

# 中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國小組 數學科

080416

分數變裝秀

學校名稱：臺南市南化區玉山國民小學

作者：  小六 王羽澤  小六 邱玄信  小六 楊雅婷	指導老師：  徐子蔚  蔡心慈
---	-----------------------------

關鍵詞：因數個數、解答組數、平方

## 摘要：

本研究是因在網站上看到的一個問題引起研究動機，我們研究  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ， $甲 \geq 乙$  的整數解，有多少組不一樣的解答，並觀察解題過程，找出解題的規律，再經過驗證後得到解決  $\frac{1}{丙} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ， $甲 \geq 乙$  的整數解，有多少組不一樣的解答，這類問題的簡單、完整的方法。

研究中還發現，求出來的解答組數和上面式子中丙的因數個數有關係：當丙為質數時，所能得到的不一樣的解答只有 2 組。

## 壹、研究動機：

平常我就喜歡瀏覽一些有關數學的網站，有一天我偶然在某個網站的討論版看到這樣一個問題「 $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ， $甲 \geq 乙$  的整數解，有多少不一樣的解答？」。

我覺得這個問題很有趣，平常我們都只有算兩個分數加起來會等於某一個分數，沒有算過像這種要把一個分數拆開變成兩個分數相加的，所以我就拿了這個題目到學校和同學一起討論，因為大家都沒接觸過像這樣的問題，所以算了好久，後來大家決定將這個問題拿去請教老師。老師看了覺得這個問題很有意思，建議我可以找幾個同學針對這個題目作個研究，看看是否能找出簡單、快速又完整的解題方法。

作品與教材單元相關性說明：數學科翰林版

第七冊第八單元 分數

第七冊第八單元 分數的加減與整數倍

第八冊第六單元 等值分數

第十一冊第六單元 比、比值與正比

數學科南一版

第九冊第二單元 因數和倍數

第九冊第四單元 擴分、約分和通分

第九冊第六單元 異分母分數的加減

第十冊第一單元 分數的乘法

## 貳、研究目的：

(一) 找出  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  的所有解答。

(二) 分析  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  的各組解答與分母(18)之間的關係。

(三) 當  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  題目的分母(18)改變時，我們的方法是否仍然可行；再更進一步歸納出解決  $\frac{1}{丙} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  這類問題的簡單、完整的方法。

(四) 探討  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  題目中，分母(18)的因數個數與解答組數之間的關聯性，並由這種關聯能夠很快得知  $\frac{1}{丙} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  有多少組不一樣的解答。

## 參、研究設備及器材：

數學課本、計算紙、數學網站

## 肆、研究過程或方法：

在之前的數學科科展作品中，曾經研究過  $\frac{1}{60} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  有多少解答，他們的結論是：

$\frac{1}{甲} = \frac{1}{乙} + \frac{1}{丙}$ ，乙 < 丙的整數解，若丁是甲的真因數，或任意兩個真因數自乘或互乘仍小於甲

的積，則乙=甲+丁，必是一組解。反過來說，若乙=甲+丁是  $\frac{1}{甲} = \frac{1}{乙} + \frac{1}{丙}$  的一組解，丁必是

甲的真因數或任意兩個真因數自乘或互乘仍小於甲的積。

這個結論，我們僅是忠於原著而完整的將它摘錄下來，因為不僅我們看不懂，連我們的老師也看不太懂！因此，我們就針對這個研究再一次的探討，並用不同的方式將它重新呈現出來。

一、初步計算  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  有多少組解答

過程：因為加法有交換律，即  $\frac{1}{甲} + \frac{1}{乙} = \frac{1}{乙} + \frac{1}{甲}$ ，所以我們在這裡計算時，規定  $甲 \geq 乙$ ，

以方便我們記錄所算出來的解答，並且避免重覆。

結果：我們找出  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  一共有 8 組解(按照甲的大小，由小至大排列，計算過程參考

草稿紀錄)

(1)  $\frac{1}{18} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$ ，所以甲=36，乙=36

(2)  $\frac{1}{18} = \frac{1}{45} + \frac{1}{30}$ ，所以甲=45，乙=30

(3)  $\frac{1}{18} = \frac{1}{54} + \frac{1}{27}$ ，所以甲=54，乙=27

(4)  $\frac{1}{18} = \frac{1}{72} + \frac{1}{24}$ ，所以甲=72，乙=24

(5)  $\frac{1}{18} = \frac{1}{99} + \frac{1}{22}$ ，所以甲=99，乙=22

(6)  $\frac{1}{18} = \frac{1}{126} + \frac{1}{21}$ ，所以甲=126，乙=21

(7)  $\frac{1}{18} = \frac{1}{180} + \frac{1}{20}$ ，所以甲=180，乙=20

(8)  $\frac{1}{18} = \frac{1}{324} + \frac{1}{19}$ ，所以甲=324，乙=19

討論：(一) 由於  $\frac{1}{乙}$  一定小於  $\frac{1}{18}$ ，所以  $\frac{1}{乙}$  最大的值為  $\frac{1}{19}$ 。

(二) 當  $\frac{1}{甲} = \frac{1}{乙}$  時， $\frac{1}{乙} = \frac{1}{36} = \frac{1}{甲}$ ，所以乙最小的值為  $\frac{1}{36}$ 。

(三) 當我們從  $\frac{1}{18} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$  算到  $\frac{1}{18} = \frac{1}{324} + \frac{1}{19}$  時，可以確定已經找到所有的解答。

二、分析  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  的分母與解答之間的關係。

過程：(一) 經由觀察與我們討論發現，18 乘上某一個數字得到甲之後，再把甲除以所乘上的數字減 1，好像就可以得到乙。

(二) 我們根據共同的發現，假設  $18 \times \square = 甲$      $甲 \div (\square - 1) = 乙$     ( $\square = 2, 3, 4 \dots$ )

來驗證我們所算出的 8 組答案(計算參考草稿紀錄)：

結果：

$$(1) 18 \times 2 = 36 \rightarrow \text{甲}, \text{乙} = 36 \div (2-1) = 36, \text{得到 } \frac{1}{18} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}, \text{所以甲} = 36, \text{乙} = 36。$$

$$(2) 18 \times 3 = 54 \rightarrow \text{甲}, \text{乙} = 54 \div (3-1) = 27, \text{得到 } \frac{1}{18} = \frac{1}{54} + \frac{1}{27}, \text{所以甲} = 54, \text{乙} = 27。$$

$$(3) 18 \times 4 = 72 \rightarrow \text{甲}, \text{乙} = 72 \div (4-1) = 24, \text{得到 } \frac{1}{18} = \frac{1}{72} + \frac{1}{24}, \text{所以甲} = 72, \text{乙} = 24。$$

$$(4) 18 \times 7 = 126 \rightarrow \text{甲}, \text{乙} = 126 \div (7-1) = 21, \text{得到 } \frac{1}{18} = \frac{1}{126} + \frac{1}{21}, \text{所以甲} = 126, \text{乙} = 21。$$

$$(5) 18 \times 10 = 180 \rightarrow \text{甲}, \text{乙} = 180 \div (10-1) = 20, \text{得到 } \frac{1}{18} = \frac{1}{180} + \frac{1}{20}, \text{所以甲} = 180, \text{乙} = 20。$$

$$(6) 18 \times 19 = 342 \rightarrow \text{甲}, \text{乙} = 342 \div (19-1) = 19, \text{得到 } \frac{1}{18} = \frac{1}{324} + \frac{1}{19}, \text{所以甲} = 342, \text{乙} = 19。$$

討論：(一) 利用這個方法，無法求得  $\frac{1}{18} = \frac{1}{45} + \frac{1}{30}$ ，所以甲=45，乙=30 的解。

(二) 利用這個方法，也無法求得  $\frac{1}{18} = \frac{1}{99} + \frac{1}{22}$ ，所以甲=99，乙=22 的解。

(三) 由於無法順利求得上述的兩組答案，所以這個方法是行不通的。

三、再次分析  $\frac{1}{18} = \frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{乙}}$  的分母與解答之間的關係。

過程：(一) 經過小組討論，我們認為可以先進行擴分工作，也就是將  $\frac{1}{18}$  的分子和分母

都先同時乘上某一個數字。

(二) 再看擴分後的分數可以拆成哪兩個分數相加。

(三) 最後檢查這兩個分數能不能同時和分母約分成「分子為 1」的分數。

結果：

$$(1) \frac{1}{18} = \frac{2}{18 \times 2} = \frac{2}{36} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$

$$(2) \frac{1}{18} = \frac{3}{18 \times 3} = \frac{3}{54} = \frac{1}{54} + \frac{2}{54} = \frac{1}{54} + \frac{1}{27}$$

$$(3) \frac{1}{18} = \frac{4}{18 \times 4} = \frac{4}{72}, \text{有兩種可能的情形：}$$

$$\textcircled{1} \frac{4}{72} = \frac{1}{72} + \frac{3}{72} = \frac{1}{72} + \frac{1}{24}$$

$$\textcircled{2} \frac{4}{72} = \frac{2}{72} + \frac{2}{72} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$

(4)  $\frac{1}{18} = \frac{5}{18 \times 5} = \frac{5}{90}$ ，有兩種可能的情形：

$$\textcircled{1} \frac{5}{90} = \frac{1}{90} + \frac{4}{90} \quad \left(\frac{4}{90} \text{ 無法約成「分子為 1」的分數}\right)$$

$$\textcircled{2} \frac{5}{90} = \frac{2}{90} + \frac{3}{90} = \frac{1}{45} + \frac{1}{30}$$

(5)  $\frac{1}{18} = \frac{7}{18 \times 7} = \frac{7}{126}$ ，有三種可能的情形：

$$\textcircled{1} \frac{7}{126} = \frac{1}{126} + \frac{6}{126} = \frac{1}{126} + \frac{1}{21}$$

$$\textcircled{2} \frac{7}{126} = \frac{2}{126} + \frac{5}{126} \quad \left(\frac{5}{126} \text{ 無法約成「分子為 1」的分數}\right)$$

$$\textcircled{3} \frac{7}{126} = \frac{3}{126} + \frac{4}{126} \quad \left(\frac{4}{126} \text{ 無法約成「分子為 1」的分數}\right)$$

(6)  $\frac{1}{18} = \frac{10}{18 \times 10} = \frac{10}{180}$ ，有五種可能的情形：

$$\textcircled{1} \frac{10}{180} = \frac{1}{180} + \frac{9}{180} = \frac{1}{180} + \frac{1}{20}$$

$$\textcircled{2} \frac{10}{180} = \frac{2}{180} + \frac{8}{180} \quad \left(\frac{8}{180} \text{ 無法約成「分子為 1」的分數}\right)$$

$$\textcircled{3} \frac{10}{180} = \frac{3}{180} + \frac{7}{180} \quad \left(\frac{7}{180} \text{ 無法約成「分子為 1」的分數}\right)$$

$$\textcircled{4} \frac{10}{180} = \frac{4}{180} + \frac{6}{180} = \frac{1}{45} + \frac{1}{30}$$

$$\textcircled{5} \frac{10}{180} = \frac{5}{180} + \frac{5}{180} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$

(7)  $\frac{1}{18} = \frac{11}{18 \times 11} = \frac{11}{198}$ ，有五種可能的情形：

$$\textcircled{1} \frac{11}{198} = \frac{1}{198} + \frac{10}{198} \quad \left(\frac{10}{198} \text{ 無法約成「分子為 1」的分數}\right)$$

$$\textcircled{2} \frac{11}{198} = \frac{2}{198} + \frac{9}{198} = \frac{1}{99} + \frac{1}{22}$$

$$\textcircled{3} \frac{11}{198} = \frac{3}{198} + \frac{8}{198} \quad \left(\frac{8}{198} \text{ 無法約成「分子為 1」的分數}\right)$$

$$\textcircled{4} \frac{11}{198} = \frac{4}{198} + \frac{7}{198} \quad \left(\frac{4}{198} \text{ 和 } \frac{7}{198} \text{ 都無法約成「分子為 1」的分數}\right)$$

- ⑤  $\frac{11}{198} = \frac{5}{198} + \frac{6}{198}$  ( $\frac{5}{198}$  無法約成「分子為 1」的分數)
- (8)  $\frac{1}{18} = \frac{19}{18 \times 19} = \frac{19}{342}$ ，有九種可能的情形：
- ①  $\frac{19}{342} = \frac{1}{342} + \frac{18}{342} = \frac{1}{342} + \frac{1}{19}$
- ②  $\frac{19}{342} = \frac{2}{342} + \frac{17}{342}$  ( $\frac{17}{342}$  無法約成「分子為 1」的分數)
- ③  $\frac{19}{342} = \frac{3}{342} + \frac{16}{342}$  ( $\frac{16}{342}$  無法約成「分子為 1」的分數)
- ④  $\frac{19}{342} = \frac{4}{342} + \frac{15}{342}$  ( $\frac{4}{342}$  和  $\frac{15}{342}$  都無法約成「分子為 1」的分數)
- ⑤  $\frac{19}{342} = \frac{5}{342} + \frac{14}{342}$  ( $\frac{5}{342}$  和  $\frac{14}{342}$  都無法約成「分子為 1」的分數)
- ⑥  $\frac{19}{342} = \frac{6}{342} + \frac{13}{342}$  ( $\frac{13}{342}$  無法約成「分子為 1」的分數)
- ⑦  $\frac{19}{342} = \frac{7}{342} + \frac{12}{342}$  ( $\frac{7}{342}$  和  $\frac{12}{342}$  都無法約成「分子為 1」的分數)
- ⑧  $\frac{19}{342} = \frac{8}{342} + \frac{11}{342}$  ( $\frac{8}{342}$  和  $\frac{11}{342}$  都無法約成「分子為 1」的分數)
- ⑨  $\frac{19}{342} = \frac{9}{342} + \frac{10}{342}$  ( $\frac{10}{342}$  無法約成「分子為 1」的分數)

討論：(一) 由五年級時學過的「因數和倍數」，我們知道當分子是分母的因數時，分子

就可以和分母互相約分變成「分子為 1」的分數。

(二) 對於  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  的解答，我們有了以下的發現：

1、當分子是「4、5、7、8、10、11、12、13、14、15、16、17」時，有時可

以和分母約成「分子為 1」的分數，有時候不行。

2、當分子是「1、2、3、6、9、18」時，不論分母是多少，都可以和分母約分

成「分子為 1」的分數；而「1、2、3、6、9、18」剛好就是 18 的因數。

(三) 要把  $\frac{1}{18}$  擴分拆成兩個分數相加時，這兩個分數的分子都必須是 18 的因數

，如此才能夠確定和分母約分成為「分子為 1」的分數。

四、由上述的分析結果找出簡單、完整的解題方法，並加以驗證

過程：(一) 如果我們在計算開始時，就先選定分子是 18 的因數，那就一定能和分母約

分成「分子為 1」的分數。

(二) 因題目是要拆成兩個分數相加，我們將 18 的因數 (1, 2, 3, 6, 9, 18) 列

出來，並且兩個數字為一組，如結果所列：

結果：(一) 我們找出下列的 21 組數。

(1) 1, 1	(2) 1, 2	(3) 1, 3	(4) 1, 6	(5) 1, 9	(6) 1, 18	(7) 2, 2
(8) 2, 3	(9) 2, 6	(10) 2, 9	(11) 2, 18	(12) 3, 3	(13) 3, 6	(14) 3, 9
(15) 3, 18	(16) 6, 6	(17) 6, 9	(18) 6, 18	(19) 9, 9	(20) 9, 18	(21) 18, 18

(二) 利用擴分的原理，我們先將上面每一組數相加的和當成分子；而分母就是

18 乘上這個和，最後再把它拆成兩個分數，並約分成「分子為 1」的分數，

就可以找到解答(計算參考草稿紀錄)。

$$(1) \frac{1}{18} = \frac{(1+1)}{18 \times (1+1)} = \frac{1+1}{36} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \quad (\text{甲}=36, \text{乙}=36)$$

$$(2) \frac{1}{18} = \frac{(1+2)}{18 \times (1+2)} = \frac{1+2}{54} = \frac{1}{54} + \frac{2}{54} = \frac{1}{54} + \frac{1}{27} \quad (\text{甲}=54, \text{乙}=27)$$

$$(3) \frac{1}{18} = \frac{(1+3)}{18 \times (1+3)} = \frac{1+3}{72} = \frac{1}{72} + \frac{3}{72} = \frac{1}{72} + \frac{1}{24} \quad (\text{甲}=72, \text{乙}=24)$$

$$(4) \frac{1}{18} = \frac{(1+6)}{18 \times (1+6)} = \frac{1+6}{126} = \frac{1}{126} + \frac{6}{126} = \frac{1}{126} + \frac{1}{21} \quad (\text{甲}=126, \text{乙}=21)$$

$$(5) \frac{1}{18} = \frac{(1+9)}{18 \times (1+9)} = \frac{1+9}{180} = \frac{1}{180} + \frac{9}{180} = \frac{1}{180} + \frac{1}{20} \quad (\text{甲}=180, \text{乙}=20)$$

$$(6) \frac{1}{18} = \frac{(1+18)}{18 \times (1+18)} = \frac{1+18}{342} = \frac{1}{342} + \frac{18}{342} = \frac{1}{342} + \frac{1}{19} \quad (\text{甲}=342, \text{乙}=19)$$

$$(7) \frac{1}{18} = \frac{(2+2)}{18 \times (2+2)} = \frac{2+2}{72} = \frac{2}{72} + \frac{2}{72} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \quad (\text{甲}=36, \text{乙}=36)$$

$$(8) \frac{1}{18} = \frac{(2+3)}{18 \times (2+3)} = \frac{2+3}{90} = \frac{2}{90} + \frac{3}{90} = \frac{1}{45} + \frac{1}{30} \quad (\text{甲}=45, \text{乙}=30)$$

$$(9) \frac{1}{18} = \frac{(2+6)}{18 \times (2+6)} = \frac{2+6}{144} = \frac{2}{144} + \frac{6}{144} = \frac{1}{72} + \frac{1}{24} \quad (\text{甲}=72, \text{乙}=24)$$



$$(10) \frac{1}{18} = \frac{(2+9)}{18 \times (2+9)} = \frac{2+9}{198} = \frac{2}{198} + \frac{9}{198} = \frac{1}{99} + \frac{1}{22} \quad (\text{甲}=99, \text{乙}=22)$$

$$(11) \frac{1}{18} = \frac{(2+18)}{18 \times (2+18)} = \frac{2+18}{360} = \frac{2}{360} + \frac{18}{360} = \frac{1}{180} + \frac{1}{20} \quad (\text{甲}=180, \text{乙}=20)$$

$$(12) \frac{1}{18} = \frac{(3+3)}{18 \times (3+3)} = \frac{3+3}{108} = \frac{3}{108} + \frac{3}{108} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \quad (\text{甲}=36, \text{乙}=36)$$

$$(13) \frac{1}{18} = \frac{(3+6)}{18 \times (3+6)} = \frac{3+6}{162} = \frac{3}{162} + \frac{6}{162} = \frac{1}{54} + \frac{1}{27} \quad (\text{甲}=54, \text{乙}=27)$$

$$(14) \frac{1}{18} = \frac{(3+9)}{18 \times (3+9)} = \frac{3+9}{216} = \frac{3}{216} + \frac{9}{216} = \frac{1}{72} + \frac{1}{24} \quad (\text{甲}=72, \text{乙}=24)$$

$$(15) \frac{1}{18} = \frac{(3+18)}{18 \times (3+18)} = \frac{3+18}{378} = \frac{3}{378} + \frac{18}{378} = \frac{1}{126} + \frac{1}{21} \quad (\text{甲}=126, \text{乙}=21)$$

$$(16) \frac{1}{18} = \frac{(6+6)}{18 \times (6+6)} = \frac{6+6}{216} = \frac{6}{216} + \frac{6}{216} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \quad (\text{甲}=36, \text{乙}=36)$$

$$(17) \frac{1}{18} = \frac{(6+9)}{18 \times (6+9)} = \frac{6+9}{270} = \frac{6}{270} + \frac{9}{270} = \frac{1}{45} + \frac{1}{30} \quad (\text{甲}=45, \text{乙}=30)$$

$$(18) \frac{1}{18} = \frac{(6+8)}{18 \times (6+8)} = \frac{6+8}{432} = \frac{6}{432} + \frac{18}{432} = \frac{1}{72} + \frac{1}{24} \quad (\text{甲}=72, \text{乙}=24)$$

$$(19) \frac{1}{18} = \frac{(9+9)}{18 \times (9+9)} = \frac{9+9}{324} = \frac{9}{324} + \frac{9}{324} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \quad (\text{甲}=36, \text{乙}=36)$$

$$(20) \frac{1}{18} = \frac{(9+18)}{18 \times (9+18)} = \frac{9+18}{486} = \frac{9}{486} + \frac{18}{486} = \frac{1}{54} + \frac{1}{27} \quad (\text{甲}=54, \text{乙}=27)$$

$$(21) \frac{1}{18} = \frac{(18+18)}{18 \times (18+18)} = \frac{18+18}{648} = \frac{18}{648} + \frac{18}{648} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \quad (\text{甲}=36, \text{乙}=36)$$

(三) 在算出的 21 組解答中，我們將相同的解答整理在一起，得到下列的結果：

組別	得到的結果	甲的答案	乙的答案	原來的算式			
一	$\frac{1}{36} + \frac{1}{36}$	36	36	$(1) \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$	$(7) \frac{2}{72} + \frac{2}{72}$	$(12) \frac{3}{108} + \frac{3}{108}$	$(16) \frac{6}{216} + \frac{6}{216}$
				$(19) \frac{9}{324} + \frac{9}{324}$	$(21) \frac{18}{648} + \frac{18}{648}$		
二	$\frac{1}{54} + \frac{1}{27}$	54	27	$(2) \frac{1}{54} + \frac{2}{54}$	$(13) \frac{3}{162} + \frac{6}{162}$	$(20) \frac{9}{486} + \frac{18}{486}$	
三	$\frac{1}{72} + \frac{1}{24}$	72	24	$(3) \frac{1}{72} + \frac{3}{72}$	$(9) \frac{2}{144} + \frac{6}{144}$	$(14) \frac{3}{216} + \frac{9}{216}$	$(18) \frac{6}{432} + \frac{18}{432}$
四	$\frac{1}{126} + \frac{1}{21}$	126	21	$(4) \frac{1}{126} + \frac{6}{126}$	$(15) \frac{3}{378} + \frac{18}{378}$		

五	$\frac{1}{180} + \frac{1}{20}$	180	20	$(5) \frac{1}{180} + \frac{9}{180}$	$(11) \frac{2}{360} + \frac{18}{360}$		
六	$\frac{1}{342} + \frac{1}{19}$	342	19	$(6) \frac{1}{342} + \frac{18}{342}$			
七	$\frac{1}{45} + \frac{1}{30}$	45	30	$(8) \frac{2}{90} + \frac{3}{90}$	$(17) \frac{6}{270} + \frac{9}{270}$		
八	$\frac{1}{99} + \frac{1}{22}$	99	22	$(10) \frac{2}{198} + \frac{9}{198}$			

討論：(一) 檢視上面的結果，正好和我們一開始算出來的 8 組解答是一樣的。

(二) 在上面解答相同的組別中，因為每一小組之間都是等值分數，所以最後得到的解答就會相同。

(三) 我們要算  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  有多少解答時，可以按照下面的步驟來算：

1、先將 18 的因數列出來。

2、把列出來的因數，兩個數字為一組。

3、將所找出的每一組數字相加的和當成分數的分子，而分母就是 18 乘上這個和，最後再把它拆成兩個分數，並約分成「分子為 1」的分數，來算出解答。

4、最後將所有算出來的解答整理一下，找出不一樣的解答共有哪些。

五、探討這八組答案相同的組別間是否存在著特別的關係。

過程：(一) 由於我們是先選定分子之後才計算出答案，所以我們先把分子再單獨整理出來。

(二) 找出答案相同組別間的關係。

結果：(一)

組別	甲的答案	乙的答案	原來算式中的分子	後面數字÷前面數字的值

一	36	36	(1) 1, 1	(2) 2, 2	(3) 3, 3	(4) 6, 6	1 倍
			(5) 9, 9	(6) 18, 18			
二	54	27	(1) 1, 2	(2) 3, 6	(3) 9, 18		2 倍
三	72	24	(1) 1, 3	(2) 2, 6	(3) 3, 9	(4) 6, 18	3 倍
四	126	21	(1) 1, 6	(2) 3, 18			6 倍
五	180	20	(1) 1, 9	(2) 2, 18			9 倍
六	342	19	(1) 1, 18				18 倍
七	45	30	(1) 2, 3	(2) 6, 9			$\frac{3}{2}$ 倍
八	99	22	(1) 2, 9				$\frac{9}{2}$ 倍

(二) 由上表發現相同解答的組別中，後面的數字  $\div$  前面的數字都會得到相同的值。

討論：(一) 利用上面的方法將分子分類後，我們更可以確定  $\frac{1}{18} = \frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{乙}}$  不一樣的解答

只有八組。

(二) 我們要算  $\frac{1}{18} = \frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{乙}}$  有多少解答時，可以按照下面的步驟來算：

- 1、先將 18 的因數列出來。
- 2、把列出來的因數，兩個數字為一組。
- 3、將所找出來的組別加以分類，只要是後面的數字  $\div$  前面的數字得到相同值者，就歸類於同一組。
- 4、得到相同值的組中，只要任選其中的一組數字相加的和當成分數的分子，而分母就是 18 乘上這個和，最後再把它拆成兩個分數，並約分成「分子為 1」的分數，來算出解答。

六、計算出  $\frac{1}{12} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  的所有解答，來驗證我們的方法是否可行。

過程：(一) 先找出 12 的因數：1, 2, 3, 4, 6, 12。

(二) 把因數每兩個數字為一組，得到下列的表格：

(1)1, 1	(2)1, 2	(3)1, 3	(4)1, 4	(5)1, 6	(6)1, 12	(7)2, 2
(8)2, 3	(9)2, 4	(10)2, 6	(11)2, 12	(12)3, 3	(13)3, 4	(14)3, 6
(15)3, 12	(16)4, 4	(17)4, 6	(18)4, 12	(19)6, 6	(20)6, 12	(21)12, 12

(三) 再將上面的 21 組數字給予分類，得到下列的表格：

組別	原來算式中的分子				後面數字÷前面數字 的值
一	(1) 1, 1	(2) 2, 2	(3) 3, 3	(4) 4, 4	1 倍
	(5) 6, 6	(6) 12, 12			
二	(1) 1, 2	(2) 2, 4	(3) 3, 6	(4) 6, 12	2 倍
三	(1) 1, 3	(9) 2, 6	(3) 4, 12		3 倍
四	(1) 1, 4	(2) 3, 12			4 倍
五	(1) 1, 6	(2) 2, 12			6 倍
六	(1) 1, 12				12 倍
七	(1) 2, 3	(2) 4, 6			$\frac{3}{2}$ 倍
八	(1) 3, 4				$\frac{4}{3}$ 倍

結果：根據上面所分類出來的八組數字，每一組我們只選第(1)小組當作分子來做計算工

作：(計算參考草稿紀錄)

$$(1) \frac{1}{12} = \frac{(1+1)}{12 \times (1+1)} = \frac{1+1}{24} = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} \quad (\text{甲}=24, \text{乙}=24)$$

$$(2) \frac{1}{12} = \frac{(1+2)}{12 \times (1+2)} = \frac{1+2}{36} = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{36} + \frac{1}{18} \quad (\text{甲}=36, \text{乙}=18)$$

$$(3) \frac{1}{12} = \frac{(1+3)}{12 \times (1+3)} = \frac{1+3}{48} = \frac{1}{48} + \frac{3}{48} = \frac{1}{48} + \frac{1}{16} \quad (\text{甲}=48, \text{乙}=16)$$

$$(4) \frac{1}{12} = \frac{(1+4)}{12 \times (1+4)} = \frac{1+4}{60} = \frac{1}{60} + \frac{4}{60} = \frac{1}{60} + \frac{1}{15} \quad (\text{甲}=60, \text{乙}=15)$$

$$(5) \frac{1}{12} = \frac{(1+6)}{12 \times (1+6)} = \frac{1+6}{84} = \frac{1}{84} + \frac{6}{84} = \frac{1}{84} + \frac{1}{14} \quad (\text{甲}=84, \text{乙}=14)$$

$$(6) \frac{1}{12} = \frac{(1+12)}{12 \times (1+12)} = \frac{1+12}{156} = \frac{1}{156} + \frac{12}{156} = \frac{1}{156} + \frac{1}{13} \quad (\text{甲}=156, \text{乙}=13)$$

$$(7) \frac{1}{12} = \frac{(2+3)}{12 \times (2+3)} = \frac{2+3}{60} = \frac{2}{60} + \frac{3}{60} = \frac{1}{30} + \frac{1}{20} \quad (\text{甲}=30, \text{乙}=20)$$

$$(8) \frac{1}{12} = \frac{(3+4)}{12 \times (3+4)} = \frac{3+4}{84} = \frac{3}{84} + \frac{4}{84} = \frac{1}{28} + \frac{1}{21} \quad (\text{甲}=28, \text{乙}=21)$$

討論：(一) 當題目的分母改變時，我們的方法依然可行。

(二) 我們要算  $\frac{1}{\text{丙}} = \frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{乙}}$  有多少解答時，可以按照下面的步驟來算：

1、先將丙的因數找出來。

2、把列出來的因數，兩個數字為一組。

3、將所找出來的組別加以分類，只要是後面的數字  $\div$  前面的數字得到相同值者，就歸類於同一組。

4、得到相同值的組中，只要任選其中的一組數字相加的和當成分數的分子，

而分母就是丙乘上這個和，最後再把它拆成兩個分數，並約分成「分子為

1」的分數，來算出解答。

七、探討  $\frac{1}{12} = \frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{乙}}$  和  $\frac{1}{18} = \frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{乙}}$  所得到的解答是否有關聯。

過程：(一) 觀察比較  $\frac{1}{12} = \frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{乙}}$  和  $\frac{1}{18} = \frac{1}{\text{甲}} + \frac{1}{\text{乙}}$  所得到的解答。

(二) 找出這二個題目彼此間的關聯性。

結果：(一) 這二個題目的解答都一樣都是八組。

(二) 12 和 18 的因數都是 6 個。

(三) 將列出的因數每兩個數字為一組時，它們的組別也都是 21 組。

討論：(一) 這二個題目相類似的地方太多，彼此之間應該有所關聯性。

(二) 我們大膽的推測「當題目的分母不同時，若它們的因數個數相同，所能得到不重覆的解答組數可能會一樣多」。

八、探討因數的個數一樣的數字，算出來的解答組數是否都會一樣。

過程：(一) 我們從 1 算到 40，把它的因數個數和解答的組數都算出來。

(二) 將所算出來的結果，整理成下面的表格(計算過程請參考原草稿紀錄)：

題目的分母	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
因數個數	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
解答組數	1	2	2	3	2	5	2	4	3	5

題目的分母	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
因數個數	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
解答組數	2	8	2	5	5	5	2	8	2	8

題目的分母	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
因數個數	4	4	2	8	3	4	4	6	2	8
解答組數	5	5	2	11	3	5	4	8	2	14

題目的分母	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
因數個數	2	6	4	4	4	9	2	4	4	8
解答組數	2	6	5	5	5	13	2	5	5	11

結果：(一) 從 1 算到 40 的數字中，我們發現 12、18、20、28、32 因數的個數都同樣是 6 個，可是 12、18、20、28 的解答組數有八組，而 32 的解答組數卻只有

六組。

(二) 可見因數的個數相同時，答案的組數不見得會相同。

討論：(一) 我們前面的推測：「當題目的分母不同時，若它們的因數個數相同，所能得到不重覆的解答組數可能會一樣多」，這是不正確的。

(二) 當題目的分母為 1 時，它的答案組數只有 1 組。

(三) 我們發現當因數的個數是 2 個時，它們的答案組數都是 2 組；這些數字有

：2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37。而這些數字都是質數。

九、再次探討因數的個數與解答組數之間是否有關聯性存在。

過程：(一) 我們再從 1 到 40 來進行探討分析的工作。

(二) 我們可以先扣除已經找到關聯性的 1 及質數 2、3、5、7、11、13、17、19

、23、29、31、37 以外，因此還剩下列 27 個數字。

結果：將所分析的結果，整理成下面的表格(計算過程請參考原草稿紀錄)：

題目的分母	4	6	8	9	10	12	14
解答組數	3	5	4	3	5	8	5
將題目的分母平方	$4^2 = 16$	$6^2 = 36$	$8^2 = 64$	$9^2 = 81$	$10^2 = 100$	$12^2 = 144$	$14^2 = 196$
分母平方後的因數個數	5	9	7	5	9	15	9

題目的分母	15	16	18	20	21	22	24
解答組數	5	5	8	8	5	5	11
將題目的分母平方	$15^2 = 225$	$16^2 = 256$	$18^2 = 324$	$20^2 = 400$	$21^2 = 441$	$22^2 = 484$	$24^2 = 576$
分母平方後的因數個數	9	9	15	15	9	9	21

題目的分母	25	26	27	28	30	32	33
-------	----	----	----	----	----	----	----

解答組數	3	5	4	8	14	6	5
將題目的分母平方	$25^2 = 625$	$26^2 = 676$	$27^2 = 729$	$28^2 = 784$	$30^2 = 900$	$32^2 = 1024$	$33^2 = 1089$
分母平方後的因數個數	5	9	7	15	27	11	9

題目的分母	34	35	36	38	39	40
解答組數	5	5	13	5	5	11
將題目的分母平方	$34^2 = 1156$	$35^2 = 1225$	$36^2 = 1296$	$38^2 = 1444$	$39^2 = 1521$	$40^2 = 1600$
分母平方後的因數個數	9	9	25	9	9	21

討論：(一) 我們發現分母平方後的因數個數與解答組數似乎存在著某種關聯性。

(二) 經過不斷的努力，我們發現將題目的分母平方之後，先找出它的因數個數

，再將它的因數個數加 1 以後的值除以 2，就是解答組數。例題如下：

$$\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$$

$$\rightarrow 18 \times 18 = 324$$

$\rightarrow 324$  的因數：1、2、3、4、6、9、12、18、27、36、54、108、162、324

$\rightarrow 324$  的因數總共有 15 個

$\rightarrow (15+1) \div 2 = 8 \rightarrow$  即為解答的組數

(三) 經過多次驗證，我們終於可以輕鬆的找出  $\frac{1}{丙} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  有多少組不一樣的解答。

伍、結論：

一、 $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ，甲  $\geq$  乙 的整數解，我們算出總共有八組解答，解答如下所列：

(甲=36, 乙=36)、(甲=45, 乙=30)、(甲=54, 乙=27)、(甲=72, 乙=24)、

(甲=99, 乙=22)、(甲=126, 乙=21)、(甲=180, 乙=20)、(甲=342, 乙=19)



二、若先把 $\frac{1}{18}$ 擴分，再拆成兩個分數相加時，這兩個分數的分子都必須是 18 的因數，如

此才能夠確定和分母約分成為「分子為 1」的分數。

三、要算出 $\frac{1}{丙} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ， $甲 \geq 乙$ ，有多少組不一樣的整數解，可以按照下面的步驟

來計算：

(一) 先將丙的因數找出來。

(二) 把列出來的因數，兩個數字為一組。

(三) 將所找出來的組別加以分類，只要是後面的數字 ÷ 前面的數字得到相同值者，就歸類於同一組。

(四) 得到相同值的組中，只要任選其中的一組數字相加的和當成分數的分子，而分母就是丙乘上這個和，最後再把它拆成兩個分數，並約分成「分子為 1」的分數，來算出解答。

四、只要將題目中的分母平方後，先找出它的因數個數，再將它的因數個數加 1 的值除以 2，就是解答的組數。

#### 陸、參考資料及其他：

一、圖書單行本：

(一)王明歡。從小愛數學。新竹：凡異。〈民 85〉。

(二)陳文章。中華民國中小學科學展覽第 26 至 30 屆優勝作品專輯國小組數學科合訂本。

台北：國立臺灣科學教育館。〈民 88〉。

二、網路資料：

(一) <http://www.tacocity.com.tw/ghsghs/> 數學王子的家

## 【評語】 080416

本作品主要在探討一個單位分數可由另外兩個單位分數相加，方法是將原來的單位分數擴分，拆成兩個新的分數，新分數的分子要為原分數分母的因數，以此方法找出所有的解。條列出的研究目的堪稱清晰，然而依據實驗數據發現解答組數的方法，雖由後續實例獲得驗證，建議可再強化數學內容的深度，以更提升本研究的價值。

# 壹. 研究動機

平常我就喜歡瀏覽一些有關數學的網站，有一天我偶然在

某個網站的討論版看到這樣一個問題「 $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ， $甲 \geq 乙$ 的整數解，有多少不一樣的解答？」。

我覺得這個問題很有趣，平常我們都只有算兩個分數加起來會等於某一個分數，沒有算過像這種要把一個分數拆開變成兩個分數相加的，所以我就拿了這個題目到學校和同學一起討論，因為大家都沒接觸過像這樣的問題，所以算了好久，後來大家決定將這個問題拿去請教老師。老師看了覺得這個問題很有意思，建議我可以找幾個同學針對這個題目作個研究，看看是否能找出簡單、快速又完整的解題方法。

## 貳. 研究目的

(一) 找出  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  的所有解答。

(二) 分析  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  的各組解答與分母 18 之間關係。

(三) 當  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  題目的分母 (18) 改變時，我們的方法是否仍然可行；再更進一步歸納出解決

$\frac{1}{丙} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  這類問題的簡單、完整的方法。

(四) 探討  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  題目中，分母 (18) 的因數個數與解答組數之間的關聯性，並由這種關聯能夠很快得知

$\frac{1}{丙} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  有多少組不一樣的解答。

## 參. 研究設備及器材

數學課本、計算紙、數學網站

## 肆. 研究過程或方法

一、初步計算  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  有多少組解答

過程：因為加法有交換律，即  $\frac{1}{甲} + \frac{1}{乙} = \frac{1}{乙} + \frac{1}{甲}$ ，

所以我們在這裡計算時，規定  $甲 \geq 乙$ ，以方便我們記錄所算出來的解答，並且避免重覆。

結果：我們找出  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  一共有 8 組解(按照甲的大小，由小至大排列，計算過程參考草稿紀錄)

$$(1) \frac{1}{18} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}, \text{ 所以 } 甲=36, 乙=36$$

$$(2) \frac{1}{18} = \frac{1}{45} + \frac{1}{30}, \text{ 所以 } 甲=45, 乙=30$$

$$(3) \frac{1}{18} = \frac{1}{54} + \frac{1}{27}, \text{ 所以 } 甲=54, 乙=27$$

$$(4) \frac{1}{18} = \frac{1}{72} + \frac{1}{24}, \text{ 所以 } 甲=72, 乙=24$$

$$(5) \frac{1}{18} = \frac{1}{99} + \frac{1}{22}, \text{ 所以 } 甲=99, 乙=22$$

$$(6) \frac{1}{18} = \frac{1}{126} + \frac{1}{21}, \text{ 所以 } 甲=126, 乙=21$$

$$(7) \frac{1}{18} = \frac{1}{180} + \frac{1}{20}, \text{ 所以 } 甲=180, 乙=20$$

$$(8) \frac{1}{18} = \frac{1}{342} + \frac{1}{19}, \text{ 所以 } 甲=342, 乙=19$$

二、分析  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  的分母與解答之間的關係。

過程：(一) 經由觀察與我們討論發現，18 乘上某一個數字得到甲之後，再把甲除以所乘上的數字減 1，好像就可以得到乙。

(二) 我們根據共同的發現，假設  $18 \times \square = 甲$   $甲 \div (\square - 1) = 乙$  ( $\square = 2, 3, 4, \dots$ ) 來驗證我們所算出的 8 組答案(計算參考草稿紀錄)：

結果：

$$(1) 18 \times 2 = 36 \rightarrow 甲, 乙 = 36 \div (2 - 1) = 36, \text{ 得到}$$

$$\frac{1}{18} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}, \text{ 所以 } 甲=36, 乙=36。$$

$$(2) 18 \times 3 = 54 \rightarrow 甲, 乙 = 54 \div (3 - 1) = 27, \text{ 得到}$$

$$\frac{1}{18} = \frac{1}{54} + \frac{1}{27}, \text{ 所以 } 甲=54, 乙=27。$$

$$(3) 18 \times 4 = 72 \rightarrow 甲, 乙 = 72 \div (4 - 1) = 24, \text{ 得到}$$

$$\frac{1}{18} = \frac{1}{72} + \frac{1}{24}, \text{ 所以 } 甲=72, 乙=24。$$

$$(4) 18 \times 7 = 126 \rightarrow 甲, 乙 = 126 \div (7 - 1) = 21, \text{ 得到}$$

$$\frac{1}{18} = \frac{1}{126} + \frac{1}{21}, \text{ 所以 } 甲=126, 乙=21。$$

$$(5) 18 \times 10 = 180 \rightarrow 甲, 乙 = 180 \div (10 - 1) = 20, \text{ 得到}$$

$$\frac{1}{18} = \frac{1}{180} + \frac{1}{20}, \text{ 所以 } 甲=180, 乙=20。$$

$$(6) 18 \times 19 = 342 \rightarrow 甲, 乙 = 342 \div (19 - 1) = 19, \text{ 得到}$$

$$\frac{1}{18} = \frac{1}{342} + \frac{1}{19}, \text{ 所以 } 甲=342, 乙=19。$$

討論：(一) 利用這個方法，無法求得  $\frac{1}{18} = \frac{1}{45} + \frac{1}{30}$ ，所以  $甲=45, 乙=30$  的解。

(二) 利用這個方法，也無法求得

$$\frac{1}{18} = \frac{1}{99} + \frac{1}{22}, \text{ 所以 } 甲=99, 乙=22 \text{ 的解。}$$

(三) 由於無法順利求得上述的兩組答案，所以這個方法是行不通的。

三、再次分析  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  的分母與解答之間的關係。

過程：(一) 經過小組討論，我們認為可以先擴分工作，

也就是將  $\frac{1}{18}$  的分子和分母都先同時乘上某一個數字。

(二) 再看擴分後的分數可以拆成哪兩個分數相加。

(三) 最後檢查這兩個分數能不能同時和分母約分成「分子為 1」的分數。

討論：(一) 由五年級時學過的「因數和倍數」，我們知道當分子是分母的因數時，分子就可以和分母互相約分變成「分子為1」的分數。

(二) 對於  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  的解答，我們有了以下的發現：

1、當分子是「4、5、7、8、10、11、12、13、14、15、16、17」時，有時可以和分母約成「分子為1」的分數，有時候不行。

2、當分子是「1、2、3、6、9、18」時，不論分母是多少，都可以和分母約分成「分子為1」的分數；而「1、2、3、6、9、18」剛好就是18的因數。

(三) 要把  $\frac{1}{18}$  擴分拆成兩個分數相加時，這兩個分數的分子都必須是18的因數，如此才能夠確定和分母約分成「分子為1」的分數。

四、由上述的分析結果找出簡單、完整的解題方法，並加以驗證

過程：(一) 如果我們在計算開始時，就先選定分子是18的因數，那就一定能和分母約分成「分子為1」的分數。

(二) 因題目是要拆成兩個分數相加，我們將18的因數(1, 2, 3, 6, 9, 18)列出來，並且兩個數字為一組，如結果所列：

結果：(一) 我們找出21組數。

(1) 1, 1	(2) 1, 2	(3) 1, 3	(4) 1, 6	(5) 1, 9
(6) 1, 18	(7) 2, 2	(8) 2, 3	(9) 2, 6	(10) 2, 9
(11) 2, 18	(12) 3, 3	(13) 3, 6	(14) 3, 9	(15) 3, 18
(16) 6, 6	(17) 6, 9	(18) 6, 18	(19) 9, 9	(20) 9, 18
(21) 18, 18				

(二) 利用擴分的原理，我們先將上面每一組數相加的和當成分子；而分母就是18乘上這個和，最後再把它拆成兩個分數，並約分成「分子為1」的分數，就可以找到解答。

$$(1) \frac{1}{18} = \frac{(1+1)}{18 \times (1+1)} = \frac{1+1}{36} = \frac{1}{36} + \frac{1}{36}$$

(甲=36, 乙=36)

$$(2) \frac{1}{18} = \frac{(1+2)}{18 \times (1+2)} = \frac{1+2}{54} = \frac{1}{54} + \frac{2}{54} = \frac{1}{54} + \frac{1}{27}$$

(甲=54, 乙=27)

(三) 在算出的21組解答中，我們將相同解答整理在一起討論：(一) 檢視上面的結果，正好和我們一開始算出來的8組解答是一樣的。

(二) 在上面解答相同的組別中，因為每一小組之間都是等值分數，所以最後得到的解答就會相同。

(三) 我們要算  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  有多少解答時，可以按照下面的步驟來算：

- 1、先將18的因數列出來。
- 2、把列出來的因數，兩個數字為一組。
- 3、將所找出的每一組數字相加的和當成分數的分子，而分母就是18乘上這個和，最後再把它拆成兩個分數，並約分成「分子為1」的分數，來算出解答。
- 4、最後將所有算出來的解答整理一下，找出不一樣的解答共有哪些。

五、探討這八組答案相同的組別間是否存在著特別的關係。

過程：(一) 由於我們是先選定分子之後才計算出答案，所以我們先把分子再單獨整理出來。

(二) 找出答案相同組別間的關係。

討論：(一) 利用上面方法將分子分類後，我們更可確定

$$\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙} \text{ 不一樣的解答只有八組。}$$

(二) 我們要算  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  有多少解答時，可以按照下面的步驟來算：

- 1、先將18的因數列出來。
- 2、把列出來的因數，兩個數字為一組。
- 3、將所找出來的組別加以分類，只要是後面的數字÷前面的數字得到相同值者，就歸類於同一組。
- 4、得到相同值的組中，只要任選其中的一組數字相加的和當成分數的分子，而分母就是18乘上這個和，最後再把它拆成兩個分數，並約分成「分子為1」的分數，來算出解答。

六、計算出  $\frac{1}{12} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  的所有解答，來驗證我們的方法是否可行。

過程：(一) 先找出12的因數：1, 2, 3, 4, 6, 12。

(二) 把因數每兩個數字為一組

(三) 再將上面的21組數字給予分類

討論：(一) 當題目的分母改變時，我們的方法依然可行。

(二) 我們要算  $\frac{1}{丙} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  有多少解答時，可以按照下面的步驟來算：

1. 先將丙的因數找出來。
2. 把列出來的因數，兩個數字為一組。
3. 將所找出來的組別加以分類，只要是後面的數字÷前面的數字得到相同值者，就歸類於同一組。
4. 得到相同值的組中，只要任選其中的一組數字相加的和當成分數的分子，而分母就是丙乘上這個和，最後再把它拆成兩個分數，並約分成「分子為1」的分數，來算出解答。

七、探討  $\frac{1}{12} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  和  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  所得到的解答是否有關聯。

過程：(一) 觀察比較  $\frac{1}{12} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  和  $\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$  所得到的解答。

(二) 找出這二個題目彼此間的關聯性。

結果：(一) 這二個题目的解答都一樣都是八組。

(二) 12和18的因數都是6個。

(三) 將列出的因數每兩個數字為一組時，它們的組別也都是21組。

討論：(一) 這二個題目相類似的太多，彼此之間應該有所關聯性。

(二) 我們大膽推測「當題目分母不同時，若它們的因數個數相同，所能得到不重覆的解答組數可能會一樣多」。

八、探討因數的個數一樣的數字，算出來解答組數是否一樣。

過程：(一) 我們從1算到40，把它的因數個數和解答的組數都算出來。

(二) 將所算出來的結果，整理成下面的表格

题目的分母	1~	2~	3~	4~	5~	6~	7~	8~	9~	10~
因數個數	1~	2~	2~	3~	2~	4~	2~	4~	3~	4~
解答組數	1~	2~	2~	3~	2~	5~	2~	4~	3~	5~

題目的分母	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
因數個數	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
解答組數	2	8	2	5	5	5	2	8	2	8

題目的分母	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
因數個數	4	4	2	8	3	4	4	6	2	8
解答組數	5	5	2	11	3	5	4	8	2	14

題目的分母	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
因數個數	2	6	4	4	4	9	2	4	4	8
解答組數	2	6	5	5	5	13	2	5	5	11

結果：(一) 從 1 算到 40 的數字中，我們發現 12、18、20、28、32 因數的個數都同樣是 6 個，可是 12、18、20、28 的解答組數有八組，而 32 的解答組數卻只有六組。

(二) 可見因數的個數相同時，答案的組數不見得會相同。

討論：(一) 我們前面的推測：「當題目的分母不同時，若它們的因數個數相同，所能得到不重覆的解答組數可能會一樣多」，這是不正確的。

(二) 當題目的分母為 1 時，它的答案組數只有 1 組。

(三) 我們發現當因數的個數是 2 個時，它們的答案組數都是 2 組；這些數字有：2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37。而這些數字都是質數。

九、再次探討因數個數與解答組數之間是否有關聯性存在。

過程：(一) 我們再從 1 到 40 來進行探討分析的工作。

(二) 我們可以先扣除已經找到關聯性的 1 及質數 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37 以外，因此還剩下列 27 個數字。

結果：將所分析的結果，整理成下面的表格

題目的分母	4	6	8	9	10	12	14
解答組數	3	5	4	3	5	8	5
將題目的分母平方	$4^2=16$	$6^2=36$	$8^2=64$	$9^2=81$	$10^2=100$	$12^2=144$	$14^2=196$
分母平方後的因數個數	5	9	7	5	9	15	9

題目的分母	15	16	18	20	21	22	24
解答組數	5	5	8	8	5	5	11
將題目的分母平方	$15^2=225$	$16^2=256$	$18^2=324$	$20^2=400$	$21^2=441$	$22^2=484$	$24^2=576$
分母平方後的因數個數	9	9	15	15	9	9	21

題目的分母	25	26	27	28	30	32	33
解答組數	3	5	4	8	14	6	5
將題目的分母平方	$25^2=625$	$26^2=676$	$27^2=729$	$28^2=784$	$30^2=900$	$32^2=1024$	$33^2=1089$
分母平方後的因數個數	5	9	7	15	27	11	9

題目的分母	34	35	36	38	39	40
解答組數	5	5	13	5	5	11
將題目的分母平方	$34^2=1156$	$35^2=1225$	$36^2=1296$	$38^2=1444$	$39^2=1521$	$40^2=1600$
分母平方後的因數個數	9	9	25	9	9	21

討論：(一) 我們發現分母平方後的因數個數與解答組數似乎存在著某種關聯性。

(二) 經過不斷的努力，我們發現將題目的分母平方之後，先找出它的因數個數，再將它的因數個數加 1 以後的值除以 2，就是解答組數。例題如下：

$$\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$$

$$\rightarrow 18 \times 18 = 324$$

$\rightarrow 324$  的因數：1、2、3、4、6、9、12、18、27、36、54、108、162、324

$\rightarrow 324$  的因數總共有 15 個

$\rightarrow (15+1) \div 2 = 8 \rightarrow$  即為解答的組數

(三) 經過多次驗證，我們終於可以輕鬆的找出

$$\frac{1}{丙} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$$

有多少組不一樣的解答。

## 伍、結論

$$一、\frac{1}{18} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$$

， $甲 \geq 乙$  的整數解，我們算出總共有八組解答，解答如下所列：(甲=36, 乙=36)、(甲=45, 乙=30)、(甲=54, 乙=27)、(甲=72, 乙=24)、(甲=99, 乙=22)、(甲=126, 乙=21)、(甲=180, 乙=20)、(甲=342, 乙=19)

$$\frac{1}{丙}$$

二、若先把 18 擴分，再拆成兩個分數相加時，這兩個分數的分子都必須是 18 的因數，如此才能夠確定和分母約分成為「分子為 1」的分數。

$$\frac{1}{丙} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$$

三、要算出  $\frac{1}{丙} = \frac{1}{甲} + \frac{1}{乙}$ ， $甲 \geq 乙$ ，有多少組不一樣的整數解，可以按照下面的步驟

來計算：

(一) 先將丙的因數找出來。

(二) 把列出來的因數，兩個數字為一組。

(三) 將所找出來的組別加以分類，只要是後面的數字：前面的數字得到相同值者，就歸類於同一組。

(四) 得到相同值的組中，只要任選其中的一組數字相加的和當成分數的分子，而分母就是丙乘上這個和，最後再把它拆成兩個分數，並約分成「分子為 1 的分數，來算出解答。

四、只要將題目中的分母平方後，先找出它的因數個數，再將它的因數個數加 1 的值除以 2，就是解答的組數。