

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國中組 生活與應用科學(一)科

第三名

032813

M.C-Escher 極限圖的結構解析與實務研究

學校名稱：新竹市立光華國民中學

作者： 國二 蕭鼎霖 國二 陳裕達	指導老師： 蕭慶利
---------------------------------	------------------

關鍵詞：M.C-Escher、極限圖、碎形

摘要

本研究主要是對 M.C-Escher 手繪的各種極限圖(帶狀極限圖、正方形極限圖以及圓極限圖)進行結構解析，並探討其背後的理論與方法，運用本研究的理論方法、結構解析與格線系統，在適當軟體支援下，將可以輕鬆作出富有創意且可完全密鋪的動物磁磚圖樣。我們也利用雷射切割機將本研究設計的正方形極限圖產出拼圖板，而本拼圖板可有數種不同玩法；本研究亦可應用於跨領域教學(藝術人文、資訊、數學)、建築設計、科普玩具及相關創意設計圖。

壹、研究動機

荷蘭籍藝術家 M.C. Escher 是二十世紀著名的平面錯覺藝術大師，在一次美術課堂中，老師簡單的介紹了 M.C-Escher 的手繪畫作，其中有一幅極限圖(如下圖所示)，其結構不僅對稱、美麗，而且還具備了某些神祕的氣息，似乎隱藏著一些規律的數學性質。這一幅畫作也深深的吸引著我們；碰巧上學期的專題課中，數學老師介紹了一套數學軟體，可以用於繪製碎形，在搜尋了相關的資料後，我們決定對 M.C-Escher 的極限圖進行結構解析，運用所研發的理論，並且配合相關軟體進行實作。



M.C-Escher 正方形極限圖

貳、研究目的

1. 將 M.C-Escher 帶狀極限圖進行結構解析與實作，並探討其設計法與相關性質
2. 將 M.C-Escher 正方形極限圖進行結構解析與實作，並探討其設計法與相關性質
3. 將 M.C-Escher 正方形極限圖進行推廣與創作，研發相關發散型拼貼圖與格線系統
4. 將 M.C-Escher 圓極限圖進行結構解析與實作，並探討其相關數學性質
5. 運用各種結構解析方法，進行 M.C-Escher 圓極限圖創作，並將本研究成果產出成品

參、研究設備與器材

AMA2.0、電腦、紙、筆

肆、研究過程

一、文獻探討

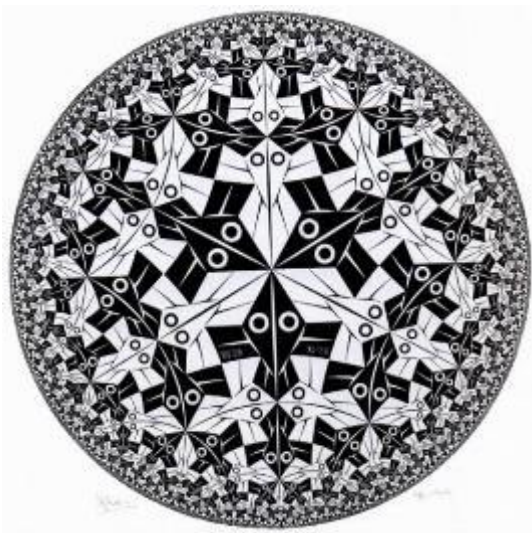
在 M.C-Escher 的官方網站(<http://www.mcescher.com>)中，有著許多動物、昆蟲的碎形拼貼圖，大部分是毫無規律的，但有其中一張帶狀極限圖、一張正方形極限圖、四張圓極限圖中隱藏著特殊的對稱性，似乎具備著某些數學特性(如下列圖示)，由於是 M.C-Escher 的手繪畫作，所以不難看出其圖形上昆蟲動物間的手繪誤差。



帶狀極限圖-蜥蜴



正方形極限圖(Square Limit)-魚



Escher Circle Limit I



Escher Circle Limit II



Escher Circle Limit III



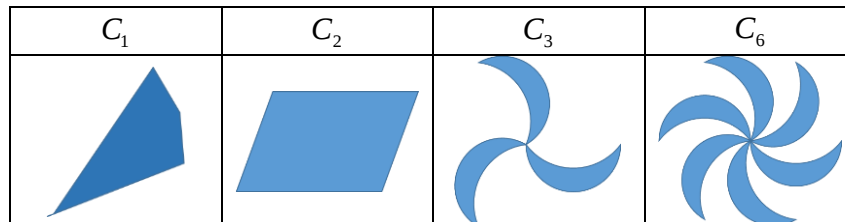
Escher Circle Limit IV

因此本研究將對這些圖形進行結構解析，探討其背後的數學性質，進行實務上的製作，並加以推廣、進行創作。

二、符號定義

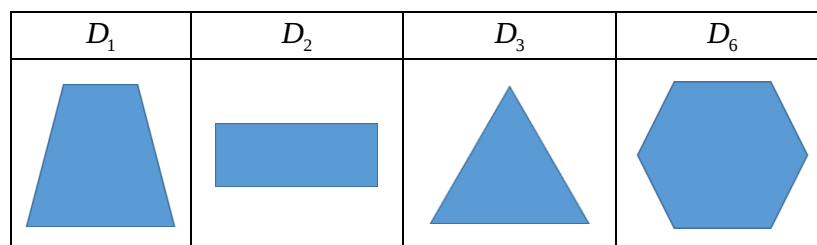
1. n 重旋轉對稱(C_n)與 n 重鏡射對稱(D_n)：

(1) n 重旋轉對稱：以符號 C_n 來表示，其中 n 為最高旋轉對稱之次數。如圖(一)所示。



圖(一) n 重旋轉對稱範例

(2) n 重鏡射對稱：以符號 D_n 來表示，其中 n 為對稱軸之數量。如圖(二)所示。

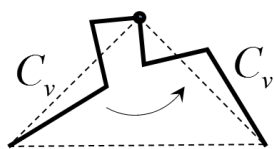


圖(二) n 重鏡射對稱範例

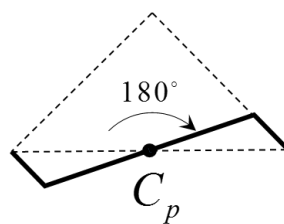
2. 角旋轉(C_v)與邊中點旋轉(C_p)

在文獻[3]、[4]、[6]中，雖然有定義相關運算方式，但由於基本單元不同、旋轉角度也不同，避免混淆，我們需重新定義符號。而在 M.C-Escher 的極限圖中，其單位動物的設

計充分的運用了角旋轉(C_v)與邊中點旋轉(C_p)這兩種作用方式，其作用方式如下圖(a)、(b)所示：



(a)角旋轉(C_v)



(b)邊中點旋轉(C_p)

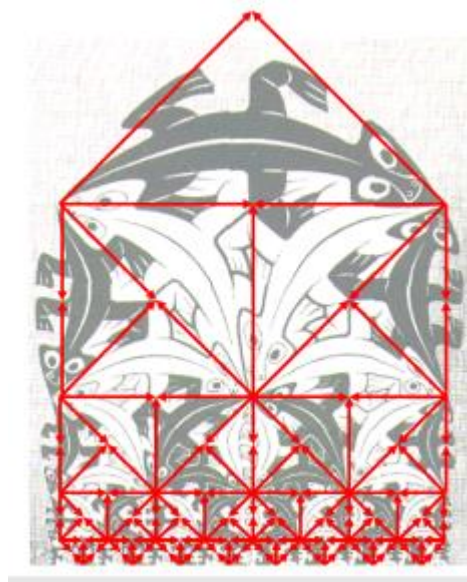
三、研究內容

研究一、M.C-Escher 帶狀極限圖

1-1 M.C-Escher 帶狀極限圖結構解析與實作

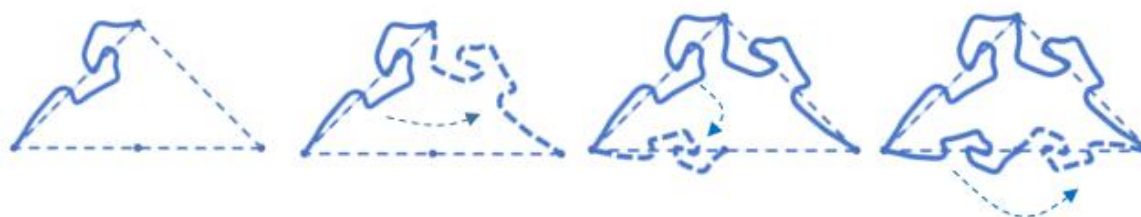
在 M.C-Escher 的帶狀極限圖(蜥蜴)中，我們不難發現其規律，若將其每隻蜥蜴的頭、尾身體，以線段連接，我們可以發現：

- (1)每隻大大小小的蜥蜴都是由等腰直角三角形所構成
- (2)其線段比例是依據 $1:\sqrt{2}$ (即公比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$)的無窮等比方式往下縮小
- (3)每個等腰直角三角形的設計法均為 $[C_v, C_v, C_p]$



M.C-Escher 帶狀極限圖(蜥蜴)及其結構

其製作流程如下：



步驟一

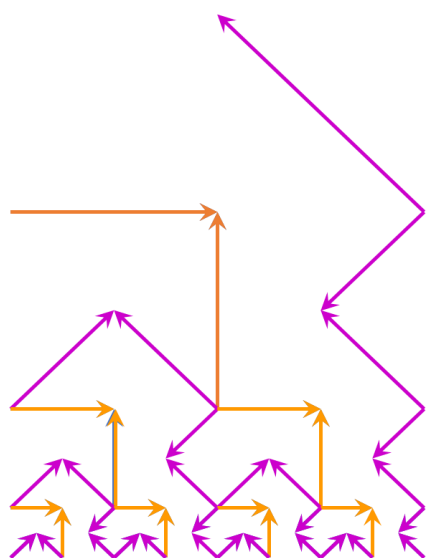
步驟二

步驟三

步驟四



基本單元完成後分別所採用的基準線



運用定線複製法到格線上



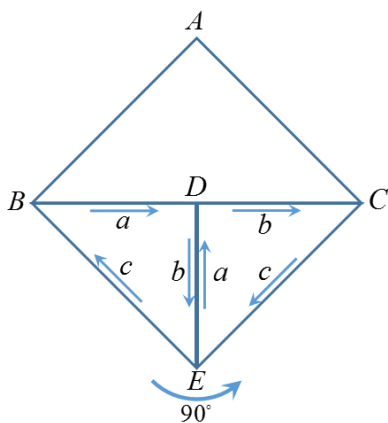
M.C-Escher 帶狀極限圖(蜥蜴)完成圖

1-2 M.C-Escher 帶狀極限圖之設計法探討

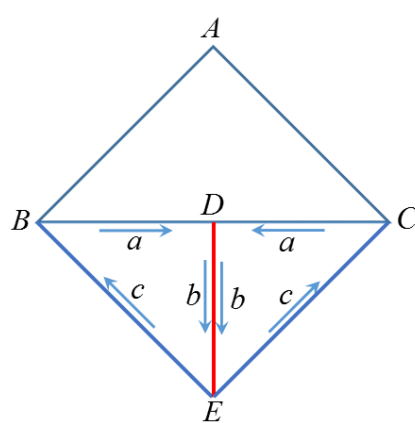
為了了解所有可能的磁磚設計法設計法種類數，我們將等腰直角三角形的三個邊分別以向量符號 a, b, c 表示，其銜接情形有兩種可能，如下圖所示：



原圖結構



情況一(a 的鄰居為 b)



情況二(b 的鄰居為 b)

情況一： a 的鄰居為 b

此時直角三角形 a, b 兩邊的作用方式恰好是以 D 點為旋轉中心，作 90° 旋轉(即角旋轉 C_v)，而圖中的 $\overline{BC}$ 由於跟 a, b 兩邊相接，且 D 點為旋轉中心，故斜邊 c 的設計只能用邊中點旋轉 C_p ，而 C_p 作用中的邊需與角旋轉 C_v 中的邊需是自我相似的縮放圖。

情況二： b 的鄰居為 b

此時 $\overline{DE}$ 將為鏡射軸，將導致直角三角形 a, b, c 三邊均不能作設計變化，只能是直線。

綜合上述：M.C-Escher 帶狀極限圖的三邊的設計方法只能是 $[C_v, C_v, C_p]$ 此設計法。

1-3 M.C-Escher 帶狀極限圖之數學性質探討

在個數的部份：

我們將每一層相同大小的蜥蜴作編號，同一數字編碼代表為同一層，其每一層編號的蜥蜴數量如下圖所示，不難發現在偶數層中的每一隻蜥蜴都會往下生長出兩隻小蜥蜴。

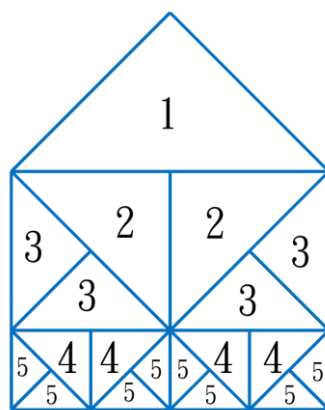
令 a_n 為第 n 層的蜥蜴數量

透過觀察可知： $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 2$ 、 $a_3 = 4$ 、 $a_4 = 4$ 、

$$a_5 = 8 \text{、} a_6 = 8 \text{}$$

我們可知： $a_{2n-1} = a_{2n} = 2^n$ ($n \in N, n \geq 2$)

故
$$a_n = 2^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} \quad (n \geq 2)$$

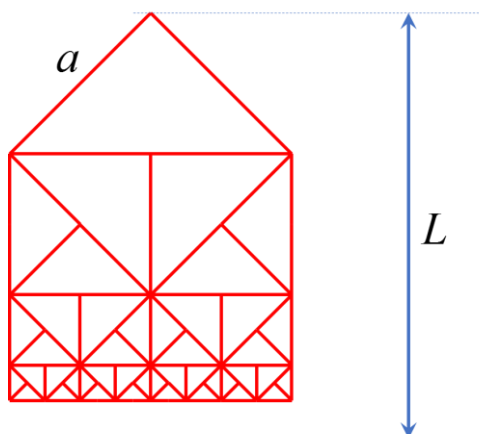


極限圖總長度部份：

令最上層的等腰直角三角形其股長為 a ，帶狀極限圖之極限總長度為 L (如下圖)

$$\text{其總長度 } L = \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{4}a + \dots$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a + \sqrt{2}a = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$$



結論一：(1) M.C-Escher 帶狀極限圖其每個等腰直角三角形基本單元設計法只能是 $[C_v, C_v, C_p]$

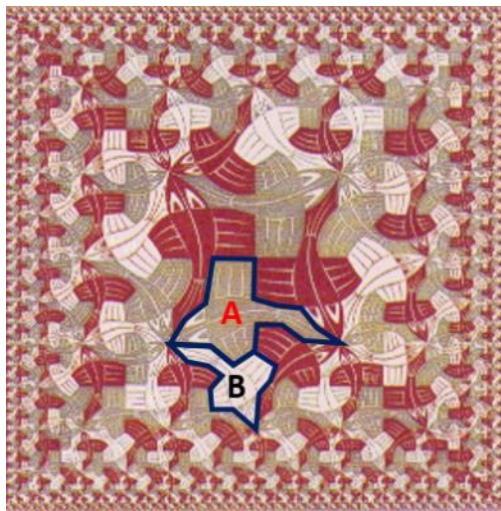
(2) 第 n 層的蜥蜴數量個數為 $a_n = 2^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil}$ ($n \geq 2$)

(3) 若其最上層直角三角形股長為 a ，則帶狀極限圖總長度 $L = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$

研究二、M.C-Escher 正方形極限圖

2-1 M.C-Escher 正方形極限圖結構解析與實作

在 M.C-Escher 的正方形極限圖(魚)中，我們不難發現：Escher 所繪的這張魚在結構上是有瑕疵的，其每隻魚並沒有自我相似，它是由結構不同的魚拼接一起，如下圖中的 A、B 兩隻魚，A 的魚鰭有一邊是四隻魚相接、一邊是三隻魚相接，而 B 的魚鰭兩邊都是三隻魚相接，基本單元明顯不會相似。

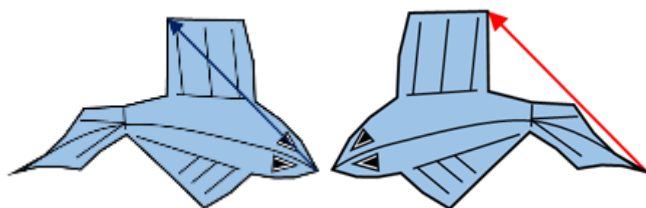
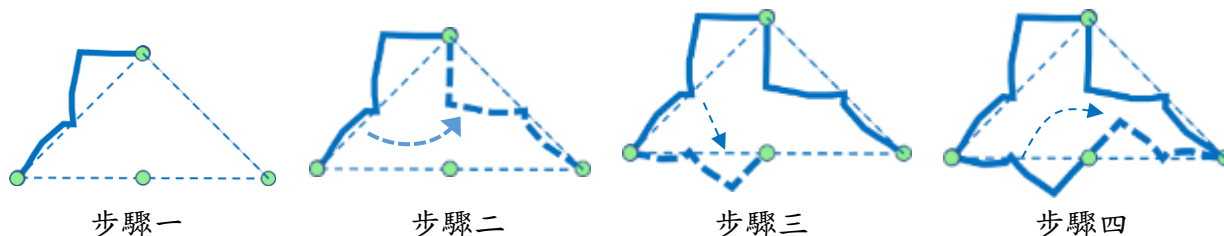


A、B 兩隻魚基本單元結構不一致

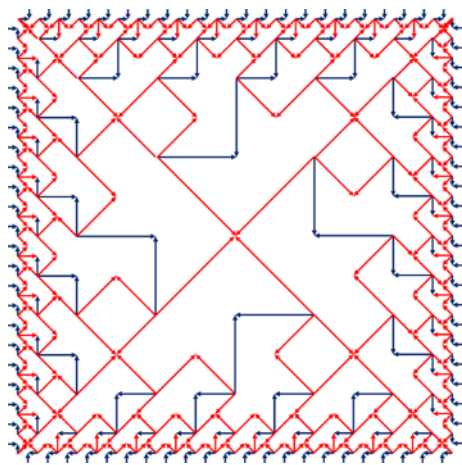
為此，我們也將 Escher 畫作圖做些適當的校正。在正方形極限圖中，若每隻魚要自我相似達到可密鋪的條件，其每個等腰直角三角形基本單元須滿足：

- (1)線段比例是依據 $1:\sqrt{2}$ (即公比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$)的無窮等比方式往下縮小
- (2)每個等腰直角三角形的設計法均為 $[C_v, C_v, C_p]$

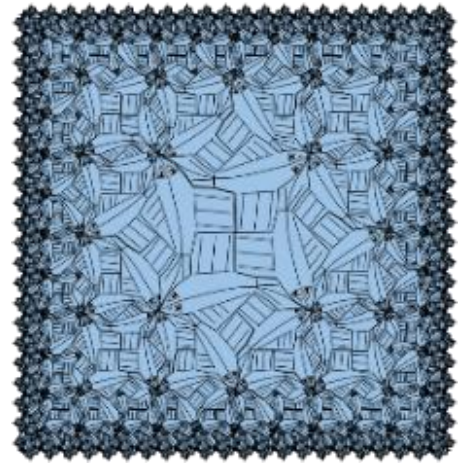
其製作流程如下：



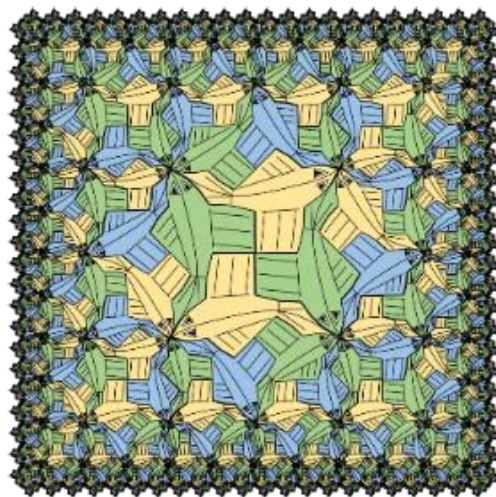
基本單元完成後分別所採用的基準線



運用定線複製法到格線上



Escher 正方形極限圖(魚)成品



運用三種不同顏色的成品

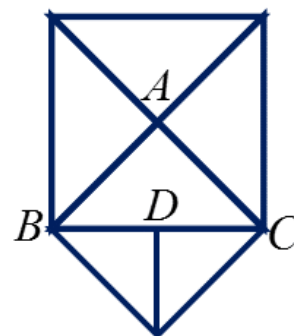
2-2 M.C-Escher 正方形極限圖之設計法探討

為了了解所有可能的磁磚設計法設計法種類數，我們進一步對結構進行解析，如下圖所示，結構解析圖中的 A 點其為四重旋轉中心點，故 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 兩邊只能作角旋轉運算 C_v ，而斜邊中點 D 點為兩個小的等腰直角三角形的角旋轉中心，故 $\overline{BD}$ 、 $\overline{CD}$ 兩邊只能以 D 點為旋轉中心，作 180° 邊中點旋轉 C_p 。

因此，M.C-Escher 正方形極限圖的三邊的設計方法亦只能是 $[C_v, C_v, C_p]$ 此設計法。



原圖結構



結構解析圖

2-3 M.C-Escher 正方形極限圖之數學性質探討

在個數的部份：

我們將每一層相同大小的魚作編號，同一數字編碼代表為同一層，其每一層編號的數量如下圖所示：

令 a_n 為第 n 層的魚的數量

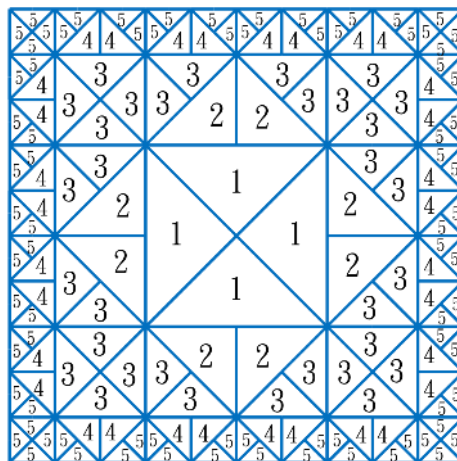
透過觀察可知： $a_1 = 4$ 、 $a_2 = 8$ 、 $a_3 = 16 + 16$

$$a_4 = 16 + 16 \text{、} a_5 = 32 + 16$$

$$a_6 = 32 + 16 \cdots \cdots$$

$$\Rightarrow a_{2n-1} = a_{2n} = 4 \times 2^n + 16 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$$

故
$$a_n = 4 \times 2^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} + 16 = 2^{\left\lceil \frac{n+5}{2} \right\rceil} + 16 \quad (n \geq 3)$$

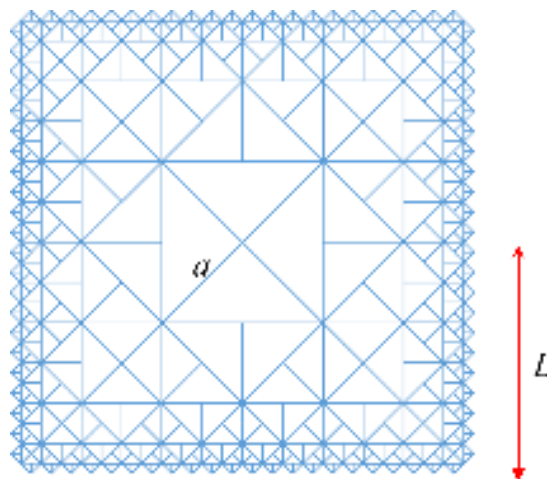


在極限圖總面積部份：

令最內層的等腰直角三角形其股長為 a ，正方形極限圖之極限總面積為 A (如下圖)

由前面可知正方形極限圖之極限邊長為 $2L$

$$\text{故其總面積 } A = (2L)^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}a \times 2\right)^2 = 18a^2$$

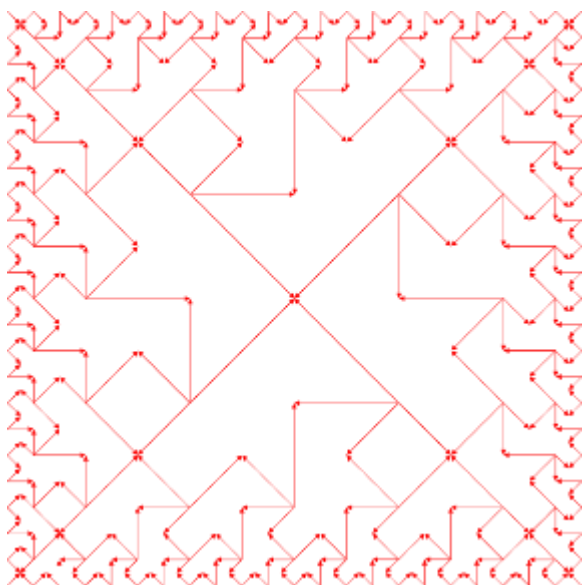
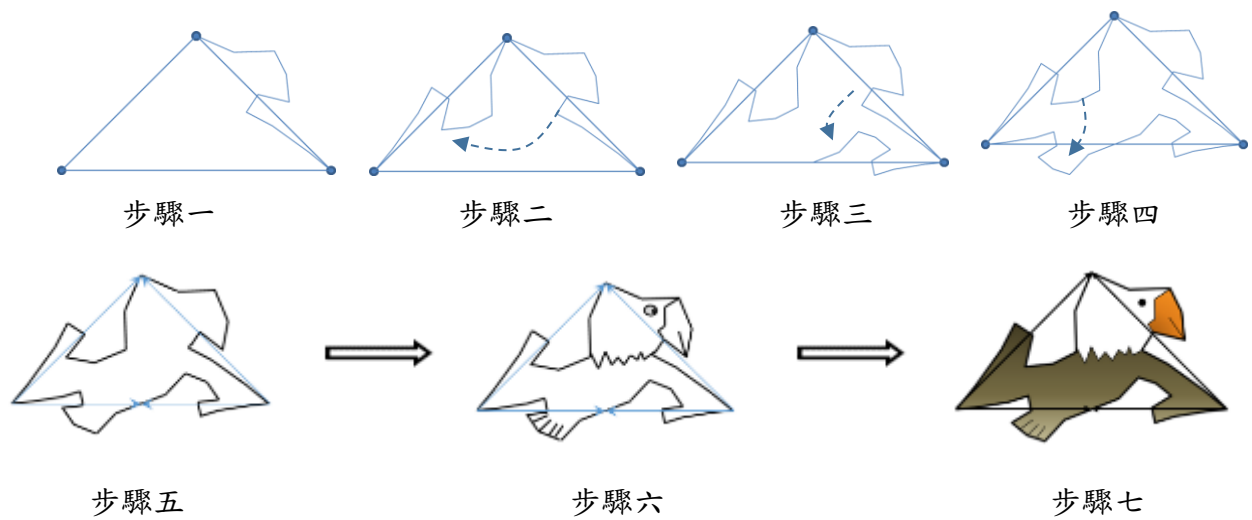


結論二：(1) M.C-Escher 正方形極限圖其每個等腰直角三角形基本單元設計法只能是 $[C_v, C_v, C_p]$

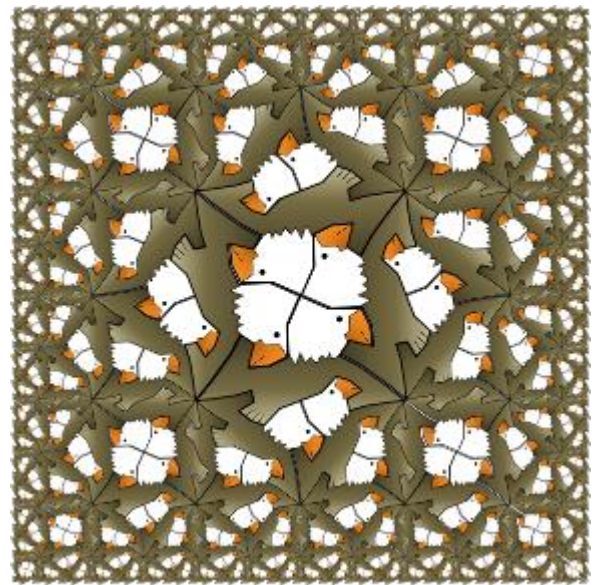
(2) 第 n 層的魚數量個數為 $a_n = 2^{\left\lceil \frac{n+5}{2} \right\rceil} + 16 \quad (n \geq 3)$

(3) 若最內層直角三角形股長為 a ，則正方形極限圖總面積 $A = 18a^2$

我們更進一步的將正方形極限圖中的格線結構進行推廣，運用上述的理論方法，並搭配格線系統，便可輕易的設計出富有創意的正方形極限圖，如下圖所示(設計圖：老鷹)。



步驟四：搭配正方形極限圖格線系統

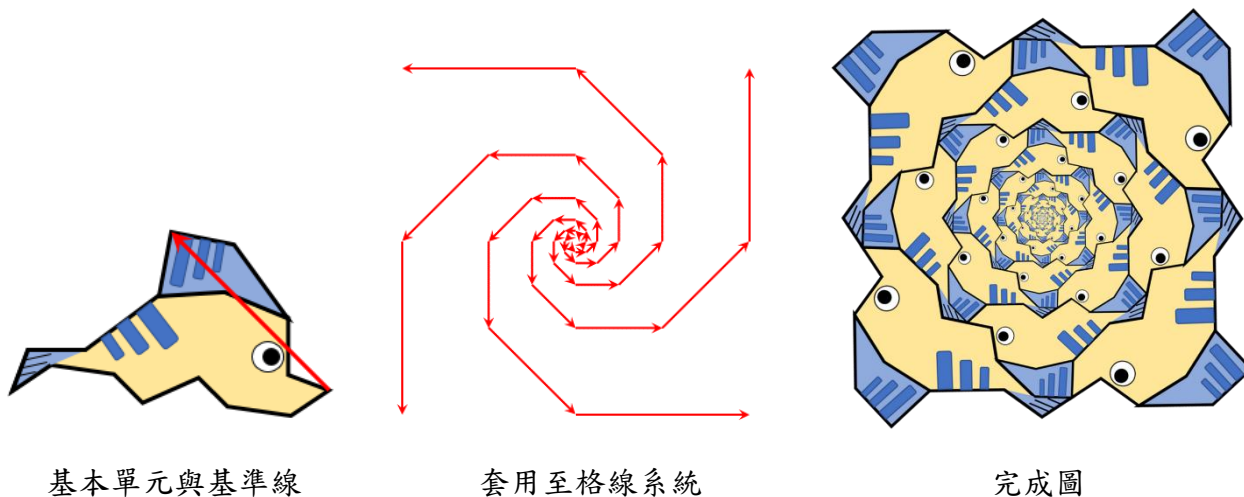


正方形極限圖創作完成圖

研究三、發散型的螺旋式拼貼圖與格線系統研發

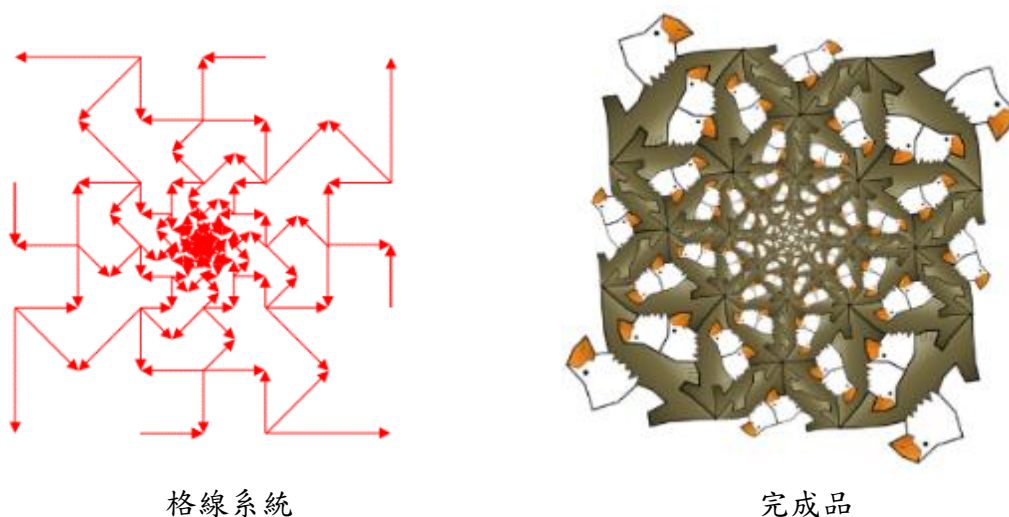
在上述 M.C-Escher 的圖樣中，均為自我相似且收斂的圖樣，其公比 $r < 1$ ($r = \frac{1}{\sqrt{2}}$)，我們更可將格線系統進一步推廣至公比 $r > 1$ 的往外發散情況，如下列各螺旋式拼貼圖：

創作一：魚($r = \sqrt{2}$)



本研究前述的創作圖[老鷹]搭配適當的格線系統，也可製作 $r = \sqrt{2}$ 向外發散的拼貼圖。

創作二：老鷹($r = \sqrt{2}$)



研究四、M.C-Escher 圓極限圖之結構解析與實作

4-1 M.C-Escher 圓極限圖之結構解析與實作

1. Escher Circle Limit I

首先我們先對 Escher Circle Limit I 這幅圖片先做結構解析，以多邊形進行切割，我們發現其每個區塊均是由六邊形所構成(每個區塊中均有六隻魚(三黑三白))，且每個頂點秩數均為 4，我們將這樣的圖形結構定義為 $\{6,4\}$ 結構。



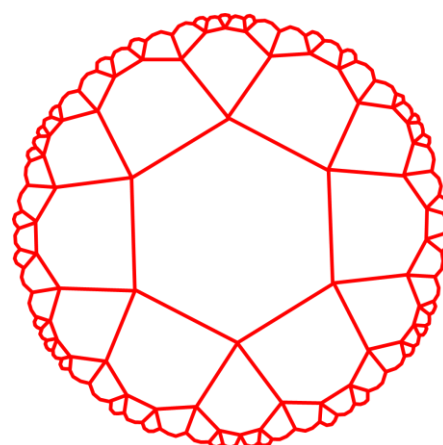
第一層



第二層

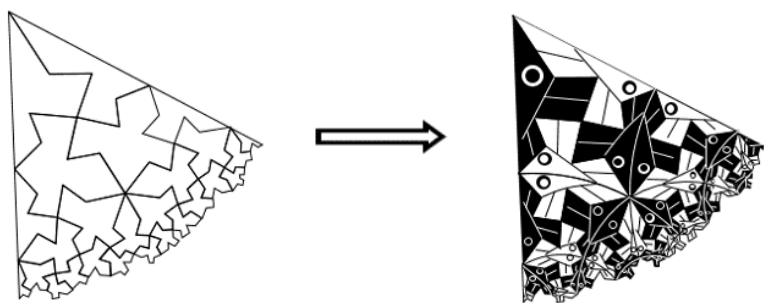


第三層



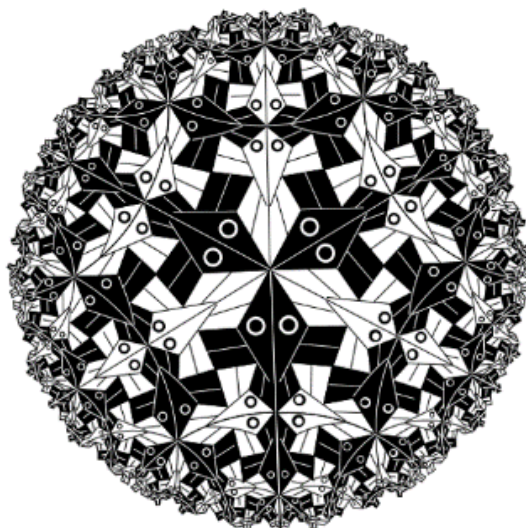
Escher Circle Limit I：結構 $\{6,4\}$

而其圖形整體具備三條對稱軸，對稱性為 D_3 ，在了解結構特性後，接著我們運用數學繪圖軟體 AMA2.0 將其繪製出，成品如下：



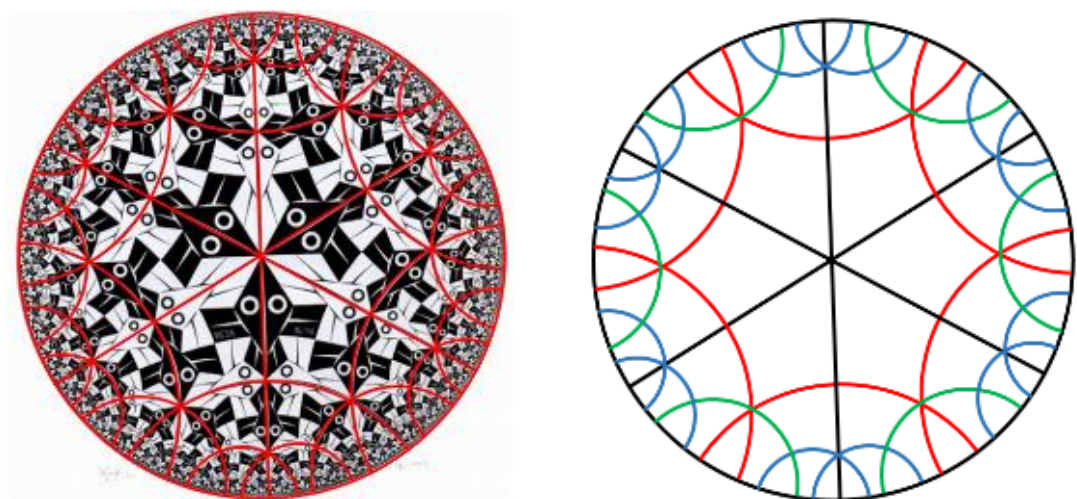
步驟一

步驟二



步驟三：Escher Circle Limit I 完成圖

若我們再進一步對 Escher Circle Limit I 中魚身的紋路作解析，將三條對稱軸繪製進去後，我們可以發現圖形中的每個區塊均恰巧是四邊形曲面(每個曲面內部均有剖半的兩黑魚、兩白魚)，而圖形中的每個曲面四邊形的頂點秩數列是相同的，四個頂點的秩數列為 $[6, 4, 6, 4]$ 。¹



Escher Circle Limit I 圓弧結構圖

¹ 圓弧在越外層時，其數量將非常龐大繁雜，其圓弧無法完全一一繪製出，故本研究中的所有圓極限圖僅能繪製出局部作為示意圖。

2. Escher Circle Limit II

接著我們先對 Escher Circle Limit II 這幅圖片先做結構解析，以多邊形進行切割，我們發現其每個區塊均是由八邊形所構成(每個區塊中均有一十字圖樣)，且每個頂點秩數均為 3，故其圖形結構為 $\{8,3\}$ 結構。



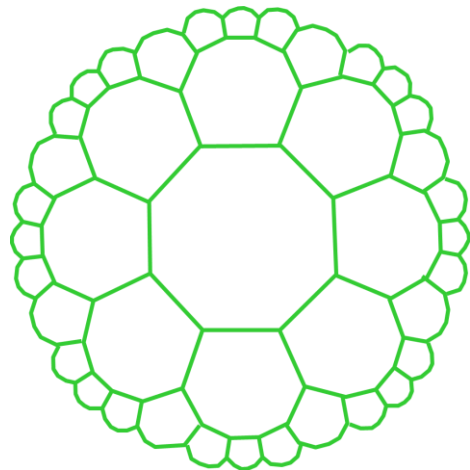
第一層



第二層

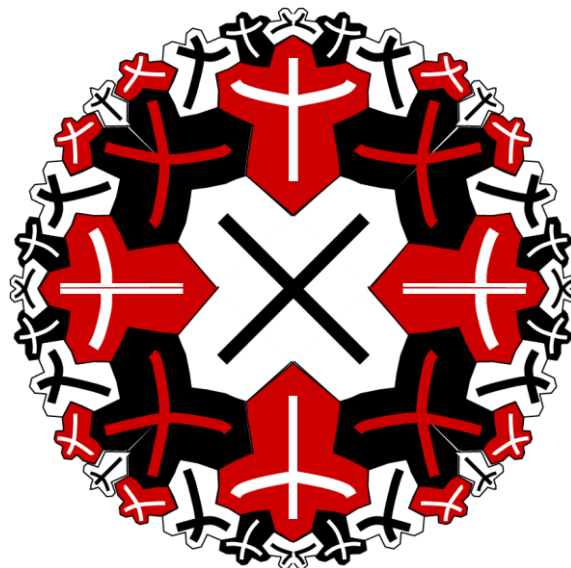


第三層



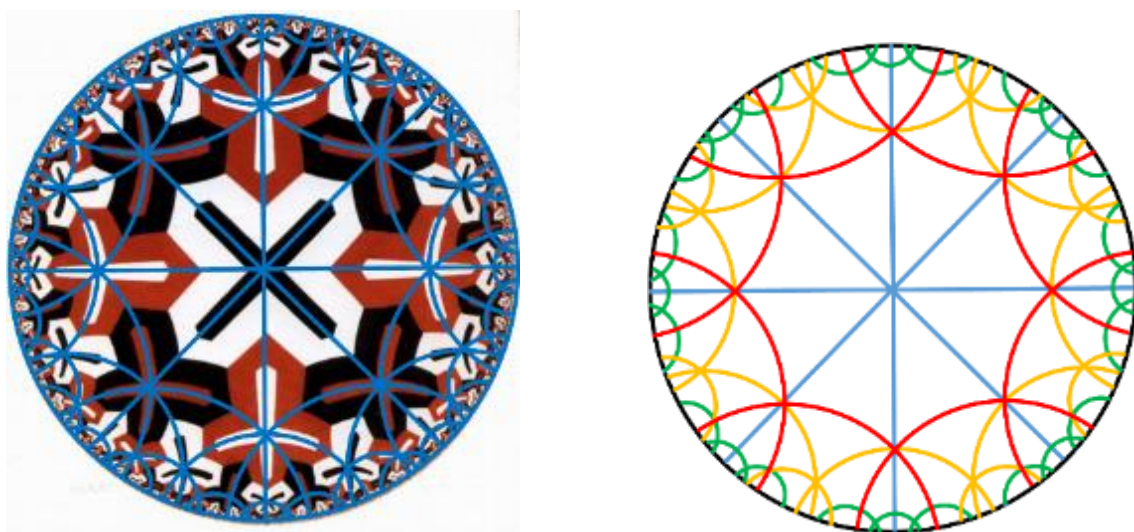
Escher Circle Limit II：結構 $\{8,3\}$

而其圖形整體具備四條對稱軸，對稱結構為 D_4 ，在了解結構特性後，接著我們運用數學繪圖軟體 AMA2.0 將其繪製出，成品如下：



步驟四：Escher Circle Limit II 完成圖

若我們再進一步對 Escher Circle Limit II 中的紋路作解析，我們可以發現圖形結構中的每一交點都是由三個圓交會共點而成，每個點的秩數均為 6，再將三條對稱軸繪製進去後，圖形中的每個區塊均恰巧是三角形曲面，圖形中的每個曲面三角形的頂點秩數列是相同的，三個頂點的秩數列為 $[8,8,8]$ 。



Escher Circle Limit II 圓弧結構圖

3. Escher Circle Limit III

首先我們先對 Escher Circle Limit III 這幅圖片先做結構解析，以多邊形進行切割，我們發現每個區塊均是由八邊形所構成(每個區塊中均有四隻魚)，且每個頂點秩數均為 3，我們將這樣的圖形結構定義為 $\{8,3\}$ 結構。



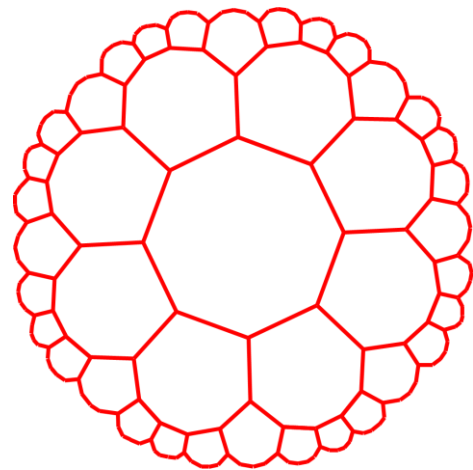
第一層



第二層

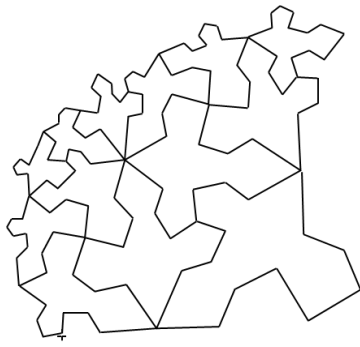


第三層



Escher Circle Limit III：結構 $\{8,3\}$

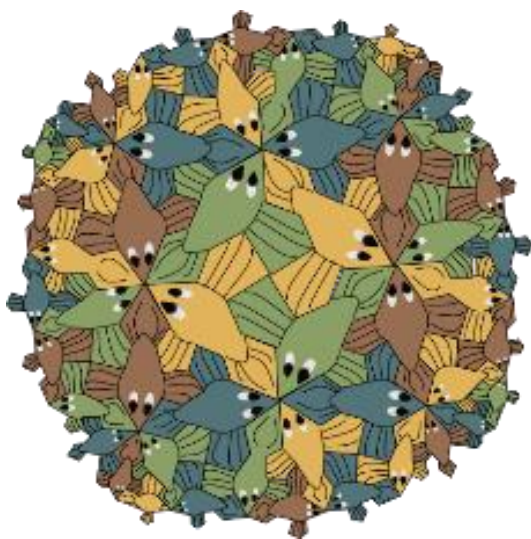
其圖形整體結構為四重旋轉對稱圖，對稱性為 C_4 ，在了解結構特性後，接著我們運用數學繪圖軟體 AMA2.0 將其繪製出，成品如下：



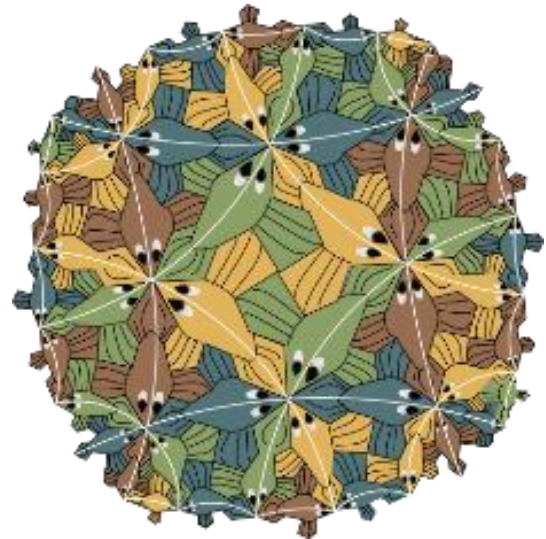
步驟一



步驟二

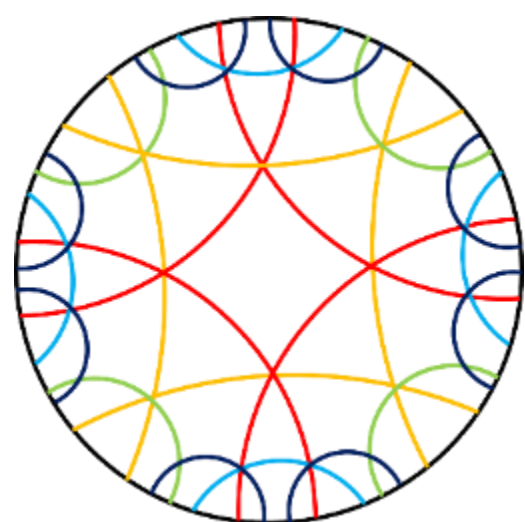
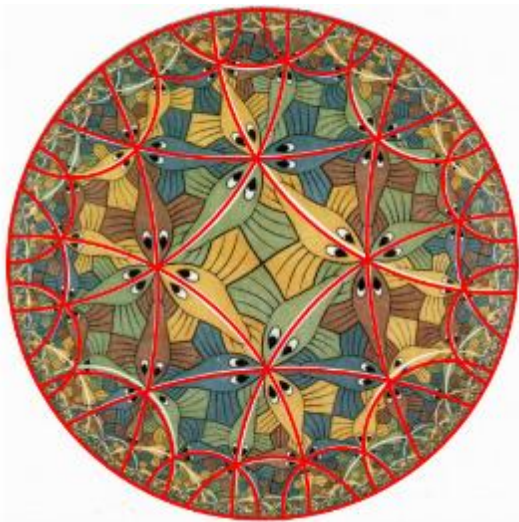


步驟三



步驟四：Escher Circle Limit III 完成圖

我們再進一步對 Escher Circle Limit III 中的紋路作解析，我們可以發現圖形結構中的每一交點都是由三個圓交會共點而成，圖形經圓弧分割後為三角形曲面與四邊形曲面的集合，而圖形中的所有頂點秩數均為 6，且每個頂點周圍恰巧是三角形曲面與四邊形曲面相間而成。



Escher Circle Limit III 圓弧結構圖

4. Escher Circle Limit IV

再來我們對 Escher Circle Limit IV 這幅圖片先做結構解析，以多邊形進行切割，我們發現每個區塊均是由六邊形所構成(每個區塊中均有三個惡魔、三個天使)，且每個頂點秩數均為 4，故其圖形結構亦為 $\{6,4\}$ 結構。



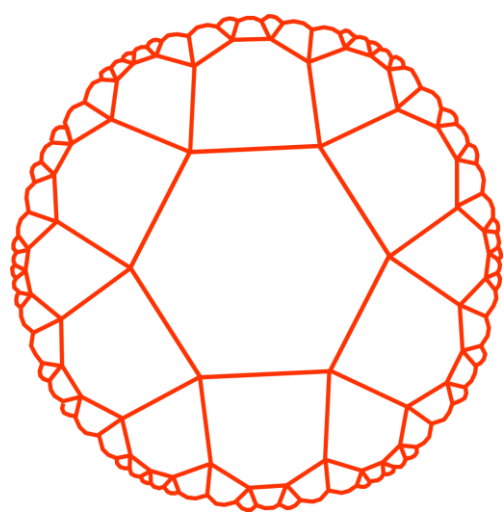
第一層



第二層

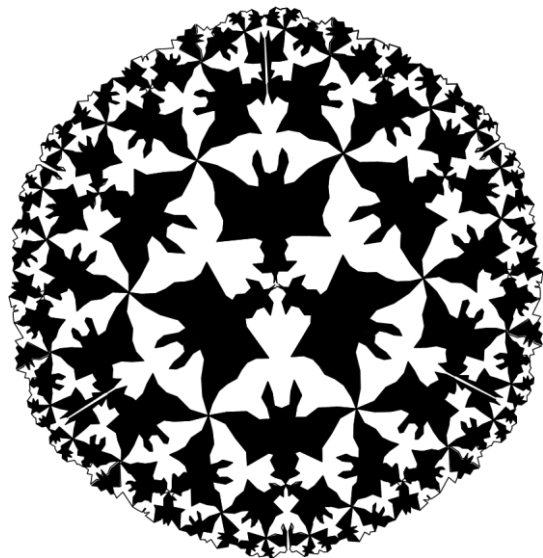
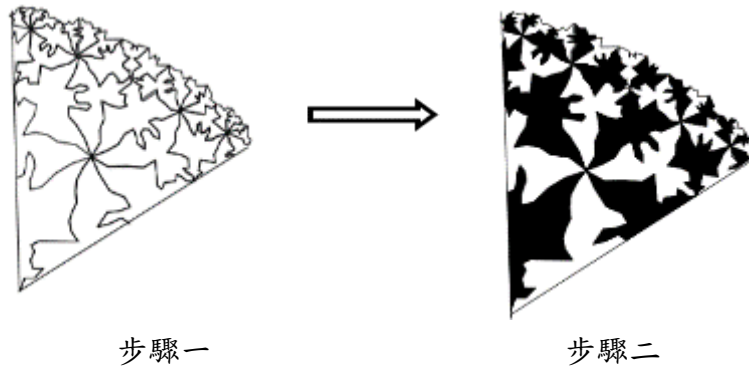


第三層



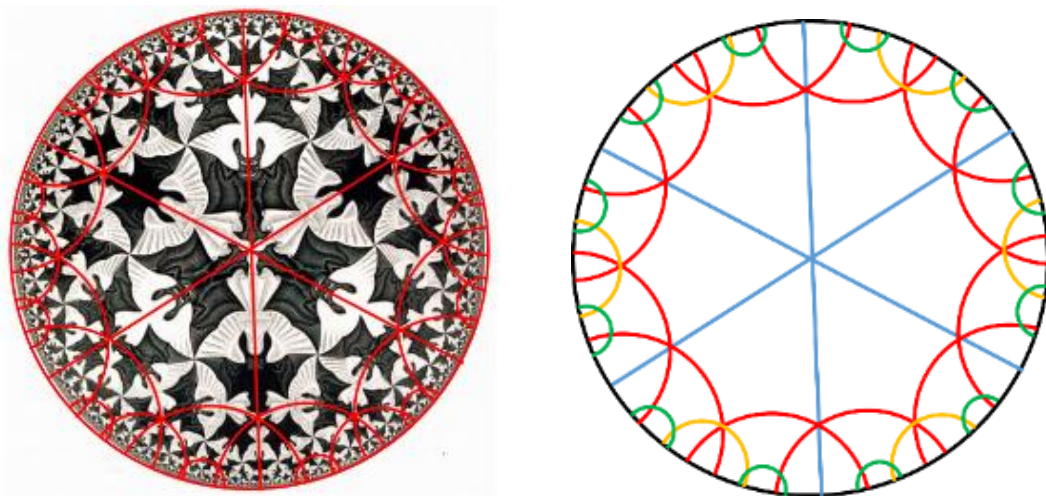
Escher Circle Limit IV：結構 $\{6,4\}$

而其圖形整體具備四條對稱軸，對稱性為 D_3 ，在了解結構特性後，接著我們運用數學繪圖軟體 AMA2.0 將其繪製出，成品如下：



步驟三：Escher Circle Limit IV 完成圖

我們再進一步對 Escher Circle Limit IV 中的紋路作解析，將三條對稱軸繪製進去後，我們可以發現圖形中的每個區塊均恰巧是四邊形曲面(每個曲面內部均有剖半的四天使、四惡魔)，而圖形中的每個曲面四邊形的頂點秩數列是相同的，四個頂點的秩數列為 $[6, 6, 6, 6]$ 。



Escher Circle Limit IV 圓弧結構圖

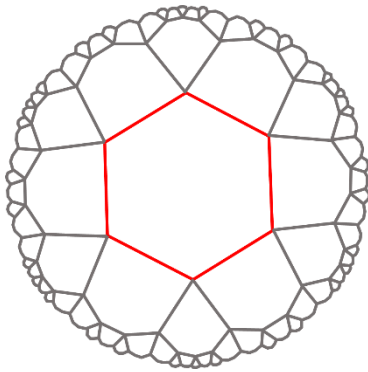
結論三：(1) Escher Circle Limit I 圖形結構為 $\{6,4\}$ ，對稱性為 D_3
 (2) Escher Circle Limit II 圖形結構為 $\{8,3\}$ ，對稱性為 D_4
 (3) Escher Circle Limit III 圖形結構為 $\{8,3\}$ ，對稱性為 C_4
 (4) Escher Circle Limit IV 圖形結構為 $\{6,4\}$ ，對稱性為 D_3

4-2 M.C-Escher 圓極限圖之數學性質探討

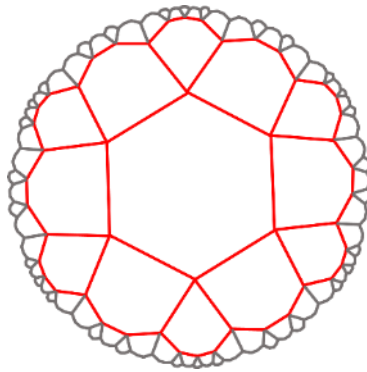
在 M.C-Escher 圓極限圖中，Escher Circle limit I、IV 的多邊形結構是相同的(結構同為 $\{6,4\}$)，Escher Circle limit II、III 的多邊形結構亦是相同的(結構同為 $\{8,3\}$)，其多邊形結構中每一層的多邊形數量變化似乎隱藏著某些規律，底下我們將進一步探討。

1. Escher Circle limit I、IV 之多邊形結構生成數量探討

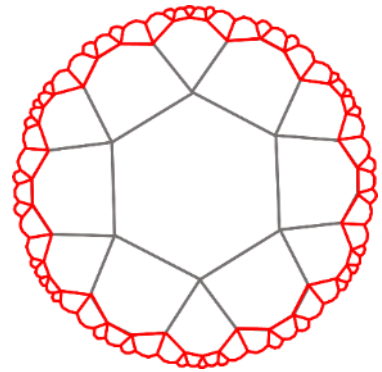
在多邊形結構部份，我們對每一層的定義如下圖所示，最內部為第一層(1 個六邊形)，第二層為由內往外數第二圈(兩種六邊形各 6 個，共 12 個)，以此類推。



第一層



第二層



第三層

令 a_n 為第 n 層中的所有的六邊形個數

b_n 為第 n 層中三邊與鄰居有相接的六邊形個數

c_n 為第 n 層中兩邊與鄰居有相接的六邊形個數

可知： $a_n = b_n + c_n$

$$\text{又 } \begin{cases} b_n = 3b_{n-1} + 4c_{n-1} (n \geq 2) \\ c_n = 2b_{n-1} + 3c_{n-1} (n \geq 2) \\ b_2 = c_2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b_n &= 3b_{n-1} + 4c_{n-1} = 3b_{n-1} + 4(2b_{n-2} + 3c_{n-2}) \\ &= 3b_{n-1} + 9b_{n-2} + 12c_{n-2} - b_{n-2} \\ &= 3b_{n-1} + 3b_{n-1} - b_{n-2} \\ &= 6b_{n-1} - b_{n-2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_n - 6b_{n-1} + b_{n-2} = 0$$

運用特徵方程式：令 $b_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ (其中 α, β 為 $x^2 - 6x + 1 = 0$ 之兩根)

可得：
$$b_n = A(3+2\sqrt{2})^n + B(3-2\sqrt{2})^n$$

又 $b_2 = 6$ 、 $b_3 = 42$ 代入得 $A = -21+15\sqrt{2}$ 、 $B = -21-15\sqrt{2}$

$$\Rightarrow b_n = (-21+15\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^n + (-21-15\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^n$$

同理 $c_n = 2b_{n-1} + 3c_{n-1} = 2(3b_{n-2} + 4c_{n-2}) + 3c_{n-1}$

$$= 6b_{n-2} + 9c_{n-2} + 3c_{n-1} - c_{n-2}$$

$$= 3c_{n-1} + 3c_{n-1} - c_{n-2}$$

$$= 6c_{n-1} - c_{n-2}$$

$$\Rightarrow c_n - 6c_{n-1} + c_{n-2} = 0$$

運用特徵方程式：令 $c_n = A' \cdot \alpha^n + B' \cdot \beta^n$ (其中 α, β 為 $x^2 - 6x + 1 = 0$ 之兩根)

可得：
$$c_n = A'(3+2\sqrt{2})^n + B'(3-2\sqrt{2})^n$$

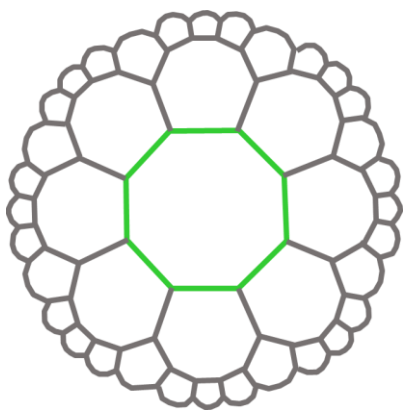
又 $c_2 = 6$ 、 $c_3 = 30$ 代入得 $A' = \frac{30-21\sqrt{2}}{2}$ 、 $B' = \frac{30+21\sqrt{2}}{2}$

$$\Rightarrow c_n = \left(\frac{30-21\sqrt{2}}{2}\right)(3+2\sqrt{2})^n + \left(\frac{30+21\sqrt{2}}{2}\right)(3-2\sqrt{2})^n$$

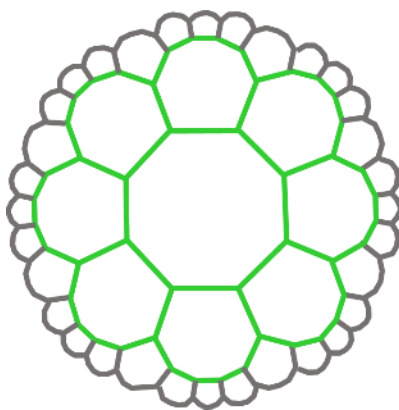
$$\begin{aligned} \text{故 } a_n &= (-21+15\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})^n + (-21-15\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})^n + \left(\frac{30-21\sqrt{2}}{2}\right)(3+2\sqrt{2})^n + \left(\frac{30+21\sqrt{2}}{2}\right)(3-2\sqrt{2})^n \\ &= \left(\frac{-12+9\sqrt{2}}{2}\right)(3+2\sqrt{2})^n + \left(\frac{-12-9\sqrt{2}}{2}\right)(3-2\sqrt{2})^n \end{aligned}$$

2. Escher Circle limit II、III 之多邊形結構生成數量探討

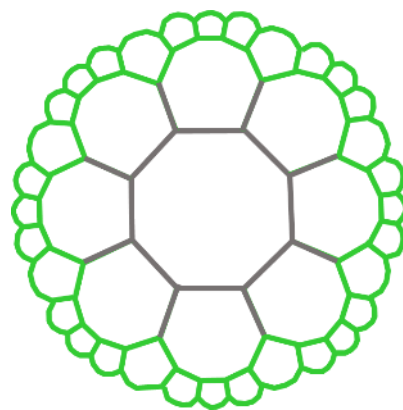
在多邊形結構部份，其每一層的定義如下圖所示，最內部為第一層(1 個八邊形)，第二層為由內往外數第二圈(8 個八邊形)，以此類推。



第一層



第二層



第三層

令 a_n 為第 n 層中的所有的八邊形個數

b_n 為第 n 層中三邊與鄰居有相接的八邊形個數

c_n 為第 n 層中兩邊與鄰居有相接的八邊形個數

可知： $a_n = b_n + c_n$

$$\text{又 } \begin{cases} b_n = 3b_{n-1} + 2c_{n-1} (n \geq 2) \\ c_n = a_{n-1} (n \geq 3) \\ b_2 = c_3 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow b_n &= 3b_{n-1} + 2c_{n-1} = 3b_{n-1} + 2a_{n-2} = 3b_{n-1} + 2(b_{n-2} + c_{n-2}) \\ &= 3b_{n-1} + 3b_{n-2} + 2c_{n-2} - b_{n-2} \\ &= 3b_{n-1} + b_{n-1} - b_{n-2} \\ &= 4b_{n-1} - b_{n-2} \\ \Rightarrow b_n - 4b_{n-1} + b_{n-2} &= 0 \end{aligned}$$

運用特徵方程式：令 $b_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ (其中 α, β 為 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 之兩根)

可得：
$$b_n = A(2 + \sqrt{3})^n + B(2 - \sqrt{3})^n$$

又 $b_2 = 8$ 、 $b_3 = 24$ 代入得 $A = \frac{36 - 20\sqrt{3}}{3}$ 、 $B = \frac{36 + 20\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow b_n = \left(\frac{36 - 20\sqrt{3}}{3}\right)(2 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{36 + 20\sqrt{3}}{3}\right)(2 - \sqrt{3})^n$$

$$\begin{aligned} \text{同理 } c_n &= a_{n-1} = b_{n-1} + c_{n-1} = (3b_{n-2} + 2c_{n-2}) + c_{n-1} \\ &= 3b_{n-2} + 3c_{n-2} + c_{n-1} - c_{n-2} \\ &= 3c_{n-1} + c_{n-1} - c_{n-2} \\ &= 4c_{n-1} - c_{n-2} \\ \Rightarrow c_n - 4c_{n-1} + c_{n-2} &= 0 \end{aligned}$$

運用特徵方程式：令 $c_n = A' \cdot \alpha^n + B' \cdot \beta^n$ (其中 α, β 為 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 之兩根)

可得：
$$c_n = A'(2 + \sqrt{3})^n + B'(2 - \sqrt{3})^n$$

又 $c_3 = 8$ 、 $c_4 = 32$ 代入得 $A' = \frac{-48 + 28\sqrt{3}}{3}$ 、 $B' = \frac{-48 - 28\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow c_n = \left(\frac{-48 + 28\sqrt{3}}{3}\right)(2 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{-48 - 28\sqrt{3}}{3}\right)(2 - \sqrt{3})^n$$

$$\begin{aligned} \text{故 } a_n &= \left(\frac{36 - 20\sqrt{3}}{3}\right)(2 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{36 + 20\sqrt{3}}{3}\right)(2 - \sqrt{3})^n + \left(\frac{-48 + 28\sqrt{3}}{3}\right)(2 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{-48 - 28\sqrt{3}}{3}\right)(2 - \sqrt{3})^n \\ &= \left(\frac{-12 + 8\sqrt{3}}{3}\right)(2 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{-12 - 8\sqrt{3}}{3}\right)(2 - \sqrt{3})^n \end{aligned}$$

結論四：(1) Escher Circle limit I、IV(結構同為 $\{6,4\}$)其第 n 層多邊形結構數量為：

$$a_n = \left(\frac{-12+9\sqrt{2}}{2}\right)(3+2\sqrt{2})^n + \left(\frac{-12-9\sqrt{2}}{2}\right)(3-2\sqrt{2})^n$$

(2) Escher Circle limit II、III(結構同為 $\{8,3\}$)其第 n 層多邊形結構數量為：

$$a_n = \left(\frac{-12+8\sqrt{3}}{3}\right)(2+\sqrt{3})^n + \left(\frac{-12-8\sqrt{3}}{3}\right)(2-\sqrt{3})^n$$

伍、討論與應用

我們進一步將圓極限圖中的多邊形結構與圓弧結構做疊合(以 Escher Circle Limit II、Escher Circle Limit III 為例，兩圖的結構均為 $\{8,3\}$ 結構，如下圖(a)、(b)所示)，



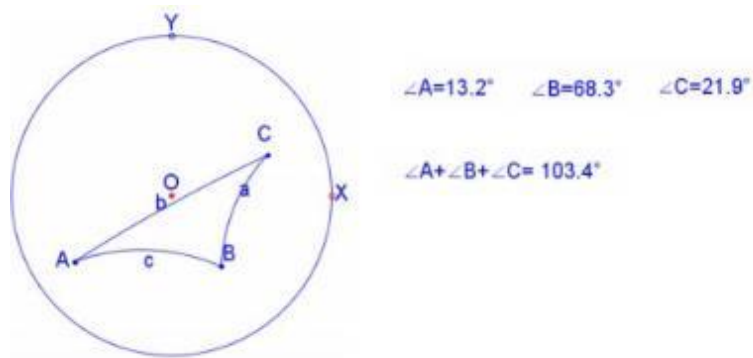
圖(a) Escher Circle Limit II 圓弧/多邊形疊合 圖(b) Escher Circle Limit III 圓弧/多邊形疊合

前面的部分有提到，多邊形結構是依照圖形端點連線而成，而圓弧結構則是以圖形趨勢的規律變化繪製而成，而我們將 Escher Circle Limit II、III 的多邊形結構與圓形結構相疊後，發現了以下規律：

1. 多邊形結構的邊中點或頂點必有一弧通過，故我們也以此來檢查弧數是否有缺漏，結構是否錯誤...等等。
2. 多邊形結構的數量與圓弧層數的數量有關聯

在 Escher Circle Limit II 中，以最內層第一個八邊形為首層，8 個最外圈的紅色弧與之呼應，與它相連的 8 個八邊形為第二層，恰與圖一中黃色弧(第二層)的數量一樣；而第三層的 32 個八邊形則與第三層的 32 個綠色弧位置相對應；同樣的，Escher Circle Limit III 也是以此法觀察出多邊形與圓弧間的關係。

在研究完 Escher 四張極限圖的結構後，我們想試試看能否創造不同的幾何結構，並繪製創意的圓極限圖，在文獻[7]中提到：「在雙曲幾何中， q 個正 p 邊形，可在某一點無縫隙拼合，的必要條件是 $(p-2)(q-2) > 4$ 」，在參考資料[8]中，提到：在雙曲幾何中，三角形的內角和是小于 180° (如下圖所示)，



資料來源：文獻[7]

由於 q 個正 p 邊形要在某一點無縫隙拼合，且在雙曲幾何中三角形的內角和是小于 180°

可知：

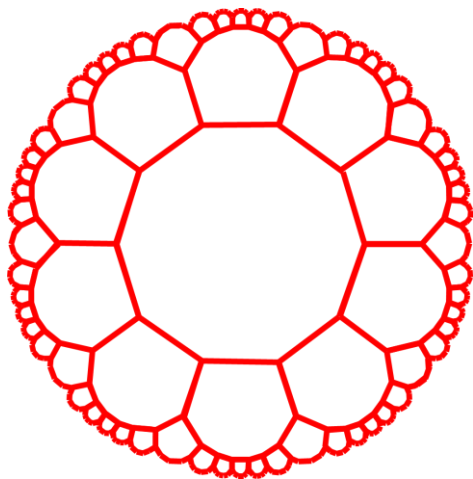
$$\frac{2\pi}{q} \cdot p < (p-2)\pi$$

$$\Rightarrow 2p < (p-2) \cdot q$$

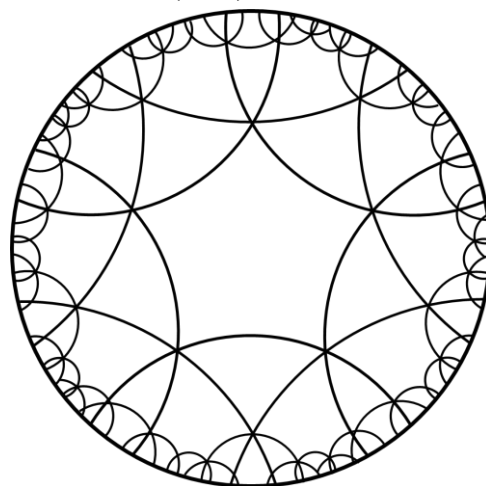
$$\Rightarrow pq - 2p - 2q > 0$$

$$\Rightarrow (p-2)(q-2) > 4$$

故只要結構滿足 $(p-2)(q-2) > 4$ 此條件，就可以創作 q 個正 p 邊形在一點無縫隙的極限拼貼圖。而在文獻[7]中繪製了一漂亮的 $\{10,3\}$ 結構圖²，我們也參考此了結構以及 Escher Circle Limit III，並加以推廣變化，自創一圓極圖(鳥)，結構為 $\{10,3\}$ ，對稱性為 C_5 。

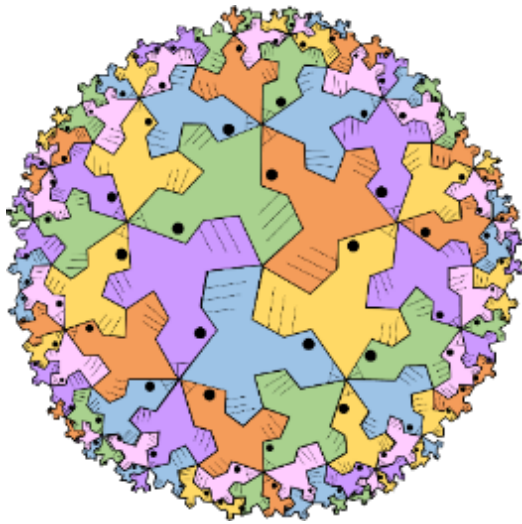


步驟一：繪製 $\{10,3\}$ 結構圖

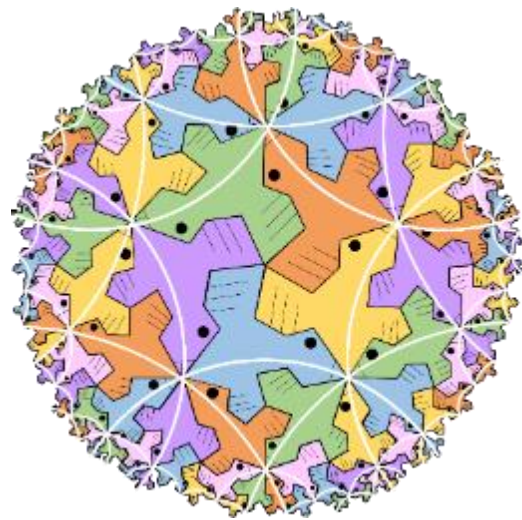


步驟二：繪製圓弧協助定位

² $\{10,3\}$ 結構即 $p=10$ 、 $q=3$ ，而 $(10-2)(3-2) > 4$ 滿足條件



圓極限創作圖(鳥)



結構 $\{10,3\}$ 、對稱性 C_5

最後，我們利用雷射切割機，將本研究中的作品，製作成一拼圖板，如下圖所示：



創作拼圖(正方形極限碎形拼圖)(玩法一)

而本研究前面對 Escher 密鋪結構探討，此拼圖板還可以有不同的玩法(如下圖所示)重新組合成往外發散(公比 $r > 1$)的圖形。



創作拼圖(正方形極限碎形拼圖)(玩法二)



創作拼圖(正方形極限碎形拼圖)(玩法二)

陸、結論

1. (1) M.C-Escher 帶狀極限圖其每個等腰直角三角形基本單元設計法只能是 $[C_v, C_v, C_p]$

(2) 第 n 層的蜥蜴數量個數為 $a_n = 2^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil}$ ($n \geq 2$)

(3) 若其最上層直角三角形股長為 a ，則帶狀極限圖總長度 $L = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$

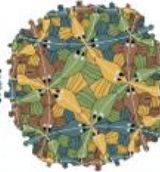
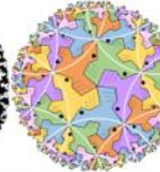
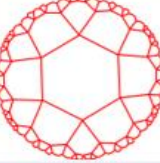
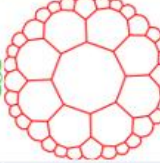
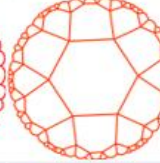
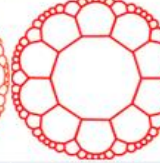
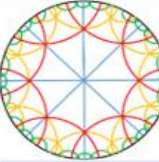
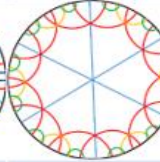
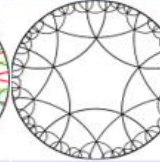
2. (1) M.C-Escher 正方形極限圖其每個等腰直角三角形基本單元設計法只能是 $[C_v, C_v, C_p]$

(2) 第 n 層的魚數量個數為 $a_n = 2^{\left\lceil \frac{n+5}{2} \right\rceil} + 16$ ($n \geq 3$)

(3) 若最內層直角三角形股長為 a ，則正方形極限圖總面積 $A = 18a^2$

3. M.C-Escher 的創作圖因出自於手繪，不難看出其每隻動物形狀、結構並非自我相似，導致有細部無法密鋪。運用我們的理論方法、結構解析與格線系統，在適當軟體支援下，將可輕鬆作出富有創意且可完全密鋪的動物磁磚圖樣。

4. 將 M.C-Escher 四個圓極限圖實作與我們的自創圖列表比較，其結構解析如下表所示：

		Circle limit I	Circle limit II	Circle limit III	Circle limit IV	自創圖
實作圖	圖					
	對稱性	D_3	D_4	C_4	D_3	C_5
多邊形	結構					
	頂點秩數	4	3	3	4	3
	圖形結構	{6,4}	{8,3}	{8,3}	{6,4}	{10,3}
圓弧	結構					
	頂點秩數列	[6,4,6,4]	[8,8,8]	無	[6,6,6,6]	無

5. (1) Escher Circle limit I、IV(結構同為{6,4})其第 n 層多邊形結構數量為：

$$a_n = \left(\frac{-12+9\sqrt{2}}{2}\right)(3+2\sqrt{2})^n + \left(\frac{-12-9\sqrt{2}}{2}\right)(3-2\sqrt{2})^n$$

(2) Escher Circle limit II、III(結構同為{8,3})其第 n 層多邊形結構數量為：

$$a_n = \left(\frac{-12+8\sqrt{3}}{3}\right)(2+\sqrt{3})^n + \left(\frac{-12-8\sqrt{3}}{3}\right)(2-\sqrt{3})^n$$

6. 只要結構滿足 $(p-2)(q-2) > 4$ 此條件，就可以創作出結構為 $\{p, q\}$ 圓極限圖；本研究中也創作出結構為 $\{10, 3\}$ 、對稱性 C_5 的圓極限圖(鳥)。
7. 利用雷射切割機將本研究設計的正方形極限圖產出，本拼圖板可有數種不同玩法；本研究亦可應用於跨領域教學(藝術人文、資訊、數學...等)、建築設計、科普玩具及相關創意設計。

柒、參考資料

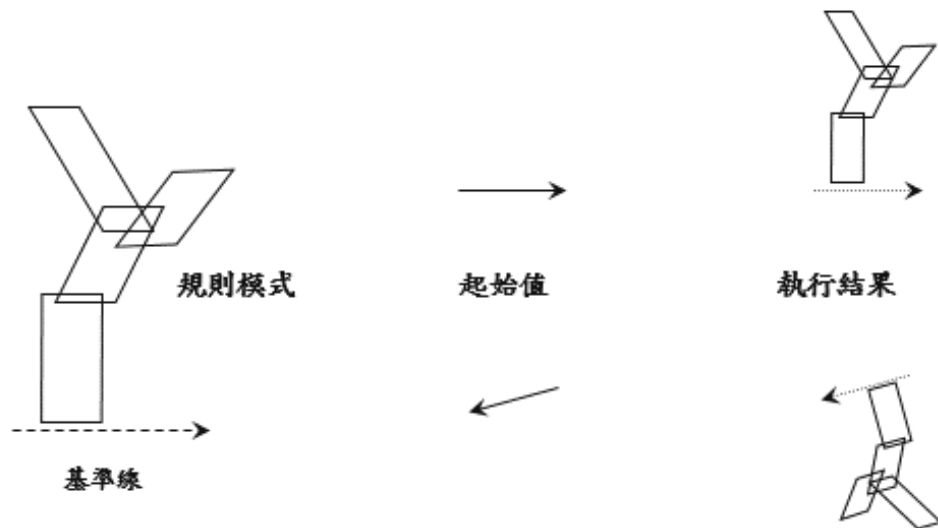
- [1] The Official M.C.Escher Website, by The M.C. Escher Company B.V., from <http://www.mcescher.com>
- [2] 張瑜軒 (民91)，群論應用於艾雪鑲嵌藝術之對稱構成研究-以多媒體創作為例，中原大學商業設計學系碩士學位論文，台中市。
- [3] 張佐安、史謹誌、胡晉傑著，“繪身繪影—正三角形磁磚設計方法與碎形密鋪之研究”，第47屆全國中小學科展佳作作品，2007。
- [4] 胡晉華著，“從平面到空間—廣義四邊形磁磚的設計法與應用”，第50屆全國中小學科展佳作作品，2010。
- [5] 史謹誌著，“站在Escher的肩膀上—平面及空間中的密鋪圖形設計”，第50屆全國中小學科展高中組佳作作品，2010。
- [6] 吳祥叡、凌胤濤、馮震昇著，“Escher 狂想曲”，2013年台灣國際科展電腦科學科二等獎。
- [7] 林保平著，“雙曲幾何基本構圖及變換在數學算板中的實踐與應用”
[http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/106\(396-405\)/402-PDF/2-106013-16-37-%E7%A7%91%E5%AD%B8%E6%95%99%E5%AE%A4-%E6%95%B8-%E9%9B%99%E6%9B%B2%E5%B9%BE%E4%BD%95%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E6%A7%8B%E5%9C%96%E5%8F%8A%E8%AE%8A%E6%8F%9B%E5%9C%A8%E6%95%B8%E5%AD%B8%E7%AE%97%E6%9D%BF%E4%B8%AD%E7%9A%84%E5%AF%A6%E8%B8%90%E8%88%87%E6%87%89%E7%94%A8.pdf](http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/106(396-405)/402-PDF/2-106013-16-37-%E7%A7%91%E5%AD%B8%E6%95%99%E5%AE%A4-%E6%95%B8-%E9%9B%99%E6%9B%B2%E5%B9%BE%E4%BD%95%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E6%A7%8B%E5%9C%96%E5%8F%8A%E8%AE%8A%E6%8F%9B%E5%9C%A8%E6%95%B8%E5%AD%B8%E7%AE%97%E6%9D%BF%E4%B8%AD%E7%9A%84%E5%AF%A6%E8%B8%90%E8%88%87%E6%87%89%E7%94%A8.pdf)
- [8] 雙曲幾何性質：
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%8C%E6%9B%B2%E5%87%A0%E4%BD%95>
- [9] 塞伊德·蔣·阿巴斯(Syed Jan Abas), 阿默·夏克爾·薩爾曼(Amer ShakerSalman)著，伊斯蘭的幾何藝術，廖純中譯，左岸文化，台北，2004。
- [10] AMA2.0 使用手冊。 <http://ama.nctu.edu.tw/>

附錄：AMA2.0 定線複製法使用介紹

AMA2.0 是由交大陳明璋教授所研發的免費使用軟體，其主要是建構在 powerpoint 介面上的一增益集，其定線複製法的操作方式如下：

- (1) 先選取基準線
- (2) 再選取欲複製的規則模式(基本單元)
- (3) 再送到欲複製的起始值線段

其執行結果將會根據 powerpoint 中線條的大小、方向，如下圖所示：



【評語】 032813

作品探討 Escher 極限圖之構成原理，具有研究精神，報告內容生動、作品呈現完整。對於不同極限圖類型進行抽絲撥繭地分析，得到一些有趣的規則，在數學分析部分有較深入的探討、實體應用面仍有進步空間，如能應用所分析出來的原則製作一個設計系統協助使用者創造類似圖案更佳。

摘要

本研究主要是對M. C-Escher手繪的各種極限圖(帶狀極限圖、正方形極限圖以及圓極限圖)進行結構解析，並探討其背後的數學理論、方法，運用本研究的理論方法、結構解析與格線系統，在適當軟體支援下，將以可輕鬆出作富有創意磚磁物動的鋪密全完可且圖樣，本研究可應用於跨領域教學(藝術人文、資訊、數學)、建築設計、科普玩具(如拼圖)及相關創意設計圖。

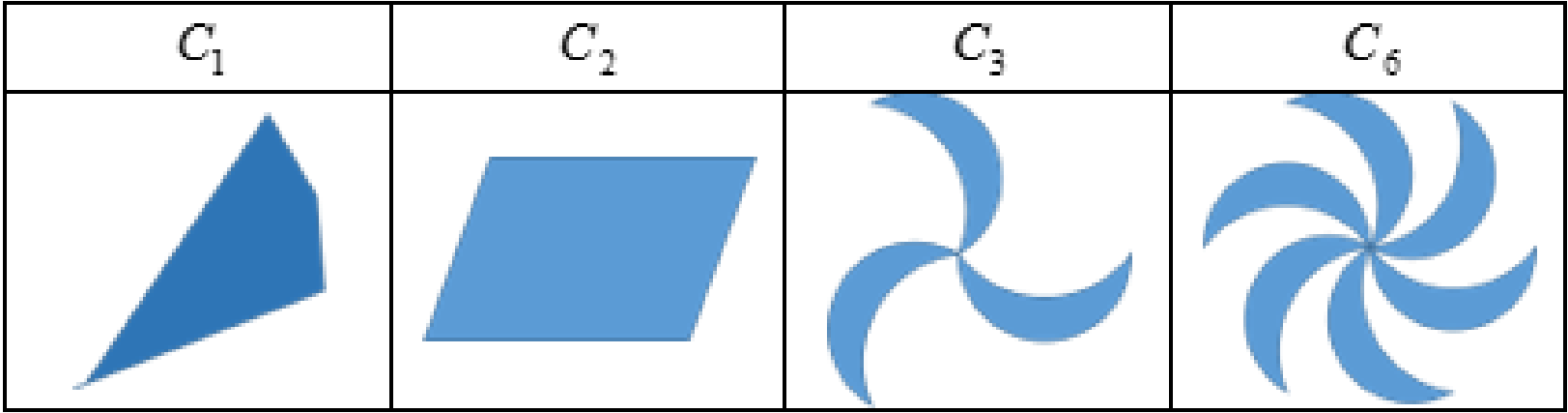
研究目的

- 1. 將M.C-Escher帶狀極限圖進行結構解析與實作，並探討其設計法與相關性質
- 2. 將M.C-Escher正方形極限圖進行結構解析與實作，並探討其設計法與相關性質
- 3. 將M.C-Escher正方形極限圖進行推廣與創作，研發相關發散型拼貼圖與格線系統
- 4. 將M.C-Escher圓極限圖進行結構解析與實作，並探討其相關數學性質
- 5. 運用各種結構解析方法，進行M.C-Escher 圓極限圖創作，並將本研究成果產出成品

符號定義

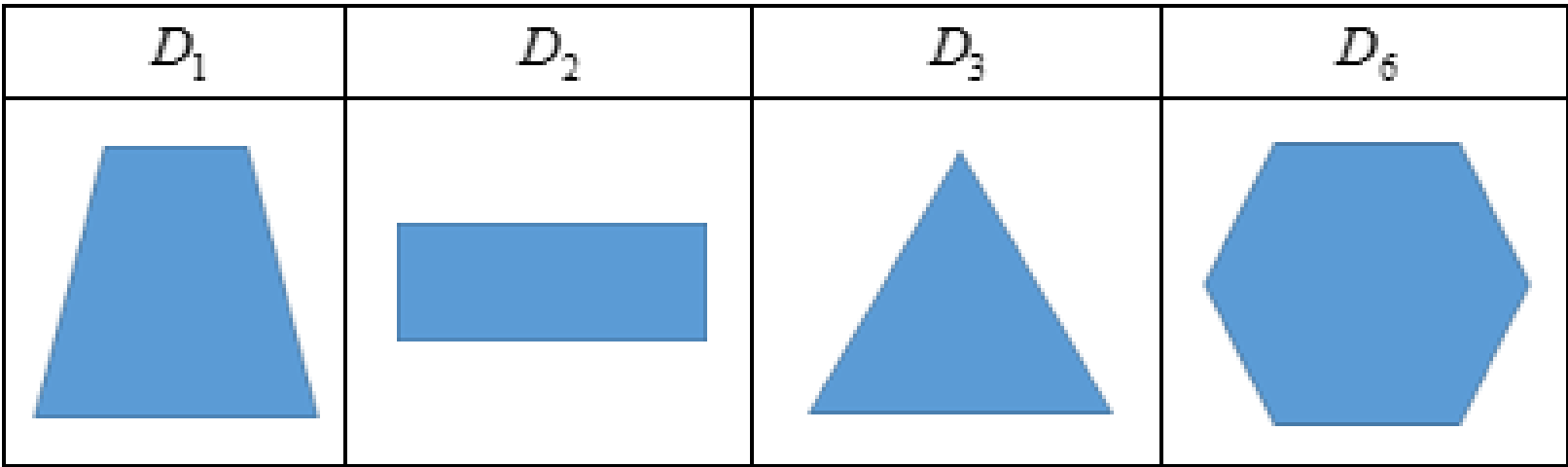
1. n重旋轉對稱(C_n)與n重鏡射對稱(D_n)：

(1) n重旋轉對稱：以符號來表示，其中n為最高旋轉 對稱之次數。



圖(一) n重旋轉對稱範例

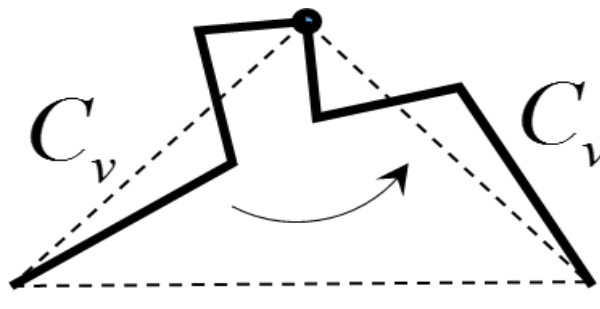
(2)n重鏡射對稱：以符號來表示，其中n為對稱軸之數量。



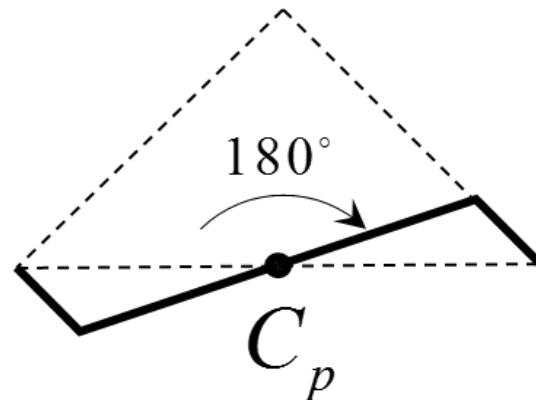
圖(二) n重鏡射對稱範例

2. 角旋轉(C_v)與邊中點旋轉(C_p)：

在M. C-Escher的極限圖中，其單位動物的設計運用了角旋轉(C_v)與邊中點旋轉(C_p)這兩種作用方式，其作用方式如下圖(a)、(b)所示：



(a)角旋轉(C_v)



(b)邊中點旋轉(C_p)

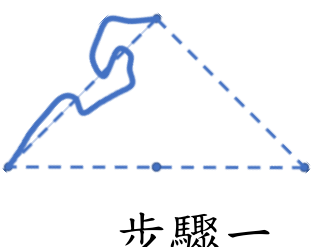
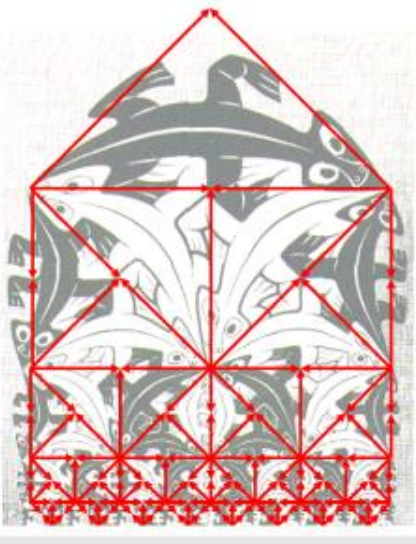
研究一、M. C-Escher帶狀極限圖之結構解析與實作

在M. C-Escher的帶狀極限圖(蜥蜴)中，我們不難發現其規律，若將其每隻蜥蜴的頭、尾身體，以線段連接，我們發現：

- (1)每隻大大小小的蜥蜴都是由等腰直角三角形所構成
- (2)其線段比例是依據 1:√2 (即公比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$) 的無窮等比方式往下縮小
- (3)每個等腰直角三角形的邊緣結構設計法均為[C_v,C_v,C_p]



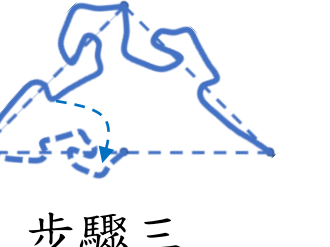
M. C-Escher帶狀極限圖(蜥蜴)及其結構



步驟一



步驟二



步驟三



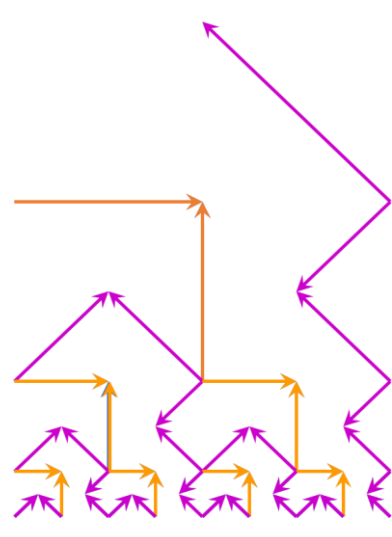
步驟四



步驟五



M. C-Escher帶狀極限圖(蜥蜴)完成圖



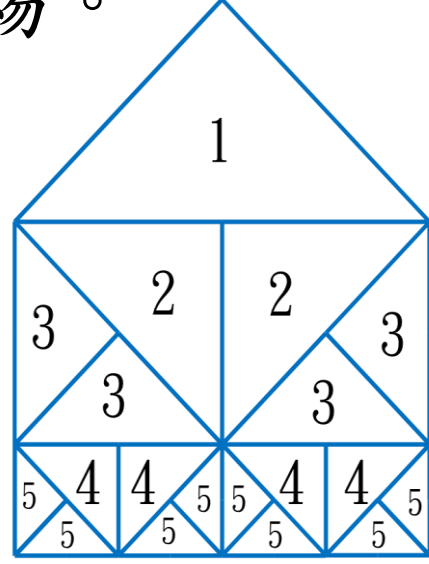
依步驟五線段顏色定線複製到格線上

在個數的部份：

我們將每一層相同大小的蜥蜴作編號，同一數字編碼代表為同一層，偶數層中的每一隻蜥蜴都會往下生長出兩隻小蜥蜴。

令a_n為第n層的蜥蜴數量

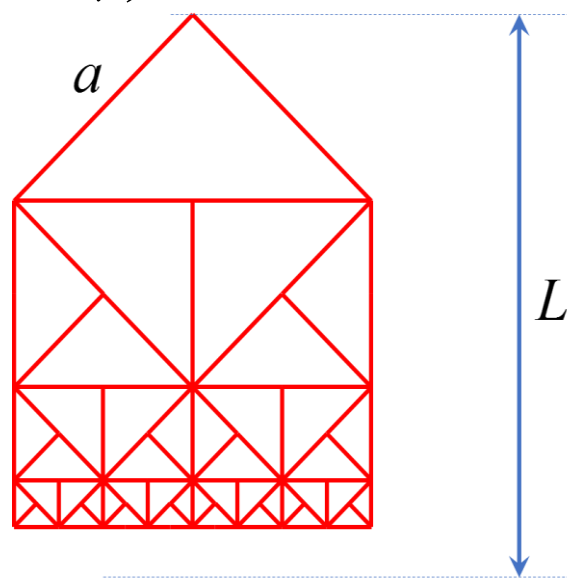
$$a_n = 2^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \quad (n \geq 2)$$



極限圖總長度部份：

令最上層的等腰直角三角形其股長為a，帶狀極限圖之極限總長度為L(如下圖)

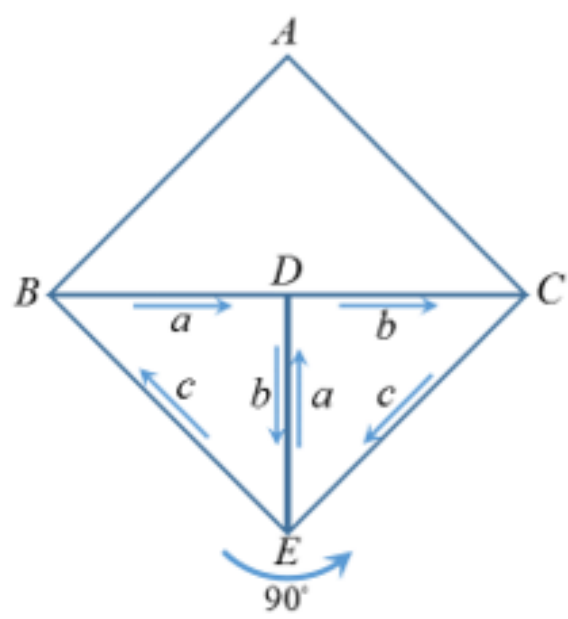
$$L = \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{4}a + \dots = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$$



為了解磁磚設計法種數，我們將等腰直角三角形的三邊分別以向量a,b,c表示，其銜接情形有兩種可能，如下圖所示：

情況一：a的鄰居為b

此時直角三角形a,b兩邊的作用方式是以D點為旋轉中心，作90度旋轉(即角旋轉C_v)，而圖中的BC 因跟a,b兩邊相接，且以D點為旋轉中心，故斜邊c的設計只能用C_p，而C_p作用的邊需與C_v的邊自我相似且縮放。



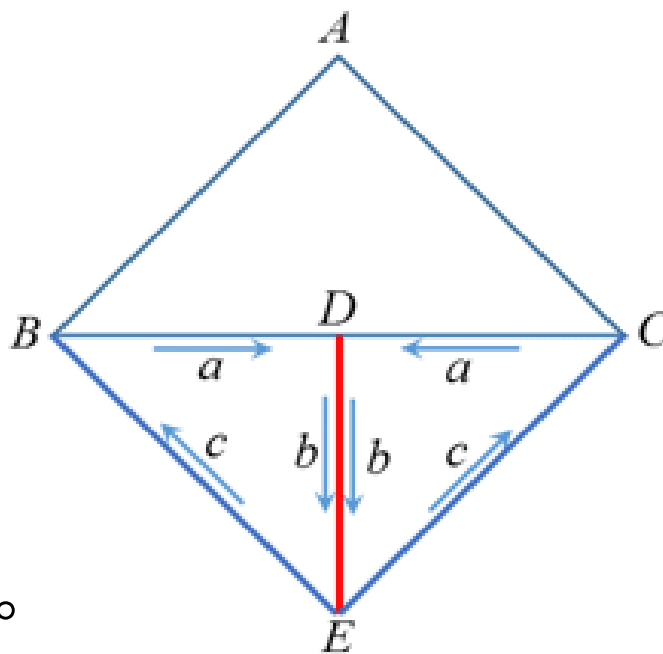
情況一(a的鄰居為b)



原圖結構

情況二：b的鄰居為b

此時DE為鏡射軸，導致直角三角形a,b,c均不能作設計變化，只能是直線。綜合上述：M. C-Escher帶狀極限圖的三邊的設計方法只能是[C_v,C_v,C_p]此設計法。



情況二(b的鄰居為b)

結論一：(1) M. C-Escher帶狀極限圖其每個等腰直角三角形基本單元設計法只能是[C_v,C_v,C_p]

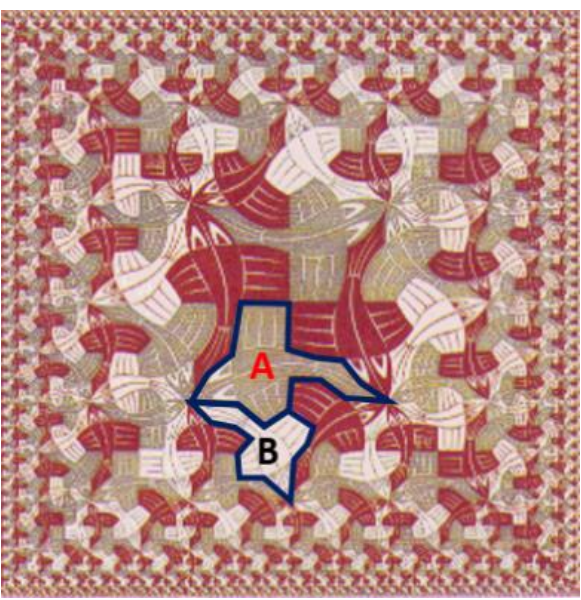
(2)第n層的蜥蜴數量個數為 a_n = 2^{⌊(n+1)/2⌋} (n ≥ 2)

(3)若其最上層直角三角形股長為a，則帶狀極限圖總長度 L = $\frac{3\sqrt{2}}{2}a$

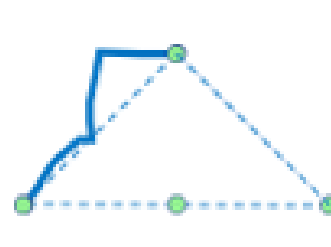
研究二、M. C-Escher正方形極限圖之結構解析與實作

M. C-Escher的正方形極限圖(魚)中，我們不難發現：Escher所繪的這張魚在結構上是有瑕疵的，或許是為了圖畫的完整性，導致每隻魚並沒有自我相似，才可拼接在一起；為此，我們也將Escher畫作圖做些適當的校正。在正方形極限圖中，若每隻魚要自我相似達到可密鋪的條件，其每個等腰直角三角形基本單元須滿足：

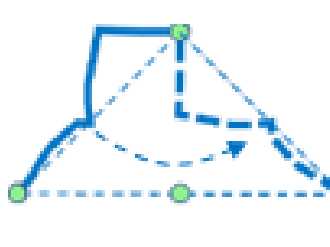
- (1)線段比例是依據 1:√2 (即公比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$) 的無窮等比方式往下縮小
- (2)每個等腰直角三角形的邊緣結構設計法均為[C_v,C_v,C_p]



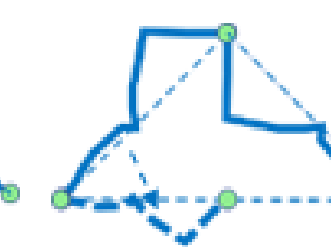
A、B兩隻魚基本單元結構不一致



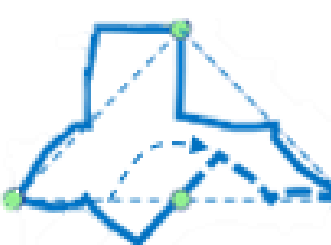
步驟一



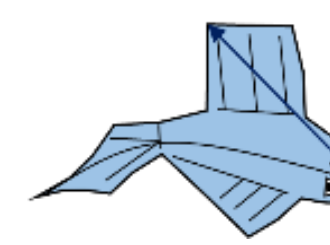
步驟二



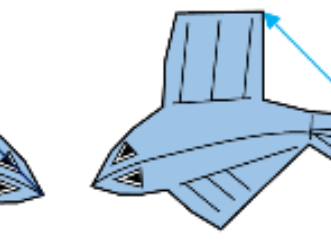
步驟三



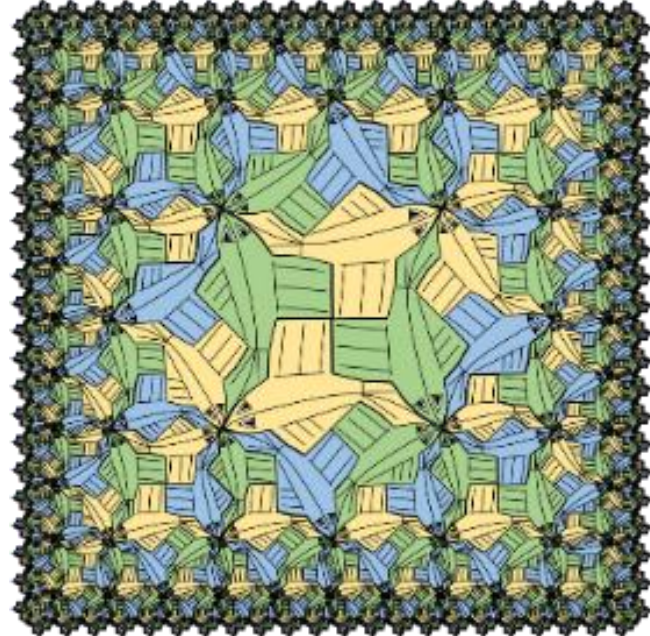
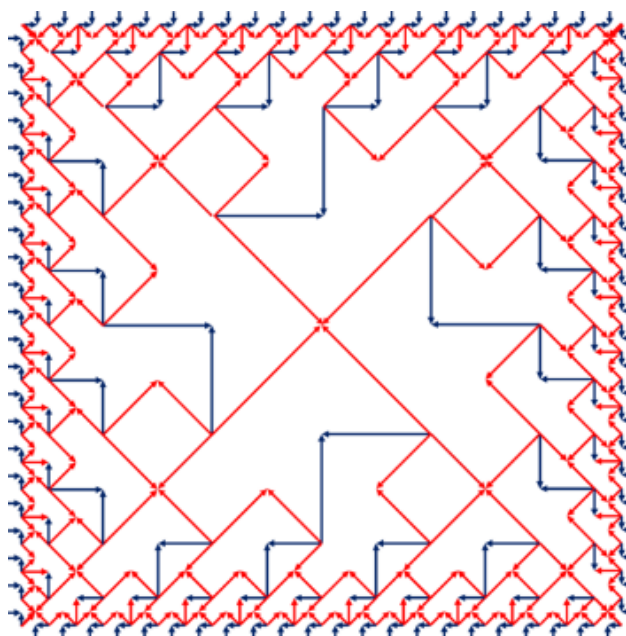
步驟四



步驟五 內部細節繪製



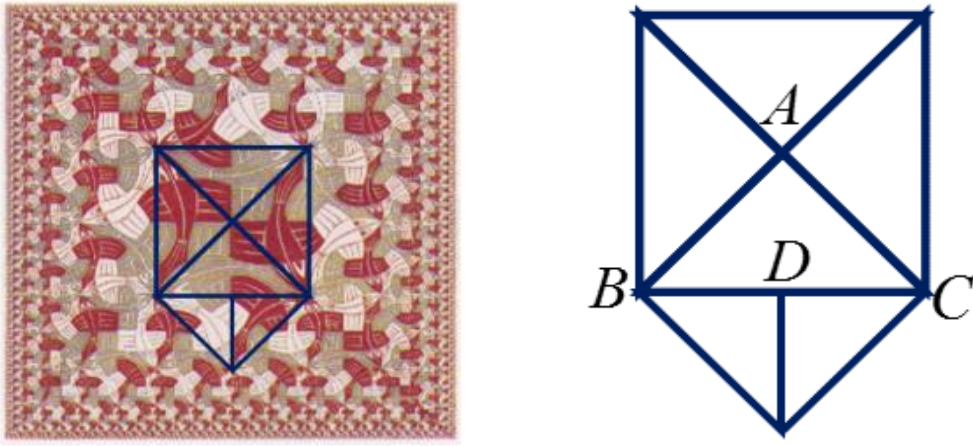
步驟六 照線段顏色將魚統一定線複製上去



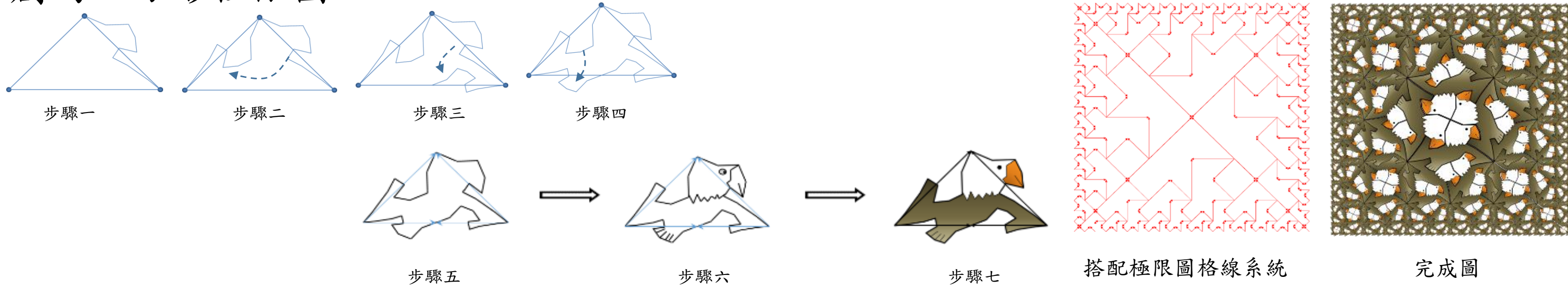
運用三種不同顏色的成品

為了解所有可能的磁磚設計法種數，我們進一步解析結構，如下圖所示，圖中的A點為四重旋轉中心點，故 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AB}$ 兩邊只能作 C_v 運算，而斜邊中點D點為兩個小的等腰直角三角形的角旋轉中心，故 $\overline{BD}$ 、 $\overline{CD}$ 兩邊只能以D點為旋轉中心，作180度邊中點旋轉 C_p 。

因此，M. C-Escher正方形極限圖的三邊的設計方法亦只能是 $[C_v, C_v, C_p]$ 此設計法。



我們進一步將正方形極限圖中結構進行推廣，以上述理論方法與格線系統，便可設計出自創的正方形極限圖

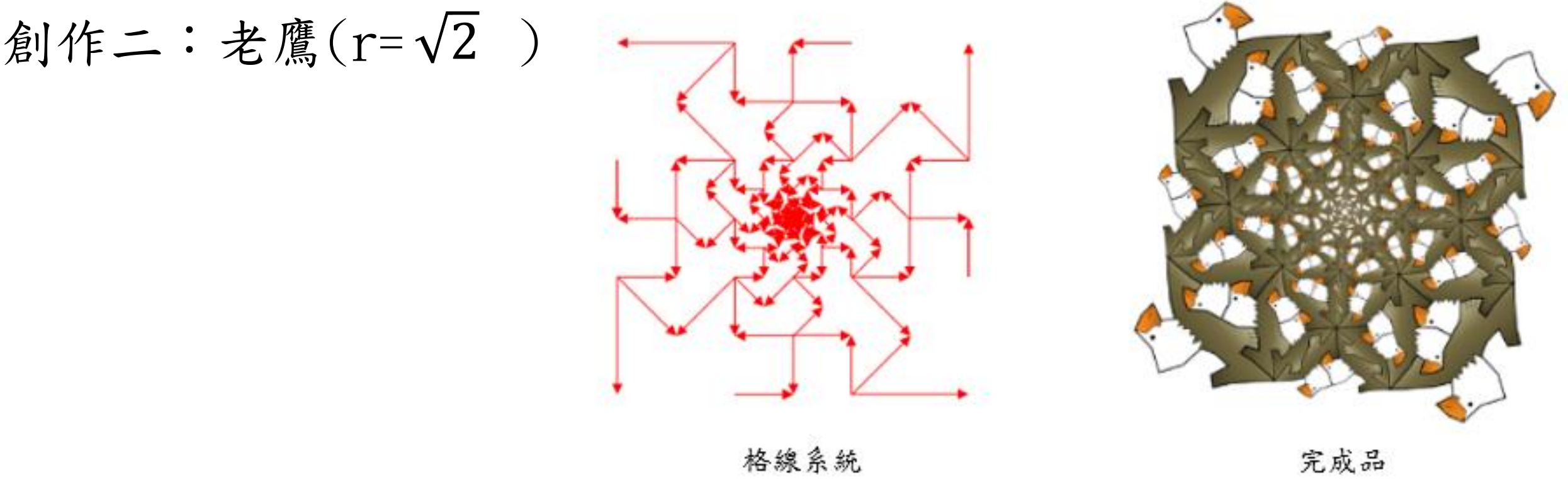
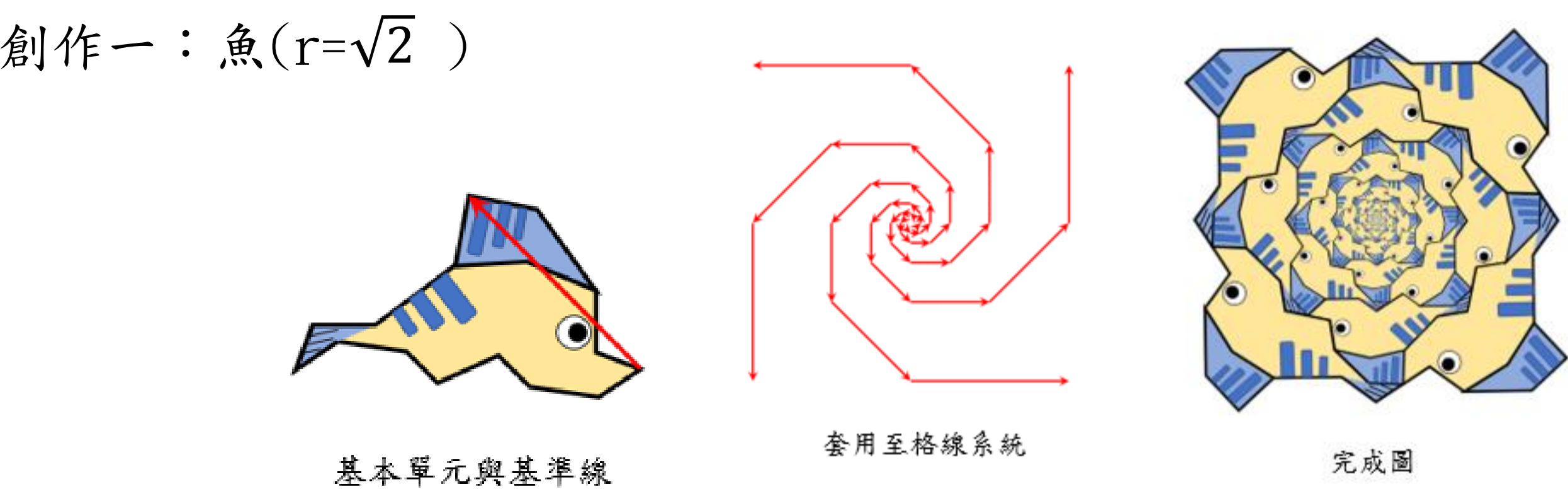


結論二：(1) M. C-Escher帶狀極限圖其每個等腰直角三角形基本單元設計法只能是 $[C_v, C_v, C_p]$

(2)第n層的魚數量個數為 $a_n = 2^{\left\lceil \frac{n+5}{2} \right\rceil} + 16 \quad (n \geq 3)$

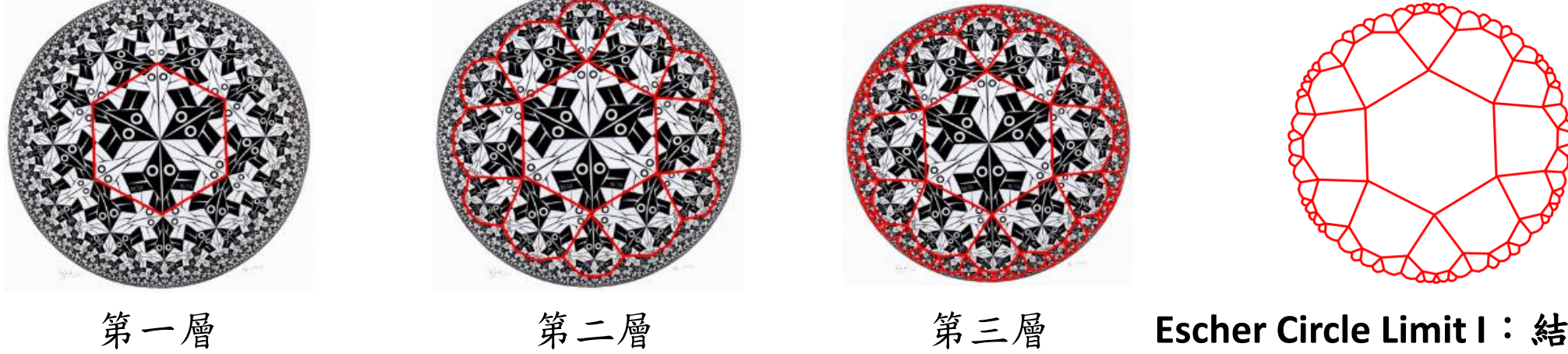
(3)若最內層直角三角形股長為a，則正方形極限圖總面積 $A = 18a^2$

研究三、向外發散的螺旋式拼貼圖與格線系統研發

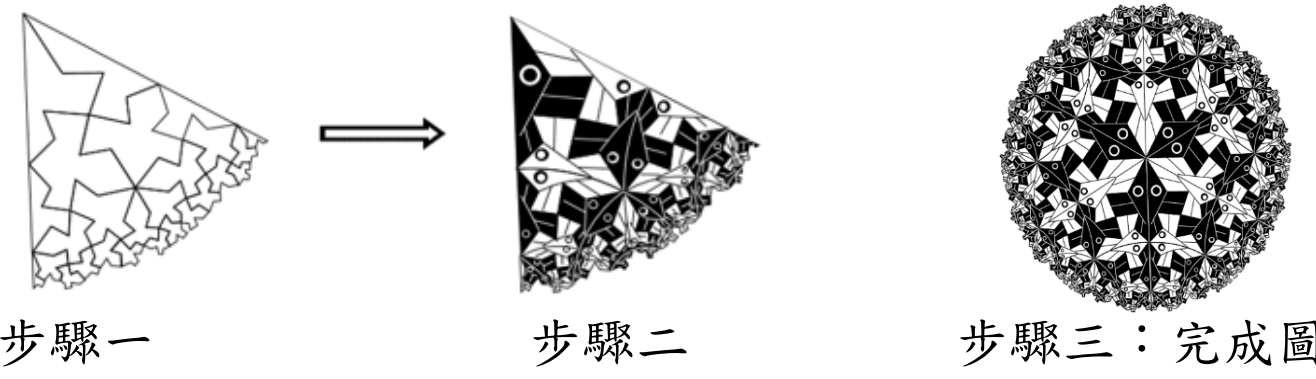


研究四、M. C-Escher 圓極限圖之結構解析與實作

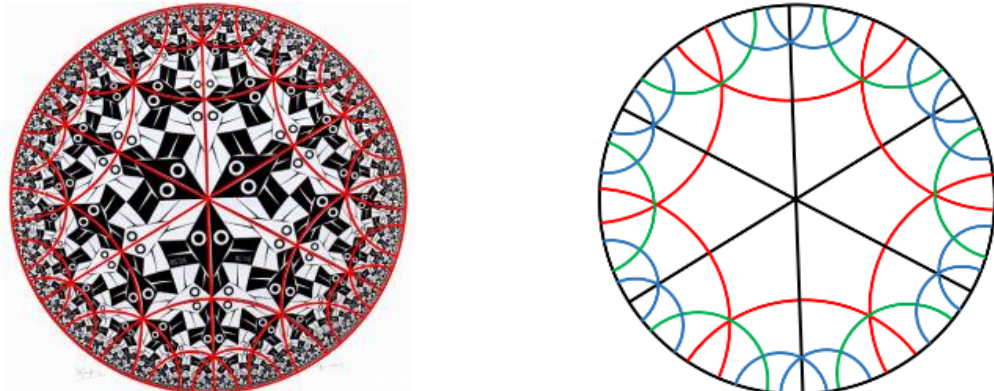
Escher Circle Limit I結構的區塊均由六邊形構成(均有三黑三白魚)，頂點秩數均為4，結構定義為{6,4}。



圖形具備三條對稱軸，對稱性為 D_3 ，以AMA2.0將其繪製出成品



在解析魚身紋路後，繪製三條對稱軸的區塊均是四邊形曲面(均有剖半的兩黑魚、白魚)，曲面四邊形的頂點秩數列相同的[6,4,6,4]。

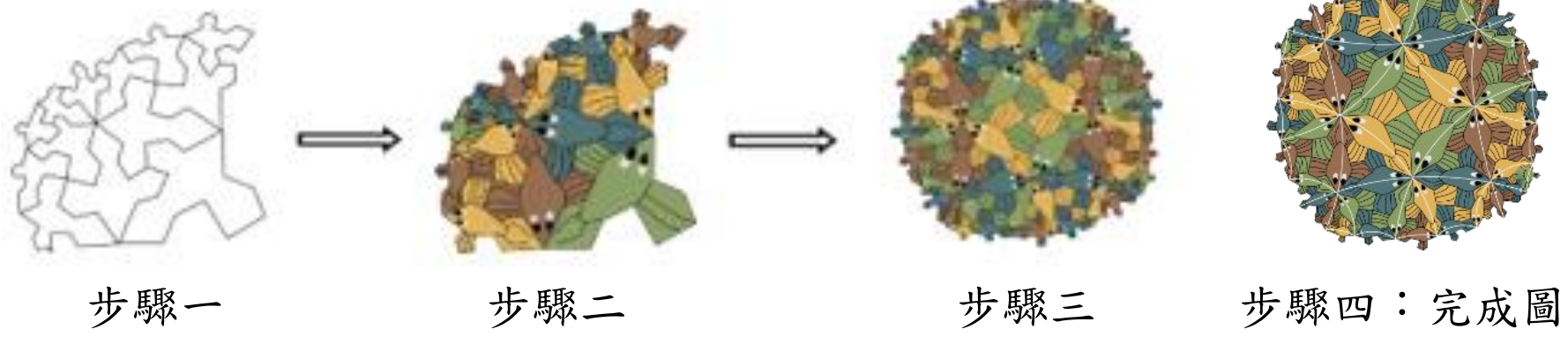


Escher Circle Limit I 圓弧結構圖

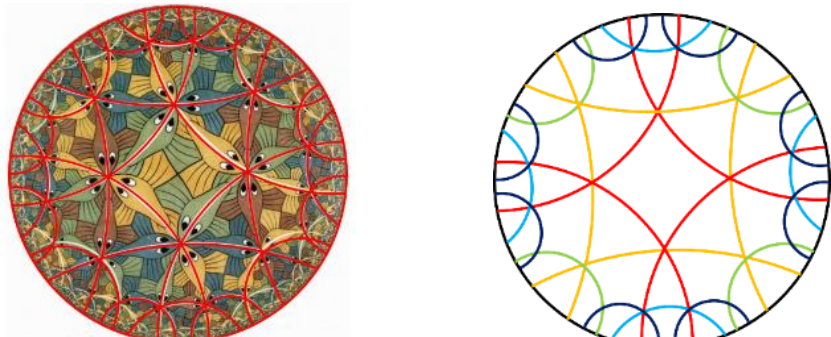
Escher Circle Limit III結構的區塊均由八邊形所構成(區塊中均有四隻魚)，頂點秩數均為3，結構為{8,3}。



結構為四重旋轉對稱圖，對稱性為 C_4 ，以AMA2.0將其繪製出成品



在解析紋路後，結構中每一交點都由三圓交會共點而成，圖形經圓弧分割後為三角形、四邊形曲面的集合，而所有頂點秩數均為6，每個頂點周圍是三角形、四邊形曲面相間而成。



Escher Circle Limit III 圓弧結構圖

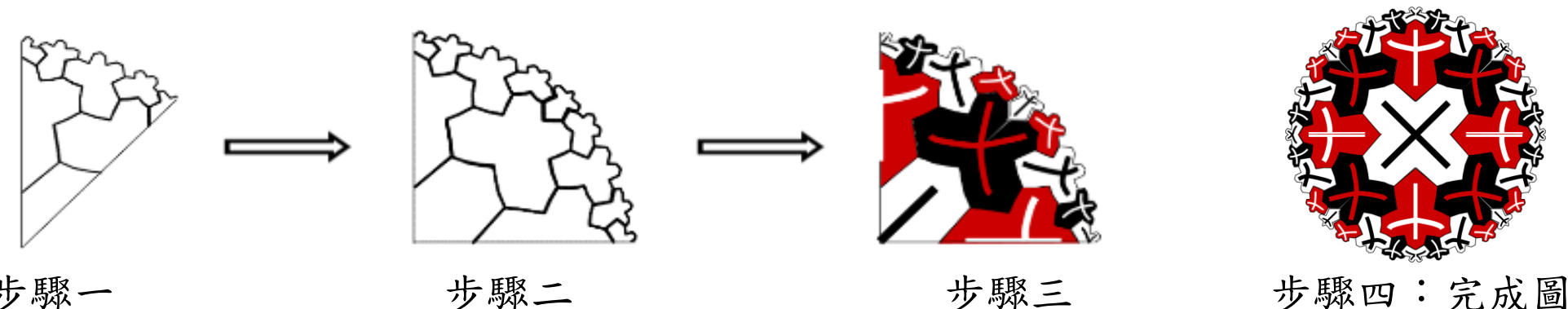
結論三：(1) Escher Circle Limit I圖形結構為{6,4}，對稱性為 D_3

(3) Escher Circle Limit III圖形結構為{8,3}，對稱性為 C_4

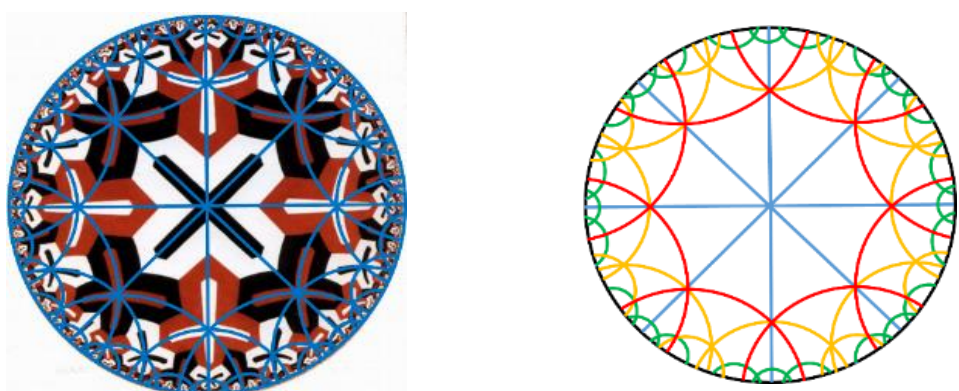
Escher Circle Limit II結構的區塊均由八邊形構成(均有一十字圖樣)，頂點秩數均為3，結構為{8,3}



圖形具備四條對稱軸，對稱結構為 D_4 ，以AMA2.0將其繪製出成品



在解析紋路後，圖形結構中每一交點都由三圓交會而成，秩數均為6，再繪製三條對稱軸，圖中區塊均是三角形曲面，頂點秩數列相同為[8,8,8]

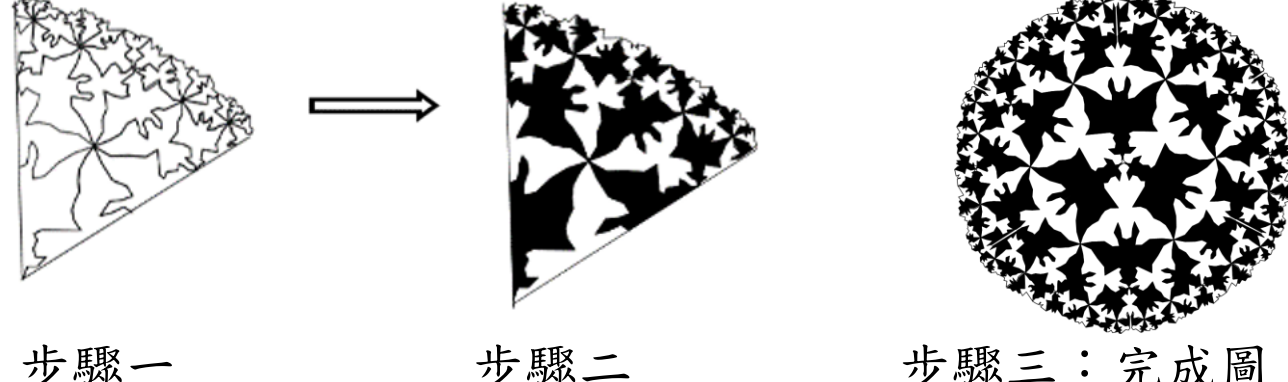


Escher Circle Limit I 圓弧結構圖

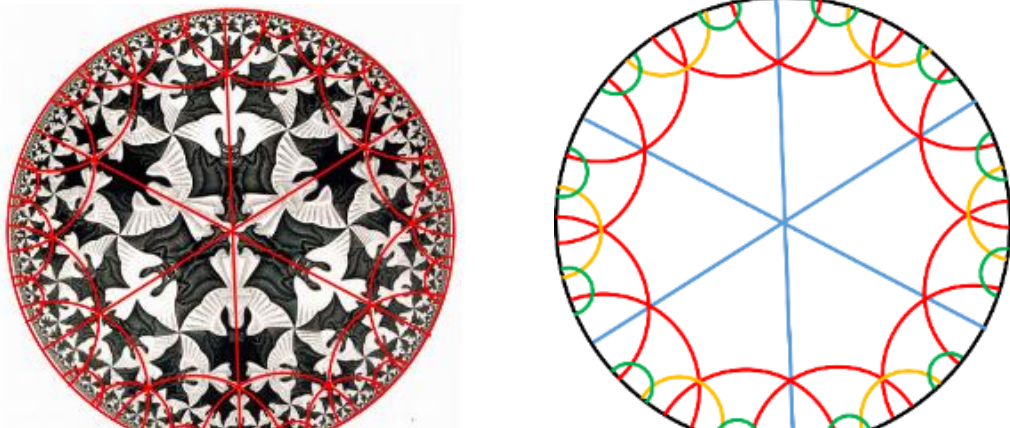
Escher Circle Limit IV結構的區塊均由六邊形構成(區塊中均有三個天使、惡魔)，頂點秩數均為4，結構為{6,4}。



圖形具備四條對稱軸，對稱性為 D_3 ，以AMA2.0將其繪製出成品



在解析紋路後，繪製三條對稱軸後的區塊均是四邊形曲面(曲面均有剖半的四天使、惡魔)，曲面四邊形的頂點秩數列相同，頂點秩數列為[6,6,6,6]。



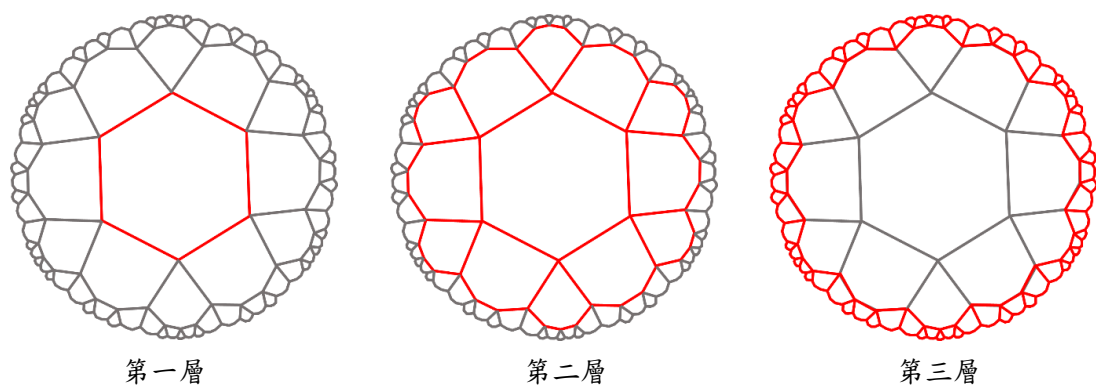
Escher Circle Limit IV 圓弧結構圖

(2) Escher Circle Limit II圖形結構為{8,3}，對稱性為 D_4

(4) Escher Circle Limit IV圖形結構為{6,4}，對稱性為 D_3

一、Escher Circle limit I、IV多邊形結構生成數量探討

在多邊形結構部份，我們對每一層的定義如下圖所示，最內部為第一層(1個六邊形)，第二層為由內往外數第二圈(兩種六邊形各6個，共12個)，以此類推。



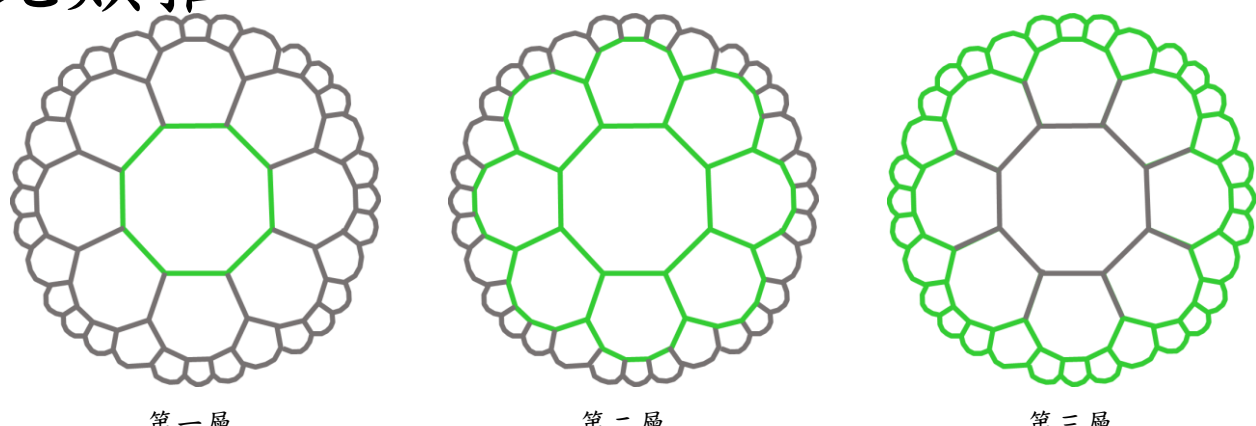
令 a_n 為第n層中的所有的六邊形個數

b_n 為第n層中三邊與鄰居有相接的六邊形個數

c_n 為第n層中兩邊與鄰居有相接的六邊形個數

二、Escher Circle limit II、III多邊形結構生成數量探討

在多邊形結構部份，其每一層的定義如下圖所示，最內部為第一層(1個八邊形) 第二層為由內往外數第二圈(8個八邊形)，以此類推。



令 a_n 為第n層中的所有的八邊形個數

b_n 為第n層中三邊與鄰居有相接的八邊形個數

c_n 為第n層中兩邊與鄰居有相接的八邊形個數

可知 $a_n = b_n + c_n$ 又
$$\begin{cases} b_n = 3b_{n-1} + 4c_{n-1} (n \geq 2) \\ c_n = 2b_{n-1} + 3c_{n-1} (n \geq 2) \\ b_2 = c_2 = 6 \end{cases}$$

運用特徵方程式：令 $b_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ 、 $c_n = A' \cdot \alpha^n + B' \cdot \beta^n$ （其中 α, β 為 $x^2 - 6x + 1 = 0$ 之兩根）

故得 $a_n = (\frac{-12+9\sqrt{2}}{2})(3+2\sqrt{2})^n + (\frac{-12-9\sqrt{2}}{2})(3-2\sqrt{2})^n$

可知 $a_n = b_n + c_n$ 又
$$\begin{cases} b_n = 3b_{n-1} + 2c_{n-1} (n \geq 2) \\ c_n = a_{n-1} (n \geq 3) \\ b_2 = c_3 = 8 \end{cases}$$

運用特徵方程式：令 $b_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ 、 $c_n = A' \cdot \alpha^n + B' \cdot \beta^n$ （其中 α, β 為 $x^2 - 4x + 1 = 0$ 之兩根）

故得 $a_n = (\frac{-12+8\sqrt{3}}{3})(2+\sqrt{3})^n + (\frac{-12-8\sqrt{3}}{3})(2-\sqrt{3})^n$

結論四：(1) Escher Circle limit I、IV(結構同為{6, 4})其第 n 為量數構結形邊多層

$$a_n = (\frac{-12+9\sqrt{2}}{2})(3+2\sqrt{2})^n + (\frac{-12-9\sqrt{2}}{2})(3-2\sqrt{2})^n$$

(2) Escher Circle limit II、III(為同構結{8, 3})第其 n 為量數構結形邊多層

$$a_n = (\frac{-12+8\sqrt{3}}{3})(2+\sqrt{3})^n + (\frac{-12-8\sqrt{3}}{3})(2-\sqrt{3})^n$$

五、討論與應用

我們進一步將圓極限圖中的多邊形結構與圓弧結構做疊合(以Escher Circle LimitII、Escher Circle Limit III為例，兩圖的結構均為{8,3}結構，如下圖(a)、(b)所示)，



圖(a) Escher Circle Limit II (圓弧/多邊形疊合)



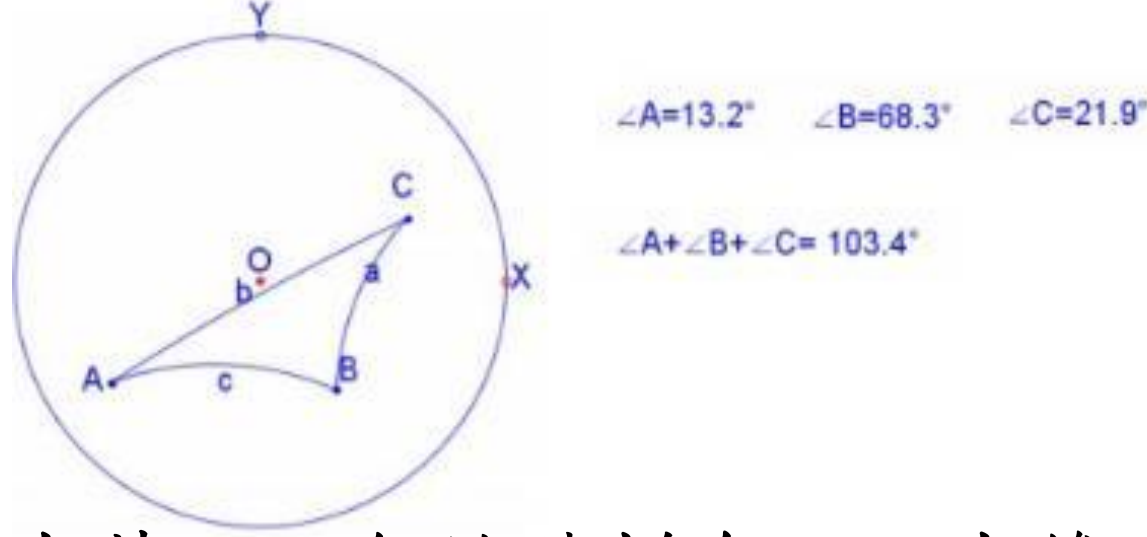
圖(b) Escher Circle Limit III (圓弧/多邊形疊合)

多邊形結構是依圖形端點連線而成，而圓弧結構則是以圖形的規律變化繪製而成，而將Escher Circle Limit II、III的多邊形結構與圓形結構相疊後，發現了以下規律：

- 1. 多邊形結構的邊中點或頂點必有一弧通過，故我們也以此來檢查弧數是否有缺漏，結構是否錯誤...等等。
- 2. 多邊形結構的數量與圓弧層數的數量有關聯

在Escher Circle Limit II中，以最內層第一個八邊形為首層，八個最外圈的紅色弧與之呼應，與它相連的8個八邊形為第二層，恰與圖一中黃色弧(第二層)的數量一樣；而第三層的32個八邊形則與第三層的32個綠色弧位置相對應。

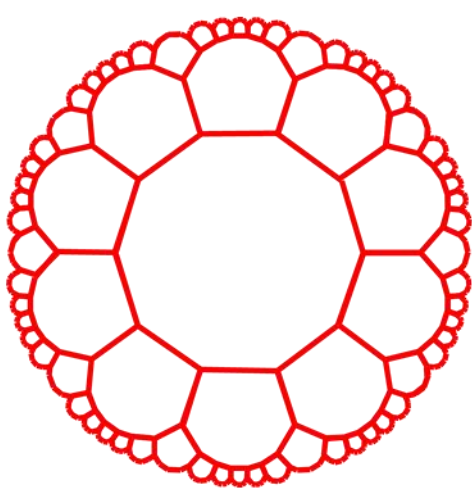
在研究完Escher四張極限圖的結構後，我們想試試看能否創造不同的幾何結構，並繪製創意的圓極限圖，在文獻[7]中提到：「在雙曲幾何中，**q**個正**p**邊形，可在某一點無縫隙拼合的必要條件是 $(p-2)(q-2) > 4$ 」，在參考資料[8]中，提到：在雙曲幾何中，三角形的內角和是小於180°(如下圖所示)



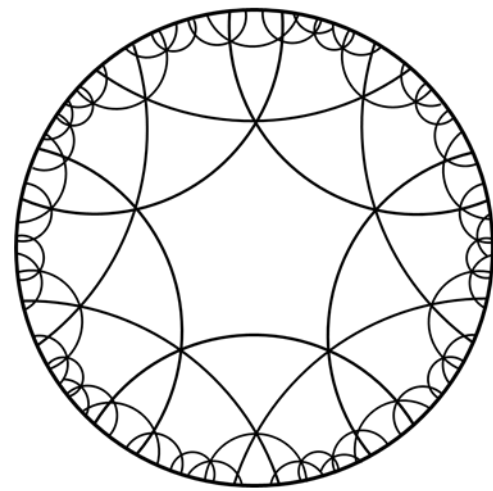
由於q個正p邊形要在某一點無縫隙拼合，且在雙曲幾何中三角形的內角和是小於180°

$$\frac{2\pi}{q} \cdot p < (p-2)\pi \Rightarrow 2p < (p-2) \cdot q \Rightarrow pq - 2p - 2q > 0 \Rightarrow (p-2)(q-2) > 4$$

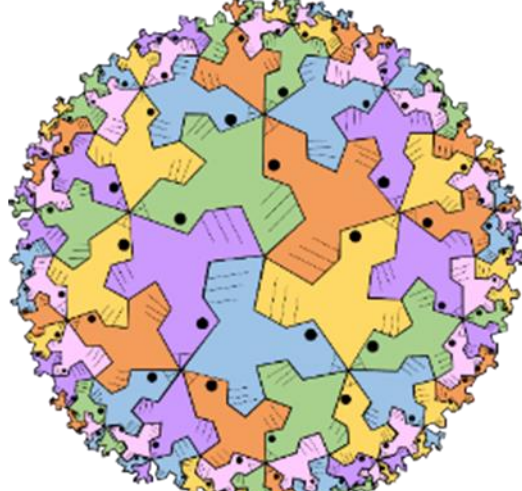
故只要滿足以上條件，就可創作q個正p邊形在一點無縫隙的極限拼貼圖，以下是以文獻[7]中的{10, 3}結構自創：



步驟一：{10, 3}結構



步驟二：圓弧結構

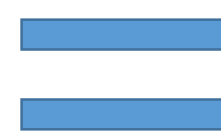


步驟三：自創圖

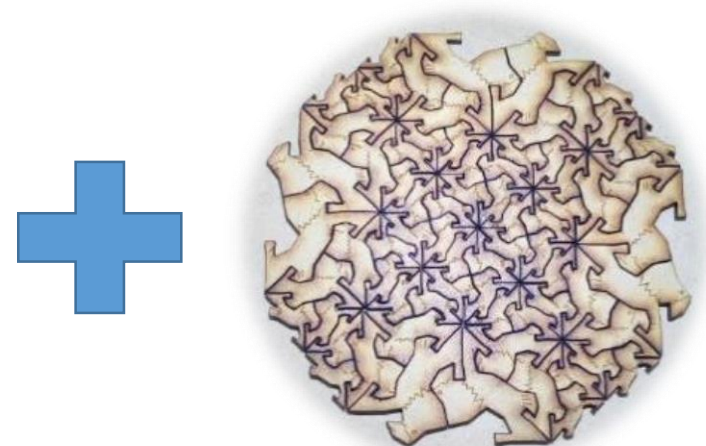
最後，我們利用雷射切割機，將本研究中的作品，製作成一拼圖板，如右圖一所示：此拼圖板還可以有不同的玩法(如右圖二所示)重新組合成往外發散(公比 $r > 1$)的圖形。



(圖一)



(圖二)



六、結論

一、M. C-Escher帶狀極限圖其每個等腰直角三角形基本單元設計法只能是 $[C_v, C_v, C_p]$ ，第 n 層蜥蜴個數為 $a_n = 2^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil}$

($n \geq 2$)，若其最上層直角三角形股長為 a ，則帶狀極限總長度 $L = \frac{3\sqrt{2}}{2} a$

二、M. C-Escher正方形極限圖其每個等腰直角三角形基本單元設計法只能是 $[C_v, C_v, C_p]$ ，第 n 層魚的個數為 $a_n = 2^{\lceil \frac{n+5}{2} \rceil} + 16$

($n \geq 3$)，若最內層直角三角形股長為 a ，則正方形極限圖總面積 $A = 18a^2$

三、M. C-Escher的創作圖因出自於手繪，其每隻動物形狀、結構並非自我相似，鋪密法無部細有致導。運用我們的理論方法、結構解析與格線系統，在適當軟體支援下，將可輕鬆出作富有創意磚磁物動的鋪密全完可且圖樣。

四、將M. C-Escher 四個圓極限圖實作與我們的自創圖列表比較，其結構解析如右表所示：

五、Escher Circle limit I、IV(為同構{6, 4})第其 n 多邊形結構數量

為：
$$a_n = (\frac{-12+9\sqrt{2}}{2})(3+2\sqrt{2})^n + (\frac{-12-9\sqrt{2}}{2})(3-2\sqrt{2})^n$$

Escher Circle limit II、III(為同構結{8, 3})第其 n 多邊形結構

為：
$$a_n = (\frac{-12+8\sqrt{3}}{3})(2+\sqrt{3})^n + (\frac{-12-8\sqrt{3}}{3})(2-\sqrt{3})^n$$

六、只要結構滿足 $(p-2)(q-2) > 4$ 條件，就可以創作出結構為 $\{p, q\}$ 圓極限圖；本研究中也創作出結構為{10, 3}、對稱性 C_5 的圓極限圖(鳥)

七、利用雷射切割機將本研究設計的正方形極限圖產出，本拼圖板可有數種不同玩法；本研究亦可應用於跨領域教學(藝術人文、資訊、數學)

、建築設計、科普玩具及相關創意設計。

七、結論

[1] The Official M.C.Escher Website, by The M.C. Escher Company B.V., from <http://www.mcescher.com>

[2] 張瑜軒(民91)，群論應用於艾雪鑲嵌藝術之對稱構成研究-以多媒體創作為例，中原大學商業設計學系碩士學位論文，台中市。

[3] 張佐安、史謹誌、胡晉傑著，“繪身繪影—正三角形磁磚設計方法與碎形密鋪之研究”，第47屆全國中小學科展佳作作品，2007。

[4] 胡晉華著，“從平面到空間-廣義四邊形磁磚的設計法與應用”，第50屆全國中小學科展佳作作品，2010。

[5] 史謹誌著，“站在Escher的肩膀上-平面及空間中的密鋪圖形設計”，第50屆全國中小學科展高中組佳作作品，2010。

[6] 吳祥猷，凌胤濤，馮震昇著，“Escher狂想曲”，2013年台灣國際科展電腦科學科二等獎。

[7] 林保平著，“雙曲幾何基本構圖及變換在數學算板中的實踐與應用”
[http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/106\(396-405\)/402-PDF/2-106013-16-37-%E7%A7%91%E5%AD%B8%E6%95%99%E5%AE%A4-%E6%95%B8-%E9%9B%99%E6%9B%B2%E5%B9%BE%E4%BD%95%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E6%A7%8B%E5%9C%96%E5%8F%8A%E8%AE%8A%E6%8F%9B%E5%9C%A8%E6%95%B8%E5%AD%B8%E7%AE%97%E6%9D%BF%E4%B8%AD%E7%9A%84%E5%AF%A6%E8%B8%90%E8%88%87%E6%87%89%E7%94%A8.pdf](http://www.sec.ntnu.edu.tw/Monthly/106(396-405)/402-PDF/2-106013-16-37-%E7%A7%91%E5%AD%B8%E6%95%99%E5%AE%A4-%E6%95%B8-%E9%9B%99%E6%9B%B2%E5%B9%BE%E4%BD%95%E5%9F%BA%E6%9C%AC%E6%A7%8B%E5%9C%96%E5%8F%8A%E8%AE%8A%E6%8F%9B%E5%9C%A8%E6%95%B8%E5%AD%B8%E7%AE%97%E6%9D%BF%E4%B8%AD%E7%9A%84%E5%AF%A6%E8%B8%90%E8%88%87%E6%87%89%E7%94%A8.pdf)

[8] 雙曲幾何性質：<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%8F%8C%E6%9B%B2%E5%87%A0%E4%BD%95>

[9] 斯巴阿·蔣·德伊塞(Syed Jan Abas)，曼爾薩·爾克夏·默阿(Amer ShakerSalman)著，術藝何幾的蘭斯伊，譯中純廖，化文岸左，北台，2004。

[10] AMA2.0使用手冊。<http://ama.nctu.edu.tw/>