

中華民國第 60 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國中組 化學科

佳作

030214

晶晶相擁—探究多樣態結晶及顯微縮時攝影在
結晶之應用

學校名稱：基隆市立中正國民中學

作者： 國一 魏呈亦 國一 詹承恩 國一 吳亞哲	指導老師： 石長明 王世宏
---	-----------------------------

關鍵詞：包心結晶、顯微縮時攝影、晶形控制

摘要

本研究主要在探討晶體成長的各因素及其應用，我們先找出適合結晶的條件，然後進行四種礬的晶體培養，以及「包心結晶」探討，接著在雙、三溶質結晶的實驗，發現明礬與紫礬獨特的融合結晶現象，也利用顯微鏡結合縮時攝影機做微小晶體的動態觀察，以顯微測量技術計算晶體成長速率及使用軟體量取晶面角，我們做出了以下特色：

- 一、培養出比前人所做更大的結晶。
- 二、培養出明礬與紫礬的融合結晶。
- 三、培養出大型及極微小的五層包心結晶，並找到最適合的包心結晶條件及修正晶形。
- 四、將縮時結合顯微攝影，對微小的結晶進行動態拍攝，計算出結晶速率，以及使用顯微測微技術運用在晶體測量上，增加測量準確度。

壹、研究動機

記得某日上課時，老師讓我們觀看一段過飽和溶液瞬間長出結晶的影片，令人感到十分神奇，也讓我回想到在國小課程中，老師曾帶領我們養過硫酸銅晶體，那如寶石般的美麗藍色令人著迷，至今仍印象深刻。後來學校舉辦科展比賽，我們決定以結晶為主題進行研究，在找尋文獻中，發現到一些未知領域值得探究，於是在老師的鼓勵下，我們開啟了結晶的科學探究之旅，進行結晶各種因素探討以及應用等方面的研究，希望能揭開結晶的神秘面紗！

貳、研究目的

我們從歷屆全國科展作品中，發現到結晶還有許多值得探究之處，查詢相關的理論得知邁耶理論、晶系理論、配位理論、面角守恆定律及赫夷定律，與本研究息息相關，因此，我們擬出研究目的如下，並分別設計實驗進行探究。

- 一、找出適合結晶的條件，並進行藍礬、紫礬、明礬、綠礬晶體培養
- 二、探討藍礬、紫礬、明礬在不同溶液的包心結晶情形
- 三、探討藍礬、紫礬、明礬在雙溶質及三溶質結晶
- 四、利用顯微縮時攝影探討微量結晶的動態變化
- 五、藍礬、紫礬、明礬晶體晶面角之測量

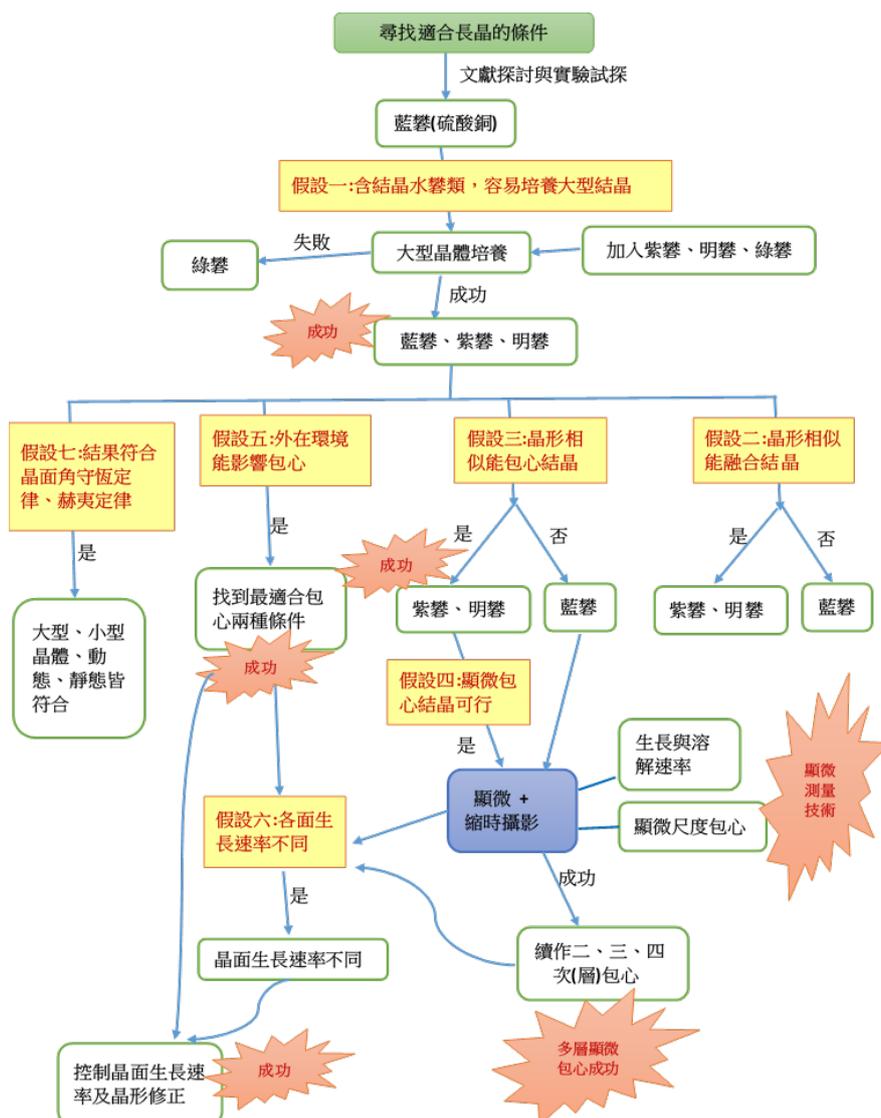
六、探討包心結晶最佳條件及晶形修正

參、研究設備及器材

- 一、**設備**：恆溫槽、顯微鏡、縮時攝影機(TLC 200 Pro)、放大鏡、手機、電子磅秤、電腦。
- 二、**器材**：燒杯、玻璃棒、錐形瓶、量筒、刮勺、培養皿、三腳架及陶瓷纖維網、酒精燈、溫度計、滴管、濾紙、漏斗、鑷子、目鏡及物鏡測微尺、夾扇、風速計、水質檢測儀。
- 三、**藥品**：醋酸鈉(CH_3COONa)、氯化銨(NH_4Cl)、硫酸銅(藍礬)($\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$)、氫氧化鈣($\text{Ca}(\text{OH})_2$)、碳酸鈉(Na_2CO_3)、碳酸鉀(K_2CO_3)、硫酸鋁鉀(明礬)($\text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$)、硫酸鉻鉀(紫礬)($\text{KCr}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$)、硫酸亞鐵(綠礬)($\text{FeSO}_4 \cdot 7\text{H}_2\text{O}$)。

肆、研究方法與文獻探討

一、研究流程圖



二、文獻探討

(一)歷屆作品探討

本研究搜尋歷屆關於結晶的作品，其相關研究及本研究欲探討之方向如下表：

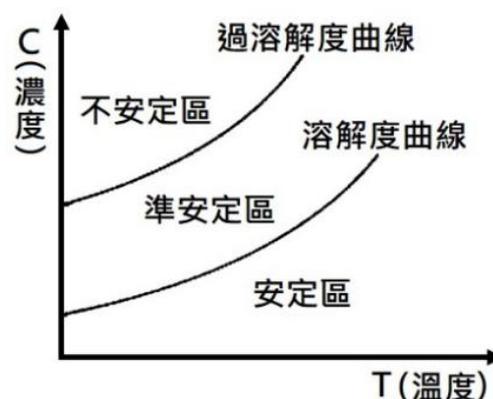
屆別	作品名稱	相關研究成果	本研究欲探討方向
58	藍晶閃耀	觀察包心結晶分佈情形，未續做深入探討。	找出能形成包心結晶的條件，培養多層包心結晶。
57	藍色夢幻	培養硫酸銅晶體大型結晶。	培養出更大型晶體，並測量小型晶體之晶面角。
56	晶晶計較	培養大型明礬結晶並測量晶面角。	
51	水滴中的「晶」靈	以顯微鏡觀察水珠內的結晶變化，分析晶體外型與成長方向、速率，以軟體分析影像。	使用顯微縮時攝影記錄，並以顯微測量技術測量晶體大小並計算其速率。
49	「晶」益求精-	使用染色劑構思可以把結晶顏色改變，發現無效果。	試著做出均勻的混晶。
53	聲聲不息	添加染色劑，但染色不均勻，無法	
43	晶體聯合國	產生均勻的混晶。	

(二)理論探討

確定了研究的方向之後，我們搜尋結晶相關理論，試圖解決前人未解決的問題，並依理論提出假設，以下為我們整理出的相關理論。

1、邁耶理論 (Mier Theory)

- (1)安定區：溶液尚未飽和，不會析出晶種。
- (2)不安定區：溶液不安定，有許多微小晶核析出，但不會長大成晶體。
- (3)準安定區：不會長出新的晶核，但可使晶核長成大顆晶體。



本研究參考邁耶理論，探討長出大型單晶的最佳條件。

2、晶系理論

晶體分為七個不同的晶系，即立方(等軸)晶系、六方晶系、四方晶系、三方晶系、正交晶系、單斜晶系、三斜晶系。本實驗主要晶體之晶體所屬晶系如下：

紫礬為等軸晶系，明礬為三方晶系，藍礬為三斜晶系，綠礬為單斜晶系。依據不同晶系，本研究參考晶系理論，探討包心結晶、融合結晶的可能性。

3、配位理論

由中心原子或離子與幾個配位基分子或離子以配位鍵相結合而形成複雜分子或離子。本研究中礬類皆為含結晶水的配位化合物，如藍礬含 5 個結晶水、紫礬與明礬含 12 個結晶水、綠礬含 7 個結晶水。其中心原子如藍礬的銅、紫礬的鉻、明礬的鋁、綠礬的鐵皆與周圍的結晶水形成配位鍵。

本研究參考配位理論，探討包心結晶、融合結晶的可能性。

4、赫夷定律及面角守恆定律

赫夷定律：同一溶質所析出的晶體，其邊長與面積的大小可能不同，然而各相對的夾角均相同；即析出之晶體均成幾何相似。

面角守恆定律：晶體生長過程中，無論形態如何改變，同種晶體間，對應晶面夾角恆等。

本研究參考赫夷定律及面角守恆定律，探討在結晶過程中，晶面的成長與消失、晶面角的變化之可能性。

三、研究過程

我們根據六項研究目的以及上述的文獻探討，設計出以下八項實驗的探究過程。

(一) 從學校常見藥品找出適合結晶的條件：探討結晶狀況，選出適合的藥品進行降溫速率、換水情況、水質對結晶的影響，以找出長出大型結晶之最佳條件。

(二) 進行晶體培養：上述選出之適合藥品，再依據假設加入同類型之晶體，進行晶體培養。

【實驗假設一】：含結晶水之礬類，容易培養大型結晶

(三) 融合結晶之探討：以雙、三溶質水溶液進行實驗，探討不同溶質融合結晶之可能性。

【實驗假設二】：晶形相似之化合物，能進行融合結晶。

(四) **包心結晶之探討**：將培養出之晶體，放至另一或數種水溶液中，進行包心實驗，本研究以三種礬類配對，設計不同晶體在溶液中的成長實驗，並觀察是否有包心現象產生。

【實驗假設三】：晶形相似之化合物，能進行包心結晶。

(五) **微小尺度包心之探討**：將微小晶體做為包心**核心**，在顯微鏡尺度下進行包心實驗，實驗設計原則如下。

- 1、**縮時攝影相關參數**：拍攝間隔每 30 秒拍一張，影片播放速率 15 FPS，即每秒播放 15 張。因此，縮時速率為 $30 \times 15 = 450$ 倍。亦即每一秒縮時影片為 450 秒濃縮而成。
- 2、**取樣原則**：取小型 A 礬晶體(約 1mm 以下，形狀盡量規則)，放在載玻片上，滴上一滴飽和 B 礬水溶液，放在顯微鏡上觀察，等待包心。
- 3、**顯微鏡下物體的大小測量**

觀察倍率：使用目鏡 10 倍，物鏡 4 倍，共 $4 \times 10 = 40$ 倍率觀察。

<<方法一>>觀察一般直尺刻度在目鏡直徑視野所示大小為約 4.5 mm。將拍攝之影像於電腦螢幕上用直尺或 measure 軟體量取長度，假設物體與目鏡直徑的比例為 $x : y$ ，

$$\text{則 } \boxed{\text{物體實際長度} = (x / y) \times 4.5 \quad (\text{mm})}$$

<<方法二>>利用目鏡及物鏡測微尺，先對目鏡測微尺校正，經觀察得知 20 個目鏡測微尺刻度重疊於物鏡測微尺的 49 個刻度，可由以下方式算出物體長度。

$$\text{目鏡測微尺的一個刻度距離} = (0.01 \text{ mm} \times 49) \div 20 = 0.0245 \text{ mm} \quad (\text{或 } 24.5 \mu\text{m})$$

$$\boxed{\text{物體實際長度} = \text{物體在顯微鏡下的刻度數} \times 0.0245 \quad (\text{mm})}$$

另有部分實驗使用 100 倍率觀察，經過校正，61 個目鏡測微尺刻度重疊於物鏡測微尺的 60 個刻度，可由以下方式算出物體長度。

$$\text{目鏡測微尺的一個刻度距離} = (0.01 \text{ mm} \times 60) \div 61 = 0.0098 \text{ mm} \quad (\text{或 } 9.8 \mu\text{m})$$

$$\boxed{\text{物體實際長度} = \text{物體在顯微鏡下的刻度數} \times 0.0098 \quad (\text{mm})}$$

【實驗假設四】：顯微尺度下的包心結晶，能成功。

(六) **包心條件的探討**：

操縱變因為水溶液之水質、通風程度、溫溼度，以尋找最佳之包心結晶之條件。使用顯微測微技術，在目鏡內裝設目鏡測微尺，並用物鏡測微尺對目鏡測微尺進行校正。

實驗方式如下：

水質：以不同的水質配製飽和水溶液，配製前先以**水質檢測儀**測各水質之 TDS 值，以得知其內含不溶物量，再將水溶液滴一滴在晶體上。

通風程度：以夾扇夾在鐵架上，置於晶體之正上方 25 公分處，以弱風及強風吹之，並以**熱線式風速計**測量弱風與強風在晶體位置之風速。

溫溼度：設計四種溫溼度情形，如下：

高溫低溼：在當日溫度下做實驗，晶體玻片置於桌面上，並測當時之溼度。

高溫高溼：在當日溫度下做實驗，並將晶體玻片置於水盆中架高，周圍有水圍繞，並用紙蓋住水盆，以營造出高溼度環境，並測得溼度。

低溫低溼：將晶體玻片置於冰箱中層(無蓋)，測溼度。

低溫高溼：將晶體玻片置於冰箱下層之蔬果室(有蓋)，底下有水圍繞，營造高溼度環境。

【實驗假設五】：外在環境(水質、通風程度、溫溼度)會影響包心速率及其他結果。

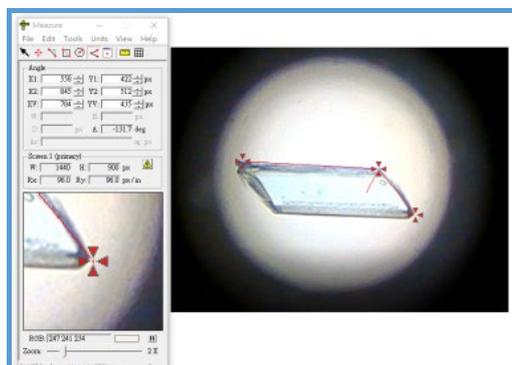
(七) 晶體生長速率控制：

從本研究之大量實驗照片、影片及數據中，找出晶面變化之典型例子，包括碎晶附著、某面成長太快、某邊厚度太薄之修正。

【實驗假設六】：晶面各面生長速率不同，在不同容器位置生長速率亦不同。

(八) 晶面角之測量：

包含大型、小型、微形結晶之靜態晶面角測量，以及成長過程中之晶面角變化動態測量，利用測量軟體克服微形結晶晶面角測量之困難，以下為 **measure** 軟體介面。



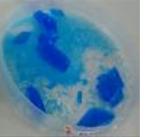
【實驗假設七】：任何晶體之晶面角，皆遵守面角守恆定律及赫夷定律。

伍、研究結果與討論

一、探討長出大型結晶之最佳條件

(一)實驗結果

表一 六種藥品結晶

醋酸鈉	氯化銨	氫氧化鈣	碳酸鈉	硫酸銅	碳酸鉀
					

《小結》醋酸鈉長方形結晶出現，氯化銨有針狀結晶，硫酸銅有平行四邊形結晶，碳酸鈉、氫氧化鈣、碳酸鉀只有細小粉末狀的結晶。我們選出結晶較明顯的醋酸鈉、氯化銨、硫酸銅繼續進行實驗。

表二 三種藥品降溫結晶實驗（僅擷取部分數據，其餘詳載於研究日誌）

時間(分)	氯化銨		硫酸銅		醋酸鈉		備註
	溫度	結晶與否	溫度	結晶與否	溫度	結晶與否	
2 分鐘	44	是	43	否	44	否	氯化銨出現羽毛狀
16 分鐘	34	是	34	否	34.5	否	加入冰水
18 分鐘	30	是	32	否	29	否	氯化銨大量沉澱
60 分鐘	14.5	是	11.5	否	12	否	

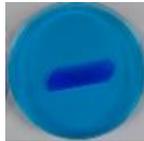
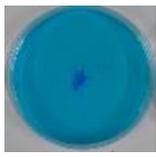
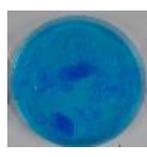
《小結》氯化銨在 44°C 時即有少量羽毛狀結晶，在 34°C 時加入冰水後不久，即出現大量沉澱，推測在 50~34°C 是過飽和狀態，34°C 以下開始飽和。硫酸銅也有類似情形。醋酸鈉則從 50°C 降至 11°C 都從未出現結晶，一直是過飽和狀態。從這個結果我們可以推測，將來欲使結晶加速產生，可以利用快速降溫以達過飽和狀態來加速結晶。

表三 三種藥品降溫速率實驗 (僅列出最後結果，其餘詳載於研究日誌)

	氯化銨		硫酸銅		醋酸鈉	
	室溫降溫	冰浴降溫	室溫降溫	冰浴降溫	室溫降溫	冰浴降溫
6 天						

《小結》我們發現硫酸銅和氯化銨在室溫降溫時，會產生較大的結晶，但結晶較慢。在冰浴降溫時，會產生多而小的碎晶，結晶較快，晶形也較不規則，較為破碎。而醋酸鈉則始終未結晶。

表四 不同換水結晶情形(僅列出部分表格，其餘詳載於研究日誌)

硫酸銅	2 天	4 天	6 天	8 天
不換水				
室溫換水				
高溫換水				

《小結》硫酸銅在不換水的情況下，結晶長得最大最少且最完整，愈高溫換水則碎晶愈多但是結晶也長得比較快，在第八天時，已經長到長度 5 公分以上，非常成功。氯化銨和醋酸鈉，曾在我們觀察超過八天後，分別出現很不易發現的漂亮的針狀 90 度交錯結晶和長棒形結晶，但在隔天天氣轉潮溼即潮解消失。

表五 氯化銨與醋酸鈉結晶



表六 水質與結晶情形(僅列出第六天情形，其餘詳載於研究日誌)

自來水	氯化銨	硫酸銅	醋酸鈉	過濾自來水	氯化銨	硫酸銅	醋酸鈉
6天				6天			

《小結》不同水質的結晶差異不大，但使用過濾後的自來水為溶劑，其結晶似乎較為平整。

(二)實驗討論

- 1、在降溫過程太快，產生過飽和，容易進入不安定區，易產生碎晶。
- 2、高溫與室溫下換水，其中高溫容易較快產生結晶，晶體成長也較快，但晶形較不漂亮。
- 3、水中的雜質，易成為結晶的晶種，產生較多碎晶，若過濾後，較不容易有碎晶。
- 4、容易潮解的藥品，不易長成穩定結晶，例如氯化銨，醋酸鈉，不適合培養大型晶體。
- 5、以下幾點可以促進結晶：(1)利用快速降溫以達過飽和狀態可加速結晶。(2)室溫換水較高溫換水結晶較慢，但晶形較完整，碎晶較少。(3)自來水過濾後，結晶晶形較平整。

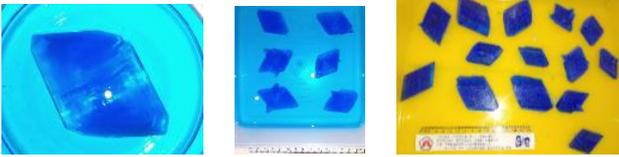
二、進行晶體培養【實驗假設一】：含結晶水之礬類，容易培養大型結晶

(一)實驗結果

從以上實驗結果可知，僅有硫酸銅適合培養大型結晶，我們保留硫酸銅(藍礬)繼續進行實驗，並假設可能是含結晶水之礬類，容易培養大型結晶，所以增加硫酸鋁鉀(明礬)、硫酸鉻鉀(紫礬)和硫酸亞鐵(綠礬)進行晶體培養，此階段目的為求晶形完整，不求快速結晶，因此不利用降溫等過飽和方式，僅利用室溫換水及將自來水過濾配製飽和溶液兩原則來培養結晶。

1、藍礬(硫酸銅)晶體培養

表七 藍礬(硫酸銅)晶體培養 (僅列出結果，其餘詳載於研究日誌)

日期	照片及說明	溫度(°C)
12/26		18
	晶體繼續成長，晶體最大已達 7.5cm。某些晶體上明顯疊加其他較小晶體一起成長。	

2、紫礬(硫酸鉻鉀)晶體培養

表八 紫礬(硫酸鉻鉀)晶體培養 (僅列出結果，其餘詳載於研究日誌)

日期	照片及說明	溫度(°C)
12/26		18
	包心繼續成長，部分移至另一容器。 非包心之實驗，紫礬長至約 3cm，取出拍照。	

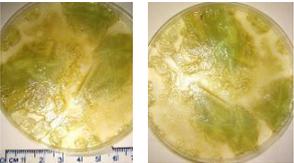
3、明礬(硫酸鋁鉀)晶體培養

表九 明礬(硫酸鋁鉀)晶體培養 (僅列出結果，其餘詳載於研究日誌)

日期	照片及說明	溫度(°C)
12/26		18
	結晶更大，達 2.5cm。取出擦乾，拍照。	

4、綠礬(硫酸亞鐵)晶體培養

表十 綠礬(硫酸亞鐵)晶體培養 (僅列出結果，其餘詳載於研究日誌)

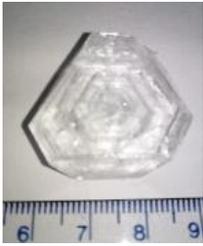
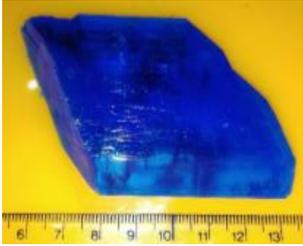
日期	照片及說明	溫度(°C)
12/14		17

	似有雜質含其中，曾取出部分，過濾再結晶，仍然繼續氧化，似鐵鏽味	
--	---------------------------------	--

《小結》藍礬、明礬與紫礬都可以長出大型結晶，綠礬雖然也有結晶，但容易氧化雜質多，且晶體混雜不易觀察。因此，我們將藍礬、明礬與紫礬做後續的探討。

5、【晶中之最】我們實驗中長得最大的結晶

表十一 單晶最大的結晶

明礬	紫礬	藍礬
長達 3.3 公分	長達 4.2 公分	長達 7.5 公分
		

(二)實驗討論

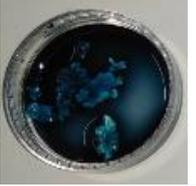
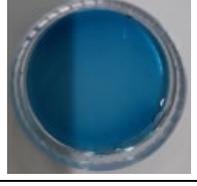
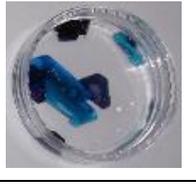
- 1、在此階段，各自進行四種礬的晶體培養，我們採用「室溫換水及將自來水過濾配製飽和溶液」兩原則來培養結晶。
- 2、結晶過程受天氣影響極大，有時寒流一來，一夜間長大很多，且在其周圍不乏碎晶，待白天天氣變熱，原本長出的晶體又停止成長，甚至天氣潮溼，有小幅溶解的現象。這次我們設定長晶體的時間較長，前後大約一個半月，所以晶體有獲得穩定的成長。
- 3、當晶體長至較大時，周圍的碎晶會干擾其成長，必須用鑷子將之移除，若碎晶較多，無法一一移除，則選擇換水方式，將大晶體取出，另放入飽和溶液中繼續成長。
- 4、綠礬是單斜晶體，且長出來的晶形扁平像羽毛狀，無法長出較為厚實且形狀單一的單晶，因此在晶體的培養中，我們只探討至長出大片結晶為止，不進行後續包心探討。

☆假設一之實驗結果：藍礬、明礬及紫礬容易培養大型結晶，而綠礬不易培養大型結晶，實驗結果部分支持假設。

三、融合結晶之探討 【實驗假設二】：晶形相似之化合物，能進行融合結晶。

(一)實驗結果

表十二 雙溶質及三溶質結晶實驗

水溶液	開始	1 天後	3 天後	描述
紫礬+藍礬				藍礬長得比較明顯，而紫礬則不明顯。
紫礬+明礬				晶體為淡紫色，推測是兩者融合產生均勻混晶。
藍礬+明礬				兩者並未結合在一起，而是分開成長。
紫礬+藍礬+明礬				藍礬自己單獨成長，明礬與紫礬有部分結合。

《小結》實驗顯示，藍礬無法與紫礬、明礬產生一起融合結晶，而是單獨成長，但是**明礬與紫礬**可以**融合產生均勻的結晶**，其顏色會介於無色與紫色間的**淡紫色**。

(二)實驗討論

- 1、在紫礬與明礬的雙溶質結晶實驗中，出現有趣的現象，這兩種礬居然能夠進行「融合」結晶，因為我們看到長出的單一顆晶體是淺紫色的，這是由兩種礬均勻混合產生的結晶。文獻中有記載到，這可能跟紫礬的鉻離子半徑與明礬的鋁離子半徑大小相似、以及兩者的配位方式及晶形相同有關，因此發生了**離子互換**。所以最後長出均質的混晶。

【離子半徑： $\text{Cr}^{3+} = 61.5 \times 10^{-12} \text{ m}$ ； $\text{Al}^{3+} = 53.5 \times 10^{-12} \text{ m}$ ； $\text{Cu}^{2+} = 73.0 \times 10^{-12} \text{ m}$ 】



- 2、在其他配對的結晶方面，明礬、紫礬並不與藍礬產生「融合」結晶，而是各長各的，互不相犯。除非溶液已乾，才會有被迫某疊加在其他種晶體上的情形。

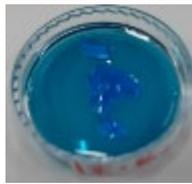
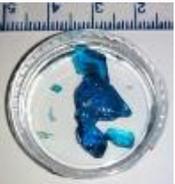
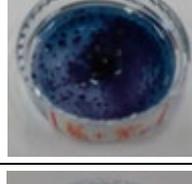
☆假設二之實驗結果：晶形相似之明礬與紫礬，能進行融合結晶，實驗結果支持假設。

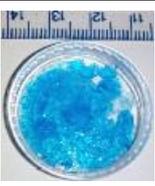
四、包心結晶之探討【實驗假設三】：晶形相似之化合物，能進行包心結晶。

(一)實驗結果

1、紫礬結晶實驗中，因為溶液顏色很深，無法拍清楚晶體照片，因此靈機一動，將一部分紫礬晶體拿出放至明礬溶液中，看有什麼變化，沒想到三天後即看到紫礬外圈被明礬包住，成為「包心」結晶，這個發現讓我們很興奮，查了網路上的資料，全國科展僅有一篇作品有做過「包心」結晶，但僅說明包心出現的情形及比例，沒有繼續深究。因此，我們決定深入研究「包心」這個現象。於是設計三種礬(藍、紫、明礬)的晶體在水溶液中是否能產生包心結晶及包心情況之探討。我們進行以下實驗，結果如下。

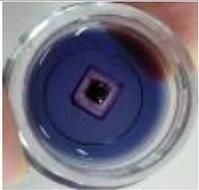
表十三 包心結晶實驗

水溶液	開始	3 天後	6 天後	描述
紫礬晶體+ 藍礬溶液				紫礬溶解， 無包心。
紫礬晶體+ 明礬溶液				紫礬的晶體 被明礬包 覆。
藍礬晶體+ 紫礬溶液				藍礬並無被 紫礬包覆。
藍礬晶體+ 明礬溶液				藍礬晶體溶 解後，最後 產生結晶時 顏色較淡。
明礬晶體+ 紫礬溶液				紫礬的晶體 包覆在明礬 晶體外面。

明礬晶體+ 藍礬溶液				沒產生明顯的包心晶體。
---------------	---	---	--	-------------

2、取出明礬包紫礬晶體及紫礬包明礬晶體，進行第二次包心實驗。將明礬包紫礬晶體放入紫礬溶液，將紫礬包明礬晶體放入明礬溶液，嘗試進行二次包心，結果成。

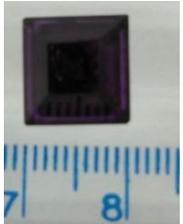
表十四 二次包心實驗

原晶體	開始	2 天後	4 天後	描述
明礬包紫礬				二次包心成功，形成紫礬-明礬-紫礬三層交替之結晶。
紫礬包明礬				二次包心成功，形成明礬-紫礬-明礬三層交替之結晶。

3、二次包心實驗成功後，接著依序進行三次、四次包心實驗，結果如下。

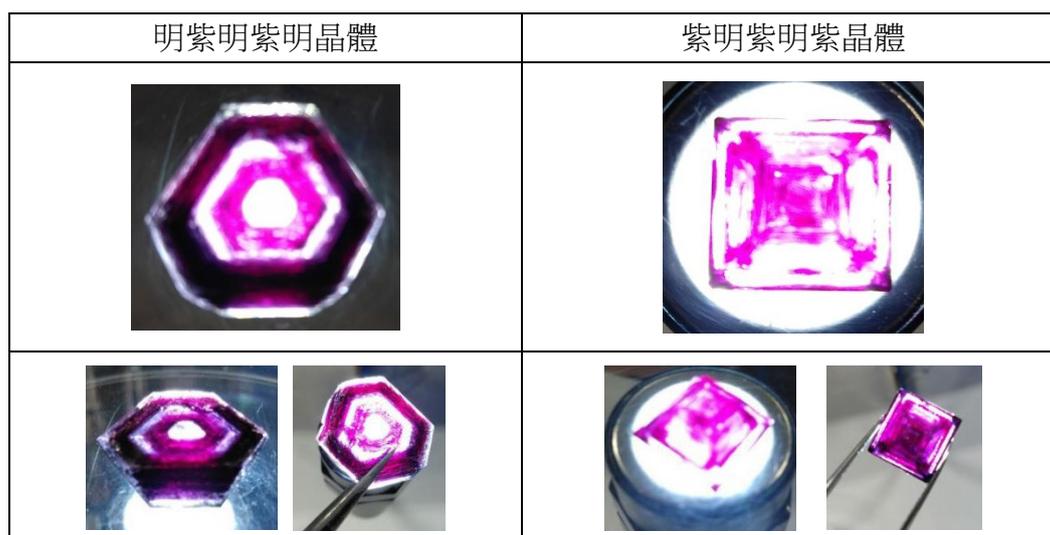
(1) 二次包心後，進行「三次包心」及「四次包心」為期各一星期，結果成功。

表十五 三次及四次包心實驗

	
明紫明紫晶體	紫明紫明晶體
	
明紫明紫明晶體	紫明紫明紫晶體

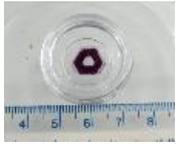
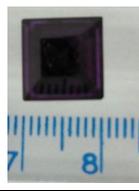
(2)四次包心層數太多，無法看清楚分層，採用打光方式呈現，出現如寶石炫目色彩。

表十六 四次包心實驗打光後的效果



4、【晶中之最】包心最大的結晶

表十七 包心最大的結晶

紫明礬(一次)	明紫礬(一次)	紫明紫礬(二次)	明紫明礬(二次)
長達 3.5 公分 	達 1.0 公分 	長達 2.9 公分 	達 1.2 公分 
紫明紫明礬(三次)	明紫明紫礬 (三次)	紫明紫明紫礬(四次)	明紫明紫明礬 (四次)
達 0.9 公分 	長達 1.8 公分 	達 1.0 公分 	長達 2.0 公分 

(二)實驗討論

- 1、紫礬與明礬之間可以互相產生包心，但紫礬晶體不見得能完整被「純明礬」包心，有時紫礬會先溶解一些，明礬水溶液顏色會變很淡的紫色，接著長上去包住紫礬的那一層，就不是「純明礬」，而是帶有淡淡紫色的「紫礬明礬混合」層。我們發現，如果在溫度較高或天氣較潮溼時做這實驗，會有紫礬先微微溶解的現象，如果溫度較低或天氣較乾燥(如寒流乾冷)，則紫礬沒有溶解，被「純明礬」包心的情況就會出現。
- 2、晶形與包心探討：文獻資料中，紫礬為等軸晶系正八面體，明礬為三方晶系六邊形，

藍礬為三斜晶系，接近平行四邊形。但歷屆研究及我們的實驗結果發現不只如此，紫礬除了正八面體，另有六邊形，明礬除了六邊形，也有正八面體。紫礬與明礬雖然理論上晶系不同，但實驗結果晶形大多相似，可以互相產生包心結晶，藍礬則因晶形與它們不同，與之互相堆疊不容易，即使堆上去也無法緊密，一旦溶液滲入即可能瓦解。

- 3、在進行二次包心的實驗仍然會成功，但是在「紫明紫」包心中，因為有雙層紫礬，導致中間層的明礬顏色不易看清楚，而「明紫明」則呈現很清楚漂亮的包心。需注意的是，要進行第二次包心，需耐心等待，讓第一次的包心所包的厚度不能太薄，要有一定厚度才能進行第二次包心，否則當天氣潮溼時，太薄之包層即可能溶解。
- 4、在大型晶體中，我們總共進行到最多四次包心，每包一層明顯的厚度需要 5-7 天時間（視天氣情況不同），總共約需將近一個月。四次包心含核心共有五層晶體，其透光度較低，較難看見分層情形，我們試了很多方式，最後利用從底部打光的方式，清楚拍攝到其分層情形，且發現打光後晶體變得非常漂亮，有炫目的色彩，彷彿美麗的寶石。

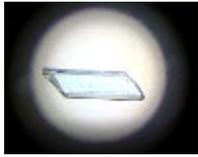
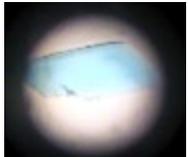
☆假設三之實驗結果：晶形相似明礬與紫礬，進行包心結晶成功，實驗結果支持假設。

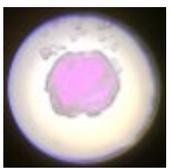
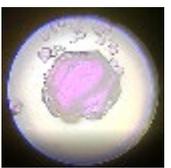
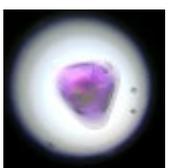
五、微小尺度晶體成長溶解與包心之探討 【實驗假設四】：顯微尺度下的包心結晶，能成功。

(一)實驗結果

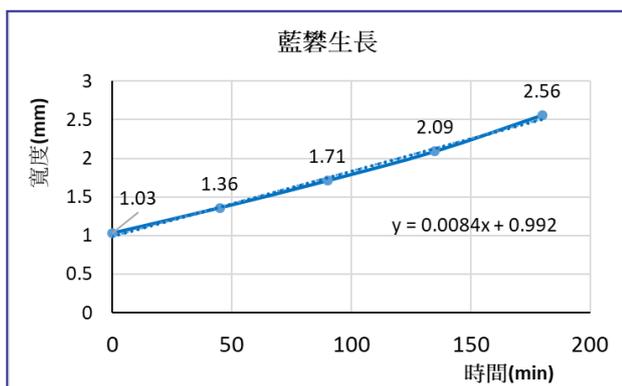
1、晶體的生長與溶解

表十八 晶體的生長與溶解

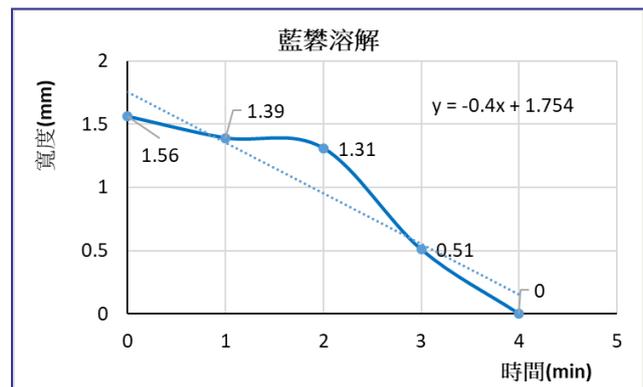
晶體	代號	晶體寬度(mm)	開始	中途	結束	晶體成長(消失)速率 mm/min	整體描述
藍礬	甲 1	藍礬生長				7.16×10^{-3}	逐漸加寬加厚，且能清楚看見原晶體被包在裡面。
		晶體寬度	1.03mm	1.71mm	2.56mm		
	甲 2	藍礬溶解				-0.311	逐漸變薄變小，且先由較薄處消失，消失速率較生長

		晶體寬度	1.56mm	1.31mm	0mm		快很多。
明礬	乙 1	明礬生長				4.10×10^{-3}	厚度與面積明顯變大，且最後略呈長方形。
		晶體寬度	1.06mm	1.48mm	1.84mm		
	乙 2	明礬溶解				-4.11×10^{-3}	從外面開始溶解，但變化不明顯。
		晶體寬度	2.46mm	2.23mm	2.21mm		
紫礬	丙 1	紫礬生長				3.48×10^{-3}	面積和厚度逐漸變大，呈不規則狀，而主要從中間開始變厚。
		晶體寬度	1.71mm	2.04mm	2.23mm		
	丙 2	紫礬溶解				-8.70×10^{-3}	慢慢變小，可是到後來因為溶液已經飽和，所以沒有再繼續溶解。
		晶體寬度	2.59mm	2.09mm	2.07mm		

【表十八】之詳細數據為【表十九】，因數據較多，故省略，詳載於研究日誌，以下為將【表十九】之數據作出之晶體生長與溶解之關係圖（僅列出藍礬，圖三至圖六詳載於研究日誌）。



圖一 藍礬生長



圖二 藍礬溶解

《小結》從「時間—寬度」的作圖之線性趨勢線的斜率可以得知其速率。結果可知：

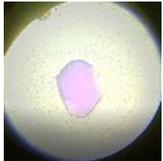
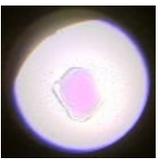
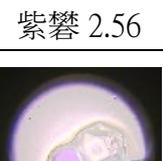
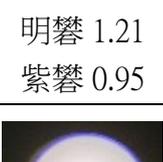
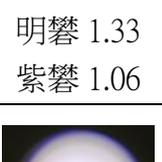
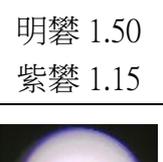
(1) 晶體的生長速率是：**藍礬(0.0084)>明礬(0.0044)>紫礬(0.0035)**，單位：mm/min

(2) 晶體的溶解速率是：**藍礬(-0.4)>紫礬(-0.0089)>明礬(-0.004)**，單位：mm/min

總計，生長及溶解，藍礬都是最快，生長是明礬大於紫礬，溶解是紫礬大於明礬。

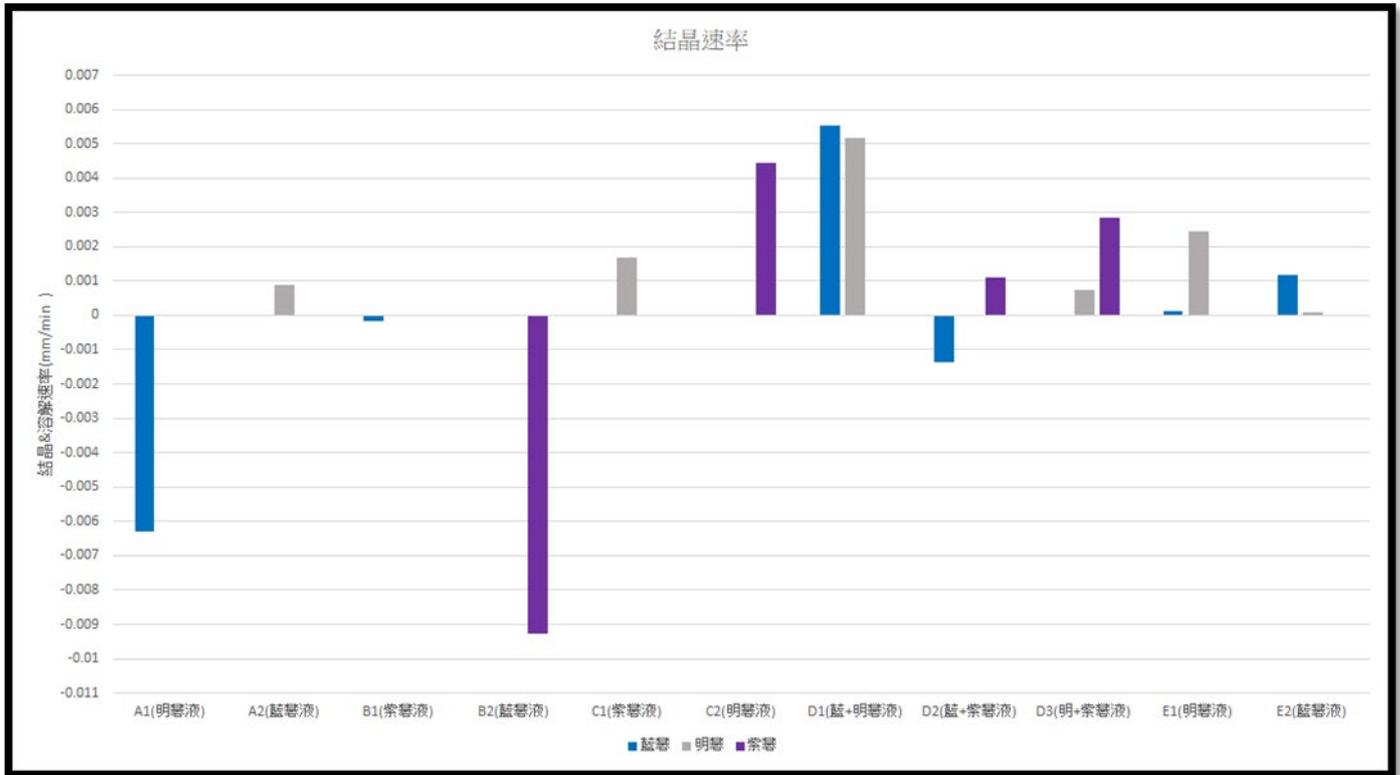
2、觀察不同晶體在溶液中成長情形：我們設計各種實驗，【表二十】為不同晶體在溶液中成長實驗列表(共 22 種配對，詳見研究日誌)，實驗結果如【表二十一】所示。

表二十一 不同晶體在溶液中成長結果 (僅列出部分代表，其餘詳載於研究日誌)

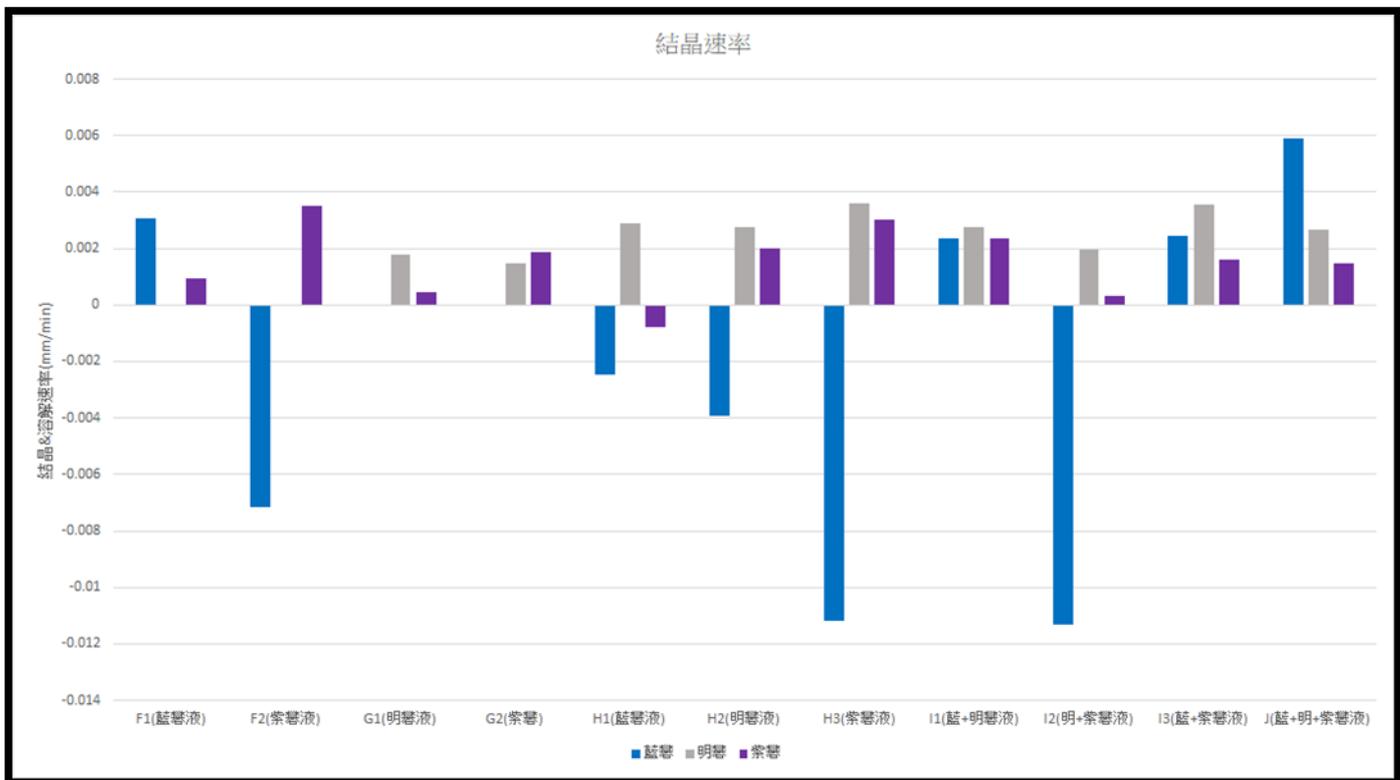
代號	開始	中途	結束	晶體成長速率 mm/min	整體描述
C2				紫礬 4.43×10^{-3}	紫礬到一半有些微的包晶，到最後則更為明顯。
晶體寬度(mm)	紫礬 1.40	紫礬 1.71	紫礬 1.94		
D1				明礬 5.16×10^{-3} 藍礬 5.52×10^{-3}	兩者都有成長，因溶液中有其溶質可供成長，藍礬成長較明礬稍快。
晶體寬度(mm)	明礬 1.10 藍礬 0.73	明礬 1.49 藍礬 1.34	明礬 2.12 藍礬 1.83		
H3				藍礬 -1.12×10^{-2} 明礬 3.58×10^{-3} 紫礬 3.00×10^{-3}	藍礬很快就消失不見，明礬和紫礬有明顯成長。
晶體寬度(mm)	藍礬 1.37 明礬 1.85 紫礬 2.19	藍礬 0 明礬 2.08 紫礬 2.35	藍礬 0 明礬 2.30 紫礬 2.56		
I1				藍礬 2.35×10^{-3} 明礬 2.76×10^{-3} 紫礬 2.35×10^{-3}	藍礬最後變化很小，明礬成長速率越變越快，紫礬成長速率變化不大。
晶體寬度(mm)	藍礬 0.79 明礬 1.21 紫礬 0.95	藍礬 0.96 明礬 1.33 紫礬 1.06	藍礬 1.00 明礬 1.50 紫礬 1.15		
J				藍礬 5.91×10^{-3} 明礬 2.66×10^{-3} 紫礬	藍礬一開始無明顯成長，到後來則快速變大；明礬和紫礬成
晶體寬度	藍礬 0.59	藍礬 0.61	藍礬 1.21		

度(mm)	明礬 1.17 紫礬 0.83	明礬 1.37 紫礬 0.94	明礬 1.45 紫礬 0.98	1.46×10^{-3}	長較慢。
-------	--------------------	--------------------	--------------------	-----------------------	------

將 22 種配對繪成關係圖如下：



圖七 結晶速率比較圖(一)



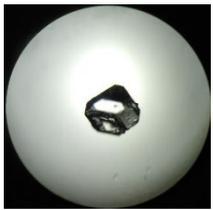
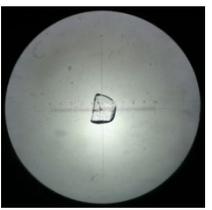
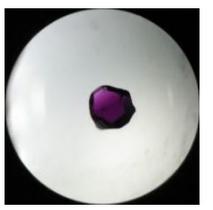
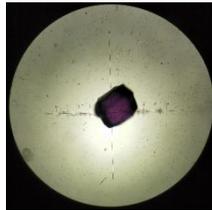
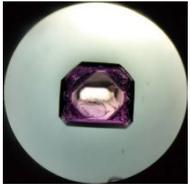
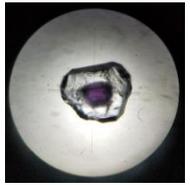
圖八 結晶速率比較圖(二)

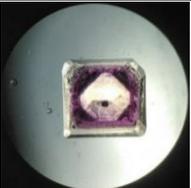
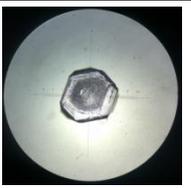
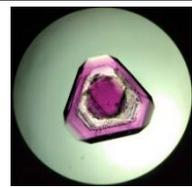
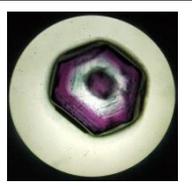
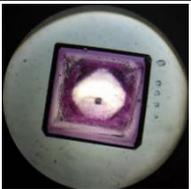
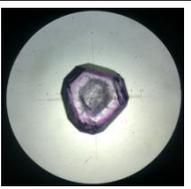
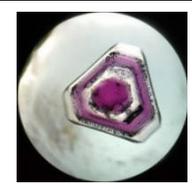
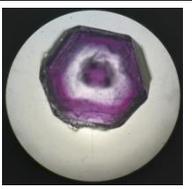
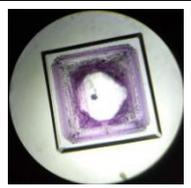
《小結》從上圖的分析，我們歸納如下：

- (1) 從 A1、E1 的結果可知，明礬要包覆藍礬，是極慢的；從 A2、E2 可知，藍礬要包覆明礬，也是極慢的。從 B2、F1 可知，藍礬要包覆紫礬，是極慢的；從 B1、F2 可知，紫礬要包覆藍礬，無法做到，藍礬會溶解。因此，可以得知，**藍礬對於明礬或紫礬，是極難形成包心結晶的。**
 - (2) 從 C1、C2 可知，明礬與紫礬可順利與對方進行包覆，且**明礬包覆紫礬的速率 > 紫礬包覆明礬的速率**。從 D1、D2、D3 可知，不論藍、明、紫礬，都會優先包覆自己的晶體，**對自己的晶體之包覆，具有優先選擇性**。如果沒有選擇性，則明礬與紫礬會互包(如 C1、C2)，但藍礬極難與他們互包。
 - (3) 從 G1、G2 中可知，紫礬、明礬對自己及對他方包覆，都是可行的，但對自己的包覆速率較對他方快。從 H3、I1、I2、I3、J 可知，即使溶液中有多種溶質，**晶體的成長或包覆：明礬的速率 > 紫礬的速率**。
- 此結果可以得知包心結晶的結果是**明礬與紫礬容易進行互包，藍礬難以與其互包。**

3、小型晶體的包心實驗

表二十二 小型晶體的包心實驗結果 (每一實驗各做兩次, 第二次採用顯微測微技術)

	明礬為核心		紫礬為核心	
原始晶體				
	明礬晶體	明礬晶體	紫礬晶體	紫礬晶體
	寬度 1.22 mm	寬度 0.54mm	寬度 1.13mm	寬度 0.96mm
一次包心				
	明紫晶體	明紫晶體	紫明晶體	紫明晶體
	寬度 1.79mm	寬度 1.03mm	寬度 1.72mm	寬度 1.89mm

二次包心				
	明紫明晶體	明紫明晶體	紫明紫晶體	紫明紫晶體
	寬度 1.96mm	寬度 1.52mm	寬度 2.25mm	寬度 2.64mm
三次包心				
	明紫明紫晶體	明紫明紫晶體	紫明紫明晶體	紫明紫明晶體
	寬度 2.38 mm	寬度 1.76mm	寬度 2.76mm	寬度 2.94mm
四次包心				
	明紫明紫明晶體	明紫明紫明晶體	紫明紫明紫晶體	紫明紫明紫晶體
	寬度 2.70mm	寬度 2.13mm	寬度 2.94 mm	寬度 3.08m

(二)實驗討論

1、晶體成長部分，我們發現**藍礬**成長速率明顯比**紫礬**及**明礬**快，

其速率比：**藍礬**(0.0084)>**明礬**(0.0044)>**紫礬**(0.0035)(mm/min)

2、晶體溶解的部分，**藍礬**溶解速率遠大於**明礬**及**紫礬**，晶體的溶解速率比：

藍礬(-0.4)>**紫礬**(-0.0089)>**明礬**(-0.004)(mm/min)

藍礬溶解至完全消失，明礬及紫礬溶解變小到一個程度後即不再明顯變小，推測是藍礬溶解過程中，對其他溶質而言，雖然飽和，但對藍礬而言卻是未飽和，因此可以將之完全溶解。明礬及紫礬溶解使水溶液飽和，因此不繼續溶解，達成平衡。

3、晶體的交互作用中，如果數種晶體在水溶液中，若該水溶液中有其溶質，則成長較快，若無其溶質，有些會成長(被其他溶質包覆上去)，有些不成長。像紫礬晶體可以被明礬溶質包覆成長，但**藍礬晶體難以被明礬或紫礬包覆成長，維持原狀不成長，或溶解消失。**

4、從顯微縮時攝影可以看到另一種較為微觀的包心成長，四次包心僅需一天即可完成。

5、欲進行包心結晶，可以選擇明礬和紫礬，兩者之間都可以互相包覆，而藍礬與明礬、紫

礬間是極難形成包心。包心情形可行性整理，可以下方表格呈現。

表二十三 包心可行性整理

包心情形	速率	可行性
藍礬包紫礬	極慢	×
紫礬包藍礬	無法包，藍礬會溶解	×
藍礬包明礬	極慢	×
明礬包藍礬	極慢	×
紫礬包明礬	快(較明包紫慢)	○
明礬包紫礬	快(較紫包明快)	○

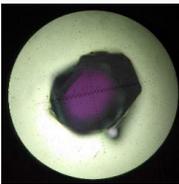
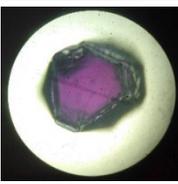
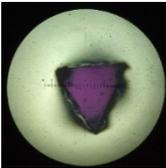
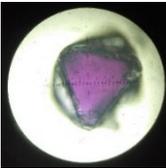
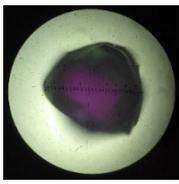
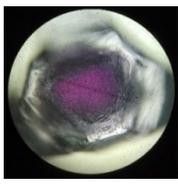
☆假設四之實驗結果：即使是微小的顯微尺度下，明礬與紫礬的包心結晶仍能成功，但藍礬無法成功，實驗結果部分支持假設。

六、包心條件的探討 【實驗假設五】：外在環境會影響包心速率及其他結果。

(一)實驗結果

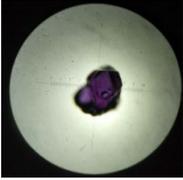
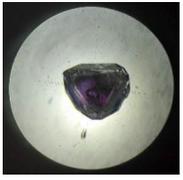
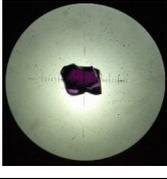
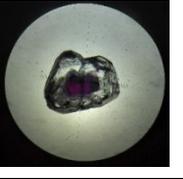
1、水質 (實驗時間：140 分鐘) 放大倍率：100 倍

表二十四 水質實驗

過程		開始	結束	描述 / 結晶速率
明礬水溶液 自來水 (TDS: 68 ppm)	照片			包心速率在右方較快，左方較慢。
	大小(mm)	0.99mm	1.10mm	
過濾自來水 (TDS: 59 ppm)	照片			包心速率與自來水差不多，各面之結晶速率不均。
	大小(mm)	0.84mm	0.95mm	
蒸餾水 (TDS: 3.5 ppm)	照片			包心厚度明顯增加，速率較自來水及過濾自來水快
	大小(mm)	1.11mm	1.52mm	

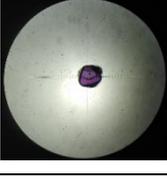
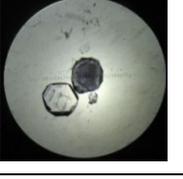
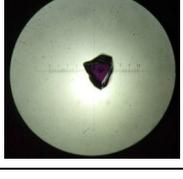
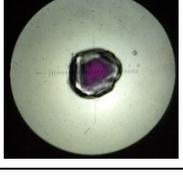
2、通風程度 (實驗時間：50 分鐘) 放大倍率：40 倍

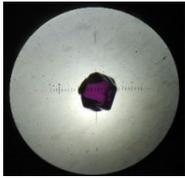
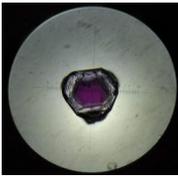
表二十五 通風程度實驗

過程 通風情形		開始	結束	描述 / 結晶速率
無風 (0 m/s)	照片			包心速率緩慢， 厚度增加均勻且 各面透明度均 勻。
	大小(mm)	1.15mm	1.79mm	1.28×10^{-2}
弱風 (0.8 m/s)	照片			包心速率較快， 但外層顏色透明 度較差。
	大小(mm)	1.09mm	2.08mm	1.98×10^{-2}
強風 (2.2 m/s)	照片			包心速率更快， 但外層顏色透明 度較佳。
	大小(mm)	0.81mm	2.01mm	2.40×10^{-2}

3、溫溼度 (實驗時間：120 分鐘) 放大倍率：40 倍

表二十六 溫溼度實驗

溫度 (°C)	溼度 (%)		開始	結束	描述 / 結晶速率
高溫 (28°C)	低溼 (56%)	照片			包心較快厚度均 勻，且少有碎晶 干擾。
		大小(mm)	0.78mm	1.42mm	5.33×10^{-3}
高溫 (28°C)	高溼 (72%)	照片			包心較慢且周圍 產生較多碎晶， 並另長出一顆較 大的晶體。
		大小(mm)	0.66mm	0.88mm	1.83×10^{-3}
低溫 (7°C)	低溼 (53%)	照片			包心較快且厚度 均勻，少有碎晶 干擾。
		大小(mm)	0.74mm	1.45mm	5.92×10^{-3}

低溫 (7°C)	高溼 (70%)	照片			包心較慢但厚度 均勻，少有碎晶 干擾。
		大小(mm)	1.05mm	1.52mm	

《小結：》綜合以上結果，我們發現包心結晶速率比較如下：

(1)蒸餾水 > 過濾自來水 \approx 自來水 (2)強風 > 弱風 > 無風

(3)低溫低溼 > 高溫低溼 > 低溫高溼 > 高溫高溼

(二)實驗討論

從晶體的成長均勻度及透明度整體比較，我們發現如果要讓包心長得好，可考慮以下條件：

- 1、若要讓包心長得較快且透明度佳，可以採用水質為蒸餾水，通風程度為強風，在低溫低溼環境下進行。
- 2、若要讓包心長得厚度均勻、透明度均勻、少有碎晶干擾，可採用水質為蒸餾水，通風程度為無風，在高溫低溼環境下進行。

我們發現並無所謂的最佳條件，而是依照不同條件有不同需求，總之，水質愈乾淨愈有助於結晶透明度、減少碎晶，通風程度無風長得較慢，而在高溫或低溫下皆可進行，溼度以低溼度較有助於包心結晶。

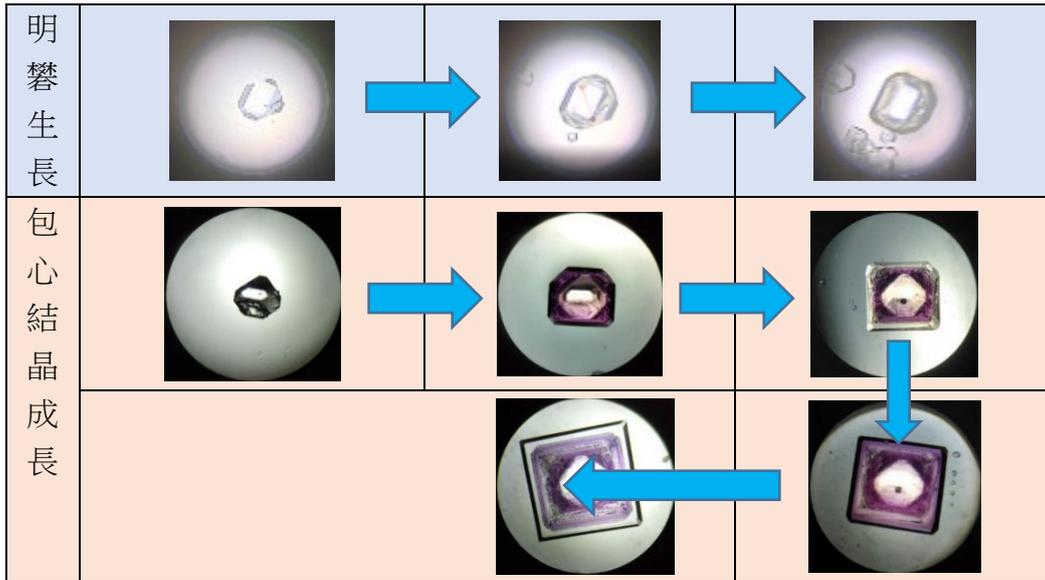
☆假設五之實驗結果：水質、通風、溫溼度等外在環境的確影響包心速率及其他結果，實驗結果支持假設。

七、晶體生長速率控制【實驗假設六】：晶面各面生長速率不同，在不同容器位置生長速率亦不同。

(一)實驗結果

- 1、在某些結果中，發現到晶體有些晶面會變大，有些晶面則會變小甚至完全消失。這可能是因為晶體生長速率有快有慢，生長速率慢的晶面會逐漸變大，生長速率快的晶面會變

小，甚至是消失。例如我們的晶形從原先的八面漸漸變成四面，如下圖。

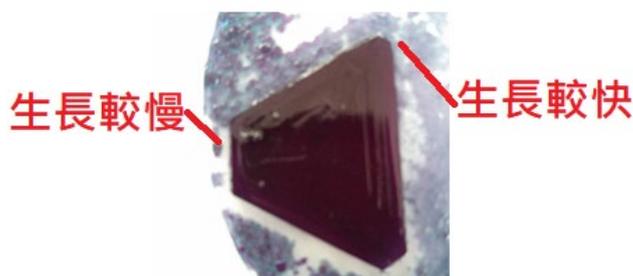
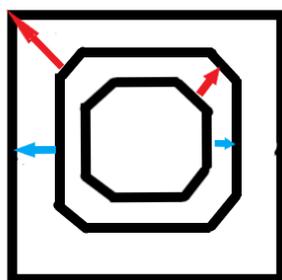


2、晶形成長不均勻之修正

晶形缺陷種類	修正晶形方式	原晶體	修正後晶體
碎晶附著母晶	放入蒸餾水若干時間，即可讓碎晶脫離母晶。		
某面成長太快	放置於容器靠邊緣處。		
某邊厚度較薄	放入傾斜溶液較淺處，厚度增加變快。		

(二)實驗討論

- 1、晶面角的變化，如以下左圖示說明，其中紅色箭頭表示生長較快，藍色箭頭表示生長較慢，生長快的面會漸漸消失，此圖最後由八邊形變成四邊形。



我們常在結晶成長的過程中，觀察到隨著晶體長大的過程中，**晶面消失**的情形，尤其最常見是八邊形變為四邊形，六邊形變為三邊形。從文獻記載中是以**生長速率**解釋。我們另做晶體放在離容器壁不同距離之位置看其晶面之變化，如上右圖，發現在由六邊形漸變為三邊形的過程中，**靠近容器壁的面長得較慢**，推測在容器壁附近可能有某些因素不利於結晶，我們也推測**溶液在析出結晶時，其附近濃度會降低，影響溶液密度，造成局部的溶液移動**，這可能也是造成晶體成長不均的原因之一。

- 晶形缺陷方面，如碎晶的附著，可將晶體**放入蒸餾水中，使碎晶脫離**，以及將厚度太薄之面，放置傾斜溶液**較淺處**，因該處**上方溶液較薄，蒸發速度較快**，可**加快該處結晶的速率使其變厚**。

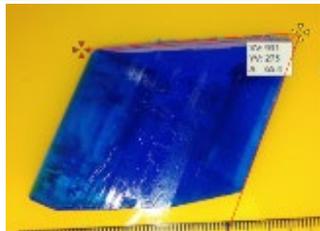
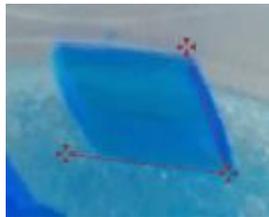
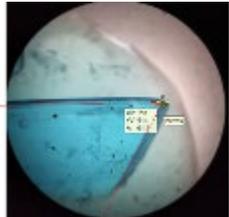
☆假設六之實驗結果：不同晶面、不同容器位置，生長速率不均，實驗結果支持假設。

八、晶面角之測量【實驗假設七】：任何晶體之晶面角，皆遵守面角守恆定律及赫夷定律。

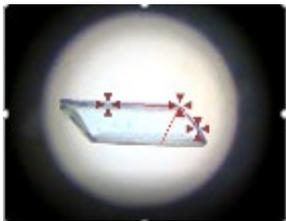
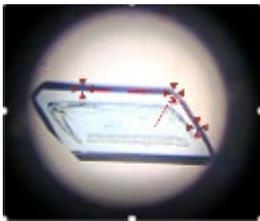
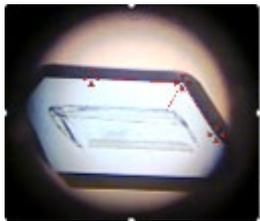
(一)實驗結果

1、單一品體晶面角測量

表二十七 單一品體晶面角測量 (僅列出藍礬，其餘詳載於研究日誌)

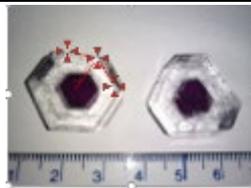
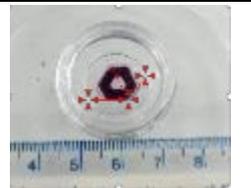
晶體	大型晶體	中型晶體	小型晶體(顯微鏡下)
藍礬			
	65.4 度	64.8 度	61.7 度

表二十八 顯微鏡下之晶面角變化 (僅列出藍礬，其餘詳載於研究日誌)

晶體	開始	中途	結束
藍礬			
	123.9 度	124.4 度	121.4 度

2、包心結晶之晶面角測量

表二十九 包心結晶之晶面角

	明礬包紫礬	紫礬包明礬	紫礬包明礬包紫礬	明礬包紫礬包明礬
照片				
第一層	123.0 度	130.0 度	132.8 度	126.5 度
第二層	125.0 度	132.7 度	130.6 度	130.8 度
第三層			128.9 度	128.7 度

(二)實驗討論

我們發現，不論是大、中、小型晶體，其晶面角都大約相似，測量值不同可能為誤差，因此符合**赫夷定律**。而晶體由小到大的成長過程中，晶面角幾乎維持不變，符合**晶面角守恆定律**。

☆**假設七之實驗結果：各晶面角皆遵守面角守恆定律及赫夷定律，實驗結果支持假設。**

陸、結論

- 一、根據**邁耶理論**，我們將溶液控制在**準安定區**，讓溶液不會長出新的晶核，但可使晶核長成大粒晶體的區間，盡量維持溫度的恆定，減少碎晶，也利用**室溫下換水**，讓晶體不要太快成長，利用**過濾減少雜質**，避免太多晶種產生碎晶，影響大型晶體的成長。
- 二、結晶過程中容易受天氣的影響，我們**用時間換取空間，增加長晶時間並勤於換水**，除去碎晶的干擾，讓晶體有足夠時間成長到一定的大小。在此實驗中，我們成功養出大型晶體，如**最大的藍礬晶體可達 7.5cm，最大的包心也達 3.5cm。**

- 三、包心現象條件是晶形要相似，像**明礬與紫礬的晶形都是正八面體或六邊形**，可以互相產生**包心結晶**。另外，氣溫高或潮溼會使外層包覆的晶體溶解，故需先讓外層成長久一點，有足夠的厚度再進行包心。**大型結晶**之包心，完成**五層(四次包心)**，約需將近一個月，層數愈多，透明度會愈低。**小型結晶**之包心，完成**五層(四次包心)**，僅需一天的時間，且其透光度降低的情形較少。
- 四、紫礬與明礬能夠進行「**融合**」結晶，即由兩種礬均勻混合產生的結晶。原因是**紫礬的鉻離子半徑與明礬的鋁離子半徑大小相似及晶形相似**，因此可以發生離子互換，長出均質的結晶。而明礬、紫礬並不與藍礬產生「融合」結晶，也是因為**銅離子半徑、晶形與其他兩者相差太大**。
- 五、晶體成長與溶解中，藍礬速率明顯比紫礬及明礬快。晶體在水溶液中，若有其溶質，則成長較快，紫礬與明礬可互相形成包心結晶。顯微縮時攝影也可以看到較為微觀的包心成長，我們進行到**顯微鏡底下的四次包心成功**。另外，晶體在成長的過程中，有些晶面會變大，有些晶面則會變小甚至消失，這是因為晶體生長速率不同造成。
- 六、**水質愈乾淨**愈有助於包心結晶**透明度、減少碎晶**；通風程度為**無風**，包心長得**較慢**但晶層**厚度較均勻**；而**低溫低溼度**下包心結晶成長**速率較快**。
- 七、**晶面修正**可由控制晶面**生長速率**進行，修正方法如下：
- (一) **碎晶附著**母晶，可將母晶放入**蒸餾水**中適當時間，即可將碎晶脫離。
 - (二) 某面成長太快，可將成長太快之面放在靠近容器邊緣，以減慢其成長速率。
 - (三) 某邊厚度太薄，可將其放入傾斜溶液中，讓厚度較薄之晶面較接近水面，可加快其生長速率。
- 八、不論是大、中、小型晶體，其晶角都符合**晶面角守恆定律**及**赫夷定律**。

柒、未來展望

美麗的晶體就像是我們的寶石，令人目眩神迷！我們歷時十個月漫長的研究，最大的成就感來自於完成比別人**更大的結晶**，以及做到沒有人深入研究過的**包心結晶**，也順利完成明礬與紫礬的**融合結晶**，並利用**顯微縮時**做動態拍攝與數據分析，可提供未來研究者之參考。另外，在實驗後期，我們做**初步的變因控制晶體的成長**，讓晶體依照我們設定的方向及對晶

形的修正，有了初步成果，未來我們想更深入研究此方向，希望能達到隨心所欲控制晶體成長的完美境界。

捌、參考資料

- 一、蔡宇軒等(2003)。晶體聯合國的高峰會議。中華民國第四十三屆中小學展覽會。
- 二、盧裕欣等(2005)。食鹽結晶的 X 檔案。中華民國第四十五屆中小學展覽會。
- 三、熊若含等(2009)。「晶」益求精-探討不同聲波、溫度、濃度、離子等對其影響。中華民國第四十九屆中小學展覽會
- 四、葉宗儒等(2011)。水滴中的「晶」靈。中華民國第五十一屆中小學展覽會。
- 五、鄭謹譯等(2013)。聲聲不息？探討各種變因對硫酸銅晶體的影響。中華民國第五十三屆中小學科學展覽會。
- 六、彭羿涵等(2013)。晶聲尖叫-探討聲波對硫酸銅結晶的影響。中華民國第五十三屆中小學科學展覽會。
- 七、陳冠儒等(2014)。隨晶所欲，從核開始。中華民國第五十四屆中小學科學展覽會。
- 八、范升維等(2016)。晶晶計較－明礬結晶的奧秘。中華民國第五十六屆中小學科學展覽會。
- 九、吳思穎等(2017)。藍色夢幻-硫酸銅結晶的研究。中華民國第五十七屆中小學科學展覽會。
- 十、陳郁心等(2018)。藍晶閃耀~探索單結晶、雙結晶、包心結晶形成的條件。中華民國第五十八屆中小學科學展覽會。
- 十一、晶體之美。台北縣 98 學年度國民中學科學展覽會。2020 年 6 月 9 日，取自
<http://163.20.145.5/list/SchoolWorksAccreditation/teacher/dir2/0505-%E6%99%B6%E9%AB%94%E4%B9%8B%E7%BE%8E.pdf>
- 十二、離子半徑。2020 年 6 月 9 日，取自
<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%A6%BB%E5%AD%90%E5%8D%8A%E5%BE%84>
- 十三、各種理論(邁耶、晶系、配位)及定律(赫夷、面角守恆)。2020 年 6 月 9 日，取自
<https://zh.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:%E9%A6%96%E9%A1%B5>

【評語】 030214

學生發現成長出包心結構的不同成分的晶體，相當有趣。建議說明核殼晶體的形成有方向性，並探討各晶體的顏色有否符合預期。

(二)實驗討論

- 1、**降溫太快**，產生**過飽和**，容易進入**不安定區**，易產生**碎晶**。
- 2、**室溫換水**比**高溫換水**較慢產生**結晶**，**晶體**成長也較慢，但**晶形**較漂亮。
- 3、水中**雜質**易成為**晶種**，產生較多**碎晶**，**過濾**後，較**不容易有碎晶**。
- 4、**容易潮解**的藥品不易長成**穩定結晶**，**不適合培養大型晶體**。

☆可以促進結晶：**(1)快速降溫以達過飽和狀態。(2)室溫換水較高溫換水結晶較慢，但晶形較完整，碎晶較少。(3)自來水過濾後，結晶晶形較平整。**

二、進行晶體培養

【實驗假設一】：含結晶水之礬類，容易培養大型結晶

(一)實驗結果

僅**硫酸銅**適合培養大型結晶，**假設含結晶水之礬類，容易培養大型結晶**，增加**明礬、紫礬和綠礬**進行晶體培養，為求**晶形完整不求快速**，不利用降溫等過飽和方式，僅利用**室溫換水及將自來水過濾配製飽和溶液**兩原則來培養結晶。

表七 藍礬(硫酸銅)晶體培養



晶體繼續成長，晶體最大已達**7.5cm**。某些晶體上明顯疊加其他較小晶體一起成長。

表八 紫礬(硫酸鉀)晶體培養



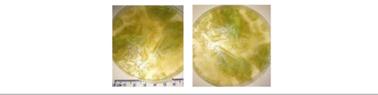
包心繼續成長，部分移至另一容器。非包心之實驗，紫礬長至約**3cm**，取出拍照。

表九 明礬(硫酸鋁鉀)晶體培養



結晶更大，達**2.5cm**。取出擦乾，拍照。

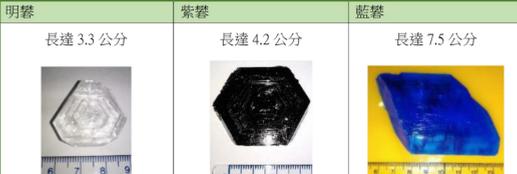
表十 綠礬(硫酸亞鐵)晶體培養



似有雜質含其中，曾取出部分，過濾再結晶，仍然繼續氧化，似鐵鏽味。

表十一 單晶最大的結晶

明礬	紫礬	藍礬
長達 3.3公分	長達 4.2公分	長達 7.5公分



(二)實驗討論

- 1、**結晶**易受天氣影響，寒流來襲一夜間長大很多，且產生許多**碎晶**，白天氣溫升高，**晶體**停止成長，甚至天氣潮溼，有**小幅溶解**。我們設定**長晶體的時間較長**，大約一個半月，所以**晶體**有穩定的成長。
- 2、當**晶體**長至較大時，**碎晶**會干擾其成長，必須用**鑷子**將之移除，若太多無法一一移除，則選擇**換水**方式，將大晶體取出，另放入飽和溶液中繼續成長。
- 3、**綠礬**是單斜晶體，且長出來的**晶形**扁平像羽毛狀，無法長出較厚實且形狀單一的**單晶**，因此我們只探討至長出大片結晶為止，不進行後續包心探討。

☆假設一之實驗結果：**藍礬、明礬及紫礬容易培養大型結晶，而綠礬不易培養大型結晶，實驗結果部分支持假設。**

三、融合結晶之探討

【實驗假設二】：晶形相似之化合物，能進行融合結晶。

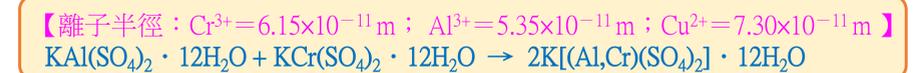
(一)實驗結果

表十二 雙溶質及三溶質結晶實驗

水溶液	開始	1天後	3天後	描述
紫礬+藍礬				藍礬長得比較明顯，而紫礬則不明顯。
紫礬+明礬				晶體為淡紫色，推測是兩者融合產生均勻混晶。
藍礬+明礬				兩者並未結合在一起，而是分開成長。
紫礬+藍礬+明礬				藍礬自己單獨成長，明礬與紫礬有部分結合。

(二)實驗討論

在紫礬與明礬的雙溶質結晶實驗中，出現**「融合」結晶**。文獻中記載，這可能跟紫礬的**鉀離子半徑**與明礬的**鋁離子半徑**大小相似、以及兩者的**配位方式**及**晶形**相似有關，可以發生**離子互換**，最後長出均質的混晶。



☆假設二之實驗結果：**晶形相似之明礬與紫礬能進行融合結晶，結果支持假設。**

四、包心結晶之探討

【實驗假設三】：晶形相似之化合物，能進行包心結晶。

(一)實驗結果

- 1、紫礬結晶實驗，溶液顏色很深，無法拍清楚照片，因此將一部分紫礬晶體拿出放至明礬溶液中，看有什麼變化，三天後即看到紫礬外圍被明礬包住，成為**「包心」結晶**，**全國科展**僅有一篇作品有做過**「包心」結晶**，但僅說明包心出現的情形及比例，沒有深究。因此，我們決定深入研究**「包心」**這個現象。於是設計三種礬(藍、紫、明礬)的晶體進行包心的探討
- 2、取出明礬包紫礬晶體及紫礬包明礬晶體，進行第二次包心實驗。將明礬包紫礬晶體放入紫礬溶液，將紫礬包明礬晶體放入明礬溶液，嘗試進行**二次包心**，結果成功。

表十三 包心結晶實驗

水溶液	開始	3天後	6天後	描述
紫礬晶體+藍礬溶液				紫礬溶解，無包心。
紫礬晶體+明礬溶液				紫礬的晶體被明礬包圍。
藍礬晶體+紫礬溶液				藍礬並無被紫礬包圍。
藍礬晶體+明礬溶液				藍礬晶體溶解後，最後產生結晶時顏色較淡。
明礬晶體+紫礬溶液				紫礬的晶體包圍在明礬晶體外面。
明礬晶體+藍礬溶液				沒產生明顯的包心晶體。

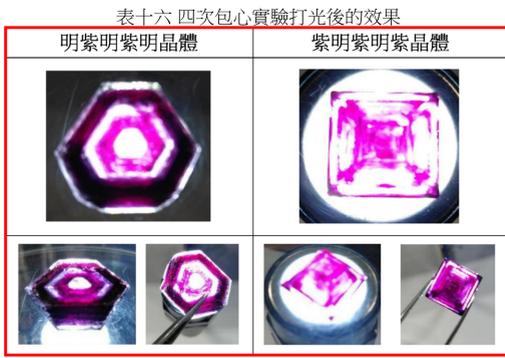
表十四 二次包心實驗

原晶體	開始	2天後	4天後	描述
明礬包紫礬				二次包心成功，形成紫礬-明礬-紫礬三層交替之結晶。
紫礬包明礬				二次包心成功，形成明礬-紫礬-明礬三層交替之結晶。

3、二次包心實驗成功後，接著依序進行三次、四次包心實驗，結果如下。

表十五 三次及四次包心實驗

明紫明紫晶體	紫明紫明晶體
明紫明紫晶體	紫明紫明晶體



4、**【晶中之最】包心最大的結晶**

表十七 包心最大的結晶

紫明礬(一次)	明紫礬(一次)	紫明紫礬(二次)	明紫明礬(二次)
長達 3.5公分	達 1.0公分	長達 2.9公分	達 1.2公分
紫明紫明礬(三次)	明紫明紫礬(三次)	紫明紫明紫礬(四次)	明紫明紫明礬(四次)
達 0.9公分	長達 1.8公分	達 1.0公分	長達 2.0公分

(二)實驗討論

- 1、**紫礬與明礬可互包**，有時紫礬會先溶解一些，長上去包住的是有淡淡紫色的**「紫礬明礬混合」**層。若在溫度較高或天氣較潮溼時，會有紫礬微溶的現象，若**溫度低或天氣乾燥**，則**紫礬被「純明礬」包心**的情況就會出現。
- 2、**紫礬**為等軸晶系**正八面體**，**明礬**為三方晶系**六邊形**，**藍礬**為三斜晶系，**接近平行四邊形**。結果發現不只如此，**紫礬除了正八面體，另有六邊形，明礬除了六邊形，也有正八面體**。紫礬與明礬實驗結果晶形相似，可以互相包心，藍礬因晶形與之差異大，即使堆上去也無法緊密，一旦溶液滲入即可能瓦解。
- 3、「紫明紫」二次包心，因**雙層紫礬**，導致中間層的**明礬顏色**不易看清楚，「明紫明」則呈現很清楚的包心。第二次包心需耐心等待，所包的厚度不能太薄，否則當**天氣潮溼時**，**太薄之包層**即可能**溶解**。
- 4、大型晶體中，進行到四次包心，**每包一層**明顯的厚度需要**5-7天**時間。四次包心共有**五層**晶體，透光度低，難看見分層情形，我們發現從**底部打光**，可**清楚拍攝到其分層**，且晶體變得非常漂亮，有炫目的色彩，彷彿美麗的寶石。

☆假設三之實驗結果：**晶形相似明礬與紫礬，進行包心結晶成功，結果支持假設。**

五、微小尺度晶體成長溶解與包心之探討

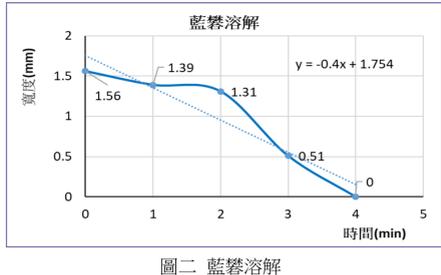
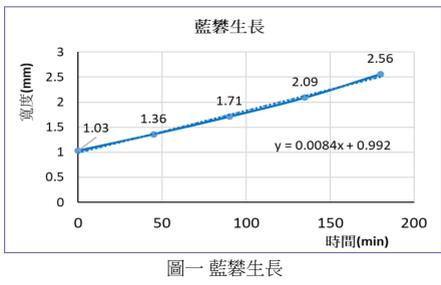
【實驗假設四】：顯微尺度下的包心結晶，能成功。

(一)實驗結果

1、晶體的生長與溶解

表十八 晶體的生長與溶解

代號	晶體	開始	中途	結束	晶體成長速率 mm/min	整體描述
藍礬	藍礬生長				7.16×10^{-3}	逐漸加厚，且能清楚看見原晶體被包在裡面。
	藍礬溶解				-0.311	逐漸變薄，且先由較薄處消失，消失速率較生長快得多。
明礬	明礬生長				4.10×10^{-3}	厚度與面積明顯變大，且最後略呈長方形。
	明礬溶解				-4.11×10^{-3}	從外面開始溶解，但變化不明顯。
紫礬	紫礬生長				3.48×10^{-3}	面積和厚度逐漸變大，呈不規則狀，而主要從中間開始變厚。
	紫礬溶解				-8.70×10^{-3}	變薄變小，可見到後來因為溶液已經飽和，所以沒有再繼續溶解。



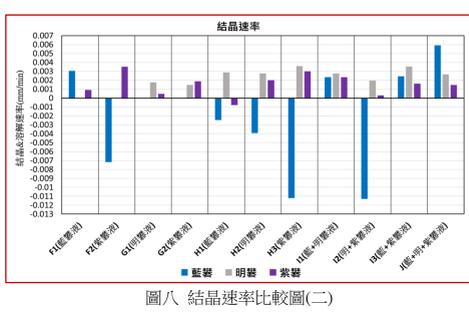
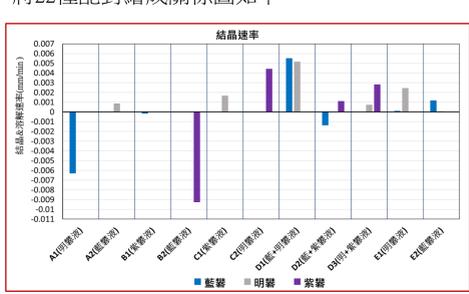
- (1) 晶體的生長速率是：**藍礬(0.0084)>明礬(0.0044)>紫礬(0.0035)** (mm/min)
 - (2) 晶體的溶解速率是：**藍礬(-0.4)>紫礬(-0.0089)>明礬(-0.004)** (mm/min)
- 生長及溶解，**藍礬**都是最快，生長是**明礬**大於**紫礬**，溶解是**紫礬**大於**明礬**。

2、觀察不同晶體在溶液中成長情形：**【表二十】**為不同晶體在溶液中成長實驗列表(共22種配對，詳見研究日誌)，實驗結果如**【表二十一】**所示。

表二十一 不同晶體在溶液中成長結果

代號	開始	中途	結束	晶體成長速率 mm/min	整體描述
C2				紫礬 4.43×10^{-3}	紫礬到一半有些微的包晶，到最後則更為明顯。
D1				明礬 5.16×10^{-3} 藍礬 5.52×10^{-3}	兩者都有成長，因溶液中有其溶質可供成長，藍礬成長較明礬稍快。
H3				藍礬 -1.12×10^{-3} 明礬 3.58×10^{-3} 紫礬 3.00×10^{-3}	藍礬很快就消失不見，明礬和紫礬有明顯成長。
I1				藍礬 2.35×10^{-3} 明礬 2.76×10^{-3} 紫礬 2.35×10^{-3}	藍礬最後變化很小，明礬成長速率越變越快，紫礬成長速率變化不大。
J				藍礬 5.91×10^{-3} 明礬 2.66×10^{-3} 紫礬 1.46×10^{-3}	藍礬一開始無明顯成長，到後來則快速變大；明礬和紫礬成長較慢。

將22種配對繪成關係圖如下：



實驗代號	結果	歸納
A1、E1	明礬要包圍藍礬，極慢。	藍礬對於明礬或紫礬，極難形成包心結晶。
A2、E2	藍礬要包圍明礬，極慢。	
B2、F1	藍礬要包圍紫礬，極慢。	各種礬都優先選擇包自己晶體，如無選擇性，明礬與紫礬會互包，藍礬極難與之互包。
B1、F2	紫礬要包圍藍礬，無法做到，藍礬會溶解。	
C1、C2	明礬與紫礬可與對方進行包圍，且明礬包圍紫礬的速率>紫礬包圍明礬的速率。	包圍自己之速率，大於包圍他方，且速率明礬大於紫礬。
D1、D2、D3	藍、明、紫礬，對自己的晶體之包圍，具有優先選擇性。	
G1、G2	紫礬、明礬對自己及對他方包圍，都是可行的，但對自己速率較快。	包圍自己之速率，大於包圍他方，且速率明礬大於紫礬。
H3、I1、I2、I3、J	即使溶液中有溶質，晶體的成長或包圍：明礬的速率>紫礬的速率。	

3、小型晶體的包心實驗

表二十二 小型晶體的包心實驗結果(每一實驗各做兩次,第二次採用顯微測微技術)

包心情形	明礬為核心		紫礬為核心	
	原始晶體	一次包心	二次包心	三次包心
明礬包紫礬				
紫礬包明礬				
明礬包明礬				
紫礬包紫礬				
寬度(mm)	1.22	0.54	1.13	0.96
明礬包紫礬				
寬度(mm)	1.79	1.03	1.72	1.89
明礬包明礬				
寬度(mm)	1.96	1.52	2.25	2.64
明礬包紫礬				
寬度(mm)	2.38	1.76	2.76	2.94
明礬包明礬				
寬度(mm)	2.70	2.13	2.94	3.08

(二)實驗討論

- 1、成長:藍礬成長速率明顯比紫礬及明礬快。溶解:藍礬溶解速率遠大於明礬及紫礬。
- 2、數種晶體在水溶液中,若已有其溶質,成長較快,若無其溶質,有些被其他溶質包覆,有些不成長。像紫礬可以被明礬溶質包覆,但藍礬難以被明礬或紫礬包覆,常維持原狀不成長,或溶解消失。
- 3、從顯微縮時攝影可看到微觀包心成長,完成四次包心僅需一天。
- 4、欲進行包心結晶,可以選擇明礬和紫礬。

表二十三 包心可行性整理

包心情形	速率	可行性
藍礬包紫礬	極慢	×
紫礬包藍礬	無法包,藍礬會溶解	×
藍礬包明礬	極慢	×
明礬包藍礬	極慢	×
紫礬包明礬	快(較明包紫慢)	○
明礬包紫礬	快(較紫包明快)	○

☆假設四之實驗結果:即使是微小的顯微尺度下,明礬與紫礬的包心結晶仍能成功,但藍礬無法成功,實驗結果部分支持假設。

六、包心條件的探討

【實驗假設五】:外在環境會影響包心速率及其他結果。

(一)實驗結果

1、水質(實驗時間:140分鐘) 放大倍率:100倍

表二十四 水質實驗

過程	開始	結束	描述 / 結晶速率
明礬水溶液 自來水 (TDS: 68 ppm)			包心速率在右方較快,左方較慢。
大小(mm)	0.99mm	1.10mm	7.86×10^3
過濾自來水 (TDS: 59 ppm)			包心速率與自來水差不多,各面之結晶速率不均。
大小(mm)	0.84mm	0.95mm	7.86×10^3
蒸餾水 (TDS: 3.5 ppm)			包心厚度明顯增加,速率較自來水及過濾自來水快。
大小(mm)	1.11mm	1.52mm	2.93×10^3

2、通風程度(實驗時間:50分鐘) 放大倍率:40倍

表二十五 通風程度實驗

過程	開始	結束	描述 / 結晶速率
通風情形 無風 (0 m/s)			包心速率緩慢,厚度增加均勻且各面透明度均勻。
大小(mm)	1.15mm	1.79mm	1.28×10^3
弱風 (0.8 m/s)			包心速率較快,但外層顯色透明度較差。
大小(mm)	1.09mm	2.08mm	1.98×10^3
強風 (2.2 m/s)			包心速率更快,但外層顯色透明度較差。
大小(mm)	0.81mm	2.01mm	2.40×10^3

3、溫溼度(實驗時間:120分鐘) 放大倍率:40倍

表二十六 溫溼度實驗

溫度(C)	溼度(%)	開始	結束	描述 / 結晶速率
高溫(28°C)	低溼(56%)			包心較快且厚度均勻,且少有碎晶干擾。
	大小(mm)	0.78mm	1.42mm	5.33×10^3
高溫(28°C)	高溼(72%)			包心較慢且周圍產生較多碎晶,並另長出一顆較大的晶體。
	大小(mm)	0.66mm	0.88mm	1.83×10^3
低溫(7°C)	低溼(53%)			包心較快且厚度均勻,少有碎晶干擾。
	大小(mm)	0.74mm	1.45mm	5.92×10^3
低溫(7°C)	高溼(70%)			包心較慢但厚度均勻,少有碎晶干擾。
	大小(mm)	1.05mm	1.52mm	3.92×10^3

綜合以上結果,我們發現包心結晶速率比較如下:

- (1)蒸餾水 > 過濾自來水 = 自來水 (2)強風 > 弱風 > 無風
- (3)低溫低溼 > 高溫低溼 > 低溫高溼 > 高溫高溼

(二)實驗討論

從晶體的成長均勻度及透明度比較,我們發現如果要讓包心長得好,可考慮以下條件:

- 1、長得較快且透明度佳,可採用水質為蒸餾水,通風程度為強風,低溫低溼環境。
- 2、長得厚度均勻、透明度均勻、少有碎晶干擾,可採用水質為蒸餾水,通風程度為無風,高溫低溼環境。

水質愈乾淨愈有助於結晶透明度、減少碎晶,通風無風長得較慢,而在高溫或低溫下皆可進行,溼度以低溼度較有助於包心結晶。

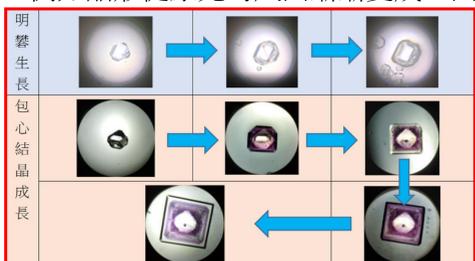
☆假設五之實驗結果:水質、通風、溫溼度等外在環境的確影響包心速率及其他結果,實驗結果支持假設。

七、晶體生長速率控制

【實驗假設六】:晶面各面生長速率不同,在不同容器位置生長速率亦不同。

(一)實驗結果

- 1、某些結果中發現晶面會變大、變小甚至消失。推測是因為晶體生長速率不同,生長速率慢的晶面會逐漸變大,生長速率快的晶面會變小甚至消失。例如晶形從原先的八面漸漸變成四面,如下圖。



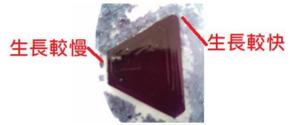
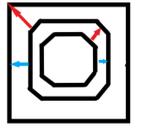
2、晶形成長不均勻之修正

晶形缺陷種類	修正晶形方式	原晶體	修正後晶體
碎晶附著母晶	放入蒸餾水若干時間,即可讓碎晶脫離母晶。		
某面成長太快	放置於容器靠邊緣處。		
某邊厚度較薄	放入傾斜溶液較淺處,厚度增加變快。		

(二)實驗討論

- 1、晶面角的變化,如下圖,紅色箭頭表示生長快,藍色箭頭表示生長慢,生長快的面會漸漸消失,此圖最後由八邊形變成四邊形。

我們常觀察到有晶面消失的情形,文獻中是以生長速率解釋。另探討晶體放在離容器壁不同距離觀察變化,發現在由六邊形漸變為三邊形的過程中,靠近容器壁的面長得較慢,推測在容器壁附近可能有某些因素不利於結晶,溶液在析出結晶時,其附近濃度會降低,影響溶液密度,造成局部的溶液移動,可能也是成長不均的原因。



- 2、晶形缺陷如碎晶的附著,可將晶體放入蒸餾水中,使碎晶脫離,以及將厚度太薄之面,放置傾斜溶液較淺處,因該處上方溶液較薄,蒸發速度較快,可加快該處結晶的速率使其變厚。

☆假設六之實驗結果:不同晶面與位置,生長速率不均,結果支持假設。

八、晶面角之測量

【實驗假設七】:任何晶體之晶面角,皆遵守面角守恆定律及赫夷定律。

(一)實驗結果

1、單一晶體晶面角測量

表二十七 單一晶體晶面角測量

晶體	大型晶體	中型晶體	小型晶體(顯微鏡下)
藍礬			
	65.4度	64.8度	61.7度

2、包心結晶之晶面角測量

表二十九 包心結晶之晶面角

照片	明礬包紫礬		紫礬包明礬	
	第一層	第二層	第一層	第二層
	123.0度	125.0度	130.0度	132.7度
	紫礬包明礬包紫礬	明礬包紫礬包明礬		
	132.8度	130.6度	126.5度	130.8度
	128.9度	128.9度	128.7度	

表二十八 顯微鏡下之晶面角變化

晶體	開始	中途	結束
藍礬			
	123.9度	124.4度	121.4度

(二)實驗討論

不論是大、中、小型晶體,其晶面角大約相似,測量值不同可能為誤差,因此符合赫夷定律。而晶體由小到大的成長過程中,晶面角幾乎維持不變,符合晶面角守恆定律。

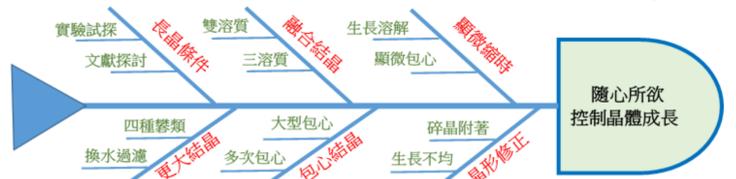
☆假設七之實驗結果:各晶面角皆遵守面角守恆定律及赫夷定律,實驗結果支持假設。

陸、結論

- 一、根據邁耶理論,將溶液控制在準安定區,利用室溫下換水,讓晶體不要太快成長,利用過濾減少雜質,避免太多晶種產生碎晶。
- 二、結晶易受天氣影響,用時間換取空間,增加長晶時間並勤於換水,除去碎晶干擾。養出最大的藍礬晶體達7.5cm,最大的包心達3.5cm。
- 三、包心成功條件是晶形相似,像明礬與紫礬的晶形可以互相包心。大型結晶完成四次包心約需一個月,層數愈多透明度愈低。小型結晶完成四次包心僅需一天,且透光度降低較少。
- 四、紫礬與明礬能進行融合結晶,因紫礬鎳離子與明礬鋁離子半徑及晶形相似,可發生離子互換,長出均質結晶。明礬、紫礬不與藍礬產生融合結晶,是因銅離子半徑、晶形與其他兩者差異太大。
- 五、晶體成長與溶解中,藍礬速率比紫礬及明礬快。晶體在水溶液中,若有其溶質,則成長較快。我們進行到顯微鏡底下四次包心成功。晶體的晶面會變大、變小甚至消失,是因為生長速率不同造成。
- 六、水質乾淨有助於包心結晶透明度、減少碎晶;通風為無風,長得較慢,晶層厚度較均勻;低溫低溼度下,成長速率較快。
- 七、晶面修正可由控制晶面生長速率進行,修正方法如下:
 - (一)碎晶附著母晶,將母晶放入蒸餾水適當時間,即可將碎晶脫離。
 - (二)某面成長太快,可將之放在靠近容器邊緣,以減慢其成長速率。
 - (三)某邊厚度太薄,可將其放入傾斜溶液中,讓厚度較薄之晶面較接近水面,可加快其生長速率。
- 八、大、中、小型晶體,晶角都符合晶面角守恆定律及赫夷定律。

柒、未來展望

美麗晶體像是寶石般令人目眩神迷!我們歷時十個月的研究,完成比別人更大的結晶,做到沒人深入研究的包心結晶,也發現明礬與紫礬的融合結晶,並利用顯微縮時做動態拍攝與數據分析,實驗後期,做初步的變因控制晶體的成長,讓晶體依照我們設定的方向成長、修正晶形,未來希望能達到隨心所欲控制晶體成長的完美境界。



捌、參考資料

- 一、蔡宇軒等(2003)。晶體聯合國的高峰會議。中華民國第四十三屆中小學展覽會。
- 二、熊若含等(2009)。「晶」益求精-探討不同聲波、溫度、濃度、離子等對其影響。中華民國第四十九屆中小學展覽會。
- 三、葉宗儒等(2011)。水滴中的「晶」靈。中華民國第五十一屆中小學展覽會。
- 四、鄭謹譯等(2013)。聲聲不息?探討各種變因對硫酸銅晶體的影響。中華民國第五十三屆中小學科學展覽會。
- 五、范升維等(2016)。晶晶計較-明礬結晶的奧秘。中華民國第五十六屆中小學科學展覽會。
- 六、吳思穎等(2017)。藍色夢幻-硫酸銅結晶的研究。中華民國第五十七屆中小學科學展覽會。
- 七、陳郁心等(2018)。藍晶閃耀~探索單結晶、雙結晶、包心結晶形成的條件。中華民國第五十八屆中小學科學展覽會。
- 八、晶體之美。台北縣98學年度國民中學科學展覽會。2020年6月9日,取自 <http://163.20.145.5/list/SchoolWorksAccreditation/teacher/dir/2/0505-%E6%99%B6%E9%AB%94%E4%B9%8B%E7%BE%8E.pdf>
- 九、離子半徑。2020年6月9日,取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%A6%BB%E5%AD%90%E5%8D%8A%E5%BE%84>
- 十、各種理論(邁耶、晶系、配位)及定律(赫夷、面角守恆)。2020年6月9日,取自 <https://zh.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:%E9%A6%96%E9%A1%B5>