1}\ge1-(v+1)\frac{v^{2m-2}-1}{v-1}p>0\Rightarrow\frac{v^{2m}-1}{v^{2m-2}(v^2-1)}\cdot v^{2m-2}p\le\frac{v^{2m-2}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{2(m-1)}-1}{v-1}}=z_m$$

$\Rightarrow z_m\ge\dfrac{1}{(v+1)^2}$，故停在 B_m。◆

三、當 $0<\lambda<\sin^2\theta$ 時。

定理 4.3：

當 $0<\lambda<\sin^2\theta$ 時，沒有收斂點。即跑者不論從哪一點起跑，都會在某一個邊停住。

證明:

由 $0<\lambda<\sin^2\theta$ 得 $\cos^2\theta-1+\lambda=\lambda-\sin^2\theta<0$。

$s_{m+1}-s_m=\dfrac{(4\cos^2\theta-1+\lambda)s_m-1+\lambda}{(4\cos^2\theta)s_m-1+\lambda}-s_m=\dfrac{4\cos^2\theta\cdot s_m(1-s_m)-1+\lambda}{4\cos^2\theta\cdot s_m-1+\lambda}$，由算幾不等式得

$s_m(1-s_m)\le\frac{1}{4}$，故分子為 $4\cos^2\theta\cdot s_m(1-s_m)-1+\lambda\le\cos^2\theta-1+\lambda<0$。由 $s_m>\frac{1-\lambda}{4\cos^2\theta}$ 得分母 $4\cos^2\theta\cdot s_m-1+\lambda>0$，所以 $s_{m+1}-s_m<0$，即 $\langle s_m\rangle$ 為遞減數列。若 $\langle s_m\rangle$ 有下界，則由實數的完備性知：$\langle s_m\rangle$ 收斂，令 $\lim\limits_{m\to\infty}s_m=\lim\limits_{m\to\infty}s_{m+1}=s\in R$，得到 $s=\frac{(4\cos^2\theta-1+\lambda)s-1+\lambda}{4\cos^2\theta\cdot s-1+\lambda}$

$\Rightarrow(4\cos^2\theta)s^2-4\cos^2\theta\cdot s+1-\lambda=0$，但此方程式無實根，矛盾。因此 $\langle s_m\rangle$ 無下界，存在足夠大的 m 使 $s_m\le\frac{1-\lambda}{4\cos^2\theta}$，此時即停住無法再跑切線。 ◆

伍、研究結果

一、公園與綠地為相似的正三角形，公園邊長為 1，綠地邊長為 λ，$0<\lambda<1$。

$\alpha=\frac{3-\sqrt{12\lambda-3}}{6}$，$\beta=\frac{3+\sqrt{12\lambda-3}}{6}$。

其他分類 / 形狀	λ 的範圍	每個邊上的收斂點個數	每個邊上的收斂點與頂點 K、H、O 距離 x 所滿足的方程式	會停住的起跑位置範圍
正三角形	$\frac{1}{4}<\lambda<1$	2	$3x^2-3x+1-\lambda=0$	$0\le s_1<\alpha$
	$\lambda=\frac{1}{4}$	1	$4x^2-4x+1=0$	$0\le s_1<\frac{1}{2}$
	$0<\lambda<\frac{1}{4}$	0	無	$0\le s_1\le 1$

二、公園與綠地為相似的任意三角形，公園三邊長分別為 $\overline{OK'}$、$\overline{K'H}$、$\overline{HO}=1$，綠地邊長為公園邊長的 λ 倍，$0<\lambda<1$。$\alpha=\frac{3-\sqrt{12\lambda-3}}{6}$，$\beta=\frac{3+\sqrt{12\lambda-3}}{6}$，$s_1=\frac{\overline{A_1K'}}{\overline{OK'}}$。

其他分類 / 形狀	λ 的範圍	每個邊上的收斂點個數	會停住的起跑位置範圍
任意三角形	$\frac{1}{4}<\lambda<1$	2	$0\le s_1<\alpha$
	$\lambda=\frac{1}{4}$	1	$0\le s_1<\frac{1}{2}$
	$0<\lambda<\frac{1}{4}$	0	$0\le s_1\le 1$

三、公園與綠地為相似的正 n 邊形，$n\ge 4$。公園邊長為 1，綠地邊長為 λ，$0<\lambda<1$。

每個內角為2θ，$\theta=90^\circ-\dfrac{180^\circ}{n}$。$\alpha=\dfrac{\cos\theta-\sqrt{\lambda-\sin^2\theta}}{2\cos\theta}$，$\beta=\dfrac{\cos\theta+\sqrt{\lambda-\sin^2\theta}}{2\cos\theta}$。

其他分類 / 形狀	λ的範圍	每個邊上的收斂點個數	每個邊上的收斂點與頂點A_k距離x所滿足的方程式，$k=1，2，\cdots，n$。	會停住的起跑位置範圍
正n邊形	$\sin^2\theta<\lambda<1$	2	$(4\cos^2\theta)x^2-(4\cos^2\theta)x+1-\lambda=0$	$0\le s_1<\alpha$
	$\lambda=\sin^2\theta$	1	$4x^2-4x+1=0$	$0\le s_1<\dfrac{1}{2}$
	$0<\lambda<\sin^2\theta$	0	無	$0\le s_1\le 1$

陸、 討論與應用

一、討論：

如果我們將這篇研究的條件更改如下：在正n邊形的公園與綠地中，跑者從線段$\overline{A_1A_2}$上任一點B_1出發，若對某個$m\ge 1$，直線$B_mP_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}$不平行直線$A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+2}$，則跑向$P_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}$或反方向到直線$A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+2}$上一點$B_{m+1}$；若直線$B_mP_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}$平行直線$A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+2}$，則視作跑到射線$\overrightarrow{A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+2}A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}}$上無限遠的地方$B_{m+1}$，再由$B_{m+1}$跑經$P_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+2}$到直線$A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+2}A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+3}$上一點$B_{m+2}$。重複此步驟，經過多次移動後，結果會如何？

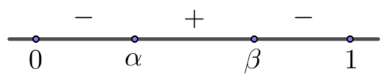
(一)在研究二中，數列$\langle s_n\rangle$滿足$s_{n+1}=\dfrac{(2+\lambda)s_n-1+\lambda}{3s_n-1+\lambda}$，

$s_{n+1}-s_n=\dfrac{(2+\lambda)s_n-1+\lambda}{3s_n-1+\lambda}-s_n=-\dfrac{3s_n^2-3s_n+1-\lambda}{3s_n-1+\lambda}$，分子判別式$D=9-12(1-\lambda)=3(4\lambda-1)$。

1.當$\dfrac{1}{4}<\lambda<1$時，設方程式$3s_n^2-3s_n+1-\lambda=0$的兩根為$\alpha=\dfrac{3-\sqrt{12\lambda-3}}{6}$，$\beta=\dfrac{3+\sqrt{12\lambda-3}}{6}$，

則$s_{n+1}-s_n=-\dfrac{3(s_n-\alpha)(s_n-\beta)}{3s_n-1+\lambda}$，$\dfrac{1-\lambda}{3}<s_1\le 1$。

(1)當$s_1=\alpha$時，$s_n=\alpha$，$\forall n\in N$。



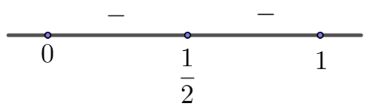
(2)當$s_1=\beta$時，$s_n=\beta$，$\forall n\in N$。

(3)當$\alpha<s_n<\beta$時，$s_{n+1}>s_n$，$\langle s_n\rangle$遞增收斂到β；當$s_n>\beta$時，$s_{n+1}<s_n$，$\langle s_n\rangle$遞減收斂到β。

(4)當$s_n<\alpha$時，$s_{n+1}<s_n$，$\langle s_n\rangle$遞減不收斂。

2.當$\lambda=\dfrac{1}{4}$時，方程式$3s_n^2-3s_n+1-\lambda=0$的兩根為重根$\dfrac{1}{2}$，$s_{n+1}-s_n=-\dfrac{4(s_n-\frac{1}{2})^2}{4s_n-1}$，$\dfrac{1}{4}<s_1\le 1$。

(1)當$s_1=\dfrac{1}{2}$時，$s_n=\dfrac{1}{2}$，$\forall n\in N$。

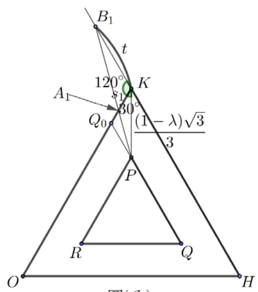


(2)當$s_n>\dfrac{1}{2}$時，$s_{n+1}<s_n$，$\langle s_n\rangle$遞減收斂到$\dfrac{1}{2}$。

(3)當$s_n<\dfrac{1}{2}$時，$s_{n+1}<s_n$，$\langle s_n\rangle$遞減不收斂。

(二)在研究二中，設直線QP交$\overline{OK}$於Q_0，則$\overline{Q_0K}=\dfrac{1-\lambda}{3}$，跑者從線段$\overline{Q_0K}$上一點$A_1$出發。

1.若$\dfrac{1}{4}<\lambda<1$：



圖(八)

(1) $0<\overline{A_1K}=s_1<\dfrac{1-\lambda}{3}$時，則反方向跑到$\overline{KH}$外一點$B_1$，$\overline{KB_1}=t$，

如圖(八)，由ΔB_1KP面積 $=\Delta B_1KA_1$面積 $+\Delta A_1KP$面積，得

$$\frac{1}{2}\times t\times\frac{(1-\lambda)\sqrt{3}}{3}\times\sin 150°=\frac{1}{2}\times t\times s_1\times\sin 120°+\frac{1}{2}\times s_1\times\frac{(1-\lambda)\sqrt{3}}{3}\times\sin 30°$$

$\Rightarrow t=\dfrac{(1-\lambda)s_1}{1-\lambda-3s_1}$，$\overline{HB_1}=s_2=1+t=\dfrac{1-\lambda-(2+\lambda)s_1}{1-\lambda-3s_1}=\dfrac{(2+\lambda)s_1-1+\lambda}{3s_1-1+\lambda}$，再由$B_1$跑經$Q$到

$\overleftrightarrow{OH}$上與O距離$s_3=\dfrac{(\lambda^2+7\lambda+1)s_1+(2\lambda^2-\lambda-1)}{(6\lambda+3)s_1+(\lambda^2+\lambda-2)}$的$C_1$，此時$\overline{C_1O}>\dfrac{1}{2}$，由定理 2.1 得：

$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\beta$。

(2) $A_1=K$時，$A_1=B_1$，直線B_1Q交$\overline{HO}$於C_1，此時$s_1=0$，$s_2=1$，由定理 2.1 得：$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\beta$。

(3) $A_1=Q_0$時，B_1視作在$\overrightarrow{HK}$無限遠的地方，直線B_1Q交$\overline{HO}$於C_1，此時數列的$s_3=\dfrac{2+\lambda}{3}$，

考慮數列$\langle s_n\rangle_{n=3}^{\infty}$，由定理 2.1 得：$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\beta$。

(4)$\dfrac{1-\lambda}{3}<\overline{A_1K}=s_1<\alpha$時，由定理 2.3 得：存在$n_0\in N$使得$n\ge n_0$時，$s_n\le\dfrac{1-\lambda}{3}$，此時由上

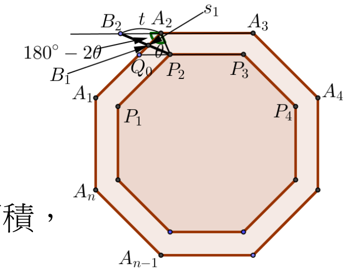
(1)、(2)或(3)也可得：$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\beta$。

2.若$\lambda=\dfrac{1}{4}$：令$\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$代入 1.中，亦可得相同的結果。

3.若$0<\lambda<\dfrac{1}{4}$：由定理 2.4 的證明，方程式$3s^2-3s+1-\lambda=0$沒有實根，所以不收斂。

(三)在研究四中，設直線 P_2P_3 交 $\overline{A_1A_2}$ 於 Q_0，則 $\overline{Q_0A_2}=\dfrac{1-\lambda}{4\cos^2\theta}$，跑者從 $\overline{Q_0A_2}$ 上一點 B_1 出發。

1.若 $\sin^2\theta<\lambda<1$：



圖(九)

(1) $0<\overline{B_1A_2}=s_1<\dfrac{1-\lambda}{4\cos^2\theta}$ 時，則反方向跑到 $\overline{A_3A_2}$ 外一點 B_2，

$\overline{A_2B_2}=t$，如圖(九)。由 $\Delta B_2A_2P_2$ 面積 $=\Delta B_2A_2B_1$ 面積 $+\Delta B_1A_2P_2$ 面積，

得 $\dfrac{1}{2}\times t\times\dfrac{1-\lambda}{2\cos\theta}\times\sin(180°-\theta)=\dfrac{1}{2}\times t\times s_1\times\sin(180°-2\theta)+\dfrac{1}{2}\times s_1\times\dfrac{1-\lambda}{2\cos\theta}\times\sin\theta$

$\Rightarrow t=\dfrac{(1-\lambda)s_1}{1-\lambda-4\cos^2\theta\cdot s_1}$，$\overline{A_3B_2}=s_2=1+t=\dfrac{(4\cos^2\theta-1+\lambda)s_1-1+\lambda}{4\cos^2\theta\cdot s_1-1+\lambda}$，

再由 B_2 跑經 P_3 到 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 上與 A_4 距離 s_3 的 B_3，由定理 4.2.1 得：$\lim\limits_{m\to\infty}s_m=\beta$。

(2) $B_1=A_2$ 時，$B_2=A_2$，直線 B_2P_3 交 $\overline{A_3A_4}$ 於 B_3，此時 $s_1=0$，$s_2=1$，由定理 4.2.1 得：$\lim\limits_{m\to\infty}s_m=\beta$。

(3) $B_1=Q_0$ 時，B_2 視作在 $\overrightarrow{A_3A_2}$ 無限遠的地方，直線 B_2P_3 交 $\overline{A_3A_4}$ 於 B_3，此時數列的

$s_3=\dfrac{4\cos^2\theta-1+\lambda}{4\cos^2\theta}$，考慮數列 $\langle s_m\rangle_{m=3}^{\infty}$，由定理 4.2.1 得：$\lim\limits_{m\to\infty}s_m=\beta$。

(4) $\dfrac{1-\lambda}{4\cos^2\theta}<\overline{B_1A_2}=s_1<\alpha$ 時，由定理 4.2.3 得：存在 $m_0\in N$ 使得 $m\geq m_0$ 時，$s_m\leq\dfrac{1-\lambda}{4\cos^2\theta}$，此時由上(1)、(2)或(3)也可得：$\lim\limits_{m\to\infty}s_m=\beta$。

2.若 $\lambda=\sin^2\theta$：令 $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$ 代入 1.中，亦可得相同的結果。

3.若 $0<\lambda<\sin^2\theta$：由定理 4.3 的證明，方程式 $(4\cos^2\theta)s^2-4\cos^2\theta\cdot s+1-\lambda=0$ 沒有實根，所以不收斂。

綜上討論：在廣義的規則中，大部分的情況都可得到收斂的結果。

二、應用：

如果有一個物體在公園和綠地這樣的環境結構中移動，每隔一段固定的時間就遵循這種跑切線(或反方向)的規則模式時，我們就可以用這篇研究的結果去預測此物體的移動位置及其收斂情況。

柒、未來展望

如果將綠地的圖形對中心點逆(或順)時針方向旋轉 δ 角度，其結果會如何？如果公園與綠地是相似的凸 n 邊形，其結果又會如何？這些都是我們未來可以繼續研究探討的部分。

捌、參考資料

一、**科學研習月刊第 57-7 期**(2018 年 10 月份)。

二、游森棚(主編)(2018)。**高中數學第二冊**。台南市：翰林。

三、游森棚(主編)(2018)。**高中數學第三冊**。台南市：翰林。

四、游森棚(主編)(2019)。**高中數學第四冊**。台南市：翰林。

五、游森棚(主編)(2017)。**高中數學甲選修下冊**。台南市：翰林。

【評語】050403

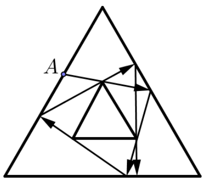
這是一個關於動態系統的題目。作者考慮正三角形(原題)、任意三角形、正 n 邊形總共三種情形。每種情形皆有一個較小的「平行擺放的相似形，且中心重合」。根據相似形與原型之間的倍率不同，作者導出依著起始點位置的不同，此動態系統可能的收斂點，或者會「停住」的位置。作品本身內容相當完整。作者可以試著計算「停住的時間點」為何？或是內部三角形作適當角度的旋轉。

作品海報

壹、研究動機

在科學研習月刊中第57-7期(2018年10月份)的「森棚教官數學教室」題目：「如圖(一)，正三角形的公園中有一個邊長爲公園邊長$\frac{1}{3}$的小正三角形綠地，公園和綠地兩者方向相同，而且中心重合。兩三角形之間爲開放空間，民眾可自由活動。小志從公園邊上的A點出發，每次都朝著綠地的頂點跑「切線」，跑到公園的另一邊的一點。然後再從這個點出發，反覆一直跑下去。圖(一)是跑了五趟之後的結果。觀察這個結構並做一些實驗。請問聰明的讀者，你能得到什麼結論？」這是一道有趣的題目，將數學與生活情境作聯結，這正好是第二冊的數列與遞迴關係式的觀念，經網路查詢之後，無相關的文獻資料，於是，我們就以這題目開始我們的研究。

貳、研究目的



圖(一)

一、探討綠地邊長爲公園邊長的$\frac{1}{3}$倍、$\frac{1}{4}$倍的情況。

二、探討綠地邊長爲公園邊長的λ倍的情況，$0<\lambda<1$。

三、探討公園與綠地是相似的任意三角形，綠地邊長爲公園邊長的λ倍的情況，$0<\lambda<1$。

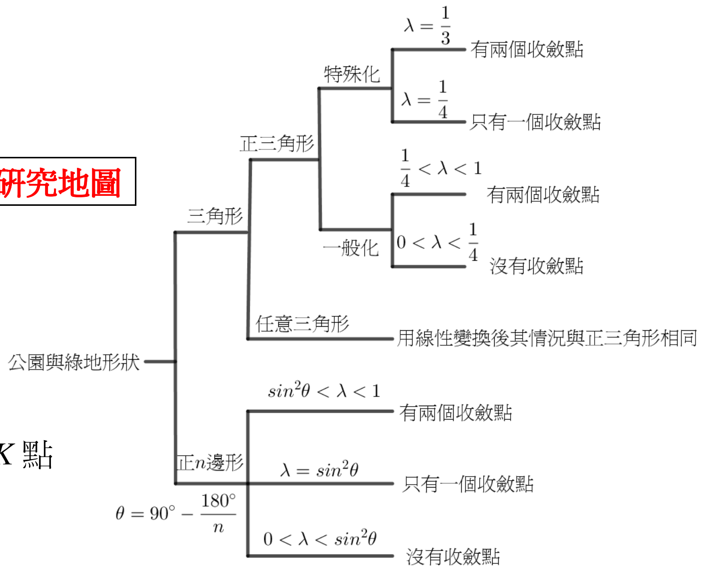
四、探討公園與綠地是相似的正n邊形，$n\ge 4$，綠地邊長爲公園邊長的λ倍的情況，$0<\lambda<1$。

參、研究設備及器材

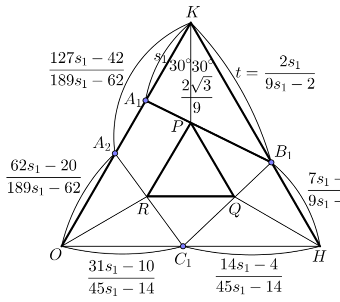
電腦、Word、Geogebra 數學繪圖軟體、紙、筆。

肆、研究過程或方法

研究地圖



研究一：$\lambda=\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$。



圖(二)

1. $\lambda=\frac{1}{3}$：如圖(二)。

設小志從$\overline{OK}$上與K點距離s_1的A_1出發，跑經P到$\overleftrightarrow{HK}$上與K點距離t的B_1，由ΔKA_1B_1面積 $=\Delta KA_1P$面積 $+\Delta KPB_1$面積，

得$\frac{1}{2}s_1t\cdot\sin 60°=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}s_1\cdot\sin 30°+\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}t\cdot\sin 30°\Rightarrow 9s_1t=2s_1+2t\Rightarrow t=\frac{2s_1}{9s_1-2}\Rightarrow\overline{HB_1}=s_2=1-t=\frac{7s_1-2}{9s_1-2}$，再跑經$Q$到$\overleftrightarrow{OH}$上與$O$距離$s_3=\frac{31s_1-10}{45s_1-14}$的$C_1$，再跑經$R$到$\overleftrightarrow{OK}$上與$K$距離$s_4=\frac{127s_1-42}{189s_1-62}$的$A_2$，如此重複。因直線$PQ$和$\overline{OK}$的交點與$K$點距離爲$\frac{2}{9}$，若$\overline{OA_n}\ge\frac{7}{9}$，則小志(跑者)因無法跑切線而停在$A_n$；若$\overline{KB_n}\ge\frac{7}{9}$，則停在$B_n$；若$\overline{HC_n}\ge\frac{7}{9}$，則停在$C_n$。設符號$A_n(x)$，$B_n(y)$，$C_n(z)$分別代表點$A_n$，$B_n$，$C_n$與點$K$，$H$，$O$的距離爲$x$，$y$，$z$。

定理 1.1.1： 當$\lambda=\frac{1}{3}$，且$\frac{1}{3}\le s_1\le 1$時，數列$\langle s_n\rangle$收斂。(1)當$s_1=\frac{1}{3}$時，$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{3}$。(2)當$\frac{1}{3}<s_1\le 1$時，$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{2}{3}$。

引理 1.1.2： 令$A_n(\frac{1}{3}-z_{3n-2})$，$B_n(\frac{1}{3}-z_{3n-1})$，$C_n(\frac{1}{3}-z_{3n})$，$n\ge 1$，則$z_{3n-2}=\frac{2^{6n-6}p}{1-3(2^{6n-6}-1)p}$，$z_{3n-1}=\frac{2^{6n-4}p}{1-3(2^{6n-4}-1)p}$，

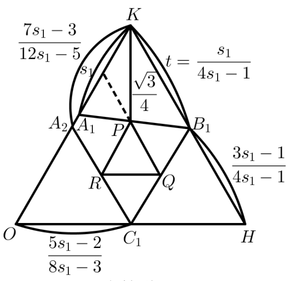
$z_{3n}=\frac{2^{6n-2}p}{1-3(2^{6n-2}-1)p}$。

定理 1.1.3： 當$\lambda=\frac{1}{3}$，且$0\le s_1<\frac{1}{3}$時，跑者會在某一個邊停住。定義數列$\langle a_n\rangle$：$a_0=\frac{1}{3}$，$a_n=\frac{1}{3(2^{2n}-1)}$，$n\ge 1$，

則$p=a_0=\frac{1}{3}$時，停在A_1；$a_{3(n-1)+1}\le p<a_{3(n-1)}$時，停在$A_n$；$a_{3(n-1)+2}\le p<a_{3(n-1)+1}$時，停在$B_n$；

$a_{3(n-1)+3}\le p<a_{3(n-1)+2}$時，停在$C_n$。

2. $\lambda=\frac{1}{4}$：如圖(三)。



圖(三)

定理 1.2.1： 當$\lambda=\frac{1}{4}$，且$\frac{1}{2}\le s_1\le 1$時，數列$\langle s_n\rangle$收斂，$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{2}$。

引理 1.2.2： 令$A_n(\frac{1}{2}-z_{3n-2})$，$B_n(\frac{1}{2}-z_{3n-1})$，$C_n(\frac{1}{2}-z_{3n})$，$n\ge 1$，則$z_{3n-2}=\frac{p}{1-4(3n-3)p}$，

$z_{3n-1}=\frac{p}{1-4(3n-2)p}$，$z_{3n}=\frac{p}{1-4(3n-1)p}$。

定理 1.2.3： 當$\lambda=\frac{1}{4}$，且$0\le s_1<\frac{1}{2}$時，跑者會在某一個邊停住。定義數列$\langle a_n\rangle$：$a_0=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{1}{4n}$，$n\ge 1$，則$p=a_0=\frac{1}{2}$時，停在A_1；$a_{3(n-1)+1}\le p<a_{3(n-1)}$時，停在$A_n$；$a_{3(n-1)+2}\le p<a_{3(n-1)+1}$時，停在$B_n$；$a_{3(n-1)+3}\le p<a_{3(n-1)+2}$時，停在$C_n$。

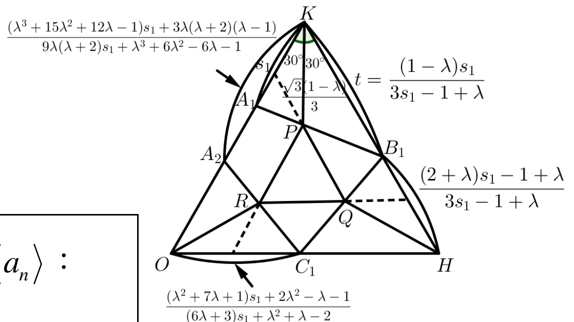
研究二：$0<\lambda<1$。

設跑者從$\overline{OK}$上與K距離s_1的A_1出發，跑經P到$\overline{HK}$上與H點距離爲$s_2=\dfrac{(2+\lambda)s_1-1+\lambda}{3s_1-1+\lambda}$的$B_1$，如圖(四)，設$3x^2-3x+1-\lambda=0$的兩根爲$\alpha=\dfrac{3-\sqrt{12\lambda-3}}{6}$、$\beta=\dfrac{3+\sqrt{12\lambda-3}}{6}$，令$v=\dfrac{\beta}{\alpha}$，則$\alpha+\beta=1$，$\dfrac{1}{\alpha}=v+1$。

定理 2.1：當$\dfrac{1}{4}\le\lambda<1$，且$\alpha\le s_1\le 1$時，數列$\langle s_n\rangle$收斂。(1)若$s_1=\alpha$，則$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\alpha$。(2)若$\alpha<s_1\le 1$，則$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\beta$。

引理 2.2：設$A_n(\alpha-z_{3n-2})$，$B_n(\alpha-z_{3n-1})$，$C_n(\alpha-z_{3n})$，$n\ge 1$，$v\ne 1$，則

$$z_{3n-2}=\frac{v^{6n-6}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6n-6}-1}{v-1}p},\quad z_{3n-1}=\frac{v^{6n-4}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6n-4}-1}{v-1}p},\quad z_{3n}=\frac{v^{6n-2}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{6n-2}-1}{v-1}p}。$$



圖(四)

定理 2.3：當$\dfrac{1}{4}\le\lambda<1$，且$0\le s_1<\alpha=\dfrac{1}{v+1}$時，跑者會在某一個邊停住。當$v\ne 1$時，定義數列$\langle a_n\rangle$：

$a_0=\alpha=\dfrac{1}{v+1}$，$a_n=\dfrac{v-1}{(v+1)(v^{2n}-1)}$，$n\ge 1$，則$p=a_0=\alpha=\dfrac{1}{v+1}$時，停在$A_1$；$a_{3(n-1)+1}\le p<a_{3(n-1)}$時，停在$A_n$；$a_{3(n-1)+2}\le p<a_{3(n-1)+1}$時，停在$B_n$；$a_{3(n-1)+3}\le p<a_{3(n-1)+2}$時，停在$C_n$。

定理 2.4：當$0<\lambda<\dfrac{1}{4}$時，沒有收斂點。即跑者不論從哪一點起跑，都會在某一個邊停住。

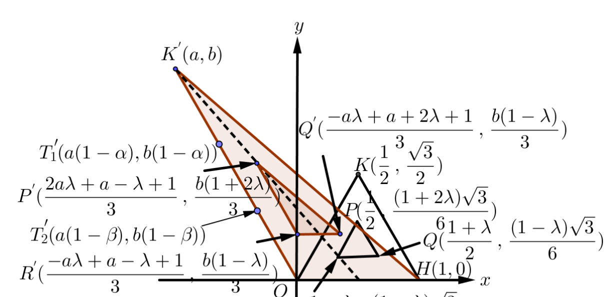
研究三：一般的三角形。

設$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$爲坐標平面上相異兩點，二階方陣$M=\begin{bmatrix}p&q\\r&s\end{bmatrix}$，$\det(M)\ne 0$。若$P(x,y)$爲$\overline{AB}$上任一點，則$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

$=(x_1+t(x_2-x_1),y_1+t(y_2-y_1))$，$0\le t\le 1$。今以$M$將$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x,y)$分別變換到$C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，$Q(x',y')$，則$\begin{bmatrix}x_3\\y_3\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$，

$\begin{bmatrix}x_4\\y_4\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$，且$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}x_1+(x_2-x_1)t\\y_1+(y_2-y_1)t\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+tM\begin{bmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{bmatrix}$，即$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{CD}$，故$P$點也變換到$\overline{CD}$上一點$Q$，且$\dfrac{\overline{CQ}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=t$。

因此，線性變換將線段變換到線段，且線段上的點保持原來的相對順序與比例。



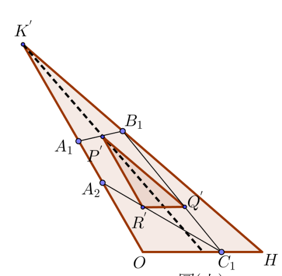
圖(五)

今將邊長爲 1 的正三角形公園KOH置於坐標平面上，使$O(0,0)$，$H(1,0)$，$K(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$。

設$M=\begin{bmatrix}p&q\\r&s\end{bmatrix}$將$H(1,0)$變換到$H(1,0)$，將$K(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$變換到$K'(a,b)$，則$M=\begin{bmatrix}1&\dfrac{2a-1}{\sqrt{3}}\\0&\dfrac{2b}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$。

邊長爲λ的正三角形綠地三頂點爲$P(\dfrac{1}{2},\dfrac{(1+2\lambda)\sqrt{3}}{6})$，$Q(\dfrac{1+\lambda}{2},\dfrac{(1-\lambda)\sqrt{3}}{6})$，$R(\dfrac{1-\lambda}{2},\dfrac{(1-\lambda)\sqrt{3}}{6})$，

$0<\lambda<1$，M將P、Q、R分別變換到$P'(\dfrac{2a\lambda+a-\lambda+1}{3},\dfrac{(1+2\lambda)b}{3})$，$Q'(\dfrac{-a\lambda+a+2\lambda+1}{3},\dfrac{(1-\lambda)b}{3})$，

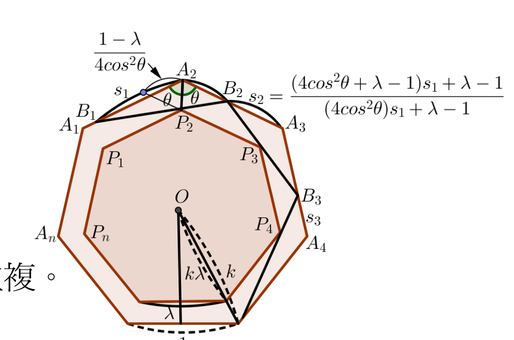


圖(六)

$R'(\dfrac{-a\lambda+a-\lambda+1}{3},\dfrac{(1-\lambda)b}{3})$，$M$將$\overline{OK}$上的收斂點$T_1(\dfrac{1-\alpha}{2},\dfrac{(1-\alpha)\sqrt{3}}{2})$、$T_2(\dfrac{1-\beta}{2},\dfrac{(1-\beta)\sqrt{3}}{2})$分別變換到$T_1'(a(1-\alpha),b(1-\alpha))$，$T_2'(a(1-\beta),b(1-\beta))$，其中$\alpha=\dfrac{3-\sqrt{12\lambda-3}}{6}$、$\beta=\dfrac{3+\sqrt{12\lambda-3}}{6}$爲研究二中方程式$3x^2-3x+1-\lambda=0$的兩根；此時$\Delta OHK'$的重心爲$(\dfrac{a+1}{3},\dfrac{b}{3})$，$\Delta P'Q'R'$的重心爲$(\dfrac{a+1}{3},\dfrac{b}{3})$，故公園和綠地經$M$變換後，重心仍爲同一點，如下圖(五)。在變換後的三角形$K'OH$中，跑者從$\overline{OK'}$上一點A_1出發，跑經P'到$\overline{K'H}$上一點B_1，再跑經Q'到$\overline{HO}$上一點C_1，再跑經R'到$\overline{OK'}$上一點A_2，如此重複，如圖(六)。在研究二之中的相對收斂位置及其性質，在此研究三之中也都會成立。

研究四：正 n 邊形，$n\ge 4$，$0<\lambda<1$。

設正n邊形公園$A_1A_2A_3\cdots A_n$邊長爲 1，每個內角2θ，正n邊形綠地$P_1P_2P_3\cdots P_n$邊長爲λ，$0<\lambda<1$，如圖(七)。跑者從$\overline{A_1A_2}$上與A_2距離s_1的B_1出發，跑經P_2到$\overrightarrow{A_2A_3}$上與A_2距離t的B_2。



圖(七)

設$\overline{OA_2}=k$，則$k=\dfrac{1}{2\cos\theta}$，$\overline{A_2P_2}=k-k\lambda=\dfrac{1-\lambda}{2\cos\theta}$，再跑經$P_3$到$\overrightarrow{A_3A_4}$上與$A_4$距離$s_3$的$B_3$，如此重複。

在過程中，若$\overline{A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n}B_m}\ge\dfrac{4\cos^2\theta-1+\lambda}{4\cos^2\theta}$，則停在$B_m$。若$m$爲$n$的整數倍時，符號$A_0$代表點$A_n$。

設 $B_m(s_m)$ 代表點 B_m 與點 $A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}$ 的距離爲 s_m，則 $s_{m+1}=\dfrac{(4\cos^2\theta-1+\lambda)s_m-1+\lambda}{(4\cos^2\theta)s_m-1+\lambda}$，令 $x=\dfrac{(4\cos^2\theta-1+\lambda)x-1+\lambda}{(4\cos^2\theta)x-1+\lambda}$

$\Rightarrow (4\cos^2\theta)x^2-(4\cos^2\theta)x+1-\lambda=0$。判別式 $D=16\cos^2\theta(\cos^2\theta-1+\lambda)$。

1.當 $\lambda=\sin^2\theta$ 時，方程式 $4x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$(重根)。

定理 4.1.1 : 當 $\lambda=\sin^2\theta$，且 $\dfrac{1}{2}\le s_1\le 1$ 時，數列 $\langle s_m\rangle$ 收斂，$\lim\limits_{m\to\infty} s_m=\dfrac{1}{2}$。

引理 4.1.2 : 設 $B_m(\dfrac{1}{2}-z_m)$，$m\ge 1$，則 $z_m=\dfrac{p}{1-4(m-1)p}$。

定理 4.1.3 : 定義數列 $\langle a_m\rangle$：$a_0=\dfrac{1}{2}$，$a_m=\dfrac{1}{4m}$，$m\ge 1$，則 $p=a_0=\dfrac{1}{2}$ 時，停在 B_1；$a_m\le p<a_{m-1}$ 時，停在 B_m。

2.當 $\sin^2\theta<\lambda<1$ 時，若 $(4\cos^2\theta)x^2-(4\cos^2\theta)x+1-\lambda=0$ 的兩根 $\beta>\alpha>0$，令 $v=\dfrac{\beta}{\alpha}>1$，則 $\alpha+\beta=1$，$\dfrac{1}{\alpha}=v+1$。

定理 4.2.1 : 當 $\sin^2\theta<\lambda<1$，且 $\alpha\le s_1\le 1$ 時。(1)若 $s_1=\alpha$，則 $\lim\limits_{m\to\infty} s_m=\alpha$。(2)若 $\alpha<s_1\le 1$，則 $\lim\limits_{m\to\infty} s_m=\beta$。

引理 4.2.2 : 設 $B_m(\alpha-z_m)$，$m\ge 1$，則 $z_m=\dfrac{v^{2(m-1)}p}{1-(v+1)\cdot\dfrac{v^{2(m-1)}-1}{v-1}p}$。

定理 4.2.3 : 定義數列 $\langle a_m\rangle$：$a_0=\dfrac{1}{v+1}$，$a_m=\dfrac{v-1}{(v+1)(v^{2m}-1)}$，$m\ge 1$，則 $p=a_0$ 時，停在 B_1；$a_m\le p<a_{m-1}$ 時，停在 B_m。

3.當 $0<\lambda<\sin^2\theta$ 時。

定理 4.3 : 當 $0<\lambda<\sin^2\theta$ 時，沒有收斂點。即跑者不論從哪一點起跑，都會在某一個邊停住。

伍、研究結果

公園與綠地爲相似的正 n 邊形，$n\ge 3$。公園邊長爲 1，綠地邊長爲公園邊長的 λ 倍，$0<\lambda<1$。每個內角爲 2θ，

$\theta=90^\circ-\dfrac{180^\circ}{n}$。$\alpha=\dfrac{\cos\theta-\sqrt{\lambda-\sin^2\theta}}{2\cos\theta}$，$\beta=\dfrac{\cos\theta+\sqrt{\lambda-\sin^2\theta}}{2\cos\theta}$。

形狀＼其他分類	λ 的範圍	每邊收斂點個數	每邊收斂點與頂點距離 x 滿足的方程式	會停住的起跑位置範圍
正 n 邊形	$\sin^2\theta<\lambda<1$	2	$(4\cos^2\theta)x^2-(4\cos^2\theta)x+1-\lambda=0$	$0\le s_1<\alpha$
	$\lambda=\sin^2\theta$	1	$4x^2-4x+1=0$	$0\le s_1<\dfrac{1}{2}$
	$0<\lambda<\sin^2\theta$	0	無	$0\le s_1\le 1$

陸、討論與應用

一、討論：

若將這篇研究的條件更改如下：在正 n 邊形的公園與綠地中，跑者從 $\overline{A_1A_2}$ 上任一點 B_1 出發，若對某個 $m\ge 1$，直線 $B_mP_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}$ 不平行直線 $A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+2}$，則跑向 $P_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}$ 或反方向到直線 $A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+2}$ 上一點 B_{m+1}；若直線 $B_mP_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}$ 平行直線 $A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+2}$，則視作跑到射線 $\overrightarrow{A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+2}A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+1}}$ 上無限遠的地方 B_{m+1}，再由 B_{m+1} 跑經 $P_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+2}$ 到直線 $A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+2}A_{m-\left[\frac{m}{n}\right]n+3}$ 上一點 B_{m+2}。重複此步驟，經過多次移動後，結果會如何？

二、應用：

如果有一個物體在公園和綠地這樣的環境結構中移動，每隔一段固定的時間就遵循這種跑切線(或反方向)的規則模式時，我們就可以用這篇研究的結果去預測此物體的移動位置及其收斂情況。

柒、未來展望

如果將綠地的圖形對中心點逆(或順)時針方向旋轉 δ 角度，其結果會如何？如果公園與綠地是相似的凸 n 邊形，其結果又會如何？這些都是我們未來可以繼續研究探討的部分。

捌、參考資料

一、**科學研習月刊第 57-7 期**(2018 年 10 月份)。

二、游森棚(主編)(2018)。**高中數學第二冊**。台南市：翰林。

三、游森棚(主編)(2018)。**高中數學第三冊**。台南市：翰林。

四、游森棚(主編)(2019)。**高中數學第四冊**。台南市：翰林。

五、游森棚(主編)(2017)。**高中數學甲選修下冊**。台南市：翰林。