中華民國第 60 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國中組　數學科

030404

袋袋相傳

學校名稱：臺南市私立德光高級中學(附設國中)

作者：	指導老師：
國二 温郁玟	沈坤緣
國二 陳慧芝	周子凱
國二 李沛璇	

關鍵詞：平衡狀態、袋中拿球

摘要

有n個袋子，每袋都有球，從球數最多的袋子中，取出和球數最少的袋子數量相同的球，放置球數最少的袋子中。反覆取放多次後，直到每個袋子的球數皆相同，即為平衡狀態。討論球數與袋子之間的關係為何，才能有機會達平衡狀態。能得知需經幾次移動才能達平衡狀態（取放一次稱為移動一次）。

壹、 研究動機

有一天在圖書館閱讀到科學教育月刊，有一個的數學遊戲讓我們感到興趣。將兩堆小石子移動成數量相等狀態：「有左、右兩堆小石子，移數動這些小石子，每次都從數量較多的那一堆拿出當下較少那堆之個數的小石子，將其放到數量較少的那堆，反覆進行這種動作，直到兩堆小石子數目相等。」一定能移動成兩堆數量相等嗎？若可以，需要多少次的移動？以此類堆，在三個袋子中，取放的方式為從數量最多的拿取和當下數量最少相同數量的石子，將其放入數量最少的那堆。

第十三屆 PMWC 世界邀請賽隊際競賽試題：

有兩盒珠子，其中在 A 盒內珠子的數目介於 133 顆與 200 顆之間，現在進行以下的操作：

步驟 1	從 A 盒中取出與 B 盒中相同數量的珠子加入 B 盒中
步驟 2	從 B 盒中取出與 A 盒中現有珠子數量相同的珠子加入 A 盒中
步驟 3	從 A 盒中取出與 B 盒中現有珠子數量相同的珠子加入 B 盒中
步驟 4	從 B 盒中取出與 A 盒中現有珠子數量相同的珠子加入 A 盒中
步驟 5	從 A 盒中取出與 B 盒中現有珠子數量相同的珠子加入 B 盒中

經過這五步驟的操作後，A、B 兩盒內的珠子數量恰好相同。請問 A 盒內原來有多少顆珠子？

此外，我們也好奇三袋以相同的取法是否可以達到每袋數量相同？如果可以那 n 袋情況呢？

貳、研究目的

一、觀察、討論兩個袋子的情況下，有機會達到平衡的球數關係。

二、觀察、討論三個袋子的情況下，有機會達到平衡的球數關係。

三、觀察、討論兩個袋子達平衡時，球需移動的次數。

四、觀察、討論三個袋子達平衡時，球需移動的次數。

參、研究過程及方法

一、欲達平衡狀態的條件討論

平衡狀態定義:$(a,b) \to \cdots \to (\propto,\beta)$ ，其中$\propto = \beta$時稱此時為平衡狀態

（一）觀察兩袋可以達到平衡狀態

兩袋的球數和一定要偶數才有機會達到平衡狀態。若兩袋球數和為S ，兩袋的球數以(a,b)表示，其中$a \le b$ 。

	(a,b)
4	(1,3)
6	╳
8	(1,7),(2,6),(3,5)
10	╳
12	(3,9)
14	╳
16	(1,15),(2,14),(3,13),(4,12),(5,11),(6,10),(7,9)
18	╳
20	(5,15)
22	╳
24	(3,21),(6,18),(9,15)
26	╳
28	(7,21)
30	╳
32	(1,31),(2,30),(3,29),(4,28),(5,27),(6,26),(7,25)⋯

觀察得知：兩袋中球數和為 2^n 時，經反覆規律取放球的步驟後，才有機會達到平衡狀態，此時每袋各有球數 2^{n-1} 個。

（二）觀察三袋可以達到平衡狀態

三袋的球數和一定要是 3 的倍數才有機會達到平衡狀態。若三袋球數和為 S，三袋的球數以 (a,b,c) 表示，其中 $a \le b \le c$。

S	(a,b,c)
6	(1,2,3)
9	╳
12	(1,1,10),(1,2,9),(1,3,8),(1,4,7),(1,5,6),(2,3,7)⋯
15	╳
18	(3,6,9)
21	╳
24	(1,1,22),(1,2,21),(1,3,20),(1,4,19),(1,5,18)⋯
27	╳
30	(5,10,15)
33	╳
36	(6,12,18),(3,3,30),(3,6,27),(3,9,24),(3,15,18)⋯
39	╳
42	(7,14,21)
45	╳
48	(1,1,46),(1,2,45),(1,3,44),(1,4,43),(1,5,42),(1,6,41)⋯

觀察得知：三袋中球數和為 3×2^n 時，經反覆規律取球的步驟後，才有機會達到平衡狀態，此時每袋各有球 2^n 個。

（三）兩袋模組欲達平行狀態之推論

兩個袋子，其袋子中球數和為 2×2^k 個時，經反覆規律取放球的步驟後，一定可以達到平衡狀態，每袋各有球 2^k 個。

兩個袋子中球數依序為 a,b，以 (a,b) 表示，其中 $a\le b$，$a+b=2\times 2^k$。

證明：

假設平衡前一步兩袋球數依序為 a_{m-1}, b_{m-1} ，其模組以 (a,b) 表示兩袋每步取放球後，球數的關係如下：

$(a,b) \to (a_1, b_1) \to \cdots \to (a_{m-1}, b_{m-1}) \to$ 平衡狀態，

則 $(a_{m-1}, b_{m-1}) \to (2a_{m-1}, b_{m-1} - a_{m-1})$ ， $(2a_{m-1}, b_{m-1} - a_{m-1})$ 必為平衡狀態，

$2a_{m-1} = b_{m-1} - a_{m-1} \Rightarrow 3a_{m-1} = b_{m-1} \Rightarrow a_{m-1} : b_{m-1} = 1:3$ 。

因此得知 $a+b$ 必為偶數，所以分成兩情況：

1. a, b 都是偶數。
2. a, b 都是奇數。

（1）若 $\begin{cases} a = 2p \\ b = 2q \end{cases}$ ，則經第一步後得 $(a,b) \to (2p+2p, 2q-2p)$ ，此時兩袋球數必為 2 的倍數，比如： $(4,10) \to (8,6) \to (2,12)$。所以兩袋皆為偶數時，經取放球後，兩袋的球數比，必可以提出 2 的倍數。

（2）若 $\begin{cases} a = 2p+1 \\ b = 2q+1 \end{cases}$ ，則經第一步後得 $(a,b) \to (2p+2p+2, 2q-2p)$ ，此時兩袋球數必為 2 的倍數。所以兩袋皆為奇數時，經取放球後，兩袋的球數比，必可以提出 2 的倍數。

由（1）（2）得知，兩袋模組的取放球，每一步都可提出 2 的倍數。

$(a,b) \xrightarrow{1} (a_1, b_1) \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{m-1} (a_{m-1}, b_{m-1}) \xrightarrow{m}$ 平衡狀態，(a,b) 經 m 步的取放球後達到平衡。則平衡前一步 $a_{m-1} + b_{m-1} = 1+3 = 2^2$ ，平衡前二步 $\Rightarrow a_{m-2} + b_{m-2} = 2 \times 2^2 = 2^3$ ，平衡前三步 $\Rightarrow a_{m-3} + b_{m-3} = 2^4$ ，平衡前四步 $\Rightarrow a_{m-4} + b_{m-4} = 2^5$ ，以此類推 $\cdots \Rightarrow a+b = 2^{m+1}$ 。

所以，兩袋球數的和為 2×2^m 時，經反覆規律取球的步驟後，才有機會達到平衡狀態。

（四）欲達平衡狀態三袋模組之推論

(a,b,c) 三袋取放球達平衡狀態前，務必其中一袋將先達平衡狀態，最後僅剩下兩袋的取放模式。

$(a,b,c) \xrightarrow{1} (a_1, b_1, c_1) \xrightarrow{2} \cdots \xrightarrow{r} (a_r, b_r, c_r) \to \cdots$ 其中 b_r 為平衡狀態，接著取放球的步驟，即視為兩袋模組，

繼續移動 $(a_r, b_r, c_r) \to (a_{r+1}, b_{r+1}, c_{r+1}) \to \cdots \to (a_{m-1}, b_{m-1}, c_{m-1}) \to$ 平衡狀態，由（三）兩袋模組之推論得知，$a_r + c_r = 2\times 2^m$ 則 $b_r = 2^m \Rightarrow a+b+c = 3\times 2^m$。

所以，三袋球數的和為 3×2^m 時，經反覆規律取球的步驟後，才有機會達到平衡狀態。

【n 袋模組推論】

以此類推，n 個袋子中，各袋球數依序為 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，
以 $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ 表示，其中 $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n$，
$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n\times 2^k$，經反覆規律取放球的步驟後，才有機會達到平衡狀態。

二、欲達平衡狀態的移動次數討論

（一）觀察兩袋模組達平衡時移動的次數

觀察兩袋模組 (a,b) 達平衡狀態，所需移動的次數（取放一次稱為移動一次）。

以 $f(a,b,2\times 2^n)$ 表示達平衡所需移動的次數，其中 $a \le b$，$S = a+b = 2\times 2^n$。

$S = 4 = 2\times 2^1$

$f(a,b,2\times 2^1)$	(a,b)
1	(1, 3)

$S = 8 = 2\times 2^2$

$f(a,b,2\times 2^2)$	(a,b)
1	(2, 6)
2	(1, 7),(3, 5)

$S = 16 = 2\times 2^3$

$f(a,b,2\times 2^3)$	(a,b)
1	(4,12)
2	(2,14),(6,10)
3	(1,15),(3,13),(5,11),(7, 9)

$S=32=2\times 2^4$

$f(a,b,2\times 2^4)$	(a,b)
1	(8,24)
2	(4,28),(12,20)
3	(2,30),(6,26),(10,22),(14,18)
4	(1,31),(3,29),(5,27),(7,25),(9,23),(11,21),(13,19),(15,17)

$S=64=2\times 2^5$

$f(a,b,2\times 2^5)$	(a,b)
1	(16,48)
2	(8,56),(24,40)
3	(4,60),(12,52),(20,44),(28,36)
4	(2,62),(6,58),(10,54),(14,50),(18,46),(22,42),(26,38),(30,34)
5	(1,63),(3,61),(5,59),(7,57),(9,55),(11,53),(13,51),(15,49) (17,47),(19,45),(21,43),(23,41),(25,39),(27,37),(29,35),(31,33)

觀察得知：兩袋中球數和為 2×2^n 時，兩袋模組欲達平衡狀態，需移動的次數為 $f(a,b,2\times 2^n)=n-k$ 次，其中 $a\le b$，若 a, b 的最大公因數為 2^k，$(a,b)=2^k$。

（二）兩袋模組移動次數推論

兩袋模組 m 次移動後，球數的比 (a_m,b_m)，其中 $a_m\le b_m$

$$(a,b)\xrightarrow{1}(a_1,b_1)\xrightarrow{2}\cdots\xrightarrow{m}(a_m,b_m)\longrightarrow\cdots\longrightarrow(1,3)\longrightarrow(1,1)$$

1.若 $a,b\in$ 奇數

$\begin{cases}a=2p+1\\ b=2q+1\end{cases}$，則經第一步移動後得，此時兩袋球數必為 2 倍數。

$f(a,b,2\times 2^n)=1+f(a_1,b_1,2\times 2^{n-1})$，同理可推

$f(a,b,2\times 2^n)=m+f(a_m,b_m,2\times 2^{n-m})$，

所以 $f(a,b,2\times 2^n)=n+f(1,1,2\times 2^{n-n})=n$ 。

2.若 $(a,b)=2^k$

$\begin{cases}a=2^k p\\ b=2^k q\end{cases}$，其中 p,q 互質，則 $a+b=2\times 2^n\Rightarrow 2^k p+2^k q=2\times 2^n$，

$a:b=(2^k\times p):(2^k\times q)=p:q \Rightarrow p+q=2\times 2^{n-k}$，

$\Rightarrow f(a,b,2\times 2^n)=f(p,q,2\times 2^{n-k})$。

由 1 得知 $f(p,q,2\times 2^{n-k})=n-k+f(1,1,2\times 2^{(n-k)-(n-k)})$，

所以 $f(a,b,2\times 2^n)=n-k$。

若 $a=2^k\times p$，又 $a+b=2\times 2^n$，則 $b=2^{n+1}-2^k\times p=2^{k_1}\times q$，其

$k_1\geq k \Rightarrow a,b$ 的最大公因數必為 2^k，$(a,b)=2^k$。

> 若 $(a,b)=2^k$，$a\leq b$，$a+b=2\times 2^n$，其中 a,b 為兩袋球數比， 兩袋模組欲達平衡狀態，需移動的次數為 $f(a,b,2\times 2^n)$，(a,b) 移動後均可以達到平衡狀態。則 $f(a,b,2\times 2^n)=n-k$。

（三）觀察三袋模組移動的達平衡時次數

觀察三袋模組 (a,b,c) 達平衡狀態，所需移動的次數（取放一次稱為移動一次）。以 $f(a,b,c,3\times 2^n)$ 表示達平衡所需移動的次數，其中 a,b,c 為三袋個別球數，$a\leq b\leq c$，$S=a+b+c=3\times 2^n$。

$S=6=3\times 2^1$

$f(a,b,c,3\times 2^1)$	(a,b,c)
1	(1, 2, 3)
2	(1, 1, 4)

$S=12=3\times 2^2$

$f(a,b,c,3\times 2^2)$	(a,b,c)
1	(2, 4, 6)
2	(1, 4, 7),(2, 2, 8),(3, 4, 5)
3	(1, 2, 9),(2, 3, 7),(2, 5, 5)
4	(1, 1,10),(1, 3, 8),(1, 5, 6)
無法平衡	(3, 3, 6)

$S=24=3\times 2^3$

$f(a,b,c,3\times 2^3)$	(a,b,c)
1	(4, 8,12)

2	(2, 8,14),(4, 4,16),(6, 8,10)
3	(2, 4,18),(1, 8,15),(3, 8,13),(5, 8,11),(7, 8, 9),(3,10,11),(4, 6,12),(4,10,10),(5, 6,13)
4	(2, 2,20),(1, 4,19),(3, 4,17),(4, 5,15),(4, 7,13),(4, 9,11),(2, 6,16),(2,10,12),(3, 5,16)
5	(1, 2,21),(2, 3,19),(2, 5,17),(2, 7,15),(2, 9,13),(2,11,11),(1, 6,17),(1,10,13)
6	(1, 1,22), (1, 3,20),(1, 5,18),(1, 7,16),(1, 9,14),(1,11,12),(5, 6,37)
無法平衡	(3, 3,18),(3, 6,15),(3, 7,14),(3, 9,12),(5, 5,14),(5, 7,12),(5, 9,10),(6, 6,12),(6, 7,11),(6, 9, 9),(7, 7,10)

$S = 48 == 3 \times 2^4$

$f(a,b,c,3\times 2^4)$	(a,b,c)
1	(8,16,24)
2	(4,16,28),(8, 8,32),(12,16,20)
3	(2,16,30),(4, 8,36),(8,12,28),(8,20,20),(14,16,18),(10,16,22),(6,20.22),(10,12,26),(6,16,26)
4	(2, 8,38),(3,16,29),(4, 4,40),(4,12,32),(4,20,24),(5,16,27),(6,10,32),(7,18,23),(8,10,30),(3,20,25),(8,14,26),(8,18,22),(9,14,25),(9,16,23),(11,16,21),(13,16,19),(15,16,17),(1,16,31),(6, 8,34),(5,12,31),(3,22,23)
5	(2, 4,42),(2,12,34),(2,20,26),(3, 8,37),(3,10,35),(4, 6,38),(4,10,34),(4,14.30),(4,18,26),(5, 6,37),(5, 8,35),(7, 8,33),(7, 9,32),(8, 9,31),(8,11,29),(8,13,27),(8,15,25),(8,17,23)(8,19,21),(4,22,22),(13,14,21),(11,18,19)
6	(2, 2,44),(2, 6,40),(2,10,36),(2,14,32),(2,18,28),(2,22,24),(3, 4,41),(3, 5,40),(4, 5,39),(4, 7,37),

	(4, 9,35),(4,11,33),(4,13,31),(4,15,29),(4,17,27), (4,19,25),(4,21,23),(1, 4,43),(1,12,35),(1,20,27), (7,13,28)(9,11,28),(9,19,20),
7	(2, 3,43),(2, 5,41),(2, 7,39),(2, 9,37),(2,11,35), (2,13,33),(2,15,31),(2,17,29),(2,19,27),(2,21,25), (2,23.23),(2,19,27),(2,21,25),(2,23,23)(1, 6,41), (1,10,37),(1,14,33),(1,18,29),(1,22,25),(10,19,19)
8	(1, 1,46),(1, 3,44),(1, 5,42),(1, 7.40),(1, 9,38), (1,11,36),(1,13,34),(1,15,32),(1,17,30),(1,19,28), (1,21,26),(1,23,24)
無法平衡	(3, 3,42),(3, 6,39),(3, 7,38),(3, 9,36),(3,11,34), (3,12,33).(3,13,32),(3,14,31),(3,15,30),(3,17,28), (3,18,27),(3,19,26),(3,21,24),(5, 5,38),(5, 7,36), (5, 9,34),(5,10,33),(5,11,32),(5,13,30),(5,14,29), (5,15,28),(5,17,26),(5,18,25),(5,19,24),(5,20,23), (5,21,22),(6, 6,36),(6, 7,35),(6, 9,33),(6,11,31), (6,12,30),(6,13,29),(6,14,28),(6,15,27),(6,17,25), (6,18,24),(6,19,23),(6,21,21),(7, 7,34),(7,10,31), (7,11,30),(7,12,29),(7,14,27),(7,15,26),(7,16,25), (7,17,24),(7,19,22),(7,20,21),(9, 9,30),(9,10,29), (9,12,27),(9,13,26),(9,15,24),(9,17,22),(9,18,21), (10,10,28),(10,11,27),(10,13,25),(10,14,24),(10,15,23), (10,17,21),(10,18,20),(11,11,26),(11,12,25),(11,13,24), (11,14,23),(11,15,22),(11,17,20),(12,12,24),(12,13,23), (12,14,22),(12,15,21),(12,17,19),(12,18,18),(13,13,22), (13,15,20),(13,17,18),(14,14,20),(14,15,19),(14,17,17), (15,15,18)

$S = 96 = 3 \times 2^5$

$f(a,b,c,3\times 2^5)$	(a,b,c)
1	(16,32,48)

2	(24,32,40),(8,32,56),(16,16,64)
3	(4,32,60),(28,32,36),(8,16,72),(20,32,44),(20,24,52),(12,32,52),(12,40,44),(16,24,56),(16,40,40)
4	(2,32,62),(4,16,76),(6,32,58),(6,40,50),(6,44,46),(30,32,34),(8, 8,80),(26,32,38),(8,24,64),(8,40,48),(10,24,62),(10,32,54),(12,16,68),(12,20,64),(14,32,50),(14,36,46),(18,32,46),(18,28,50),(16,20,60),(16,28,52),(16,36,44)
5	(1,32,63),(2,16,78),(3,32,61),(3,40,53),(3,44,49),(3,46,47),(4, 8,84),(4,24,68),(4,40,52),(5,24,67),(5,32,59),(6,16,74),(6,20,70),(31,32,33),(27,32,37),(7,32,57),(7,36,53),(26,28,42),(8,12,76),(25,32,39),(25,28,43),(8,20,68),(23,36,37),(8,28,60),(23,32,41),(8,36,52),(22,36,38),(21,32,43),(8,44,44),(21,22,53),(9,28,59),(9,32,55),(10,12,74),(10,16,70),(11,32,53),(11,42,43),(13,32,51),(13,38,45),(14,16,66),(14,18,64),(19,32,45),(19,26,51),(15,32,49),(15,34,47),(16,18,62),(16,22,58),(17,32,47),(16,26,54),(17,30,49),(16,30,50),(16,34,46),(16,38,42)
6	(1,16,79),(2, 8,86),(2,24,70),(2,40,54),(3,16,77),(3,20,73),(4, 4,88),(4,12,80),(4,20,72),(4,28,64),(4,36,56),(4,44,48),(5,12,79),(5,16,75),(6,10,80),(7,16,73),(7,18,71),(8,10,78),(8,14,74),(25,30,41),(8,18,70),(8,22,66),(8,26,62),(23,34,39),(8,30,58),(8,38,50),(8,42,46),(9,14,73),(9,16,71),(11,16,69),(11,21,64),(11,38,47),(13,16,67),(13,19,64),(13,28,55),(19,36,41),(14,25,57),(14,26,56),(15,16,65),(15,17,64),(19,22,55),(18,38,40),(18,37,41),(16,17,63),(18,23,55),(18,22,56),(16,19,61),(16,21,59),(16,23,57),(16,25,55),(16,27,53),(16,29,51),(16,31,49),(16,33,47),(16,35,45),

	(16,37,43),(16,39,41), (11,36,49)
7	(1, 8,87),(1,24,71),(1,40,55),(2, 4,90),(2,12,82),(2,20,74),(2,36,58),(2,44,50),(3, 8,85),(3,10,83),(4, 6,86),(4,10,82),(4,14,78),(4,18,74),(4,22,70),(4,26,66),(4,30,62),(4,34,58),(4,38,54),(4,42,50),(4,46,46),(5, 6,85),(5, 8,83),(7, 8,81),(7 ,9,80),(29,30,37),(27,34,35),(7,25,64),(7,26,63),(8, 9,79),(8,11,77),(8,13,75),(8,15,73),(8,17,71),(8,19,69),(8,21,67),(8,23,65),(8,25,63),(8,27,61),(8,29,59),(8,31,57),(8,33,55),(8,37,51),(8,39,49),(8,41,47),(8,43,45),(20,38,38),(9,22,65),(9,23,64),(9,37,50),(9,38,49),(9,40,47),(9,41,46),(11,18,67),(11,19,66),(13,14,69),(13,21,62),(14,21,61),(15,25,56),(18,19,59),(17,39,40),(17,23,56)
8	(1, 4,91),(1,12,83),(1,20,75),(1,28,67),(1,36,59),(1,44,51),(2, 2,92),(2, 6,88),(2,10,84),(2,14,80),(2,18,76),(2,22,72),(2,26,68),(2,28,66),(2,30,64),(2,34,60),(2,38,56),(2,42,52),(2,46,48),(3, 4,89),(3, 5,88),(4, 5,87),(4, 7,85),(4, 9,83),(4,11,81),(4,13,79),(4,15,77),(4,17,75),(4,19,73),(4,21,71),(4,23,69),(4,25,67),(4,27,65),(4,29,63),(4,31,61),(4,33,59),(4,35,57),(4,37,55),(4,39,53),(4 ,41,51),(4,43,49),(4,45,47),(7,13,76),(7,21,68),(9,11,76),(9,19,68),(19,38,39),(10,38,48),(19,20,57),(15,29,52),(15,37,44),(17,35,44),(17,27,52)
9	(1, 2,93),(1, 6,89),(1,10,85),(1,14,81),(1,18,77),(1,22,73),(1,26,69),(1,30,65),(1,34,61),(1,38,57),(1,42,53),(1,46,49),(2, 3,91),(2, 5,89),(2, 7,87),(2, 9,85),(2,11,83),(2,13,81),(2,15,79),(2,17,77),(2,19,75),(2,21,73),(2,23,71),(2,25,69),(2,27,67),

	(2,29,65),(2,31,63),(2,33,61),(2,35,59),(2,37,57),(2,39,55),(2,41,53),(2,43,51),(2,45,49),(2,47,47),(5,38,53),(26,29,41),(26,27,43),(22,37,37),(22,35,39),(10,19,67),(19,19,58)
10	(1, 1, 94),(1, 3,92),(1, 5,90),(1, 7,88),(1, 9,86),(1,11,84),(1,13,82),(1,15,80),(1,17,78),(1,19,76),(1,21,74),(1,23,72),(1,25,70),(1,27,68),(1,29,66),(1,31,64),(1,33,62),(1,35,60),(1,37,58),(1,39,56),(1,41,54),(1,43,52),(1,45,50),(1,47,48),(5,19,72),(11,35,50),(11,37,48),(11,39,46),(13,27,56),(13,29,54),(13,41,42)
11	(27,29,40),(25,35,36)
12	(20,29,47),(20,27,49),(18,35,43),(18,25,53)
13	(9,25,62),(9,35,52),(9,43,44),(10,27,59),(10,29,57)
14	(5,29,62),(26,35,35)
17	(12,35,49),(12,37,47)
18	(6,35,55),(6,37,53)
19	(3,35,58),(3,37,56)
無法平衡	(20,36,40),(21,33,42),(22,30,44),(23,27,46),(24,24,48),(10,36,50),(10,40,46),(11,30,55),(12,24,60),(12,36,48),(13,31,52),(15,22,59),(18,20,58),(20,20,56),(21,21,54),(22,22,52),(23,23,50),(24,36,36),(26,31,39),(5,36,55),(5,40,51),(6,24,66),(6,36,54),(6,41,49),(7,33,56),(9,20,67),(9,33,54),(10,18,68),(10,20,66),(11,15,70),(11,22,63),(12,12,72),(13,39,44),(14,33,49),(18,24,54),(18,33,45),(18,36,42),(27,33,36),(28,33,35),(3,24,69),(3,36,57),(5,18,73),(5,20,71),(6,12,78),(9,10,77),(9,24,63),(9,36,51),(9,42,45),(10,10,76),(11,11,74),(12,18,66),(12,28,56),(14,35,47),(18,18,60),(18,27,51),(20,28,48),(21,36,39),(24,28,44),(28,28,40),(3,12,81),

	(5, 9,82),(5,10,81),(6, 6,84),(6,18,72),(6,28,62), (6,30,60),(6,34,56),(7,35,54),(9,12,75),(9,18,69), (9,27,60),(10,28,58),(10,30,56),(10,34,52),(12,30,54), (14,20,62),(14,24,58),(14,28,54),(14,30,52),(14,34,48), (14,40,42),(18,21,57),(18,30,48),(18,34,44),(18,39,39), (20,30,46),(20,34,42),(22,24,50),(22,28,46),(22,34,40), (24,30,42),(24,34,38),(26,30,40),(26,34,36),(28,30,38), (28,34,34),(30,30,36),(3, 6,87),(3,18,75),(3,28,65), (3,30,63),(3,31,62),(3,33,60),(3,34,59),(5, 5,86), (5,28,63),(5,30,61),(5,31,60),(5,33,58),(5,34,57), (6, 9,81),(6,31,59),(6,33,57),(7,20,69),(7,24,65), (7,28,61),(7,30,59),(7,31,58),(7,34,55),(7,40,49), (7,42,47),(9, 9,78),(9,21,26),(9,30,57),(9,31,56), (9,34,53),(9,39,40),(10,14,72),(10,31,55),(10,33,53), (10,42,44),(11,24,61),(11,28,57),(11,31,54),(11,33,52), (11,34,51),(11,40,45),(12,14,70),(12,22,62),(12,31,53), (12,33,51),(12,38,46),(12,42,42),(13,30,53),(13,33,50), (13,34,49),(13,36,47),(13,40,43),(14,14,68),(14,22,60), (14,31,51),(14,38,44),(15,18,63),(15,20,61),(15,24,57), (15,26,55),(15,28,53),(15,30,51),(15,31,50),(15,33,48), (15,36,45),(15,38,43),(15,40,41),(17,18,61),(17,20,59), (17,22,57),(17,24,55),(17,26,53),(17,28,51),(17,31,48), (17,33,46),(17,34,45),(17,36,43),(17,38,41),(18,26,52), (18,31,47),(19,24,53),(19,28,49),(19,30,47),(19,31,46), (19,33,44),(19,34,43),(20,22,54),(20,26,50),(20,31,45), (20,33,43),(21,24,51),(21,30,45),(21,31,44),(21,34,41), (22,31,43),(22,33,41),(23,28,45),(23,30,43),(23,31,42), (23,33,40),(24,31,41),(24,33,39),(5,31,40),(25,33,38), (25,34,37),(26,33,37),(27,28,41),(27,30,39),(27,31,38), (28,31,37),(29,31,36),(29,33,34),(30,31,35),(30,33,33), (31,31,34),(3, 3,90),(3, 9,84),(5,14,77),(5,42,49),

	(5,44,47),(6,14,76),(6,22,68),(6,38,52),(6,42,48), (7,10,79),(7,12,77),(7,14,75),(7,22,67),(7,38,51), (7,44,45),(9,15,72),(9,17,70),(9,26,61),(10,15,71), (10,17,69),(10,22,64),(10,26,60),(10,43,43),(11,12,73), (11,14,71),(11,17,68),(11,20,65),(11,41,44),(12,15,69), (12,17,67),(12,19,65),(12,21,63),(12,39,45),(12,41,43), (13,15,68),(13,17,66),(13,18,65),(13,20,63),(13,37,46), (14,15,67),(14,17,65),(14,19,63),(14,23,59),(14,27,55), (14,37,45),(14,41,41),(15,15,66),(15,19,62),(15,21,60), (15,23,58),(15,27,54),(15,35,46),(15,39,42),(17,17,62), (17,19,60),(17,21,58),(17,25,54),(17,29,50),(17,37,42), (18,29,49),(19,25,52),(19,27,50),(20,23,53),(20,25,51), (21,23,52),(25,26,45),(26,26,44),(3,14,79),(3,22,71), (3,38,55),(3,42,51),(5, 7,84),(5,15,76),(5,17,74), (5,22,69),(5,26,65),(5,43,48),(6, 7,83),(6,11,79), (6,15,75),(6,17,73),(6,19,71),(6,21,69),(6,39,51), (6,43,47),(6,45,45),(7, 7,82),(7,11,78),(7,15,74), (7,17,72),(7,19,70),(7,23,66),(7,27,62),(7,37,52), (7,41,48),(9,13,74),(9,29,58),(10,11,75),(10,13,73), (10,23,63),(10,25,61),(13,25,58),(13,26,57),(21,37,38), (22,26,48),(23,35,38),(25,27,44),(25,29,42),(27,27,42), (3, 7,86),(3,11,82),(3,15,78),(3,17,76),(3,19,74), (3,21,72),(3,39,54),(3,41,52),(3,43,50),(3,45,48), (5,11,80),(5,13,78),(5,23,68),(5,25,66),(11,26,59), (13,13,70),(13,22,61),(19,21,56),(19,23,54),(19,35,42), (19,37,40),(21,25,50),(21,27,48),(21,29,46),(22,25,49), (22,27,47),(24,26,46),(29,29,38),(11,13,72),(11,25,60), (11,27,58),(12,26,58),(13,24,59),(19,29,48),(20,37,39), (21,35,40),(23,24,49),(23,26,47),(23,29,44),(24,27,45), (25,25,46),(6,26,64),(10,37,49),(10,39,47),(12,13,71), (12,13,61),(12,27,57),(13,23,60),(20,21,55),(20,35,41),

	(22,23,51),(22,29,45),(23,25,48),(24,29,43),(3,26,67), (5,37,54),(5,39,52),(6,13,77),(6,23,67),(6,27,63), (10,21,65),(10,35,51),(10,41,45),(11,23,62),(11,29,56), (12,29,55),(24,25,47),(3,13,80),(3,23,70),(3,27,66), (5,21,70),(5,35,56),(5,41,50),(5,45,46),(6,29,61), (12,25,59),(28,29,39),(3,29,64),(6,25,65),(14,29,53), (14,39,43),(3,25,68),(7,29,60),(7,39,50),(7,43,46)

說明：

(a,b,c) ：經驗證後，符合結論中四-(二)的推論

(a,b,c) ：目前未找出規律的模組

觀察得知：三袋中球數和為 3×2^n 時，三袋模組雖然有些可以達到平衡，但仍然有很多陷入循環無法達到平衡狀態。觀察達平衡狀態的模組中，多組中會出現 2^k 個球數，無法平衡的模組就沒有這種現象。

（四）三袋模組達平衡時移動次數之推論

猜想：三袋模組 (a,b,c) ，若有一袋為 2^k ，其中 $k=0,1,2,\cdots,n$ ，經移動後必可達平衡狀態（取放一次稱為移動一次）。

若三袋的模組要達到平衡前，必先有一袋先達到平衡狀態。再繼續依兩袋模組移動方式猜想。

$a+b+c=3\times 2^n$ ， a,b 中至少有一個為 2^k ，其中 $k=0,1,2,\cdots,n$

$(a,b,c)\rightarrow(a,2^n,c)$ ，先將一袋移動至平衡狀態，最多需要移動 n 次。

再來就視為兩袋模組的平衡移動： $(a,2^n,c)\rightarrow(2^n,2^n,2^n)$ ，最多需要移動 n 次。

所以三袋模組移動，以 $f(a,b,c,3\times 2^n)$ 表示達平衡所需移動的次數， a,b 中至少有一個為 2^k ，其中 $a\le b\le c$ ， $S=a+b+c=3\times 2^n$ 。

$f(a,b,c,3\times 2^n)$ 最大值為 $2n$ 。

若三袋模組中，a,b 中至少有一個為 2^k，欲達到平衡移動次數之推論，

三袋模組 (a,b,c)，其中 $a \le b \le c$，$S = a+b+c = 3\times 2^n$。

1.若 $b = 2^n$，則 $(a,b,c):(a,2^n,c) \to (2^n,2^n,2^n)$，視為兩袋模組移動。

$a+b = 2\times 2^n$，$a = 2^k \times s$。其中 $k \in 0,1,2,\cdots,n$ 則 $f(a,b,c,3\times 2^n) = n-k$，所以

$f(a,b,c,3\times 2^n) = 2\times n - n - k$。

2.若 $a = 2^{k_1}$ 且 $b = 2^{k_2}$，其中 $k \in 0,1,2,\cdots,n$。則 $(a,b,c):(2^{k_1},2^{k_2},c) \to (2^n,2^n,2^n)$，則

$f(a,b,c,3\times 2^n) = 2\times n - k_1 - k_2$。

3.若 $a = 2^{k_1}$ 且 $b = 2^{k_2} \times s$，其中 $s \notin 2^{k3}$ 則：

（1）$a = 2^{k_1}$ 經 m 步移動變成 2^n 前，$b = 2^{k_2} \times s$ 未改變。

$(a,b,c):(2^{k_1},2^{k_2}\times s,c) \xrightarrow{m} (2^{k_2}\times s,2^{k_1+m},c_m) \equiv (2^{k_2}\times s,2^n,c_m)$，

則 $k_1 + m = n \Rightarrow m = n - k_1$。繼續視為兩袋模組移動，$(2^{k_2}\times s,c_m)$ 移動 $(2^n,2^n)$ 時，需要移動 $(n-k_2)$ 次。

需要移動 $f(a,b,c,3\times 2^n) = (n-k_1)+(n-k_2) = 2n - k_1 - k_2$ 次。

（2）令三袋依序為 A, B, C，球數分別為

$A = 2^{k_1}, B = (2^{k_2}\times s), C = (3\times 2^n - 2^{k_1} - 2^{k_2}\times s)$，當 C 給 A 經 m_1 步移動後而產生球數 $A \ge B$，改成 C 給 B 經 l 步移動後而產生球數 $B \ge A$，再改 C 給 A 經 m_2 步移動後 $A = 2^n$。

$(a,b,c):(2^{k_1},2^{k_2}\times s,c) \xrightarrow{1} (2^{k_1+1},2^{k_2}\times s,c_1) \quad \xrightarrow{2} (2^{k_1+2},2^{k_2}\times s,c_2) \longrightarrow$

$\cdots \xrightarrow{m_1} (2^{k_1+m_1},2^{k_2}\times s,c_{m_1})$，$2^{k1+m1} \ge 2^{k2}\times s$

$(2^{k_2}\times s,2^{k_1+m},c_{m_1}) \xrightarrow{m_1+1} (2^{k_2+1}\times s,2^{k_1+m_1},c_{m_1+1}) \xrightarrow{m_1+2} (2^{k_2+2}\times s,2^{k_1+m_1},c_{m_1+2})$

$\longrightarrow \cdots \xrightarrow{m_1+l} (2^{k_2+l}\times s,2^{k_1+m_1},c_{m_1+l})$，$2^{k2}\times s \ge 2^{k1+m1}$

$(2^{k_1+m_1},2^{k_2+l}\times s,c_{m_1+l}) \cdots \xrightarrow{m_1+l+m_2} (2^{k_1+m_1+m_2},2^{k_2+l}\times s,c_{m_1+l+m_2})$，

$2^{k1+m1+m2} = 2^n$，$k_1 + m_1 + m_2 = n \Rightarrow m_1 + m_2 = n - k_1$，

則 $(a,b,c):(2^{k_1},2^{k_2}\times s,c) \xrightarrow{m_1+l+m_2} (2^{k_2}\times s,2^n,c_{m_1+l+m_2})$，繼續即兩袋模組移動，

$(2^{k_2+l}\times s,c_m) \to (2^n,2^n)$，需要移動 $n-(k_2+l)$ 次。

所以

$f(a,b,c,3\times 2^n) = (m_1+m_2+l)+[n-(k_2+l)] = (n-k_1)+l+[n-(k_2+l)]$

$\Rightarrow f(a,b,c,3\times 2^n) = 2n - k_1 - k_2$。

由（1）（2）得知，若$a=2^{k_1}$且$b=2^{k_2}\times s$，

$f(a,b,c,3\times 2^n)=2n-k_1-k_2$。

4.若$a=2^{k_2}\times t$且$b=2^{k_1}$，其中$t\notin 2^{k3}$則：

同 3.證明，令三袋原球數為

$A=(2^{k_2}\times t)\le B=2^{k_1}\le C=(3\times 2^n-2^{k_1}-2^{k_2}\times t)$，

當C給 A 經 m_1步移動後而產生球數$A\ge B$，改成C給 B 經l步移動後而產生球數$B=2^n$。

$f(a,b,c,3\times 2^n)=(m_1+l)+[n-(k_2+l)]=(n-k_1)+l+[n-(k_2+l)]$

$\Rightarrow f(a,b,c,3\times 2^n)=2n-k_1-k_2$。

由 1.2.3.4.得知：

(a,b,c)中，$a=2^{k_1}$或$b=2^{k_2}$，其中$k_i\in 0,1,2,\cdots,n$，經移動後，必可達平衡狀態。

若$a=2^{k_1}$且$b=2^{k_2}$，則$f(a,b,c,3\times 2^n)=2n-k_1-k_2$。

若$a=2^{k_1}$且$b=2^{k_2}\times s$，則$f(a,b,c,3\times 2^n)=2n-k_1-k_2$。

若$a=2^{k_1}\times t$且$b=2^{k_2}$，則$f(a,b,c,3\times 2^n)=2n-k_1-k_2$。

5.(a,b,c)中，已知$a\ne 2^{k_1}$且$b\ne 2^{k_2}$，其中$k_i\in 0,1,2,\cdots,n$，若$c-a=2^q$，其中$q\in 0,1,2,\cdots,n$。

則$(a,b,c)\xrightarrow{1}(2a,b,c-a)\equiv(2a,b,2^q)$，

因為$a+b+c=3\times 2^n$，則b必為偶數，$b=2^{k_1}\times u$

$(2a,b,2^q)\equiv(2a,2^q,c_1)$或$(2^q,2a,c_1)$，若$a=2^{k_1}\times v\Rightarrow 2a=2^{k+1}\times v$

$(a,b,c)\xrightarrow{1}(2a,b,c-a)\equiv(2a,2^q,c_1)\to\cdots\to(a_m,2^n,c_m)$

$(2^{k+1}\times v,2^q,c_1)\cdots\to(2^n,2^n,2^n)$

由 3.4.得知，需移動$[2n-q-(k+1)]$次。

所以$f(a,b,c,3\times 2^n)=1+[2\times n-q-(k+1)]=2\times n-q-k$。

已知$a\ne 2^{k_1}$且$b\ne 2^{k_2}$，其中$k_i\in 0,1,2,\cdots,n$，若$c-a=2^q$，其中$q\in 0,1,2,\cdots,n$。

若$a=2^k\times u$，則$f(a,b,c,3\times 2^n)=2n-q-k$。

肆、結論

一、n個袋子中，各有的球數依序為$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，其中$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n$，$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$的比為$b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$，若$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = n \times 2^k$，經反覆規律取放球的步驟後，才有機會達到平衡狀態。

兩袋模組若符合以上條件，經移動後一定可以達到平衡狀態。但多袋模組即使符合以上條件，仍有些情況無法達到平衡狀態。

二、三袋模組移動，以$f(a,b,c,3 \times 2^n)$表示達平衡所需移動的次數，a,b中至少有一個為2^k，其中$a \le b \le c$，$S = a + b + c = 3 \times 2^n$。$f(a,b,c,3 \times 2^n)$最大值為2n。

三、兩袋模組欲達平衡狀態，需移動的次數為$f(a,b,2 \times 2^n)$，其中$a \le b$，$a + b = 2 \times 2^n$，(a,b)移動後均可以達到平衡狀態。若$a = 2^k \times s$，則$f(a,b,2 \times 2^n) = n - k$。

四、三袋模組達平衡狀態，需移動的次數為$f(a,b,c,3 \times 2^n)$，其中$a \le b \le c$，$a + b + c = 3 \times 2^n$，判別(a,b,c)可否達到平衡狀態，依序有下列方法。

（一）(a,b,c)中，$a = 2^{\mathrm{k}_1}$或$b = 2^{\mathrm{k}_2}$，其中$\mathrm{k}_\mathrm{i} \in 0,1,2,\cdots,n$，經移動後，必可達平衡狀態。

1.若$a = 2^{\mathrm{k}_1}$且$b = 2^{\mathrm{k}_2}$，則$f(a,b,c,3 \times 2^n) = 2n - k_1 - k_2$。

2.若$a = 2^{\mathrm{k}_1}$且$b = 2^{k_2} \times s$，則$f(a,b,c,3 \times 2^n) = 2n - k_1 - k_2$。

3.若$a = 2^{\mathrm{k}_1}$且$b = 2^{k_2}$，則$f(a,b,c,3 \times 2^n) = 2n - k_1 - k_2$。

（二）(a,b,c)中，$c - a = 2^q$，其中$\mathrm{q} \in 0,1,2,\cdots,n$，經移動後，必可達平衡狀態。

若$a = 2^k \times u$，則$f(a,b,c,3 \times 2^n) = 2 \times n - q - k$。

伍、未來展望

一、試著觀察討論無法達到平衡狀態的模組之規律性。

二、兩袋欲達平衡狀態的移動次數都沒問題，三袋的除了球數比中有2^k可推論外，其餘尚再尋找其規律性。

三、試著觀察討論四袋、五袋…的規律性。

陸、參考文獻

一、第 59 屆 嘉義縣 祥和國小 數學科展。

二、月旦知識庫(http://lawdata.com.tw/tw/detail.aspx?no=326099) 第 401 期科學教育月刊。

三、PMWC 世界邀請賽隊際競賽試題。財團法人九章數學教育基金會。

【評語】030404

給定 n 堆石頭，從個數最多的那一堆石頭取出與個數最少的那一堆石頭個數相同的石頭，將這些石頭搬移到個數最少的那一堆，這樣的過程稱為一次均分。本作品針對兩堆或三堆石頭是否可以經由若干次均分，使得每堆石頭的個數都相同（穩定狀態）的問題作了分析。對只有兩堆石頭的情況，給出了能達到穩定狀態，石頭個數分配的充要條件。對於達到穩定狀態需進行多少次均分，也給出了答案。對於一開始有三堆石頭的問題，也做了討論，給出了部分的結果。這是一個有趣的問題。作者們能夠從一些小的例子出發，觀察規律，找尋通則，得出一般化的結果並給出說明，可以說已經掌握了研究問題的基本方法，值得鼓勵。有部分的說明稍嫌簡略，敘述的也不夠清楚，如果能針對這部分稍做改進會更好。這個問題在之前的科展作品中曾被提出討論，也有一些相關的研究結果。作者們可能沒有發現這件事，以致於重複討論了一些已有的研究結果。如果有注意到前人針對此問題已經完成了哪些工作，還留下哪些問題尚待解決，應該可以針對在這些部分再多做發揮，得出更多更有趣的結論。如果在做文獻回顧的部分可以再小心一些，作品應該會有不同的風貌，有點可惜了。

作品海報

壹 研究動機

有一天在圖書館閱讀到科學教育月刊，有一個數學遊戲讓我們感到興趣。

將兩堆小石子移動成數量相等狀態：
有左、右兩堆小石子，移數動這些小石子，每次都從數量較多的那一堆拿出當下較少那堆之個數的小石子，將其放到數量較少的那堆，反覆進行這種動作，直到兩堆小石子數目相等。

一定能移動成兩堆數量相等嗎？
例： (2,14)→(4,12)→(8,8)。

若可以，需要多少次的移動？

動動腦：公主的煩惱
父王給了我們三姊妹許多寶石，但寶石隨便裝在三個袋子裡，該怎麼做才能公平分配給每一位公主呢?

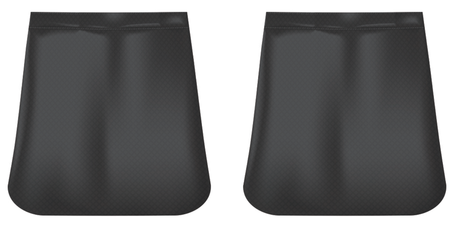
以此類堆，在三個袋子中，
取放的方式為從數量最多的拿取和當下數量最少相同數量的石子，
將其放入數量最少的那堆。

貳 研究目的

觀察、討論兩個或三個袋子的情況下，
有機會達到平衡的球數關係。
當它們達平衡時，球需移動的次數。

參 研究過程和方法

觀察 2 袋



設兩袋球數和為S，兩袋的球數以 (a,b) 表示，其中a≤b， 以下為可達成平衡的結果。

S	(a,b)
4	(1,3)
6	X
8	(1,7),(2,6),(3,5)
10	X
12	(3,9)
14	X
16	(1,15),(2,14),(3,13),(4,12),(5,11),(6,10),(7,9)
18	X
20	(5,15)
22	X
24	(3,21),(6,18),(9,15)
26	X
28	(7,21)
30	X
32	(1,31),(2,30),(3,29),(4,28),(5,27),(6,26),(7,25)...

得知：兩袋球數比的和為2^n時，經反覆規律取放球的步驟後，才有機會達到平衡狀態，此時每袋各有球數 2^{n-1} 個。

觀察 3 袋

設三袋球數和為S，三袋的球數以(a,b,c)表示，其中a≤b≤c，以下為可達成平衡的結果。

S	(a,b,c)
3	(1,2,3)
9	X
12	(1,1,10),(1,2,9),(1,3,8),(1,4,7),(1,5,6),(2,3,7)...
15	X
18	(3,6,9)
21	X
24	(1,1,22),(1,2,21),(1,3,20),(1,4,19),(1,5,18)...
27	X
30	(5,10,15)
33	X
36	(6,12,18),(3,3,30),(3,6,27),(3,9,24),(3,15,18)...

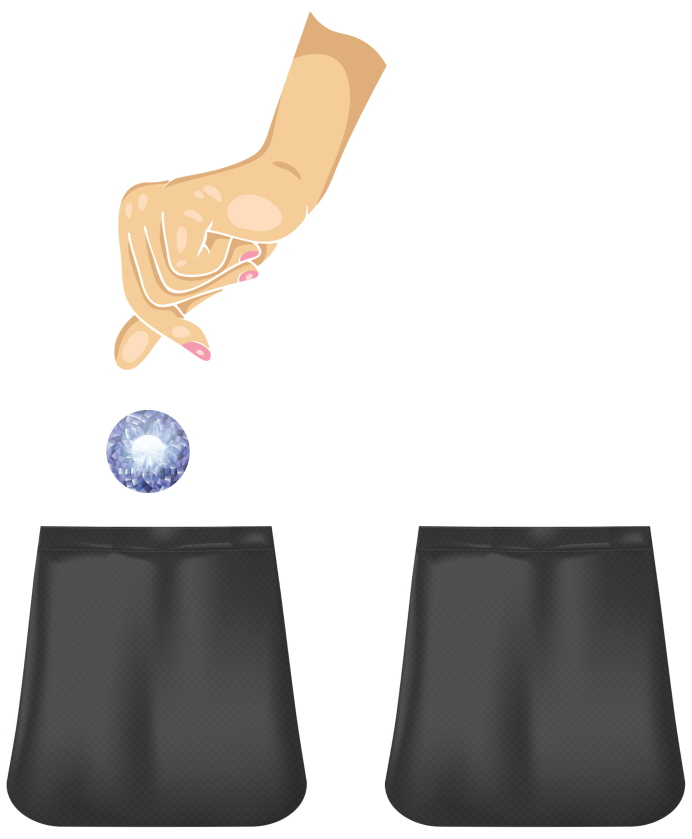
得知：三袋球數和一定是3的倍數且三袋球數比的和為3×2^n時，經反覆規律取放球的步驟後，才有機會達到平衡狀態，此時每袋各有球數 2^n 個。

觀察 2 袋達平衡時移動次數

兩袋模組(a,b)

$f(a,b,2\times 2^n)$ ：所需移動的次數

其中 $a\le b$，$S=a+b=2\times 2^n$



- $S=a+b=2\times 2^1$

$f(a,b,2\times 2^1)$	(a,b)
1	(1,3)

- $S=a+b=2\times 2^2$

$f(a,b,2\times 2^2)$	(a,b)
1	(2,6)
2	(1,7) (3,5)

- $S=a+b=2\times 2^3$

$f(a,b,2\times 2^3)$	(a,b)
1	(4,12)
2	(2,14) (6,10)
3	(1,15) (3,13) (5,11) (7,9)

動動腦：公主的煩惱

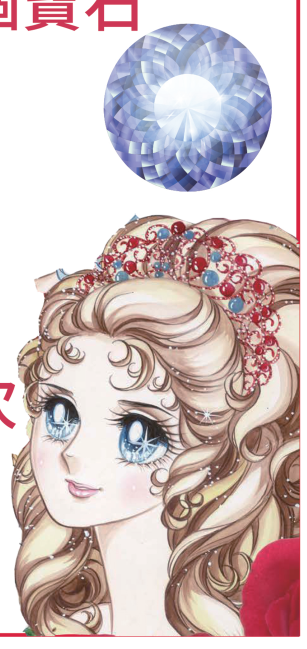
假設父親給了160個寶石

分裝在二個袋子中

一袋20個，另一袋

140個，要移動幾次

才能兩袋一樣多呢?



得知：

球數和的比為 2×2^n 時，若a,b 的最大公因數為 2^k，欲達平衡狀態，則

$$f(a,b,2\times 2^n)=n-k$$

說明：

流程
- 奇數 —— $f(a,b,2\times 2^n)=n$
- 最大公因數 2^k —— $f(a,b,2\times 2^n)=n-k$

觀察 3 袋達平衡時移動次數

三袋模組(a,b,c)

$f(a,b,c,3\times 2^n)$：達平衡所需移動的次數

其中 a,b,c 為三袋個別球數， $a\le b\le c$

$S=a+b+c=3\times 2^n$

- $S=6=3\times 2^1$

$f(a,b,c,3\times 2^1)$	(a,b,c)
1	(1,2,3)
2	(1,1,4)

- $S=12=3\times 2^2$

$f(a,b,c,3\times 2^2)$	(a,b,c)
1	(2,4,6)
2	(1,4,7), (2,2,8),(3,4,5)
3	(1,2,9), (2,3,7),(2,5,5)
4	(1,1,10), (1,3,8),(1,5,6)
無法平衡	(3,3,6)

得知：

球數和的比為 3×2^n 時，三袋模組雖然有些可以達到平衡，但仍然有很多陷入循環無法達到平衡狀態。觀察達平衡狀態的模組中，多組中會出現 2^k 個球數，無法平衡的模組就沒有這種現象。

猜想：

三袋模組 (a,b,c)，若有一袋為 2^k，必可達平衡狀態。若三袋的模組要達到平衡前，必先有一袋先達到平衡狀態。

- 再繼續依兩袋模組移動方式移動。
  $(a,b,c)\rightarrow(a,2^n,c)$ ，最多需要移動n次
- 再視為兩袋移動：
  $(a,2^n,c)\rightarrow(2^n,2^n,2^n)$ ，最多需要移動n次
- 所以 $f(a,b,c,3\times 2^n)$ 最大值為2n

以此為前提分成3種情況並證明

1. 若 $a=2^{k_1}$ 且 $b=2^{k_2}$
   則 $f(a,b,c,3\times 2^n)=2n-k_1-k_2$
2. 若 $a=2^{k_1}$ 且 $b=2^{k_2}\times s$，其中s不屬於 2^{k_3}
   則 $f(a,b,c,3\times 2^n)=2n-k_1-k_2$
3. 若 $a=2^{k_2}\times t$ 且 $b=2^{k_1}$ ，其中t不屬於 2^{k_3}
   則 $f(a,b,c,3\times 2^n)=2n-k_1-k_2$

此外

已知 $a\neq 2^{k_1}$ 且 $b\neq 2^{k_2}$ 其中 $k_i\in 0,1,2,\ldots,n$

若 $c-a=2^q$，$a=2^k\times u$，其中 $q\in 0,1,2,\ldots,n$

則 $f(a,b,c,3\times 2^n)=2n-q-k$ 。

肆 結論

一、

三袋模組移動，
以 $f(a,b,c,3\times2^n)$ 表示達平衡所需移動的次數，a,b 中至少有一個為 2^k，
其中 $a\le b\le c$ ，$S=a+b+c=3\times2^n$。

$f(a,b,c,3\times2^n)$ 最大值為 2^n

二、

兩袋模組欲達平衡狀態，
需移動的次數為 $f(a,b,2\times2^n)$ ，
其中 $a\le b$， $a+b=2\times2^n$，
(a,b)移動後均可以達到平衡狀態。
若 $a=2^k\times s$，則

$f(a,b,2\times2^n)=n-k$

三、

三袋模組達平衡狀態，需移動的次數為 $f(a_1,a_2,2\times2^n)$ ，
其中 $a\le b\le c$ ，$a+b+c=3\times2^n$，
判別(a , b , c)可否達到平衡狀態，依序有下列方法：

1 (a , b , c)中，$a=2^{k_1}$ 或 $b=2^{k_2}$
其中 $k_i\in0,1,2,\ldots,n$ ，
經移動後，必可達平衡狀態。

1. 若 $a=2^{k_1}$ 且 $b=2^{k_2}$
則 $f(a,b,c,3\times2^n)=2n-k_1-k_2$
2. 若 $a=2^{k_1}$ 且 $b=2^{k_2}\times S$，
則 $f(a,b,c,3\times2^n)=2n-k_1-k_2$
3. 若 $a=2^{k_1}\times t$ 且 $b=2^{k_2}$ ，
則 $f(a,b,c,3\times2^n)=2n-k_1-k_2$

2 (a , b , c)中，若 $c-a=2^q$ ，
其中 $q\in0,1,2,\ldots,n$
經移動後，必可達平衡狀態。
若 $a=2^k\times u$
則 $f(a,b,c,3\times2^n)=2n-q-k$

伍 未來展望

一、試著觀察討論無法達到平衡狀態的模組之規律性。

二、兩袋欲達平衡狀態的移動次數都沒問題，
三袋的除了球數比中有可推論外，
其餘尚再尋找其規律性。

三、兩袋模組若符合以上條件，經移動後一定可以達到平衡狀態。但多袋模組即使符合以上條件，仍有些情況無法達到平衡狀態。

四、試著觀察討論四袋、五袋…的規律性。

陸 參考文獻

一、第59屆 嘉義縣 祥和國小 數學科展。

二、月旦知識庫 第 401期科學教育月刊。

三、PMWC世界邀請賽隊際競賽試題。財團法人九章數學教育基金會。