

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 數學科

第一名

030423

三角形可變動的外西瓦線之共點問題

學校名稱：新北市立文山國民中學

作者： 國二 許崇煒 國二 張齊軒	指導老師： 蕭偉智 李昱德
-------------------------	---------------------

關鍵詞：共點共線、Barycentric Coordinate、
Kiepert 雙曲線

得獎感言

仁心仁「數」，「學」無常師

數學是什麼呢？以前我們認為數學就是計算，輕鬆簡單，經過一年多的數學研究，我們才意識到數學非常深奧。當我們學得越多，就越發現自己的渺小，於是更須戰戰兢兢地謙虛學習！事實上，數學是一種理解大自然運行，以及解決問題的強大工具。

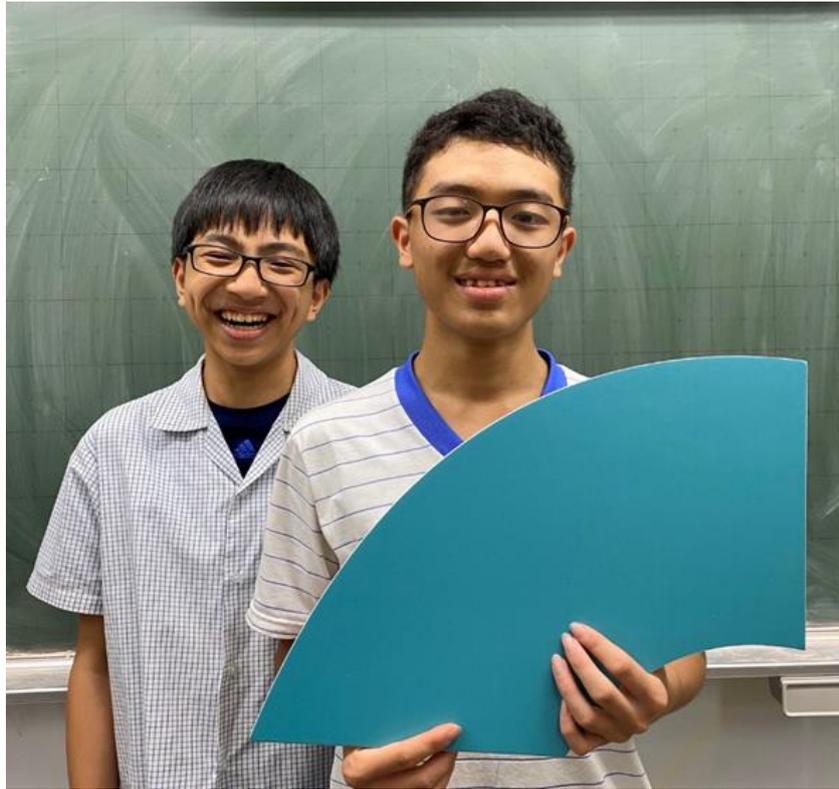
還記得五月得知進入全國賽後，我們開始著手不同的方向，同時研究難度也提高了，我們需要大量的專注力、創造力、計算力、與實驗能力，有時候證明化簡失敗，或是圖形繪製不正確，就得要全部重來，但是我們並沒有氣餒，反而互相砥礪跟協助，一起找出錯誤之處。我們永遠記得，每每成功突破時，那種高興的感覺，這是從都沒有體會過的醍醐灌頂。此外，我們亦體認到做研究不能只是被動的去做，或是等待指導老師的指令，而是主動地去尋找其他的可能性或閱讀資料，才能使得研究內容變得更加豐富及有創意。

研究除了記錄與書寫外，口語發表與捍衛是另外一大挑戰，原來要「言之有物、言之有理」得需要練習、再練習！俗語說：「一回生、二回熟、三回變高手」，經過無數次練習，我們對於研究內涵更加了解，口頭報告時也不會因為緊張感而口吃或漏字，這使得我們可以專心「聆聽」——聽彼此的報告內容，以及聽懂評審的提問以及給出適當的回應。

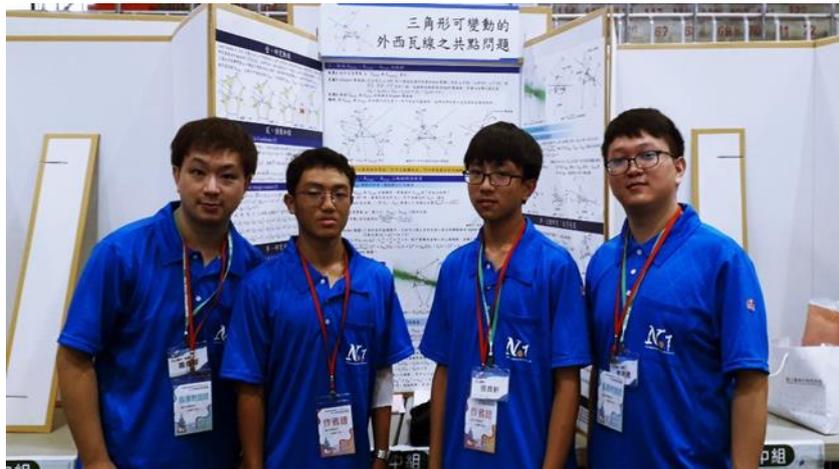
今年因為 COVID-19 疫情關係，大會在第四天晚上先公布入圍前三名名單，但是我們當晚遲遲不敢正視公告，好擔心自己的口語表達不夠理想而影響成績。沒想到，我們成功入圍前三名啊！隔天宣布頒獎的過程，我們真的非常緊張，一邊希望得到好名次，一邊又怕自己沒做好而讓作品埋沒，最後大螢幕上秀出我們得到了第一名的照片時，那一瞬間反而異常平靜，我們這一年多來的辛勞，在這個時候都消失無影無蹤了。領完獎下台後，才湧現許多開心的情緒，簡直跟作夢一樣呢！

回顧這趟研究旅程中，我們感謝非常忙碌的指導老師，他總是為了我們空出時間，循循善誘及叮嚀鞭策著我們，還有謝謝我們的家人給予支持，畢竟我們為了研究犧牲了許多假日家族出遊。此外，令人印象深刻的是，全國科展評審提出了十分有趣的問題，當時我們討論後發現，此問題居然與我們的某個定理同構，這是多麼美麗阿！謝謝評審仔細閱讀我們的作品並給予建議與肯定！

最後，分享給欲投入數學研究的同好們，數學家阿貝爾 Abel 曾說過的一段名言：「精巧的論證常常不是一蹴而就的，而是人們長期切磋積累的成果。我也是慢慢學來的，而且還要繼續不斷的學習」。身為數學愛好者的我們，一起在這條數學路上持續悠遊學習吧！



作者合照。



作者與指導老師合照。



研究討論過程。

摘要

2001 年 Larry Hoehn 提出了 $\triangle ABC$ 的三個旁接三角形的西瓦線之共點性質，近年的相關研究都是探討邊上作正方形或矩形而構造三個旁接三角形。本研究不限於直角，創新探討角度一般化情形。考慮以 $\triangle ABC$ 頂點為旋轉中心，將三邊分別旋轉實數 φ 後，構造出可變動的三個旁接三角形。我們發現可變動的三條外中線交於一點、三條外高交於一點、三條外中垂線交於一點。我們先探討前述三個動點的軌跡，發現著名的 Kiepert 雙曲線，本研究為 Kiepert 雙曲線的新構造法。接續研究任選兩點所構成的直線性質，有趣的是，外高交點與外中垂線交點連線恆通過重心；外高交點與外中線交點連線恆通過九點圓圓心，我們給出共線三點的有向距離比例常數。最後，再探討三個動點共線的充要條件。

壹、研究背景與文獻

一、研究背景

我們都知道任意 $\triangle ABC$ 的三條中線交於一點（重心）、三條高交於一點（垂心）、三條中垂線交於一點（外心），然而我們在數學獨立研究課時，蒐尋資料發現 Larry Hoehn 於 2001 年曾發表的一篇論文〈Extriangles and excevians〉提出另類新奇的性質。

以下簡述 Larry Hoehn 於 2001 年的研究關於旁接三角形（Extriangles）與外西瓦線（Excevians）的結果[4]。他從畢氏定理的構圖延伸，分別以任意 $\triangle ABC$ 的三邊向外作三個正方形 BAC_1C_2 、正方形 CBA_1A_2 、正方形 ACB_1B_2 ，連接線段 $\overline{A_1C_2}$ 、 $\overline{B_1A_2}$ 、 $\overline{C_1A_2}$ 。

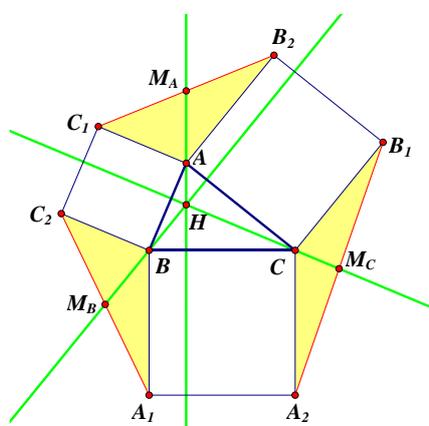


圖 1-1：外西瓦線為中線。

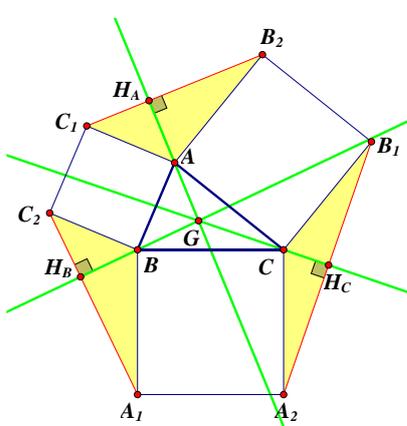


圖 1-2：外西瓦線為高。

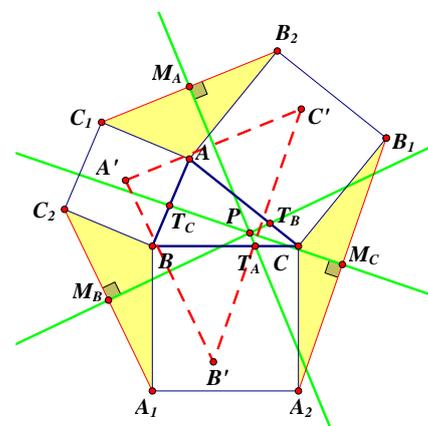


圖 1-3：外西瓦線為中垂線。

(一) 外西瓦線為中線

如圖 1-1，分別過點 A 、 B 、 C 作三個旁接三角形 $\triangle AC_1B_2$ 、 $\triangle BA_1C_2$ 、 $\triangle CB_1A_2$ 的中線，發現各自的中線 $\overline{AM_A}$ 、 $\overline{BM_B}$ 、 $\overline{CM_C}$ 恰為 $\triangle ABC$ 的三條高，因此三個旁接三角形的中線必交於一點，即為 $\triangle ABC$ 的垂心。

(二) 外西瓦線為高

如圖 1-2，分別過點 A 、 B 、 C 作三個旁接三角形 $\triangle AC_1B_2$ 、 $\triangle BA_1C_2$ 、 $\triangle CB_1A_2$ 的高，發現各自的高 $\overline{AH_A}$ 、 $\overline{BH_B}$ 、 $\overline{CH_C}$ 恰為 $\triangle ABC$ 的三條中線，因此三個旁接三角形的高必交於一點，即為 $\triangle ABC$ 的重心。

(三) 外西瓦線為中垂線

如圖 1-3，分別過點 A 、 B 、 C 作三個旁接三角形 $\triangle AC_1B_2$ 、 $\triangle BA_1C_2$ 、 $\triangle CB_1A_2$ 的中垂線。有趣的是，Larry Hoehn 以 $\triangle ABC$ 的三條中線長度的兩倍作為邊，透過平移與旋轉巧妙構造相似三角形 $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ ，最後發現各自的三條中垂線 $\overline{AT_A}$ 、 $\overline{BT_B}$ 、 $\overline{CT_C}$ 恰為 $\triangle A'B'C'$ 的三條中垂線，因此三個旁接三角形的中垂線必交於一點 P ，即為 $\triangle A'B'C'$ 的外心。

我們好奇「怎麼不是向外構造正三角形」呢？理應先從構造最少邊的正多邊形進行研究，但是 Larry Hoehn 並沒有針對構造正三角形進行說明或進一步研究，相較正方形，正三角形的難度比較高？還是較容易呢？

二、 相關文獻

我們利用 Google Scholar 網站搜尋資料，先以作者 Larry Hoehn 以及篇名〈Extriangles and excevians〉進行搜尋，我們找到近幾年的相關數學論文後，再以這些作者與篇名再次搜尋，一直重複此搜尋流程，盡可能找尋所有相關論文。

我們將找到的文獻進行整理，針對其研究的構造方法，以及主要研究發現進行表列。在平面上給定任意三角形 $\triangle ABC$ ，其旁接三角形的相關研究發現如下表 1。

表 1：旁接三角形的相關文獻整理比較。

作者	年代	構造法	研究發現
Larry Hoehn [4]	2001	外接正方形而構造三個旁接三角形。	分別發現旁接三角形的中線、高、中垂線交於一點。
Zvonko Cerin [1]	2003	1. 外／內接矩形（邊長是可變動的，但都是對應邊的實數 λ 倍）而構造的旁接三角形。 2. 分別取旁接三角形的重心、外心、垂心等分別構造不同透視三角形。	1. 分別發現 $\triangle ABC$ 與不同透視三角形之「透視軸 (homology axis)」的包絡線為與 $\triangle ABC$ 的邊相切的拋物線。 2. 分別發現 $\triangle ABC$ 與透視三角形的「正交點 (orthology center)」的軌跡為雙曲線或直線。
Nikolaos Dergiades 與 Floor van Lamoen [2]	2003	討論三類外／內接矩形（相似、等面積、等周長）而構造的旁接三角形。	分別討論 $\triangle ABC$ 與的透視三角形之透視中心 (homothetic center) P_i 點，研究這些透視中心的關聯性。
Todor Zaharinov [9]	2017	1. 外／內接正方形而構造三個旁接三角形。 2. 分別以旁接三角形的指定邊構造 $\triangle ABC$ 的三個垂極點 (Orthopoles) Q_a, Q_b, Q_c 。	用複數幾何的方法發現 $\overrightarrow{Q_a A}, \overrightarrow{Q_b B}, \overrightarrow{Q_c C}$ 共點。
Floor van Lamoen [3]	2018	延伸 Zaharinov 的研究，外／內接相似矩形而構造三個旁接三角形。	給出 $\overrightarrow{Q_a A}, \overrightarrow{Q_b B}, \overrightarrow{Q_c C}$ 共點的點軌跡方程式。

由表 1 可知，過去相關的研究都是外（內）接正方形或矩形而構造出的旁接三角形之性質，本研究則是推廣新的方向——**角度**。

我們分別以 $\triangle ABC$ 的三個頂點為旋轉中心，將三邊向外旋轉任意角 φ ，其中 $0 \leq \varphi < 2\pi$ ，形成三個變動的旁接三角形，研究旁接三角形的三種外西瓦線共點性質（詳見本文第 6 頁）且討論其關聯性，最後給出更多有趣發現。

貳、研究目的

在任意 $\triangle ABC$ 的外部分別取點 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ 使得有向角 $\angle A_1BC = \angle BCA_2 = \angle B_1CA = \angle CAB_2 = \angle C_1AB = \angle BBC_2 = \varphi$ ，其中 $0 \leq \varphi < 2\pi$ 且 $\overline{AC_1} = \overline{BC_2} = \overline{AB}$ 、 $\overline{BA_1} = \overline{CA_2} = \overline{BC}$ 、 $\overline{CB_1} = \overline{AB_2} = \overline{CA}$ ，連接線段 $\overline{A_1C_2}$ 、 $\overline{B_1A_2}$ 、 $\overline{C_1A_2}$ 構造 $\triangle AC_1B_2$ 、 $\triangle BA_1C_2$ 、 $\triangle CB_1A_2$ ，再作 $\triangle AC_1B_2$ 、 $\triangle BA_1C_2$ 、 $\triangle CB_1A_2$ 的中線、高、中垂線，這些西瓦線稱為 $\triangle ABC$ 的（可變動的）外西瓦線。

本研究有以下四個研究目的。

- 一、證明任意 $\triangle ABC$ 的三條外中線交於一點 $X_{M(\varphi)}$ （動點）及其性質探究。
- 二、證明任意 $\triangle ABC$ 的三條外高交於一點 $X_{H(\varphi)}$ （動點）及其性質探究。
- 三、證明任意 $\triangle ABC$ 的三條外中垂線交於一點 $X_{P(\varphi)}$ （動點）及其性質探究。
- 四、探究 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 彼此的共線性質，及其共線直線的三線極點軌跡。

參、研究設備及器材

- 一、軟體：幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0
- 二、網站：WolframAlpha、The Encyclopedia of Triangle Centers

肆、預備知識

一、重心坐標 Barycentric Coordinates

平面上任一點 P 與 $\triangle ABC$ 三頂點形成三個子三角形 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCA$ 、 $\triangle PAB$ ，其中 $\triangle PBC$ 的頂點 P, B, C 為逆時鐘方向，則定義面積為正；順時鐘方向，則定義面積為負，其餘亦同。利用這些三角形有向面積比來定義此點的位置，就稱為 P 點的重心坐標 (Barycentric Coordinates)，即 $P(x:y:z) = P(\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB)$ 。

若三個實數序對 (x, y, z) 滿足 $x + y + z = 1$ 時，我們就用逗號表示 P 點的中心坐標之三個分量，此時稱 $P(x, y, z)$ 為正規化的重心坐標 (Normalized Barycentric Coordinates)。因此，我們有三個頂點的坐標 $A(1,0,0)$ 、 $B(0,1,0)$ 、 $C(0,0,1)$ 。

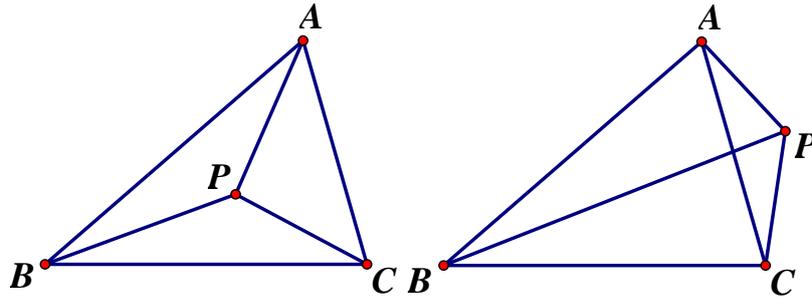


圖 2：重心坐標 Barycentric Coordinates。

二、重心坐標下的直線方程式（見[8], p.41~p.53）

若點坐標 $P(x:y:z)$ 滿足一次方程 $\sigma_1x + \sigma_2y + \sigma_3z = 0$ ，則全體點 $(x:y:z)$ 為一直線，其中 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 為常數。

此外，平面上給定兩點 $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ 、 $Q(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ，則通過此兩點的直線方程式可以用三階行列式表示

$$\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

此外，正規化的重心坐標下，垂直線的方程式為兩向量 $\overline{MN} = (x_1:y_1:z_1)$ 、 $\overline{PQ} = (x_2:y_2:z_2)$ 。 $\overline{MN} \perp \overline{PQ}$ 的充要條件為

$$a^2(z_1y_2 + y_1z_2) + b^2(x_1z_2 + z_1x_2) + c^2(y_1x_2 + x_1y_2) = 0$$

其中，約定 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{AC} = b$ 、 $\overline{AB} = c$ 。

三、三線極點 (Tripole) 與三線極線 (Tripolar) (見[8], p.42~p.43)

平面上 P 點坐標為 $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ ，直線 L 方程式為 $\frac{x}{\mu_1} + \frac{y}{\mu_2} + \frac{z}{\mu_3} = 0$ ，則 P 點稱為直線 L 的三線極點 (Tripole)，直線 L 稱為 P 點的三線極線 (Tripolar)。

四、二次曲線方程式

若點坐標 $P(x:y:z)$ 滿足二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = 0$$

則全體點 $(x:y:z)$ 稱為二次曲線，其中 A, B, C, D, E, F 為常數。

伍、研究結果

本文約定 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{AC} = b$ 、 $\overline{AB} = c$ 。另外，為了區別有向角，用符號「 \sphericalangle 」表示大於或等於 0 的實測角。

如圖 2，在任意 $\triangle ABC$ 的外部分別取點 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 使得有向角 $\sphericalangle A_1BC = \sphericalangle BCA_2 = \sphericalangle B_1CA = \sphericalangle CAB_2 = \sphericalangle C_1AB = \sphericalangle BBC_2 = \varphi$ ，其中 $0 \leq \varphi < 2\pi$ ，而且 $\overline{AC_1} = \overline{BC_2} = \overline{AB}$ 、 $\overline{BA_1} = \overline{CA_2} = \overline{BC}$ 、 $\overline{CB_1} = \overline{AB_2} = \overline{CA}$ ，再連接線段 $\overline{A_1C_2}$ 、 $\overline{B_1A_2}$ 、 $\overline{C_1A_2}$ 。

定義 1 (旁接三角形) 本文將 $\triangle AC_1B_2$ 、 $\triangle BA_1C_2$ 、 $\triangle CB_1A_2$ 稱為 $\triangle ABC$ 的旁接三角形。

定義 2 (外西瓦線) 本文將過旁接三角形 $\triangle AC_1B_2$ 頂點 A 的西瓦線 \overrightarrow{AD} 稱為 $\triangle ABC$ 的外西瓦線。其餘兩個旁接三角形 $\triangle BA_1C_2$ 、 $\triangle CB_1A_2$ 亦同。

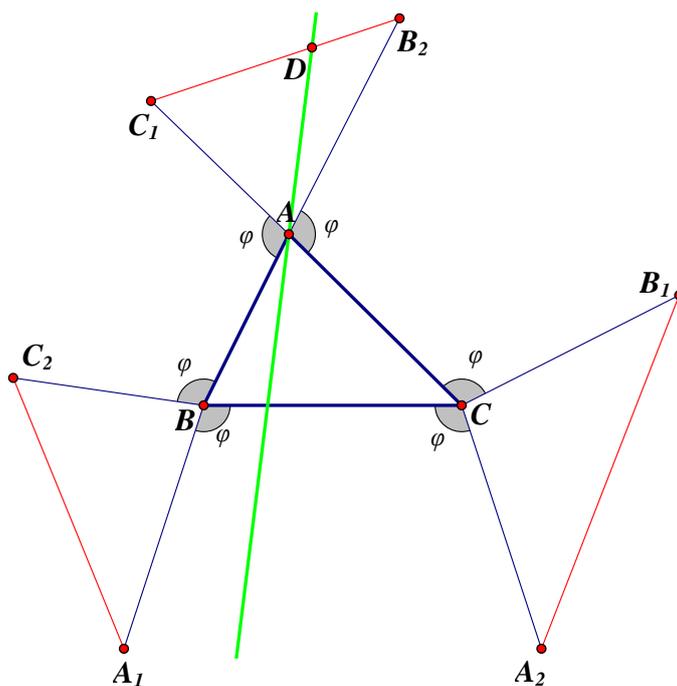


圖 3： $\triangle ABC$ 的三個旁接三角形與外西瓦線。

考慮一些特殊外西瓦線。如圖 3-1，若 $\overrightarrow{AM_A}$ 為 $\triangle AC_1B_2$ 的中線時，稱為 $\triangle ABC$ 的外中線；如圖 3-2，若 $\overrightarrow{AH_A}$ 為 $\triangle AC_1B_2$ 的高時，稱為 $\triangle ABC$ 的外高；如圖 3-3，若 $\overrightarrow{M_A T_A}$ 為 $\triangle AC_1B_2$ 的中垂線時，稱為 $\triangle ABC$ 的外中垂線（雖然外中垂線不通過頂點，但本研究仍納入討論）。注意到，因為 $0 \leq \varphi < 2\pi$ ，所以 $\triangle ABC$ 的旁接三角形 $\triangle AC_1B_2$ 、 $\triangle BA_1C_2$ 、 $\triangle CB_1A_2$ 都是可變動的。

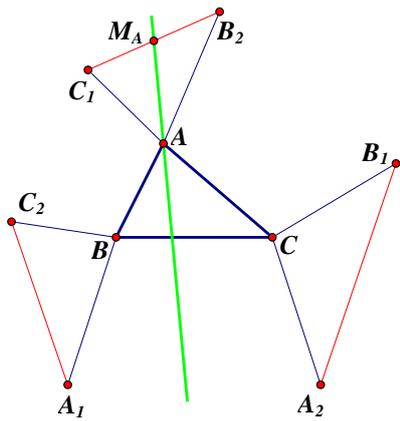


圖 3-1：外中線。

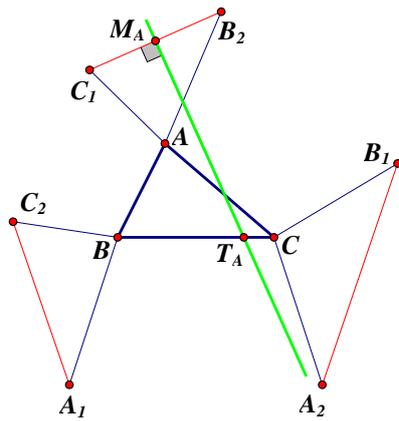


圖 3-2：外高。

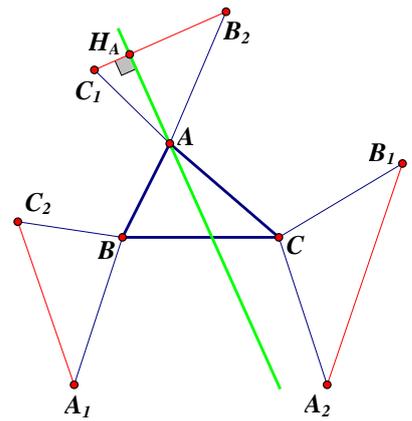


圖 3-3：外中垂線。

一、特殊化：探索外接正三角形與外中線（利用三角函數）

Larry Hoehn (2001) 分別以任意 $\triangle ABC$ 的三邊向外構造正方形，而形成三個旁接三角形，發現 $\triangle ABC$ 的三條外中線交於一點、三條外高交於一點、三條外中垂線也會交於一點。因為正方形關係，使得許多角的關係都特殊（互餘或互補），而有許多純幾何的性質可作為工具[4]。

我們很好奇「怎麼不是向外構造正三角形」呢？理應先從構造最少邊的正多邊形進行研究，但是 Larry Hoehn 並沒有針對構造正三角形進行說明或進一步研究，相較正方形，正三角形的難度比較高？還是較容易呢？

因此，本研究先用純幾何進行前置研究——外接正三角形與外中線。如圖 4，考慮以任意 $\triangle ABC$ 的三邊分別向外構造「正三角」，即在任意 $\triangle ABC$ 外部，分別取點 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 使得有向角 $\angle A_1BC = \angle BCA_2 = \angle B_1CA = \angle CAB_2 = \angle C_1AB = \angle BBC_2 = \varphi = 60^\circ$ 。注意到，此時 A_1 與 A_2 點重合、 B_1 與 B_2 點重合、 C_1 與 C_2 點重合。

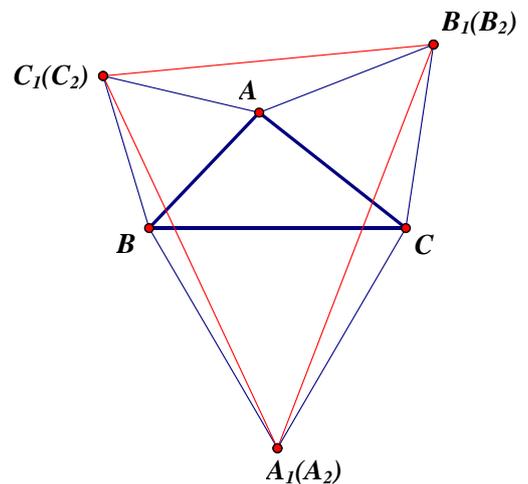


圖 4：外接正三角形

我們以下採用純幾何的方式進行研究外接正三角形構造的旁接三角形，其三條外中線共點之研究。

引理 3 (Ceva 逆定理) 在 $\triangle ABC$ 中，點 D 、 E 、 F 分別在直線 \overrightarrow{BC} 、 \overrightarrow{AC} 、 \overrightarrow{AB} 上且均非頂點。若點 D 、 E 、 F 三點皆在邊上或只有其中一點在邊上，且滿足 $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1$ ，則直線 \overrightarrow{AD} 、 \overrightarrow{BE} 、 \overrightarrow{CF} 三線共點。

性質 4 以任意 $\triangle ABC$ 的邊 \overline{AB} 、 \overline{AC} 向外作正三角形 $\triangle ABC_1$ 、 $\triangle AB_1C$ 。若在平面上取一點 A_1 使得四邊形 $AB_1A_1C_1$ 為平行四邊形，則 $\triangle A_1BC$ 為正三角形。

證明.

利用平行四邊形 $AB_1A_1C_1$ 的對邊長度與對角性質可得出 $\triangle A_1BC_1 \cong \triangle A_1B_1C$ (SAS)，再得出 $\angle BAC = \angle BC_1A_1$ ，所以 $\triangle A_1BC_1 \cong \triangle CBA$ (SAS)，因此 $\overline{BC} = \overline{A_1B} = \overline{CA_1}$ ， $\triangle A_1BC$ 為正三角形

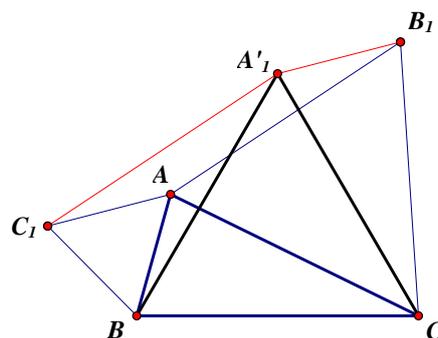


圖 5

給定任意 $\triangle ABC$ ，以其三邊分別向外構造「正三角形」，分別作 $\triangle ABC$ 的三條外中線 $\overrightarrow{AM_A}$ 、 $\overrightarrow{BM_B}$ 、 $\overrightarrow{CM_C}$ 。

性質 5 ($\varphi = 60^\circ$ 時) 外中線 $\overrightarrow{AM_A}$ 、 $\overrightarrow{BM_B}$ 、 $\overrightarrow{CM_C}$ 交於一點。

證明.

如圖 6，令外中線 $\overrightarrow{AM_A}$ 交 \overline{BC} 於 D_A 點， $\overrightarrow{BM_B}$ 交 \overline{AC} 於 D_B 點， $\overrightarrow{CM_C}$ 交 \overline{AB} 於 D_C 點，考慮有向線段 $\frac{\overline{AD_C}}{\overline{D_C B}} \times \frac{\overline{BD_A}}{\overline{D_A C}} \times \frac{\overline{CD_B}}{\overline{D_B A}}$ 的值。我們利用三角函數的三角形面積公式，可將有向線段比值換成有向角的正弦形式而有

$$\frac{\overline{AD_C}}{\overline{D_C B}} \times \frac{\overline{BD_A}}{\overline{D_A C}} \times \frac{\overline{CD_B}}{\overline{D_B A}} = \frac{\sin \angle ACD_C}{\sin \angle D_C CB} \times \frac{\sin \angle BAD_A}{\sin \angle D_A AC} \times \frac{\sin \angle CBD_B}{\sin \angle D_B BA}$$

令有向角 $\angle B_1CM_C = \alpha_1$ 、 $\angle M_CCA_1 = \beta_1$ 、 $\angle C_1AM_A = \alpha_2$ 、 $\angle M_AAB_1 = \beta_2$ 、 $\angle A_1BM_B = \alpha_3$ 、 $\angle M_BBC_1 = \beta_3$ ，則

$$\frac{\sin \angle ACD_C}{\sin \angle D_C CB} \times \frac{\sin \angle BAD_A}{\sin \angle D_A AC} \times \frac{\sin \angle CBD_B}{\sin \angle D_B BA} = \frac{\sin(\alpha_1 - 60^\circ)}{\sin(\beta_1 - 60^\circ)} \times \frac{\sin(\alpha_2 + 120^\circ)}{\sin(\beta_2 + 120^\circ)} \times \frac{\sin(\alpha_3 + 120^\circ)}{\sin(\beta_3 + 120^\circ)}$$

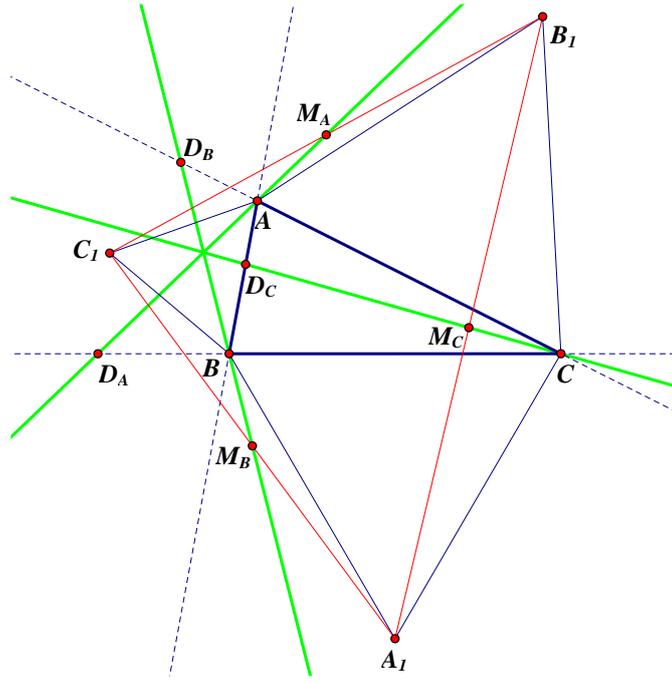


圖 6：外接正三角形。

我們繼續證明有向角 α_1 、 β_1 、 α_2 、 β_2 、 α_3 、 β_3 的關係

如圖 7-1，考慮在射線 $\overrightarrow{AM_A}$ 上取點 A'_1 使得四邊形 $AB_1A'_1C_1$ 為平行四邊形，在射線 $\overrightarrow{BM_B}$ 上取點 B'_1 使得四邊形 $BC_1B'_1A_1$ 為平行四邊形，在射線 $\overrightarrow{CM_C}$ 上取點 C'_1 使得四邊形 $CA_1C'_1B_1$ 為平行四邊形。根據性質 4 可得 $\triangle A'_1BC$ 、 $\triangle B'_1CA$ 與 $\triangle C'_1AB$ 為正三角形。在 $\triangle A'_1AB$ 與 $\triangle CC'_1B$ 中， $\overline{AB} = \overline{C'_1A}$ 、 $\overline{A'_1B} = \overline{CB}$ 、 $\sphericalangle ABA'_1 = \sphericalangle B - 60^\circ = \sphericalangle C'_1BC$ ，所以 $\triangle A'_1AB \cong \triangle CC'_1B$ ，得出 $\overline{AA'_1} = \overline{CC'_1}$ ，同理可得 $\overline{AA'_1} = \overline{BB'_1} = \overline{CC'_1}$

如圖 7-2，在 $\triangle A'_1AC$ 與 $\triangle CC'_1A_1$ 中， $\overline{AA'_1} = \overline{CC'_1}$ 、 $\overline{A'_1C} = \overline{BC} = \overline{CA_1}$ 、 $\overline{AC} = \overline{C'_1A_1}$ ，所以 $\triangle A'_1AC \cong \triangle CC'_1A_1$ ，又 $\sphericalangle B_1CM_C = \sphericalangle A_1C'_1M_C$ （平行四邊形），考慮有向角 $\sphericalangle B_1CM_C = \alpha_1$ 與 $\sphericalangle M_AAB_1 = \beta_2$ 為異號，因此得出有向角

$$\alpha_1 = 60^\circ - \beta_2$$

用同樣方式可得出

$$\alpha_2 = 60^\circ - \beta_3, \alpha_3 = 60^\circ - \beta_1$$

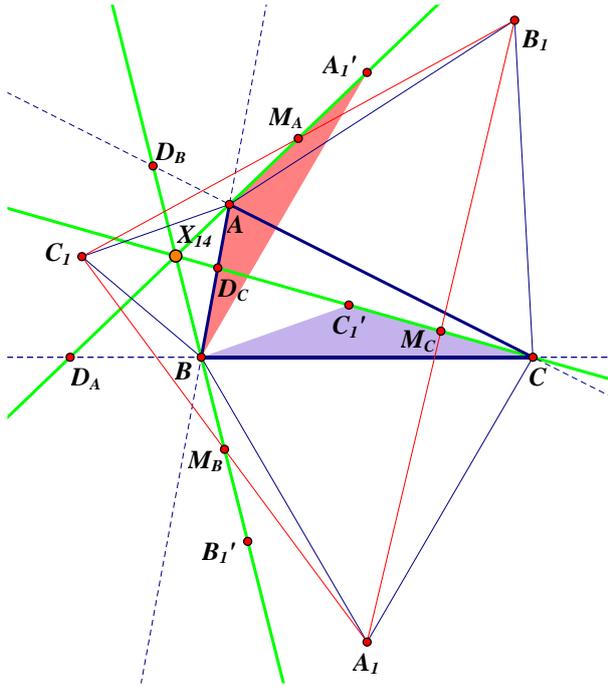


圖 7-1

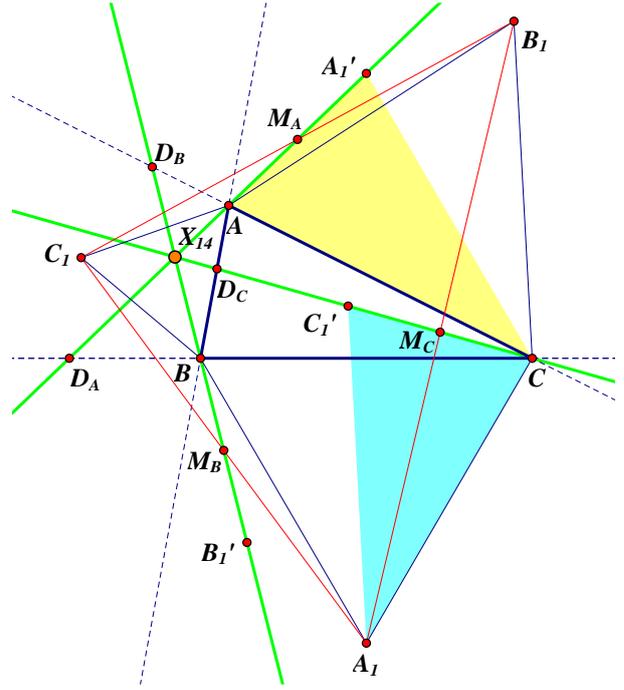


圖 7-2

將 $\alpha_1 = 60^\circ - \beta_2$ 、 $\alpha_2 = 60^\circ - \beta_3$ 、 $\alpha_3 = 60^\circ - \beta_1$ 代入

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\alpha_1 - 60^\circ)}{\sin(\beta_1 - 60^\circ)} \times \frac{\sin(\alpha_2 + 120^\circ)}{\sin(\beta_2 + 120^\circ)} \times \frac{\sin(\alpha_3 + 120^\circ)}{\sin(\beta_3 + 120^\circ)} \\ &= \frac{\sin(\alpha_1 + 120^\circ)}{\sin(\beta_1 + 120^\circ)} \times \frac{\sin(\alpha_2 + 120^\circ)}{\sin(\beta_2 + 120^\circ)} \times \frac{\sin(\alpha_3 + 120^\circ)}{\sin(\beta_3 + 120^\circ)} \\ &= \frac{\sin \beta_2}{\sin(\beta_1 + 120^\circ)} \times \frac{\sin \beta_3}{\sin(\beta_2 + 120^\circ)} \times \frac{\sin \beta_1}{\sin(\beta_3 + 120^\circ)} \\ &= \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_3} \times \frac{\sin \beta_3}{\sin \alpha_1} \times \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_2} \\ &= \frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_1} \times \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_2} \times \frac{\sin \beta_3}{\sin \alpha_3} \end{aligned}$$

注意到，在 $\triangle CB_1A_1$ 中， M_C 為中點，可得 $\overline{CB_1} \times \overline{CM_C} \times \sin \alpha_1 = \overline{CA_1} \times \overline{CM_C} \times \sin \beta_1$

化簡得出 $\frac{\sin \beta_1}{\sin \alpha_1} = \frac{\overline{CA_1}}{\overline{CB_1}} = \frac{b}{a}$ ，同理 $\frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_2} = \frac{c}{b}$ 、 $\frac{\sin \beta_3}{\sin \alpha_3} = \frac{a}{c}$

所以 $\frac{\sin \angle ACD_C}{\sin \angle D_CCB} \times \frac{\sin \angle BAD_A}{\sin \angle D_AAC} \times \frac{\sin \angle CBD_B}{\sin \angle D_BBA} = \frac{\sin(\alpha_1 - 60^\circ)}{\sin(\beta_1 - 60^\circ)} \times \frac{\sin(\alpha_2 + 120^\circ)}{\sin(\beta_2 + 120^\circ)} \times \frac{\sin(\alpha_3 + 120^\circ)}{\sin(\beta_3 + 120^\circ)} = 1$

因此根據引理 3 的 Ceva 逆定理，外中線 $\overline{AM_A}$ 、 $\overline{BM_B}$ 、 $\overline{CM_C}$ 交於一點



注意到，外中線 $\overline{AM_A}$ 、 $\overline{BM_B}$ 、 $\overline{CM_C}$ 交於一點 X_{14} ，此點即為第二費馬點 (2nd isogonic center) [5]，即分別以 $\triangle ABC$ 的三邊 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 向內作正三角形 $\triangle ABC'_1$ 、

$\triangle BCA'_1$ 、 $\triangle CAB'_1$ ，則 $\overline{AA'_1}$ 、 $\overline{BB'_1}$ 、 $\overline{CC'_1}$ 交於一點，第二等角點 X_{14} ，也就是 $\sphericalangle AX_{14}B$ 、 $\sphericalangle BX_{14}C$ 、 $\sphericalangle CX_{14}A$ 中有兩個角為 60 度、另一個為 120 度。

推論 6 ($\varphi = 60^\circ$ 時) 外中線段 $\overline{AM_A} = \overline{BM_B} = \overline{CM_C}$ 。

證明. 由性質 5 的證明即可得。

【討論與分析】

性質 5 是純幾何的證明，但需要用到正三角形與平行四邊形的引理，且僅限於 $\varphi = 60^\circ$ 時，且證明過程需要大量的和（差）角的轉換。換句話說這些引理亦無法適用於 φ 等於其他角度時。然而，本研究要將 φ 推廣到正實數，因此使用純幾何並不是個好方法，我們必須要更換研究方法。

我們是否使用笛卡爾直角坐標呢？由於我們是研究任意三角形 $\triangle ABC$ 的旁接三角形的相關西瓦線，在笛卡爾直角坐標下， $\triangle ABC$ 的三個頂點的坐標都需要假設參數，這也不是有力的方法，為了從共通性的觀點解決外西瓦線的共點問題。接下來，我們引入近代三角學的方法——重心坐標 Barycentric Coordinates（齊次坐標），從高觀點處理這些問題，透過這個方法可以完整解決所有外西瓦線共點問題。

二、一般化： φ 為任意實數下，外西瓦線為中線（利用重心坐標）

本文約定 $\triangle ABC$ 中， $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{AC} = b$ 、 $\overline{AB} = c$ ，並採用「Conway 符號」，用 S 表示 $\triangle ABC$ 的兩倍面積，對於實數 θ 將「 $S \cdot \cot \theta$ 」記為「 S_θ 」，對於任意的實數 θ 與 φ ，把 $S_\theta \times S_\varphi$ 簡記為「 $S_{\theta\varphi}$ 」[6][8]。我們可得以下引理 7 和引理 8。

引理 7 (Conway 符號) (見[8], p.33) 對於任意 $\triangle ABC$ 有

$$(1) S_A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}, S_B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2}, S_C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

$$(2) S_A + S_B = c^2, S_B + S_C = a^2, S_C + S_A = b^2.$$

$$(3) S_A - S_B = b^2 - a^2, S_B - S_C = c^2 - b^2, S_C - S_A = a^2 - c^2.$$

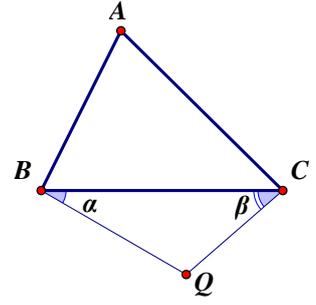
$$(4) S_{AB} + S_{BC} + S_{CA} = S^2.$$

引理 8 (坐標) (見[8], p.34) 若點 Q 在 $\triangle ABC$ 平面上，

滿足有向角 $\angle CBQ = \alpha$ 和 $\angle BCQ = \beta$ ，則 Q 點的重心坐標為

$$Q(-a^2:(S_C + S_\beta):(S_B + S_\alpha))$$

其中，有向角 $\angle CBQ$ 與 $\angle CBA$ 方向相反時，定義 $\angle CBQ$ 為正；方向相同時，定義為負。同理， $\angle BCQ$ 與 $\angle BCA$ 方向相反時，定義 $\angle BCQ$ 為正；方向相同時，定義為負。



在任意 $\triangle ABC$ 的外部分別取點 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ 使得有向角 $\angle A_1BC = \angle BCA_2 = \angle B_1CA = \angle CAB_2 = \angle C_1AB = \angle BBC_2 = \varphi$ ，其中 $\varphi \in R$ 。且滿足 $\overline{AC_1} = \overline{BC_2} = \overline{AB}$ 、 $\overline{BA_1} = \overline{CA_2} = \overline{BC}$ 、 $\overline{CB_1} = \overline{AB_2} = \overline{CA}$ ，則我們可以令 $\theta = \frac{\pi - \varphi}{2}$ ，根據引理 7 而有點 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ 的重心坐標。

$$A_1(-a^2:(S_C + S_\theta):(S_B + S_\varphi))、A_2(-a^2:(S_C + S_\varphi):(S_B + S_\theta))$$

$$B_1((S_C + S_\varphi):-b^2:(S_A + S_\theta))、B_2((S_C + S_\theta):-b^2:(S_A + S_\varphi))$$

$$C_1((S_B + S_\theta):(S_A + S_\varphi):-c^2)、C_2((S_B + S_\varphi):(S_A + S_\theta):-c^2)$$

性質 9 點 $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ 的重心坐標之三個分量和皆相同。

證明。

先討論點 A_1 坐標， $A_1(-a^2:(S_C + S_\theta):(S_B + S_\varphi))$ ，依據引理 7 可得三個分量和為

$$-a^2 + S_C + S_\theta + S_B + S_\varphi = -a^2 + a^2 + S_\theta + S_\varphi = S_\theta + S_\varphi$$

同理，其餘五個點各自的三個分量和均為 $S_\theta + S_\varphi$



定理 10 對於任意實數 φ ，外中線 $\overline{AM_A}$ 、 $\overline{BM_B}$ 、 $\overline{CM_C}$ 交於一點 $X_{M(\varphi)}$ 。

證明。

如圖 8，先討論外中線 $\overline{AM_A}$ ，點 M_A 是 $\overline{C_1B_2}$ 的中點，由性質 9 可知點 C_1 、點 B_2 坐標

的分量和相同，所以 $M_A\left(\frac{S_B + S_C + 2S_\theta}{2}:\frac{S_A + S_\varphi - b^2}{2}:\frac{S_A + S_\varphi - c^2}{2}\right)$ ，又 $A(1:0:0)$ ，再得出

$$\overrightarrow{AM_A}: \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{S_B + S_C + 2S_\theta}{2} & \frac{S_A + S_\varphi - b^2}{2} & \frac{S_A + S_\varphi - c^2}{2} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

注意到， $S_A + S_B = c^2$ 、 $S_B + S_C = a^2$ 、 $S_C + S_A = b^2$

化簡可得 $\overrightarrow{AM_A}: (S_\varphi - S_B)y - (S_\varphi - S_C)z = 0$

同理，可得另外兩條外中線

$$\overrightarrow{M_B B}: (S_\varphi - S_A)x - (S_\varphi - S_C)z = 0$$

$$\overrightarrow{M_C C}: (S_\varphi - S_A)x - (S_\varphi - S_B)y = 0$$

注意到， $\overrightarrow{AM_A}$ 與 \overrightarrow{BC} 交於 D_A ，則 $\overline{BD_A}:\overline{D_A C} = (S_\varphi - S_B):(S_\varphi - S_C)$ ，同理 $\overline{CD_B}:\overline{D_B A} =$

$(S_\varphi - S_C):(S_\varphi - S_A)$ 、 $\overline{AD_C}:\overline{D_C B} = (S_\varphi - S_A):(S_\varphi - S_B)$ ，所以可得有向線段比值乘積

$$\frac{\overline{BD_A}}{\overline{D_A C}} \times \frac{\overline{CD_B}}{\overline{D_B A}} \times \frac{\overline{AD_C}}{\overline{D_C B}} = 1$$

由引理 3 的 Ceva 逆定理可得 $\overrightarrow{AM_A}$ 、 $\overrightarrow{BM_B}$ 、 $\overrightarrow{CM_C}$ 交於點 $X_{M(\varphi)} \left(\frac{1}{S_\varphi - S_A} : \frac{1}{S_\varphi - S_B} : \frac{1}{S_\varphi - S_C} \right)$

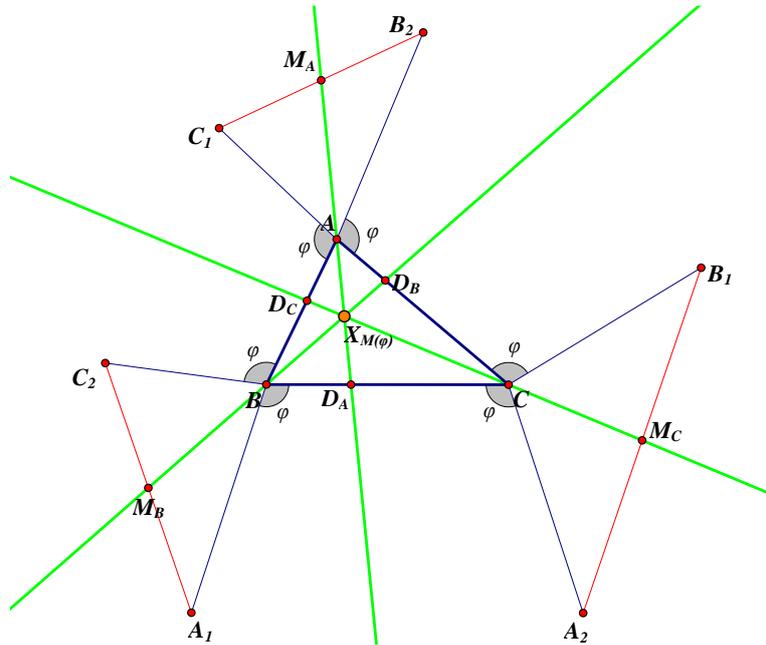


圖 8：外中線交於一點。

【討論與分析】

以下分別討論 $\varphi = 30^\circ$ 、 45° 、 60° 、 90° 、 120° 、 135° 、 150° 等特殊角度下，三外中線的交點是哪些特殊點？我們利用「三角形的心百科全書網站 The Encyclopedia of Triangle

Centers，以下簡稱 ETC」[6]進行搜尋比對得出下表 2。

表 2：特殊角所構造的外中線的交點。

φ	$X_{M(\varphi)}$ 的 ETC 編號	φ	$X_{M(\varphi)}$ 的 ETC 編號
30°	X_{18} 第二拿破崙點 (Second Napoleon point)	120°	X_{13} 第一費馬點 (First Fermat Point)
45°	X_{486} 內維田點 (Inner Vecten Point)	135°	X_{485} 維田點 (Vecten Point)
60°	X_{14} 第二費馬點 (Second Fermat Point)	150°	X_{17} 第一拿破崙點 (First Napoleon point)
90°	X_4 垂心		

三、一般化： φ 為任意實數下，外西瓦線為高（利用重心坐標）

我們利用一樣的方式處理 $\triangle ABC$ 的三條外高共點情形。

定理 11 對於任意實數 φ ，外高 $\overrightarrow{AH_A}$ 、 $\overrightarrow{BH_B}$ 、 $\overrightarrow{CH_C}$ 交於一點 $X_{H(\varphi)}$ 。

證明.

如圖 9，先討論外高 $\overrightarrow{AH_A}$ ，設垂足點 $H_A(x:y:z)$ ，點 $A((S_\varphi + S_\theta):0:0)$ ，則可得到向量

$$\overrightarrow{AH_A} = ((x - S_\varphi - S_\theta):y:z), \overrightarrow{C_1B_2} = ((S_C - S_B):(-b^2 - S_A - S_\varphi):(S_A + S_\varphi + c^2)),$$

$$S_A + S_C = b^2, S_A + S_B = c^2, \text{ 所以 } \overrightarrow{C_1B_2} = ((S_C - S_B):(-2S_A - S_C - S_\varphi):(2S_A + S_B + S_\varphi))$$

因為 $\overrightarrow{AH_A} \perp \overrightarrow{C_1B_2}$ ，依據重心坐標下的垂直線充要條件可得直線 $\overrightarrow{AH_A}$ 方程式

$$\begin{aligned} & a^2 \left(z(-2S_A - S_C - S_\varphi) + y(2S_A + S_B + S_\varphi) \right) + b^2 \left((x - S_\varphi - S_\theta)(2S_A + S_B + S_\varphi) + \right. \\ & \left. z(S_C - S_B) \right) + c^2 \left(y(S_C - S_B) + (x - S_\varphi - S_\theta)(-2S_A - S_C - S_\varphi) \right) = 0. \end{aligned}$$

注意到， $x + y + z = S_\varphi + S_\theta$

$$\text{化簡可得 } \overrightarrow{AH_A}: (S^2 + S_{B\varphi})y - (S^2 + S_{C\varphi})z = 0$$

同理，可得另外兩條外高

$$\overrightarrow{BH_B}: (S^2 + S_{C\varphi})z - (S^2 + S_{A\varphi})x = 0$$

$$\overrightarrow{CH_C}: (S^2 + S_{A\varphi})x - (S^2 + S_{B\varphi})y = 0$$

注意到， $\overrightarrow{AH_A}$ 與 \overrightarrow{BC} 交於 D_A ，則有向線段比 $\overrightarrow{BD_A}:\overrightarrow{D_AC} = (S^2 + S_{B\varphi}):(S^2 + S_{C\varphi})$ ，同理

$\overrightarrow{CD_B}:\overrightarrow{D_BA} = (S^2 + S_{C\varphi}):(S^2 + S_{A\varphi})$ 、 $\overrightarrow{AD_C}:\overrightarrow{D_CB} = (S^2 + S_{A\varphi}):(S^2 + S_{B\varphi})$ ，所以我們有

$$\frac{\overline{BD_A}}{\overline{D_A C}} \times \frac{\overline{CD_B}}{\overline{D_B A}} \times \frac{\overline{AD_C}}{\overline{D_C B}} = 1$$

由引理 3 的 Ceva 逆定理可得 $\overrightarrow{AH_A}$ 、 $\overrightarrow{BH_B}$ 、 $\overrightarrow{CH_C}$ 交於點 $X_{H(\varphi)} \left(\frac{1}{S^2+S_{A\varphi}}; \frac{1}{S^2+S_{B\varphi}}; \frac{1}{S^2+S_{C\varphi}} \right)$

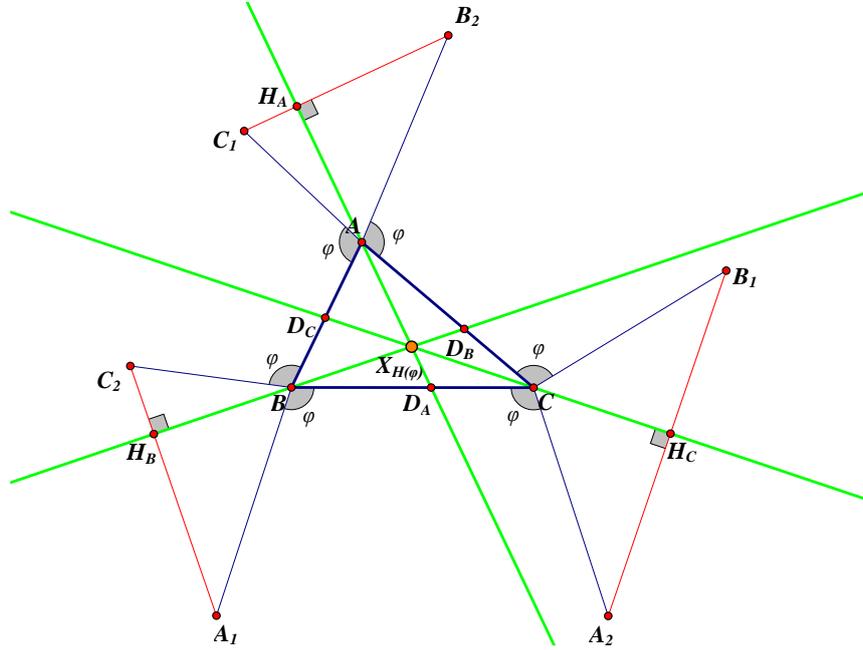


圖 9：外高交於一點。

我們令 φ_M 為構造外中線的角度、 φ_H 為構造外高的角度。依據定理 10 和定理 11，我們發現有趣的外西瓦線重合現象，如下性質 12。我們對照 The Encyclopedia of Triangle Centers 網站發現此性質是一個新的結果！

性質 12 對於任意實數 φ ， $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi \pm \frac{\pi}{2})}$ 重合。

證明。

先考慮 $X_{M(\varphi)} \left(\frac{1}{S_\varphi - S_A}; \frac{1}{S_\varphi - S_B}; \frac{1}{S_\varphi - S_C} \right)$ 與 $X_{H(\varphi + \frac{\pi}{2})} \left(\frac{1}{S^2 + S_{A(\varphi + \frac{\pi}{2})}}; \frac{1}{S^2 + S_{B(\varphi + \frac{\pi}{2})}}; \frac{1}{S^2 + S_{C(\varphi + \frac{\pi}{2})}} \right)$ 的 x 分量 $\frac{1}{S_\varphi - S_A}$ 與 $\frac{1}{S^2 + S_{A(\varphi + \frac{\pi}{2})}}$ 的關係。因為 $\cot \varphi = -\tan \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)$ ，進行代換可得

$$\begin{aligned} S_\varphi - S_A &= S \times \cot \varphi - S_A = -S \times \tan \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) - S_A = - \left(S \times \tan \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + S_A \right) \\ &= \frac{S \times \cot \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) (S \times \tan \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + S_A)}{-S \times \cot \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{S^2 + S_{A(\varphi + \frac{\pi}{2})}}{-S \times \cot \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)} \end{aligned}$$

同理，可得坐標中其他兩個分量情形，即 $S_\varphi - S_B = \frac{S^2 + S_{B(\varphi + \frac{\pi}{2})}}{-S \times \cot \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)}$ 、 $S_\varphi - S_C = \frac{S^2 + S_{C(\varphi + \frac{\pi}{2})}}{-S \times \cot \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)}$

所以， $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi+\frac{\pi}{2})}$ 重合。再考慮 $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi-\frac{\pi}{2})}$ ，因為 $\cot(\varphi + \frac{\pi}{2}) = \cot(\varphi - \frac{\pi}{2})$ ，所以 $X_{H(\varphi+\frac{\pi}{2})} = X_{H(\varphi-\frac{\pi}{2})}$ 。因此， $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi\pm\frac{\pi}{2})}$ 重合。

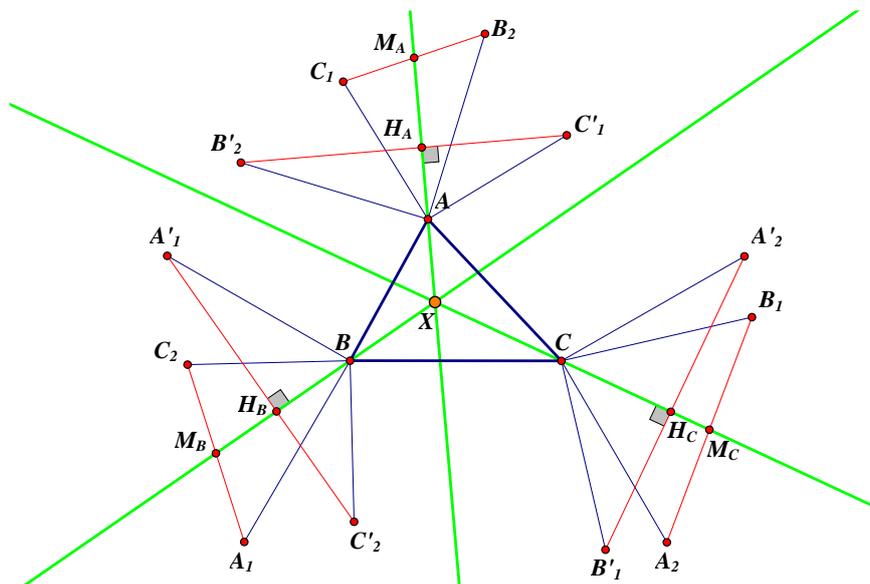


圖 10： $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi-\frac{\pi}{2})}$ 重合。

性質 12 是很重要的關係式，是我們後續幾個定理證明的重要代換關鍵。

【討論與分析】

利用性質 12 可以得出 $\varphi = 30^\circ、45^\circ、60^\circ、90^\circ、120^\circ、135^\circ、150^\circ$ 等特殊角度下，三條外高的交點在 ETC 的編號[6]，如表 3。

表 3：特殊角所構造的外高的交點。

φ	$X_{H(\varphi)}$ 的 ETC 編號	φ	$X_{H(\varphi)}$ 的 ETC 編號
30°	X_{13} 第一費馬點 (First Fermat Point)	120°	X_{18} 第二拿破崙點 (Second Napoleon point)
45°	X_{485} 維田點 (Vecten Point)	135°	X_{486} 內維田點 (Inner Vecten Point)
60°	X_{17} 第一拿破崙點 (First Napoleon point)	150°	X_{14} 第二費馬點 (Second Fermat Point)
90°	X_2 重心		

四、一般化： φ 為任意實數下，外西瓦線為中垂線（利用重心坐標）

我們繼續討論 $\triangle ABC$ 的三條外中垂線的共點情形。因為外中垂線沒有通過 $\triangle ABC$ 的頂點，導致求出外中垂線的方程式比外中線、外高困難許多。

引理 13 (三線共點) (見[8], p.46) 三條直線 $\sigma_1x + \sigma_2y + \sigma_3z = 0$ 、 $\varepsilon_1x + \varepsilon_2y + \varepsilon_3z = 0$ 、

$$\eta_1x + \eta_2y + \eta_3z = 0 \text{ 的充要條件為 } \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} = 0。$$

定理 14 對於任意實數 φ ，外中垂線 $\overrightarrow{M_A T_A}$ 、 $\overrightarrow{M_B T_B}$ 、 $\overrightarrow{M_C T_C}$ 交於一點 $X_{P(\varphi)}$ 。

證明.

如圖 11，先討論外中垂線 $\overrightarrow{M_A T_A}$ ($\overrightarrow{M_A T_A}$ 交 \overrightarrow{BC} 於 T_A 點)， $\overline{C_1 B_2}$ 的中點為

$$M_A \left(\left(\frac{S_B + S_C + 2S_\theta}{2} \right) : \left(\frac{S_A + S_\varphi - b^2}{2} \right) : \left(\frac{S_A + S_\varphi - c^2}{2} \right) \right)。$$

設 $\overrightarrow{M_A T_A}$ 上任意一點 $P(x:y:z)$ ，其中正規化 $x + y + z = S_\varphi + S_\theta$ ，可得向量 $\overrightarrow{B_2 C_1} = \left((S_B - S_C) : (2S_A + S_C + S_\varphi) : (-2S_A - S_B - S_\varphi) \right)$

$$\cdot \overrightarrow{P M_A} = \left(\left(\frac{S_B + S_C + 2S_\theta - 2x}{2} \right) : \left(\frac{S_\varphi - S_C - 2y}{2} \right) : \left(\frac{S_\varphi - S_B - 2z}{2} \right) \right)$$

因為 $\overrightarrow{P M_A} \perp \overline{C_1 B_2}$ ，依據重心坐標下的垂直線充要條件可得直線 $\overrightarrow{M_A T_A}$ 方程式

$$\begin{aligned} & a^2 \left((-2S_A - S_B - S_\varphi) \left(\frac{S_\varphi - S_C - 2y}{2} \right) + (2S_A + S_C + S_\varphi) \left(\frac{S_\varphi - S_B - 2z}{2} \right) \right) + \\ & b^2 \left((S_B - S_C) \left(\frac{S_\varphi - S_B - 2z}{2} \right) + (-2S_A - S_B - S_\varphi) \left(\frac{S_B + S_C + 2S_\theta - 2x}{2} \right) \right) + \\ & c^2 \left((2S_A + S_C + S_\varphi) \left(\frac{S_B + S_C + 2S_\theta - 2x}{2} \right) + (S_B - S_C) \left(\frac{S_\varphi - S_C - 2y}{2} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

化簡可得 $\overrightarrow{M_A T_A}$ 的直線方程式為

$$(S_\varphi + S_\theta)(S_B - S_C)x + (-2S^2 - S_{B\varphi} - S_{C\varphi} + S_{B\theta} - S_{C\theta})y + (2S^2 + S_{B\varphi} + S_{C\varphi} + S_{B\theta} - S_{C\theta})z = 0$$

同理，分別可得 $\overrightarrow{M_B T_B}$ 與 $\overrightarrow{M_C T_C}$ 的直線方程式

$$(2S^2 + S_{A\varphi} + S_{C\varphi} - S_{A\theta} + S_{C\theta})x + (S_\varphi + S_\theta)(S_C - S_A)y + (-2S^2 - S_{A\varphi} - S_{C\varphi} - S_{A\theta} + S_{C\theta})z = 0$$

$$(-2S^2 - S_{A\varphi} - S_{B\varphi} + S_{A\theta} - S_{B\theta})x + (2S^2 + S_{A\varphi} + S_{B\varphi} + S_{A\theta} - S_{B\theta})y + (S_\varphi + S_\theta)(S_A - S_B)z = 0$$

考慮

$$\begin{vmatrix} (S_\varphi + S_\theta)(S_B - S_C) & -2S^2 - S_{B\varphi} - S_{C\varphi} + S_{B\theta} - S_{C\theta} & 2S^2 + S_{B\varphi} + S_{C\varphi} + S_{B\theta} - S_{C\theta} \\ 2S^2 + S_{A\varphi} + S_{C\varphi} - S_{A\theta} + S_{C\theta} & (S_\varphi + S_\theta)(S_C - S_A) & -2S^2 - S_{A\varphi} - S_{C\varphi} - S_{A\theta} + S_{C\theta} \\ -2S^2 - S_{A\varphi} - S_{B\varphi} + S_{A\theta} - S_{B\theta} & 2S^2 + S_{A\varphi} + S_{B\varphi} + S_{A\theta} - S_{B\theta} & (S_\varphi + S_\theta)(S_A - S_B) \end{vmatrix}$$

將第 2 列、第 3 列加入第 1 列可得

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2S^2+S_{A\varphi}+S_{C\varphi}-S_{A\theta}+S_{C\theta} & (S_\varphi+S_\theta)(S_C-S_A) & -2S^2-S_{A\varphi}-S_{C\varphi}-S_{A\theta}+S_{C\theta} \\ -2S^2-S_{A\varphi}-S_{B\varphi}+S_{A\theta}-S_{B\theta} & 2S^2+S_{A\varphi}+S_{B\varphi}+S_{A\theta}-S_{B\theta} & (S_\varphi+S_\theta)(S_A-S_B) \end{vmatrix} = 0$$

即行列式值為 0，所以 $\overrightarrow{M_A T_A}$ 、 $\overrightarrow{M_B T_B}$ 、 $\overrightarrow{M_C T_C}$ 交於一點 $X_{P(\varphi)}$

$$X_{P(\varphi)} \begin{pmatrix} ((S^2+S_{B\varphi})(S^2+S_{A\varphi}+S_{A\theta}-S_{C\theta})+(S^2+S_{C\varphi})(S^2+S_{A\varphi}+S_{A\theta}-S_{B\theta})) \\ ((S^2+S_{C\varphi})(S^2+S_{B\varphi}+S_{B\theta}-S_{A\theta})+(S^2+S_{A\varphi})(S^2+S_{B\varphi}+S_{B\theta}-S_{C\theta})) \\ ((S^2+S_{A\varphi})(S^2+S_{C\varphi}+S_{C\theta}-S_{B\theta})+(S^2+S_{B\varphi})(S^2+S_{C\varphi}+S_{C\theta}-S_{A\theta})) \end{pmatrix}$$

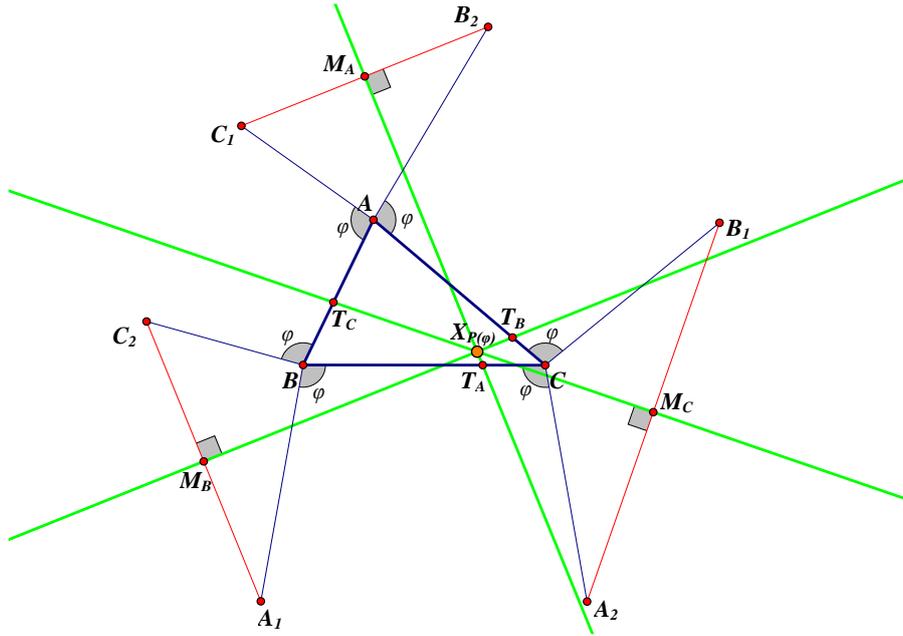


圖 11：外中垂線交於一點。

【討論與分析】

利用定理 14 可以得出 $\varphi = 30^\circ$ 、 45° 、 60° 、 90° 、 120° 、 135° 、 150° 等特殊角度下，三條外中垂的交點在 ETC 的編號[6]，如表 4。其中， $\varphi = 45^\circ$ 、 135° 時，交點為沒有被收錄於 The Encyclopedia of Triangle Centers，這兩個點是我們發現新的三角形的心！

表 4：特殊角所構造的外中垂線的交點。

φ	$X_{P(\varphi)}$ 的 ETC 編號	φ	$X_{P(\varphi)}$ 的 ETC 編號
30°	X_{33440}	120°	X_{22114}
45°	未被收錄	135°	未被收錄
60°	X_{627}	150°	X_{33442}
90°	X_{591}		

比較有趣的是，我們發現當 $\varphi = 60^\circ$ 時，外高交於 X_{17} 、外中垂線交於 X_{627} ，滿足

「Anticomplement 逆互補」關係[4]，即 X_{17} 、 X_{627} 與重心 G 三點共線，且滿足向量

$\overrightarrow{X_{627}G} = 2\overrightarrow{GX_{17}}$ ，如下圖 12。我們在下一節將一般化推廣這個有趣的共線性質。

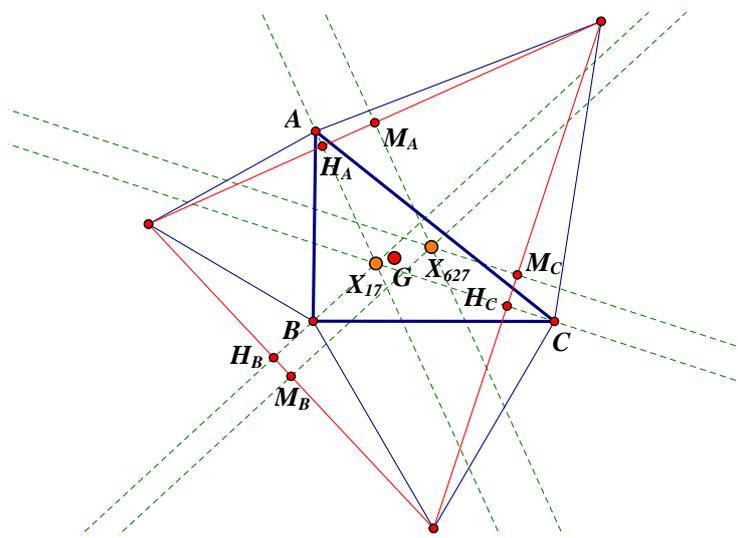


圖 12：Anticomplement 點。

五、動點 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 各自的軌跡

為了方便表示，以下將三條外中線 $\overrightarrow{AM_A}$ 、 $\overrightarrow{BM_B}$ 、 $\overrightarrow{CM_C}$ 的交點，稱作 $X_{M(\varphi)}$ 。三條外高 $\overrightarrow{AH_A}$ 、 $\overrightarrow{BH_B}$ 、 $\overrightarrow{CH_C}$ 的交點，稱作 $X_{H(\varphi)}$ 。 $\overrightarrow{M_A T_A}$ 、 $\overrightarrow{M_B T_B}$ 、 $\overrightarrow{M_C T_C}$ 的交點，稱作 $X_{P(\varphi)}$ 。

$X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 都是動點，我們觀察它們的軌跡是否具有規律？利用幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0 繪製其軌跡分別如下圖 13-1、圖 13-2、圖 13-3。

我們不討論 $X_{P(\varphi)}$ 的軌跡。有趣的是， $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 的軌跡相同！它是通過 $\triangle ABC$ 三頂點的二次曲線，幾何學中著名的 Kiepert 雙曲線。以下定理 16 是我們給出的證明。

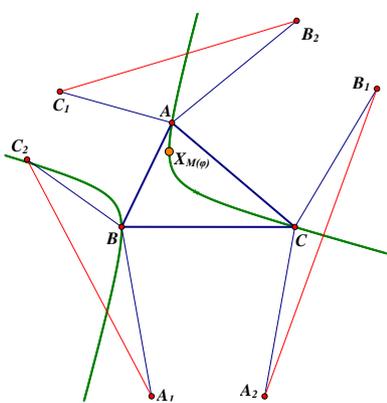


圖 13-1： $X_{M(\varphi)}$ 的軌跡。

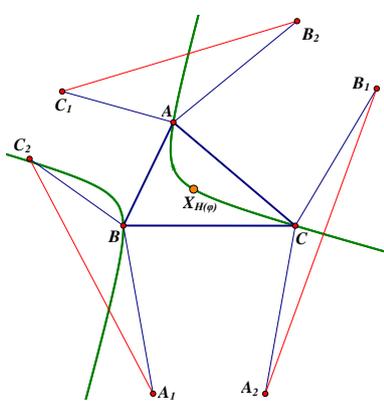


圖 13-2： $X_{H(\varphi)}$ 的軌跡。

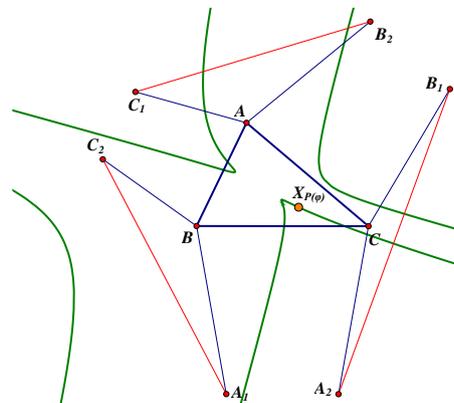


圖 13-3： $X_{P(\varphi)}$ 的軌跡。

定義 15 (Kiepert 雙曲線) (見[5]) 若分別以 $\triangle ABC$ 的三邊為底邊作任意的相似等腰三角形 $\triangle A'BC$ 、 $\triangle B'CA$ 、 $\triangle C'AB$ ，則 $\overrightarrow{A'A}$ 、 $\overrightarrow{B'B}$ 、 $\overrightarrow{C'C}$ 交於一點，此點軌跡為 Kiepert 雙曲線，其重心坐標方程式為 $(S_A - S_B)xy + (S_B - S_C)yz + (S_C - S_A)zx = 0$ 。

定理 16 點 $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 都在 Kiepert 雙曲線上。

證明.

分別將 $X_{M(\varphi)}\left(\frac{1}{S_\varphi - S_A} : \frac{1}{S_\varphi - S_B} : \frac{1}{S_\varphi - S_C}\right)$ 與 $X_{H(\varphi)}\left(\frac{1}{S^2 + S_{A\varphi}} : \frac{1}{S^2 + S_{B\varphi}} : \frac{1}{S^2 + S_{C\varphi}}\right)$ 代入 Kiepert 雙曲線的重心坐標方程式即可證明點 $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 的軌跡即為 Kiepert 雙曲線。 ■

【討論與分析】

從定義 15 上來看，Kiepert 雙曲線是在三邊上構造相似等腰三角形構造法與本研究的外西瓦線構造法看似不同作法，但是我們在定理 16 卻也證明兩者（的點軌跡）是相同的二次曲線，我們以下提出兩者在幾何的相同本質。

因為根據性質 12，可得 $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi \pm \frac{\pi}{2})}$ ，所以我們只需要討論 $X_{M(\varphi)}$ 即可，考慮

外中線 $\overrightarrow{AM_A} : (S_\varphi - S_B)y - (S_\varphi - S_C)z = 0$ 與 \overline{BC} 的中垂線

$$\begin{cases} (S_\varphi - S_B)y - (S_\varphi - S_C)z = 0 \\ (b^2 - c^2)x + a^2y - a^2z = 0 \end{cases}$$

解聯立得交點坐標

$$A' \left(\frac{a^2(S_C - S_B)}{b^2 - c^2} : (S_\varphi - S_C) : (S_\varphi - S_B) \right)$$

又因為 $b^2 - c^2 = (S_C - S_B)$ ，所以

$$A' \left(-a^2 : (S_{(\pi-\varphi)} + S_C) : (S_{(\pi-\varphi)} + S_B) \right)$$

由 Conway 坐標符號可知 $\triangle A'BC$ 是等腰三角形，其底角為有向角 $\pi - \varphi$ 。

輪轉對稱性得知，另外兩條外中線分別與對邊中垂線的交點 B' 點與 C' 點坐標

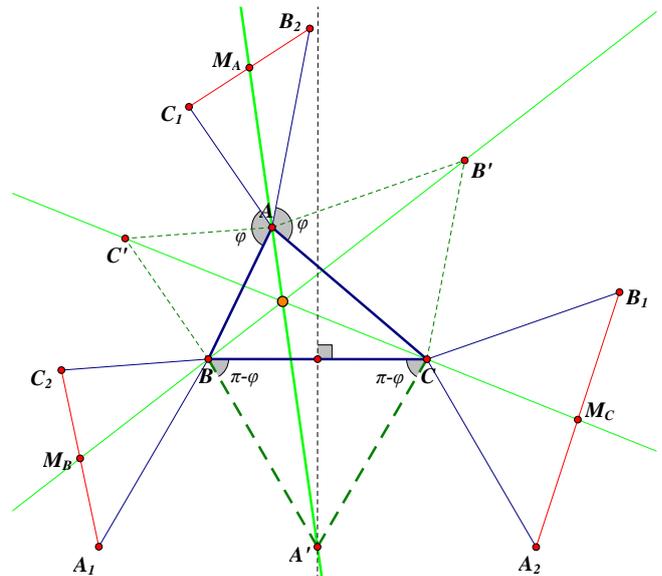


圖 14：外西瓦線與等腰三角形。

$B' \left((S_{(\pi-\varphi)} + S_C) : -b^2 : (S_{(\pi-\varphi)} + S_A) \right)$ 、 $C' \left((S_{(\pi-\varphi)} + S_B) : (S_{(\pi-\varphi)} + S_A) : -c^2 \right)$ ，因此本研究的外西瓦線構造法可以看作 Kiepert 雙曲線的新構造法。

六、動點 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點的綜合性質

前一節我們探討動點 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 各自的軌跡，接下來我們研究三個動點 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 彼此的關聯性。從表 3 可發現 $\varphi = 60^\circ$ 或 120° 時，重心 G 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點共線性質。我們發現 φ 為任意實數時，重心 G 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 共線（定理 16 已經證明），即直線 $\overrightarrow{X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 恆通過重心 G 。同樣的，我們也好奇直線 $\overrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 是否恆通過一定點？直線 $\overrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 是否恆通過一定點？

（一）直線 $\overrightarrow{X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 是否恆通過一定點呢？

進行探究觀察，如圖 13-1 和圖 13-2，我們發現 φ 為任意實數時，重心 G 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點共線，這個性質讓我們覺得很雀躍！

此性質沒有被 ETC 收錄，探究其原因是因為本研究的點並非定點，會受到變數 φ 所影響，而 ETC 收錄的都是三角形的固定特殊點。關於重心 G 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點共線的證明如以下定理 18。

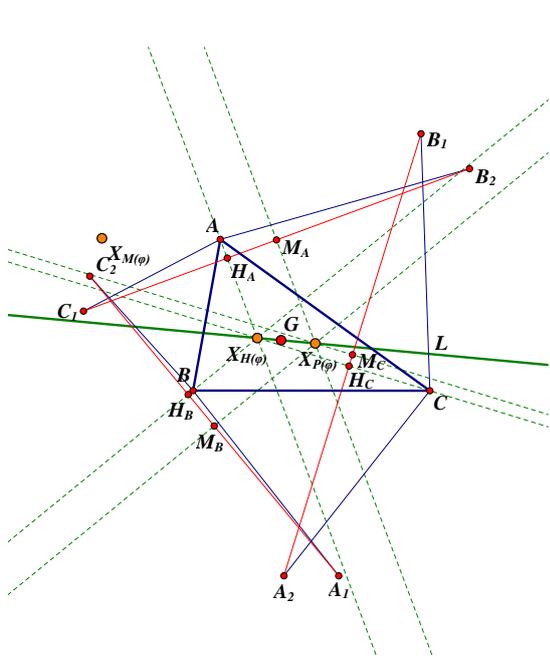


圖 15-1 : $\varphi = 50^\circ$ 。

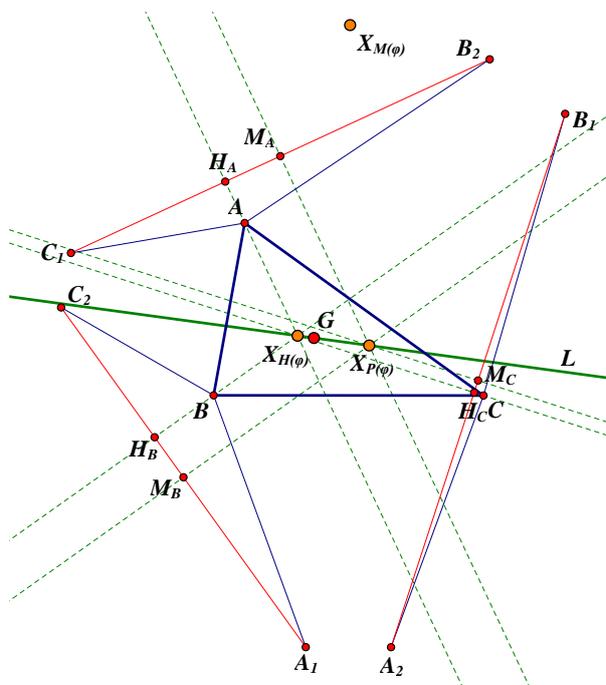


圖 15-2 : $\varphi = 70^\circ$ 。

引理 17 (三點共線) (見[8], p.41) $P(x_1: y_1: z_1)$ 、 $Q(x_2: y_2: z_2)$ 、 $R(x_3: y_3: z_3)$ 三點共線的充要

$$\text{條件為 } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0。$$

定理 18 對於任意實數 φ ，重心 G 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點恆共線。

證明。

$$\text{令 } S^2 + S_{A\varphi} = A、S^2 + S_{B\varphi} = B、S^2 + S_{C\varphi} = C$$

考慮重心 G 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點坐標的行列式值

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ BC & CA & AB \\ \left(\begin{matrix} B(A+S_{A\varphi}-S_{C\varphi}) \\ +C(A+S_{A\varphi}-S_{B\varphi}) \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} C(B+S_{B\varphi}-S_{A\varphi}) \\ +A(B+S_{B\varphi}-S_{C\varphi}) \end{matrix} \right) & \left(\begin{matrix} A(C+S_{C\varphi}-S_{B\varphi}) \\ +B(C+S_{C\varphi}-S_{A\varphi}) \end{matrix} \right) \end{vmatrix} \\ &= (AB + BC + CA)(A(S_{C\varphi} - S_{B\varphi}) + B(S_{A\varphi} - S_{C\varphi}) + C(S_{B\varphi} - S_{A\varphi})) \\ & \quad + 2ABC(S_{B\varphi} - S_{A\varphi} + S_{C\varphi} - S_{B\varphi} + S_{A\varphi} - S_{C\varphi}) \\ &= (AB + BC + CA)(S_{A\varphi}(B - C) + S_{B\varphi}(C - A) + S_{C\varphi}(A - B)) \\ &= (AB + BC + CA)(S_{A\varphi}(S_{B\varphi} - S_{C\varphi}) + S_{B\varphi}(S_{C\varphi} - S_{A\varphi}) + S_{C\varphi}(S_{A\varphi} - S_{B\varphi})) = 0 \end{aligned}$$

即行列式值為 0，所以重心 G 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點共線，其直線方程式為

$$L_{HP(\varphi)}: (S^2 + S_{A\varphi})(S_B - S_C)x + (S^2 + S_{B\varphi})(S_C - S_A)y + (S^2 + S_{C\varphi})(S_A - S_B)z = 0$$

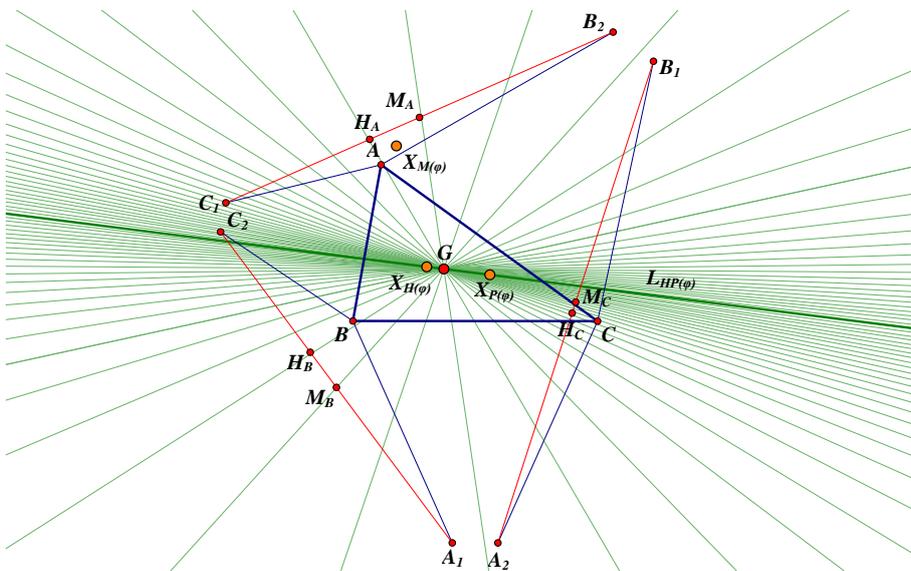


圖 16: $\overrightarrow{X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 恆通過重心 G 。

定理 19 (比例常數) 共線的三點重心 G 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 的有向距離比為

$$\frac{\overrightarrow{X_{P(\varphi)}X_{H(\varphi)}}}{\overrightarrow{GX_{H(\varphi)}}} = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\cot \theta}{\cot \varphi} \right), \text{ 其中 } \theta = \frac{\pi - \varphi}{2}$$

證明.

由定理 16 得知重心 G 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點共線，分別考慮三個點的分量和

(1) 重心 G 其分量和為 3

(2) $X_{H(\varphi)}$ 的分量和為

$$\begin{aligned} & (S^2 + S_{B\varphi})(S^2 + S_{C\varphi}) + (S^2 + S_{C\varphi})(S^2 + S_{A\varphi}) + (S^2 + S_{A\varphi})(S^2 + S_{B\varphi}) \\ &= S^2(3S^2 + 2(S_{A\varphi} + S_{B\varphi} + S_{C\varphi}) + S_{\varphi}^2) \end{aligned}$$

(3) $X_{P(\varphi)}$ 其分量和為

$$\begin{aligned} & (S^2 + S_{B\varphi})(2S^2 + S_{A\varphi} + S_{C\varphi}) + (S^2 + S_{C\varphi})(2S^2 + S_{A\varphi} + S_{B\varphi}) + (S^2 + S_{A\varphi})(2S^2 + S_{B\varphi} + S_{C\varphi}) \\ &= 2S^2(3S^2 + 2(S_{A\varphi} + S_{B\varphi} + S_{C\varphi}) + S_{\varphi}^2) \end{aligned}$$

因為計算三點的比例，必須讓重心 G 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 的分量和相同，所以讓分量和為

$6S^2(3S^2 + 2(S_{A\varphi} + S_{B\varphi} + S_{C\varphi}) + S_{\varphi}^2)$ ，可得出有向距離比

$$\begin{aligned} & \frac{\overrightarrow{X_{P(\varphi)}X_{H(\varphi)}}}{\overrightarrow{GX_{H(\varphi)}}} \\ &= \frac{6(S^2 + S_{B\varphi})(S^2 + S_{C\varphi}) - 3(S^2 + S_{B\varphi})(S^2 + S_{A\varphi} + S_{A\theta} - S_{C\theta}) - 3(S^2 + S_{C\varphi})(S^2 + S_{A\varphi} + S_{A\theta} - S_{B\theta})}{6(S^2 + S_{B\varphi})(S^2 + S_{C\varphi}) - 2S^2(3S^2 + 2(S_{A\varphi} + S_{B\varphi} + S_{C\varphi}) + S_{\varphi}^2)} \\ &= \frac{3(S^2 + S_{B\varphi})(S_C - S_A)(S_{\varphi} + S_{\theta}) + 3(S^2 + S_{C\varphi})(S_B - S_A)(S_{\varphi} + S_{\theta})}{6(S^2 + S_{B\varphi})(S^2 + S_{C\varphi}) - 2S^2(3S^2 + 2(S_{A\varphi} + S_{B\varphi} + S_{C\varphi}) + S_{\varphi}^2)} \\ &= \frac{3(S_{\varphi} + S_{\theta}) \left((S_C - S_A)(S^2 + S_{B\varphi}) + (S_B - S_A)(S^2 + S_{C\varphi}) \right)}{2 \left((S_{C\varphi} - S_{A\varphi})(S^2 + S_{B\varphi}) + (S_{B\varphi} - S_{A\varphi})(S^2 + S_{C\varphi}) \right)} \\ &= \frac{3(S_{\varphi} + S_{\theta}) \left((S_C - S_A)(S^2 + S_{B\varphi}) + (S_B - S_A)(S^2 + S_{C\varphi}) \right)}{2S_{\varphi} \left((S_C - S_A)(S^2 + S_{B\varphi}) + (S_B - S_A)(S^2 + S_{C\varphi}) \right)} \\ &= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{S_{\theta}}{S_{\varphi}} \right) = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\cot \theta}{\cot \varphi} \right) \end{aligned}$$

關於本研究發現的重心 G 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點共線定理，Larry Hoehn 為什麼沒有發

現呢？因為他的研究是 $\varphi = 90^\circ$ （外接正方形）的特例情況，此時重心 G 和 $X_{H(\varphi)}$ 會重合，所以僅剩兩點，因此他沒發現重心 G 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點共線的有趣性質！

定義 20 (Steiner 橢圓) (見[7]) 三角形外接橢圓中，其中心與三角形重心重合的橢圓稱為 Steiner 橢圓，其重心坐標方程式為 $xy + yz + zx = 0$ 。

定理 21 (三線極點軌跡) $L_{HP(\varphi)}: (S^2 + S_{A\varphi})(S_B - S_C)x + (S^2 + S_{B\varphi})(S_C - S_A)y + (S^2 + S_{C\varphi})(S_A - S_B)z = 0$ 的三線極點的軌跡是 Steiner 橢圓。

證明.

$$\text{令 } (S^2 + S_{A\varphi})(S_B - S_C) = \alpha, (S^2 + S_{B\varphi})(S_C - S_A) = \beta, (S^2 + S_{C\varphi})(S_A - S_B) = \gamma$$

根據定義可得直線 $L_{HP(\varphi)}$ 的三線極點坐標為 $(\frac{1}{\alpha} : \frac{1}{\beta} : \frac{1}{\gamma})$

$$\text{考慮 } \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\gamma} = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma}, \text{ 又注意到, } \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$\text{所以 } \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha\gamma} = 0$$

因此，直線 $L_{HP(\varphi)}$ 的三線極點 (Tripole) 的軌跡是 Steiner 橢圓

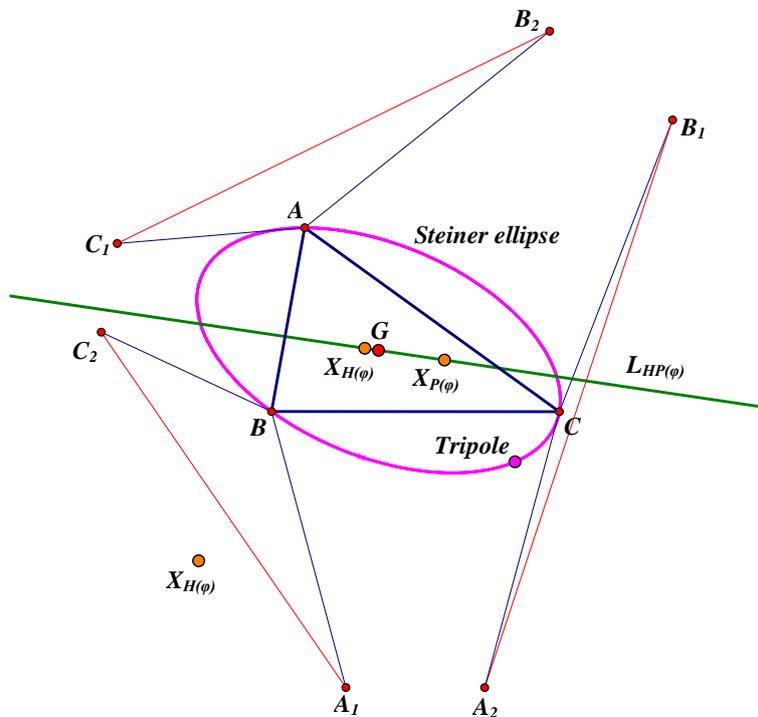


圖 17：Steiner 橢圓。

(二) 直線 $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 是否恆通過一定點呢？

我們繼續討論 $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 是否恆通過一定點？以下定理 22，我們證明了直線 $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 恆通過九點圓圓心 N 。

定理 22 對於任意實數 φ ，九點圓圓心 N 、 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 三點恆共線。

證明.

根據性質 12 可將 $X_{H(\varphi)}$ 的坐標代換，令 $\omega = \varphi + \frac{\pi}{2}$ ，可得 $X_{H(\varphi)}$ 的坐標為

$$X_{H(\varphi)}((S_\omega - S_B)(S_\omega - S_C):(S_\omega - S_C)(S_\omega - S_A):(S_\omega - S_A)(S_\omega - S_B))$$

注意到， $S_{\varphi\omega} = -S^2$ 。考慮九點圓圓心 N 、 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 坐標的行列式值

$$\begin{vmatrix} S^2 + S_{BC} & S^2 + S_{CA} & S^2 + S_{AB} \\ (S_\varphi - S_B)(S_\varphi - S_C) & (S_\varphi - S_C)(S_\varphi - S_A) & (S_\varphi - S_A)(S_\varphi - S_B) \\ (S_\omega - S_B)(S_\omega - S_C) & (S_\omega - S_C)(S_\omega - S_A) & (S_\omega - S_A)(S_\omega - S_B) \end{vmatrix}$$

$$= (S_\omega - S_\varphi)[(S^2 + S_{BC})(S_\varphi - S_A)(S_\omega - S_A)(S_B - S_C) \\ + (S^2 + S_{CA})(S_\varphi - S_B)(S_\omega - S_B)(S_C - S_A) \\ + (S^2 + S_{AB})(S_\varphi - S_C)(S_\omega - S_C)(S_A - S_B)]$$

展開 $[(S^2 + S_{BC})(S_\varphi - S_A)(S_\omega - S_A)(S_B - S_C) + (S^2 + S_{CA})(S_\varphi - S_B)(S_\omega - S_B)(S_C - S_A) + (S^2 + S_{AB})(S_\varphi - S_C)(S_\omega - S_C)(S_A - S_B)]$ 可得其值為 0

所以行列式值為 0，即九點圓圓心 N 、 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 三點共線，其直線方程式為

$$L_{MH(\varphi)}: (S_\varphi - S_A)(S_\omega - S_A)(S_B - S_C)x + (S_\varphi - S_B)(S_\omega - S_B)(S_C - S_A)y \\ + (S_\varphi - S_C)(S_\omega - S_C)(S_A - S_B)z = 0$$

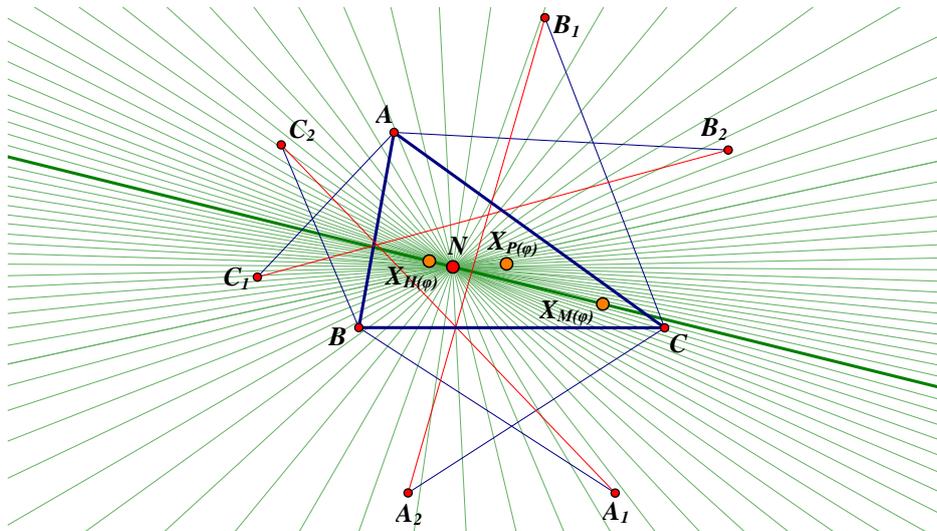


圖 18： $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 恆通過九點圓圓心 N 。

定理 23 (比例常數) 共線的九點圓圓心 N 、 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 的有向距離比為

$$\frac{\overline{X_{H(\varphi)}N}}{\overline{X_{M(\varphi)}N}} = \frac{(3S_\varphi - S_\omega - 2(S_A + S_B + S_C))}{(3S_\omega - S_\varphi - 2(S_A + S_B + S_C))}, \text{ 其中 } \omega = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

證明.

由定理 20 得知九點圓圓心 N 、 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 三點共線，分別考慮三個點的分量和

(1) 九點圓圓心 N 其分量和為 $(S^2 + S_{BC}) + (S^2 + S_{AC}) + (S^2 + S_{AB}) = 4S^2$

(2) $X_{M(\varphi)}$ 其分量和為 $3S_\varphi^2 - 2S_\varphi(S_A + S_B + S_C) + S^2$

(3) $X_{H(\varphi)}$ 其分量和為 $3S_\omega^2 - 2S_\omega(S_A + S_B + S_C) + S^2$

因為計算三點的比例，必須讓九點圓圓心 N 、 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 的分量和相同，所以讓分量和

為 $4S^2(3S_\varphi - S_\omega - 2(S_A + S_B + S_C))(3S_\omega - S_\varphi - 2(S_A + S_B + S_C))$ ，可得出有向距離比

$$\frac{\overline{X_{H(\varphi)}N}}{\overline{X_{M(\varphi)}N}} = \frac{(3S_\varphi - S_\omega - 2(S_A + S_B + S_C))}{(3S_\omega - S_\varphi - 2(S_A + S_B + S_C))}$$



定理 24 (三線極點軌跡) $L_{MH(\varphi)}: (S_\varphi - S_A)(S_\omega - S_A)(S_B - S_C)x + (S_\varphi - S_B)(S_\omega - S_B)(S_C - S_A)y + (S_\varphi - S_C)(S_\omega - S_C)(S_A - S_B)z = 0$ 的三線極點軌跡是 $\triangle ABC$ 的外接二次曲線。

證明.

證明方法與定理 19 類似，我們可得出 $L_{MH(\varphi)}$ 的三線極點 (Tripole) 的軌跡為通過

$A(1,0,0)$ 、 $B(0,1,0)$ 、 $C(0,0,1)$ 的外接二次曲線：

$$(S^2 + S_{AB})xy + (S^2 + S_{BC})yz + (S^2 + S_{CA})zx = 0$$

再考慮外接二次曲線 $(S^2 + S_{AB})xy + (S^2 + S_{BC})yz + (S^2 + S_{CA})zx = 0$ 與無窮遠點的交點情形，則可得到其型態判別式 (橢圓、拋物線、雙曲線)。

不失一般性，令無窮遠線上的點 $(1: (-t): (t-1))$ 代入外接二次曲線可得

$$(S^2 + S_{BC})t^2 + (-S^2 + S_{AB} - S_{BC} - S_{CA})t + S^2 + S_{CA} = 0$$

再得 t 的判別式 $\Delta = S_{BC}^2 + S_{AC}^2 + S_{AB}^2 - 2(S_{BC}S_{AC} + S_{BC}S_{AB} + S_{AC}S_{AB}) - 5S^4$

當 $\Delta > 0$ 時，為雙曲線；當 $\Delta = 0$ 時，為拋物線；當 $\Delta < 0$ 時，為橢圓。

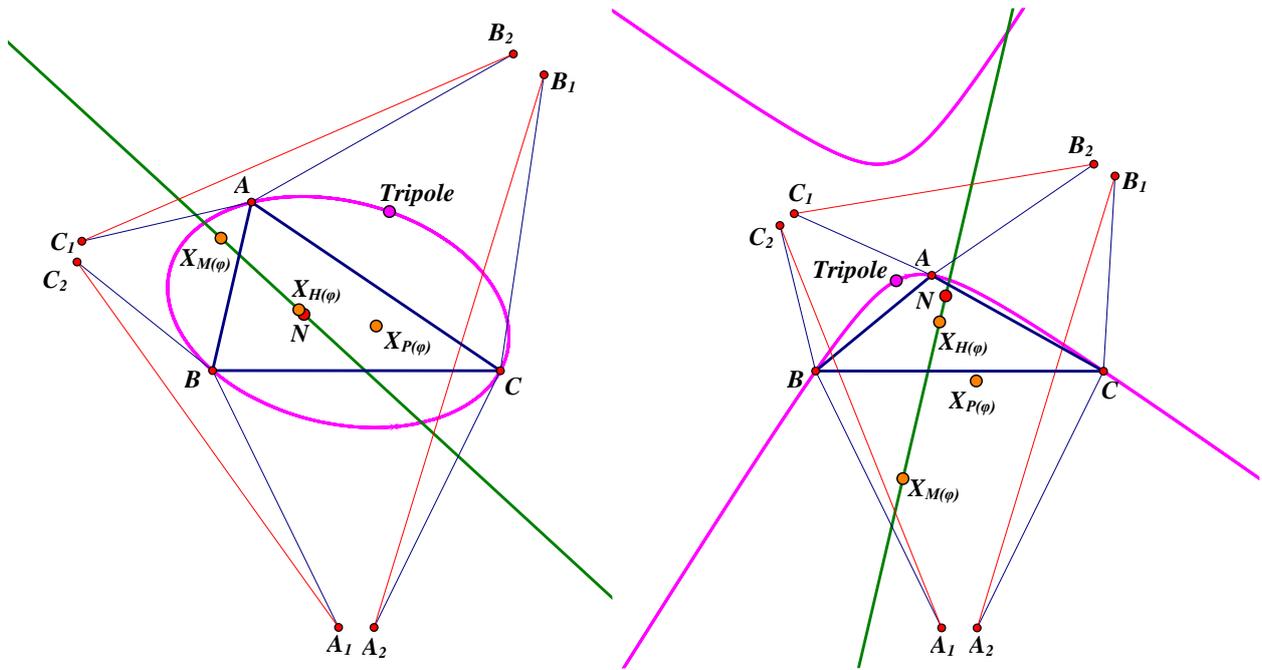


圖 19： $\triangle ABC$ 外接二次曲線。

(三) 直線 $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 是否恆通過一定點呢？

$\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 是否恆通過一定點？我們使用幾何畫板 The Geometer's Sketchpad 5.0 實驗發現， $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 並不是線束，所以直線 $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 不會通過一定點。

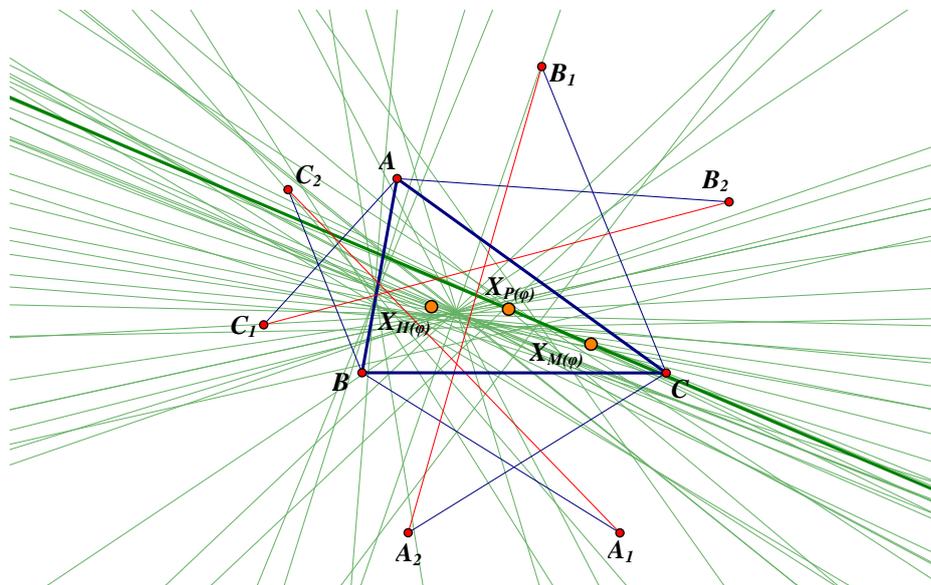


圖 20： $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 不是線束。

(四) $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點共線的充要條件

前面我們分別討論 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點任取兩點共線的性質，接著繼續討論

$X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點共線的充要條件是什麼呢？以下進行證明。

定理 25 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 共線充要條件為 $\triangle ABC$ 為等腰三角形或 $\varphi = k\pi$ ， $k \in N$ 。

證明。

由定理 16 得知重心 G 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 必共線，其直線方程式為

$$(S^2 + S_{A\varphi})(S_B - S_C)x + (S^2 + S_{B\varphi})(S_C - S_A)y + (S^2 + S_C)(S_{A\varphi} - S_B)z = 0$$

因此我們只需要考慮 $X_{M(\varphi)}$ 在直線 $\overrightarrow{X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 上的充要條件即可，可得知

$$\begin{bmatrix} (S^2 + S_{A\varphi})(S_B - S_C) \\ (S^2 + S_{B\varphi})(S_C - S_A) \\ (S^2 + S_{C\varphi})(S_A - S_B) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (S_\varphi - S_B)(S_\varphi - S_C) & (S_\varphi - S_C)(S_\varphi - S_A) & (S_\varphi - S_A)(S_\varphi - S_B) \end{bmatrix} = 0$$

化簡可得

$$(S^2 + S_\varphi^2)(S_A - S_B)(S_B - S_C)(S_C - S_A) = 0$$

因此， $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點共線的充要條件有兩種情況：

(1) $\triangle ABC$ 為等腰三角形時， $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 共線，此直線是底邊上的中線。

(2) $\varphi = k\pi$ 時，因為 S_φ 未定義，所以我們從幾何作圖定義上去探討，可得出 $X_{M(\varphi)}$ 恰為重心、 $X_{H(\varphi)}$ 恰為垂心、 $X_{P(\varphi)}$ 恰為外心或 X_{382} ，此直線是 $\triangle ABC$ 的歐拉線。

七、推廣長度為 λ 倍

考慮「長度」的推廣，即探討 $\overline{BA'_1} = \overline{CA'_2} = \lambda\overline{BC}$ 與 $\overline{CB'_1} = \overline{AB'_2} = \lambda\overline{CA}$ ，以及 $\overline{AC'_1} = \overline{BC'_2} = \lambda\overline{AB}$ 所構造的旁接三角形 $\triangle AC'_1B'_2$ 、 $\triangle BA'_1C'_2$ 、 $\triangle CB'_1A'_2$ 與其外西瓦線共點性質。

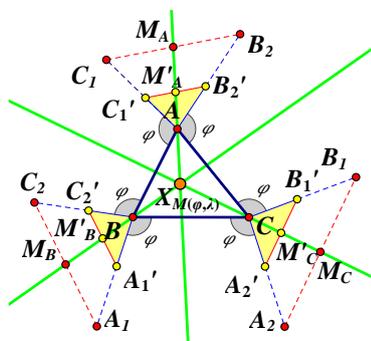


圖 21-1：外中線。

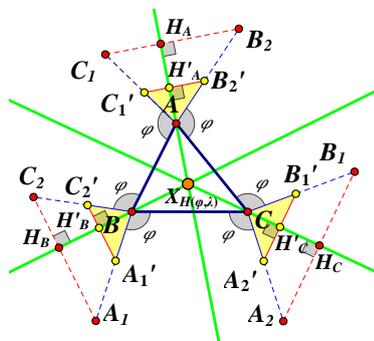


圖 21-2：外高。

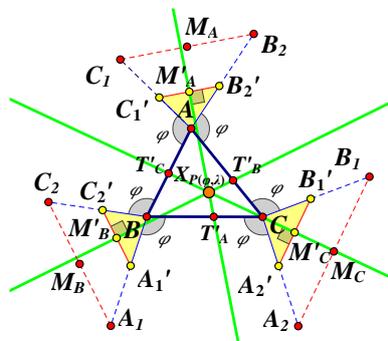


圖 21-3：外中垂線。

如圖 21-1 到圖 21-3，我們巧妙利用 $\lambda = 1$ 時的 $\triangle AC_1B_2$ 、 $\triangle BA_1C_2$ 、 $\triangle CB_1A_2$ ，由比

例線段性質得出相似 $\triangle AC_1B_2 \sim \triangle AC'_1B'_2$ 、 $\triangle BA_1C_2 \sim \triangle BA'_1C'_2$ 與 $\triangle CB_1A_2 \sim \triangle CB'_1A'_2$ ，即可得出長度推廣下的外中線 $\overline{AM'_A}$ 、 $\overline{BM'_B}$ 、 $\overline{CM'_C}$ 交於一點 $X_{M(\varphi,\lambda)}$ ，外高 $\overline{AH'_A}$ 、 $\overline{BH'_B}$ 、 $\overline{CH'_C}$ 交於一點 $X_{H(\varphi,\lambda)}$ ，外中垂線 $\overline{M'_AT'_A}$ 、 $\overline{M'_BT'_B}$ 、 $\overline{M'_CT'_C}$ 也交於一點 $X_{P(\varphi,\lambda)}$ 。注意到，我們可以發現 $X_{M(\varphi,\lambda)} = X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi,\lambda)} = X_{H(\varphi)}$ ，但是當 $\lambda \neq 1$ 時， $X_{P(\varphi,\lambda)} \neq X_{P(\varphi)}$ 。

陸、 結論

本研究推廣 2001 年 Larry Hoehn 提出的旁接三角形的西瓦線之共點性質。相較近年相關研究，本研究是新的方向，我們一般化了角度 φ ，即考慮以 $\triangle ABC$ 頂點為中心，將三邊分別向外旋轉實數 φ ，而構造可變動的旁接三角形 $\triangle AC_1B_2$ 、 $\triangle BA_1C_2$ 、 $\triangle CB_1A_2$ 。我們使用了重心坐標與 Conway 符號簡潔地找出豐富的性質，其主要研究結果如下。

一、 φ 為任意實數，外西瓦線交於一點

對於任意實數 φ ，有旁接 $\triangle AC_1B_2$ 、 $\triangle BA_1C_2$ 、 $\triangle CB_1A_2$ 的各一條中線 $\overline{AM_A}$ 、 $\overline{BM_B}$ 、 $\overline{CM_C}$ 交於動點 $X_{M(\varphi)}$ ；旁接 $\triangle AC_1B_2$ 、 $\triangle BA_1C_2$ 、 $\triangle CB_1A_2$ 的各一條高 $\overline{AH_A}$ 、 $\overline{BH_B}$ 、 $\overline{CH_C}$ 交於動點 $X_{H(\varphi)}$ ；旁接三角形 $\triangle AC_1B_2$ 、 $\triangle BA_1C_2$ 、 $\triangle CB_1A_2$ 的各一條中垂線 $\overline{M_AT_A}$ 、 $\overline{M_BT_B}$ 、 $\overline{M_CT_C}$ 交於動點 $X_{P(\varphi)}$ 。我們分別令 φ 為 30° 、 45° 、 60° 、 90° 、 120° 、 135° 、 150° 等特殊角度下，利用網站 Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers 查詢 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 是否為特殊點，我們發現 $X_{P(\frac{\pi}{4})}$ 和 $X_{P(\frac{3\pi}{4})}$ 並沒有被收錄。此外，值得一提的是，我們發現對於任意實數 φ ， $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi \pm \frac{\pi}{2})}$ 皆重合。

二、 動點 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 各自的軌跡

我們接續研究動點 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 的軌跡，發現點 $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 的軌跡即為著名的 Kiepert 雙曲線。由於 Kiepert 雙曲線的構造法與本研究不同，我們也繼續探討兩者的關聯，並給出證明，因此本研究的外西瓦線構造法可以看作 Kiepert 雙曲線的新構造法。我們也將 $X_{P(\varphi)}$ 的軌跡繪製出來，發現其並非二次曲線。

三、 動點 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點的綜合性質

我們先探討前述三個動點各自的軌跡，接續研究三個動點 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 彼此

的關聯性，考慮任選兩點所構成的直線之性質。我們發現有趣的定性性質，對於任意實數 φ ， $\overleftrightarrow{X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 恆通過 $\triangle ABC$ 的重心 G ； $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 恆通過 $\triangle ABC$ 九點圓圓心 N ； $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 沒有通過定點。此外，我們也給出共線三點的比例常數。

進一步研究發現 $\overleftrightarrow{X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 的三線極點 (Tripole) 的軌跡是著名的 Steiner 橢圓；而 $\overleftrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 的三線極點 (Tripole) 的軌跡是通過 $\triangle ABC$ 三頂點的二次曲線，我們給出其形態判別式 (橢圓、拋物線、雙曲線)。

動點 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 共線的充要條件是什麼呢？我們給出充要條件是 $\triangle ABC$ 為等腰三角形 (此時是 $\triangle ABC$ 的中線)，或 $\varphi = k\pi$ (此時是 $\triangle ABC$ 的歐拉線)。

柒、 進行中的研究：可變的相異長度參數

我們對於旋轉角度 φ 所構造的旁接三角形的性質已給出完整刻劃。我們持續進行「不同比例」長度的推廣，即不相等的參數 λ_1 、 λ_2 、 λ_3 ，滿足 $\overline{BA'_1} = \overline{CA'_2} = \lambda_1 \overline{BC}$ 與 $\overline{CB'_1} = \overline{AB'_2} = \lambda_2 \overline{CA}$ ，以及 $\overline{AC'_1} = \overline{BC'_2} = \lambda_3 \overline{AB}$ 所構造的旁接三角形與其外西瓦線性質。

捌、 參考文獻

- [1] Z. Cerin (2003). Homology and Orthology with Triangles for Central Points of Variable Flanks. *Journal for Geometry and Graphics*, 7(1), 1–21.
- [2] N. Dergiades and F.V. Lamoen (2003). Rectangles Attached to Sides of a Triangle, *Forum Geom.*, 3, 145–159.
- [3] Floor van Lamoen (2018). Orthopoles and Variable Flanks, *Forum Geom.*, 18, 349–351.
- [4] L. Hoehn (2001). Extriangles and excevians. *Math. Magazine*, 67, 188–205.
- [5] Kiepert Hyperbola Website, <https://mathworld.wolfram.com/KiepertHyperbola.html>
- [6] C. Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers Website, <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>
- [7] Steiner Circumellipse Website, <http://mathworld.wolfram.com/SteinerCircumellipse.html>
- [8] P. Yiu (2001). *Introduction to the Geometry of the Triangle*, available at <http://math.fau.edu/Yiu/YIUIntroductionToTriangleGeometry121226.pdf>
- [9] T. Zaharinov (2017). Orthopoles, Flanks, and Vecten Points, *Forum Geom.*, 17, 401–410.

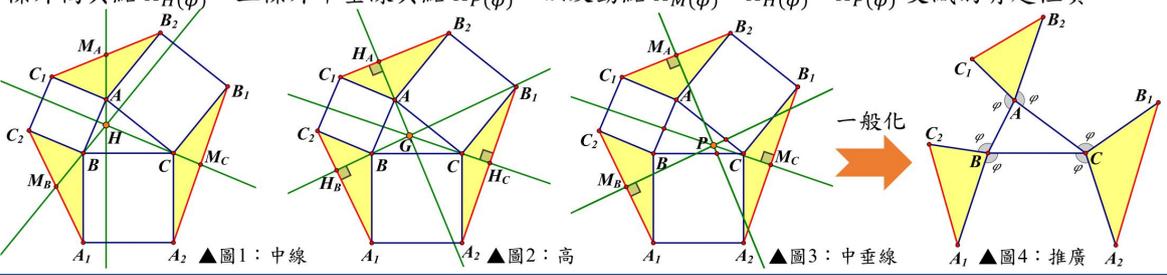
【評語】 030423

作者推廣參考文獻 *Extriangles and Excevians* (Larry Hoehn 於 2001 年所著) 的研究結果，嘗試以的三個頂點為旋轉中心，將三邊向外旋轉任意角度形成三個變動的旁接三角形，分別取三個旁接三角形的中線（高或中垂線），研究三線交點的軌跡，即三種外西瓦線共點性質。作者主要使用重心坐標處理外西瓦線交點。三角形的心眾多，利用重心座標處理心的問題，一方面好問題選材不易，且不小心就容易變成計算與比對的工作。然本作品想法頗有新意，結果也相當豐富，整個作品書寫，臨場報告都展現成熟的數學能力與對內容的理解，是一個優秀的作品。

作品海報

壹、研究動機

Larry Hoehn 於 2001 年提出由正方形構造的 $\triangle ABC$ 的旁接三角形的西瓦線之共點性質[4]，相較近來研究推廣為外接矩形[1][2][3][6]，本研究則一般化推廣角度，考慮以 $\triangle ABC$ 的頂點為旋轉中心，將三邊分別旋轉實數 φ 而構造可變動旁接三角形。探討對於任意實數 φ ，三條外中線共點 $X_{M(\varphi)}$ 、三條外高共點 $X_{H(\varphi)}$ 、三條外中垂線共點 $X_{P(\varphi)}$ ，以及動點 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 交織的有趣性質。



貳、預備知識

一、重心坐標 Barycentric Coordinates [5]

定義1. 點 P 位於 $\triangle ABC$ 所在平面上，以有向面積定義坐標 $P(x:y:z) = P(\triangle PBC:\triangle PCA:\triangle PAB)$ 。

定義2. 點 $P(x:y:z)$ 滿足一次方程 $\sigma_1 x + \sigma_2 y + \sigma_3 z = 0$ ，全體點 $(x:y:z)$ 為一直線。

定義3. 點 $S(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ 、 $T(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ ，直線 \overleftrightarrow{ST} 方程式為 $\begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ 。

性質4. 正規化的重心坐標下，兩向量 $\overrightarrow{MN} = (x_1:y_1:z_1)$ 、 $\overrightarrow{PQ} = (x_2:y_2:z_2)$ ， $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{PQ}$ 的充要條件為 $a^2(z_1 y_2 + y_1 z_2) + b^2(x_1 z_2 + z_1 x_2) + c^2(y_1 x_2 + x_1 y_2) = 0$ 。

二、康威符號 Conway triangle notation [5]

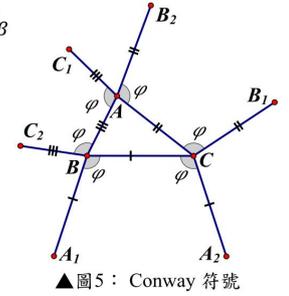
(一) 約定 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{CA} = b$ 、 $\overline{AB} = c$ 且 $S_\alpha = 2 \triangle ABC \cdot \cot \alpha$ 、 $S_{\alpha\beta} = S_\alpha \cdot S_\beta$
 則有 $2S_A = b^2 + c^2 - a^2$ 、 $2S_B = c^2 + a^2 - b^2$ 、 $2S_C = a^2 + b^2 - c^2$
 $S_{AB} + S_{BC} + S_{CA} = S^2$ 。

(二) 點 A_1 、 A_2 、 B_1 、 B_2 、 C_1 、 C_2 的重心坐標如下，其中 $\theta = \frac{\pi - \varphi}{2}$ 。

$$A_1(-a^2 : (S_C + S_\theta) : (S_B + S_\varphi))、A_2(-a^2 : (S_C + S_\varphi) : (S_B + S_\theta))、$$

$$B_1((S_C + S_\varphi) : -b^2 : (S_A + S_\theta))、B_2((S_C + S_\theta) : -b^2 : (S_A + S_\varphi))、$$

$$C_1((S_B + S_\theta) : (S_A + S_\varphi) : -c^2)、C_2((S_B + S_\varphi) : (S_A + S_\theta) : -c^2)。$$



參、研究結果

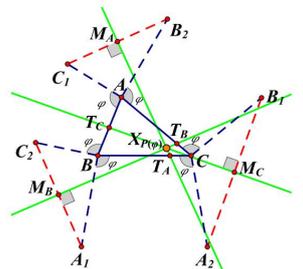
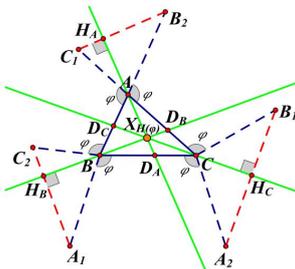
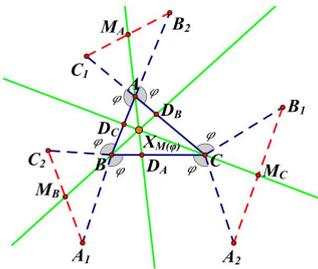
一、一般化： $\varphi \in \mathbb{R}$ ，外西瓦線三線交於一點

對於平面上任意 $\triangle ABC$ ，利用逆西瓦定理與行列式值，我們有以下定理。

定理1. (外中線)
 $\overrightarrow{AM_A}$ 、 $\overrightarrow{BM_B}$ 、 $\overrightarrow{CM_C}$ 交於一點
 $X_{M(\varphi)} \left(\frac{1}{S_\varphi - S_A} : \frac{1}{S_\varphi - S_B} : \frac{1}{S_\varphi - S_C} \right)$ 。

定理2. (外高)
 $\overrightarrow{AH_A}$ 、 $\overrightarrow{BH_B}$ 、 $\overrightarrow{CH_C}$ 交於一點
 $X_{H(\varphi)} \left(\frac{1}{S^2 + S_{A\varphi}} : \frac{1}{S^2 + S_{B\varphi}} : \frac{1}{S^2 + S_{C\varphi}} \right)$ 。

定理3. (外中垂線)
 $\overrightarrow{MA_T A}$ 、 $\overrightarrow{MB_T B}$ 、 $\overrightarrow{MC_T C}$ 交於一點
 $X_{P(\varphi)}$ (坐標詳閱研究報告書)。



利用「Clark Kimberling's The Encyclopedia of Triangle Centers, ETC」討論 φ 為特殊角時彼此關聯性

表 1：外中線交點 $X_{M(\varphi)}$

φ	$X_{M(\varphi)}$ 在 ETC 編號
30°	X_{18} Second Napoleon point
45°	X_{486} Inner Vecten Point
60°	X_{14} Second Fermat Point
90°	X_4 Orthocenter
120°	X_{13} First Fermat Point
135°	X_{485} Vecten Point
150°	X_{17} First Napoleon point

表 2：外高交點 $X_{H(\varphi)}$

φ	$X_{H(\varphi)}$ 在 ETC 編號
30°	X_{13} First Fermat Point
45°	X_{485} Vecten Point
60°	X_{17} First Napoleon point
90°	X_2 Centroid
120°	X_{18} Second Napoleon point
135°	X_{486} Inner Vecten Point
150°	X_{14} Second Fermat Point

表 3：外中垂線交點 $X_{P(\varphi)}$

φ	$X_{P(\varphi)}$ 在 ETC 編號
30°	X_{33440} Anticomplement of X_{6306}
45°	未收錄 --
60°	X_{627} Anticomplement of X_{17}
90°	X_{591} 1 st Van Lamoen Perpendicular Bisectors point
120°	X_{22114} Anticomplement of X_{628}
135°	未收錄 --
150°	X_{33442} Anticomplement of X_{6307}

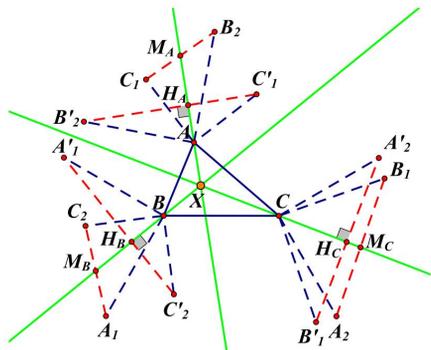
二、動點 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 的軌跡

性質4. 對於任意實數 φ ， $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi \pm \frac{\pi}{2})}$ 重合。

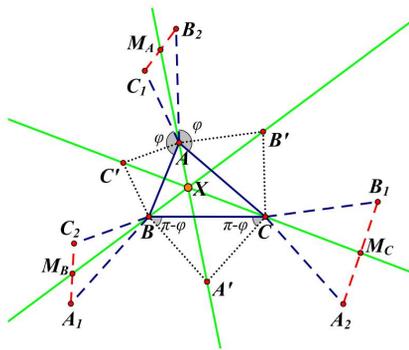
定義5. (Kiepert 雙曲線) 若分別以 $\triangle ABC$ 的三邊為底邊作任意的相似等腰三角形 $\triangle A'BC$ 、 $\triangle B'CA$ 、 $\triangle C'AB$ ，則 $\overrightarrow{A'A}$ 、 $\overrightarrow{B'B}$ 、 $\overrightarrow{C'C}$ 交於一點，此動點的軌跡為 Kiepert 雙曲線，其重心坐標方程式為 $(S_A - S_B)xy + (S_B - S_C)yz + (S_C - S_A)zx = 0$ 。

定理6. 動點 $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 的軌跡是 Kiepert 雙曲線。

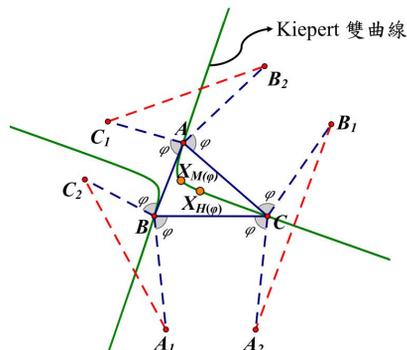
證明. 將 $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 的坐標代回定義5，即可給出代數證明。我們利用性質4也同時給出幾何證明。



▲圖9: $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi \pm \frac{\pi}{2})}$ 重合



▲圖10: 外西瓦線與 Kiepert 雙曲線



▲圖11: $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 的軌跡

從定理6可以發現本研究的「外西瓦線構造法」可以視為著名的 Kiepert 雙曲線的一種新構造法。

三、動點 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點的綜合性質

(一) $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 連線的性質：通過重心 G 的線束

我們已經發現 $X_{M(\varphi)}$ 與 $X_{H(\varphi)}$ 的關聯性。那麼關於 $X_{P(\varphi)}$ 呢？是孤立的嗎？

表3中，當 $\varphi = 60^\circ$ 時，發現外高交於 X_{17} 、外中垂線交於 X_{627} ，滿足「Anticomplement 逆互補」，即 X_{17} 、 X_{627} 與重心 G 共線且向量 $\overrightarrow{X_{627}G} = 2\overrightarrow{GX_{17}}$ 。

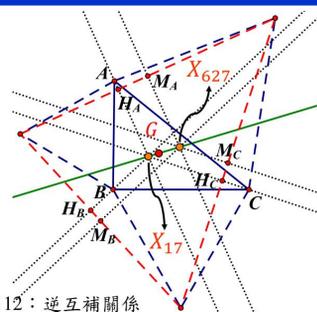
定理7. 對於任意實數 φ ，重心 G 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 三點恆共線。

定理8. (比例常數) 有向線段比 $\frac{\overrightarrow{X_{P(\varphi)}X_{H(\varphi)}}}{\overrightarrow{GX_{H(\varphi)}}} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\cos \varphi} \right)$ 。

定義9. (Steiner 橢圓) 三角形的外接橢圓中，它的中心與三角形的重心重合的橢圓稱為 Steiner 橢圓，其重心坐標方程式為 $xy + yz + zx = 0$ 。

定義10. 平面上 $P(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ 、 $L: \frac{x}{\mu_1} + \frac{y}{\mu_2} + \frac{z}{\mu_3} = 0$ ，則 P 點稱為直線 L 的三線極點，直線 L 稱為 P 點的三線極線。

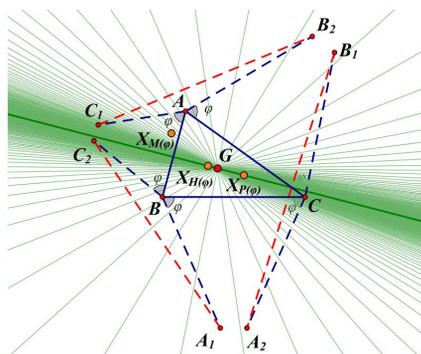
定理11. 直線 $\overrightarrow{X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}}: (S^2 + S_{A\varphi})(S_B - S_C)x + (S^2 + S_{B\varphi})(S_C - S_A)y + (S^2 + S_{C\varphi})(S_A - S_B)z = 0$ 的三線極點之軌跡是 Steiner 橢圓。



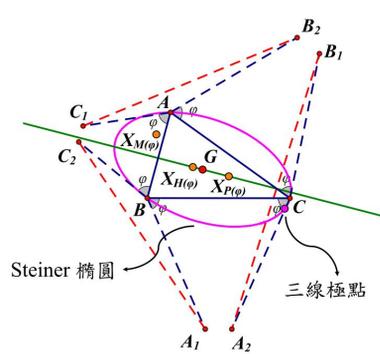
▲圖12: 逆互補關係

表4: 特殊角時的比例常數。

φ	$\frac{\overrightarrow{X_{P(\varphi)}X_{H(\varphi)}}}{\overrightarrow{GX_{H(\varphi)}}}$
30°	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$
60°	3
90°	--
120°	$-\sqrt{3}$
135°	$-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
150°	-3



▲圖13: $\overrightarrow{X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 恆通過重心 G



▲圖14: $\overrightarrow{X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 的三線極點軌跡

(二) $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 連線的性質：通過九點圓圓心的線束

定理12. 對於任意實數 φ ，九點圓圓心 N 、 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 三點恆共線。

定理13. (比例常數) 有向線段比 $\frac{\overrightarrow{X_{H(\varphi)}N}}{\overrightarrow{X_{M(\varphi)}N}} = \frac{3S_\varphi^2 + S^2 - 2S_\varphi(S_A + S_B + S_C)}{-3S^2 - S_\varphi^2 - 2S_\varphi(S_A + S_B + S_C)}$ 。

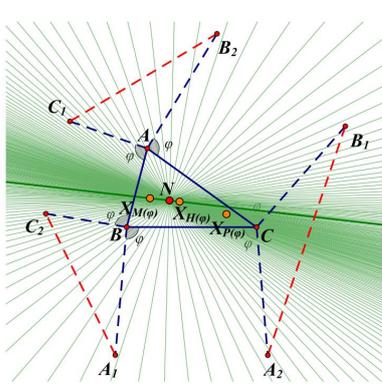
$X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 、 G 的比例常數由 φ 決定
 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 N 的比例常數由 φ 與 $\triangle ABC$ 決定

引理14. 二次曲線與無窮遠線 L_∞ 相離時，該二次曲線即為橢圓；
 與無窮遠線 L_∞ 相切時，該二次曲線即為拋物線；
 與無窮遠線 L_∞ 相割時，該二次曲線即為雙曲線。

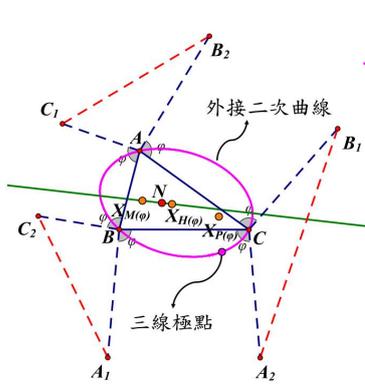
定理15. 直線 $\overrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}: (S_\varphi - S_A)(S_\omega - S_A)(S_B - S_C)x + (S_\varphi - S_B)(S_\omega - S_B)(S_C - S_A)y + (S_\varphi - S_C)(S_\omega - S_C)(S_A - S_B)z = 0$

的三線極點軌跡是 $\triangle ABC$ 的外接二次曲線，其中 $\omega = \varphi + \frac{\pi}{2}$ 。

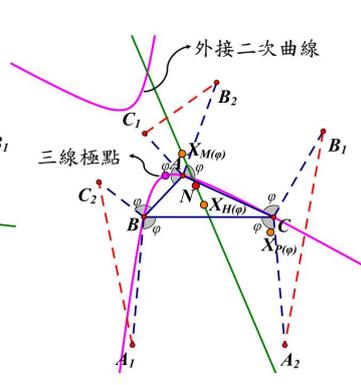
此二次曲線的型態判別式為 $\Delta = S_{BC}^2 + S_{AC}^2 + S_{AB}^2 - 2(S_{BC}S_{AC} + S_{BC}S_{AB} + S_{AC}S_{AB}) - 5S^4$ ，
 當 $\Delta > 0$ 時，為雙曲線；當 $\Delta = 0$ 時，為拋物線；當 $\Delta < 0$ 時，為橢圓。



▲圖15： $\overrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 恆通過九點圓心 N



▲圖16： $\overrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 的三線極點軌跡



▲圖17： $\overrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 的三線極點軌跡

(三) $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 連線並非線束

(四) $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 共線的充要條件

定理16. $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 共線的充要條件是 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，或 $\varphi = k\pi$ ，其中 $k \in \mathbb{N}$ 。

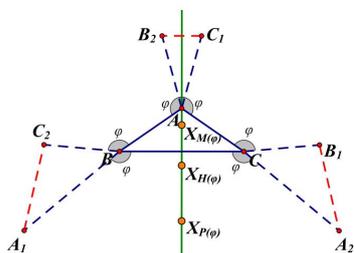
證明. 利用定理7，考慮將 $X_{M(\varphi)}$ 代入 $\overrightarrow{X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 方程式可得 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 共線的充要條件為 $(S^2 + S_\varphi^2)(S_A - S_B)(S_B - S_C)(S_C - S_A) = 0$ 。

Case1. 當 $\triangle ABC$ 為等腰三角形時，

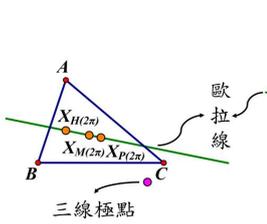
$X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 在中線上。

Case2. 當 $\varphi = k\pi$ ，因 S_φ 未定義，所以從幾何構圖去探討

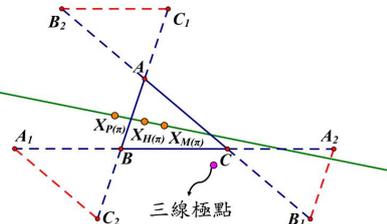
而可得出 $X_{M(\varphi)}$ 為重心、 $X_{H(\varphi)}$ 為垂心、 $X_{P(\varphi)}$ 為外心或 X_{382} ，此直線為 $\triangle ABC$ 的歐拉線。



▲圖17：等腰三角形



▲圖18： $\varphi = 2\pi$



▲圖19： $\varphi = \pi$

肆、近期研究：改變長度

(一) 相同縮放比例時

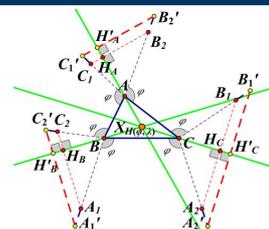
$$\frac{BA'_1}{CB'_1} = \frac{CA'_2}{AB'_2} = \lambda \frac{BC}{CA}$$

$$\frac{CB'_1}{AC'_1} = \frac{AB'_2}{BC'_2} = \lambda \frac{CA}{AB}$$

$$\frac{AC'_1}{BA'_1} = \frac{BC'_2}{CA'_2} = \lambda \frac{AB}{BC}$$

定理17. 長度與角度可變動下，三種三線共點，分別為 $X_{M(\varphi, \lambda)}$ 、 $X_{H(\varphi, \lambda)}$ 、 $X_{P(\varphi, \lambda)}$ 。

證明. 利用比例線段判定平行後，可得相似三角形，則可將定理1(外中線)、定理2(外高)、以及定理3(外中垂線)進行推廣。



▲圖20：以外高為例

(二) 不同縮放比例時

$$\frac{BA'_1}{CB'_1} = \frac{CA'_2}{AB'_2} = \lambda_1 \frac{BC}{CA}$$

$$\frac{CB'_1}{AC'_1} = \frac{AB'_2}{BC'_2} = \lambda_2 \frac{CA}{AB}$$

$$\frac{AC'_1}{BA'_1} = \frac{BC'_2}{CA'_2} = \lambda_3 \frac{AB}{BC}$$

$$A'_1 \left(-\lambda_1 a^2 : ((1 - \lambda_1)S_\varphi + \lambda_1 S_C + S_\theta) : \lambda_1 (S_B + S_\varphi) \right), A'_2 \left(-\lambda_1 a^2 : \lambda_1 (S_C + S_\varphi) : ((1 - \lambda_1)S_\varphi + \lambda_1 S_B + S_\theta) \right)$$

$$B'_1 \left(\lambda_2 (S_C + S_\varphi) : -\lambda_2 b^2 : ((1 - \lambda_2)S_\varphi + \lambda_2 S_A + S_\theta) \right), B'_2 \left(((1 - \lambda_2)S_\varphi + \lambda_2 S_C + S_\theta) : -\lambda_2 b^2 : \lambda_2 (S_A + S_\varphi) \right)$$

$$C'_1 \left(((1 - \lambda_3)S_\varphi + \lambda_3 S_B + S_\theta) : \lambda_3 (S_A + S_\varphi) : -\lambda_3 c^2 \right), C'_2 \left(\lambda_3 (S_B + S_\varphi) : ((1 - \lambda_3)S_\varphi + \lambda_3 S_A + S_\theta) : -\lambda_3 c^2 \right)$$

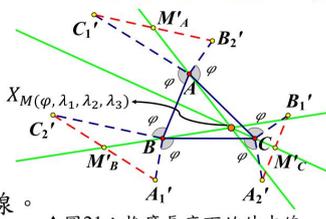
我們給出有趣的長度比例，實數比 $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = (S_A + S_\varphi) : (S_B + S_\varphi) : (S_C + S_\varphi)$ ，而有以下性質。

定理18. (外中線)

$\overrightarrow{AM'_A}$ 、 $\overrightarrow{BM'_B}$ 、 $\overrightarrow{CM'_C}$ 交於一動點 $X_{M(\varphi, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}$ 。

定理19. (軌跡)

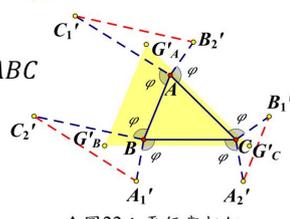
動點 $X_{M(\varphi, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)}$ 為歐拉線。



▲圖21：推廣長度下的外中線

性質20. (平行)

$\triangle G'_A G'_B G'_C \sim \triangle ABC$



▲圖22：平行與相似

伍、結論

- 一、外中線交於一動點 $X_{M(\varphi)}$ ；外高交於一動點 $X_{H(\varphi)}$ ；外中垂線交於一動點 $X_{P(\varphi)}$ 。
- 二、發現動點 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 的軌跡為著名的 Kiepert 雙曲線。值得一提的是，本研究的構造法異於 Kiepert 雙曲線的原始構造法，本研究可視為新的方法。
- 三、 $\overrightarrow{X_{H(\varphi)}X_{P(\varphi)}}$ 恆通過重心 G 、 $\overrightarrow{X_{M(\varphi)}X_{H(\varphi)}}$ 恆通過九點圓心 N ，我們給出其比例常數，並進一步研究兩直線的三線極點之軌跡。
- 四、我們給出動點 $X_{M(\varphi)}$ 、 $X_{H(\varphi)}$ 、 $X_{P(\varphi)}$ 共線的充要條件。

陸、主要參考資料

[1] Z. Cerin (2003). Homology and Orthology with Triangles for Central Points of Variable Flanks. *Journal for Geometry and Graphics*, 7(1), 1–21.

[2] N. Dergiades and F.V. Lamoen (2003). Rectangles Attached to Sides of a Triangle. *Forum Geom.*, 3, 145–159.

[3] Floor van Lamoen (2018). Orthopoles and Variable Flanks. *Forum Geom.*, 18, 349–351.

[4] L. Hoehn (2001). Extriangles and excevians. *Math. Magazine*, 67, 188–205.

[5] P. Yiu (2001). *Introduction to the Geometry of the Triangle*. Retrieved from <http://math.fau.edu/Yiu/YIUIntroductionToTriangleGeometry121226.pdf>

[6] T. Zaharinov (2017). Orthopoles, Flanks, and Vecten Points. *Forum Geom.*, 17, 401–410.