中華民國第59屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第二名

080415

高者多勞

學校名稱：新北市三峽區龍埔國民小學

作者：	指導老師：
小五　古禮安 小五　董宣樂	龔凡凱

關鍵詞：最佳化問題、排列、構造

摘要

我們用簡潔的方法、巧妙借用益智遊戲的規則，解決一道月刊數學題目的一般化情形，得到豐富的成果。

「有 9 位足球隊員，身高兩兩不同，排成 3×3 的隊形，命橫列最高的 2 人舉手、縱行最高的 2 人舉手，兩次都有舉手的人去收拾場地。」

本作品探討上述題目隊形的一般化：隊員們分別排成任意長方形和長方體，得到下列結論：

一、將身高由低到高編號為：1、2、3、…，得到「必定收場地」的人之編號與「必不用收場地」的人之編號；

二、承一，若編號 x 不在必收或必不收之中，則可排出使 x 號學生收場地或不收場地的隊形；

三、收場地人數的最大值與最小值；

四、若人數 p 介於收場地人數最大值與最小值之間，均可排出恰為 p 人收場地的隊形。

壹、研究動機

我們參加學校的數學社團，老師常提供一些課外數學問題讓我們腦力激盪，其中，我們覺得問題 2.1 很有趣，求出答案後，在好奇心驅使之下，想知道若隊形為長方形或立體時，解答會是如何，因而著手研究。

貳、主要研究問題

取自《科學研習月刊》第 57 卷第 2 期：

問題 2.1(本研究的問題來源). 班上有九個好友組成足球隊，身高兩兩不同，比賽完排成 3×3 的隊形聽教練指示。教練說：「每一橫列最高的兩人舉手！」於是共有六個人舉手了。教練又說：「手放下，現在每一直排最高的兩人舉手！」於是又有六個人舉手了。於是教練說：「手放下，兩次都有舉到手的人去收場地，其他的解散。」

子題 2.1.1. 有沒有可能剛好六個人去收場地？

子題 2.1.2. 小定的身高恰好居於這九個人的中間（即第五高），有沒有可能他不用去收場

(地)?(本作品作者按：原題敘述沒有「地」這個字)

子題 2.1.1 的解答(可以恰好六個人收場地).

說明. 由於這九個隊員的身高兩兩不同，故可以由矮至高依序編號為：1、2、3、…、9，接著參見圖 1。

9	8	1
2	7	6
5	3	4

圖 1. 六個人收場地的隊形排列，收場地的編號以紅色標示

由圖 1 的排列可知，符合題目 2.1 的條件下，可以恰有六個人收場地。

子題 2.1.2 的解答(第五高的人不用收場地的排列).

1	**9**	2
7	5	**6**
3	**8**	4

圖 2. 第五高的小定不用收場地的隊形排列

說明. 由圖 2 的排列可知，5 的同列有 9 和 8；同行有 7 和 6，這些編號都比 5 高，故第五高的小定可以不用收場地。

補充說明 2.2(解答非唯一). 圖 1 和圖 2 並非為子題 2.1.1 答案和子題 2.1.2 答案唯一的排列方式。

我們從課本學到：「正方形是長方形的的特殊化」，所以將問題 2.1 一般化便成了問題 2.3，如下：

問題 2.3(問題 2.1 的一般化). 班上有 A×B 個好友組成足球隊，身高兩兩不同，比賽完排成 A 行 B 列的隊形聽教練指示。每一橫列最高的 a 人舉手，每一直排最高的 b 人舉手，兩次都有舉手的人去收場地，其中 0＜a≦A－1，0＜b≦B－1。問：

子題 2.3.1. 將學生依身高由矮至高編號 1、2、3、…、A×B，求出必收場地的編號、必不用

收場地的編號。

子題 2.3.2. 承子題 2.3.1，若編號 x 為可能會收也可能不收場地的編號，試分別排出使 x 收場地的隊形及使 x 不收場地的隊形。

子題 2.3.3. 收場地人數的最大值。

子題 2.3.4. 收場地人數的最小值。

子題 2.2.5. 若人數 p 介於收場地最大值與最小值之間，排出恰為 p 人收場地的隊形。

接著我們發揮創意，想像隊員們可以疊羅漢、或分別站在 1 樓、2 樓、3 樓、…等，就能排出立體的隊形，意即除了「長」和「寬」這兩個方向外，還多了一個方向—「高」，如此一來，便將問題 2.3 延伸為問題 2.4：

問題 2.4(問題 2.3 的立體版). 班上有 A×B×H 個好友組成足球隊，身高兩兩不同，比賽完排成 A×B×H 的隊形聽教練指示。每一橫列最高的 a 人舉手、每一直排最高的 b 人舉手、每一縱高的方向中最高的 h 位舉手，三次都有舉手的人去收場地，其中 0＜a≦A－1，0＜b≦B－1，0＜h≦H－1，同樣探索子題 2.3.1─2.3.5。

參、研究目的

將問題 2.1 一般化，我們想研究隊員排成長方形、立體的隊形的

一、將學生依身高由矮至高編號 1、2、3、…，求出「必收場地」的編號、「必不收場地」的編號；

二、承一，若編號 x 為可能會收也可能不收場地的編號，分別排出使 x 收場地的隊形及使 x 不收場地的隊形。

三、收場地人數的最大值；

四、收場地人數的最小值；

五、若人數 p 介於最多人數與最少人數之間，排出恰為 p 人收場地的隊形。

肆、研究工具

一、方格紙、計算紙、筆。

伍、研究過程與討論

一、研究過程的呈現方式

由於篇幅有限，所以研究過程與討論的呈現方式為「**藉由例子說明我們發現的規律，以及給出一般化的說法**」，計算過程則列於實驗日誌中。

二、符號

符號 6.1. 「$A_a \times B_b$」表示 A×B 位隊員排成每列 A 人、每行 B 人—即 A 行 B 列的隊形，a 表示每列較高的 a 個人舉手；b 表示每行較高的 b 個人舉手，其中 $0 < a \leqq A-1$，$0 < b \leqq B-1$。

例子 6.2(符號 6.1 的舉例說明).

$$3_2 \times 4_3。 \tag{1}$$

足碼表示較高舉手人數，例如(1)表示 12 位隊員排成 3 行 4 列。每列較高的 2 人舉手；每行較高的 3 人舉手(見圖 3)。

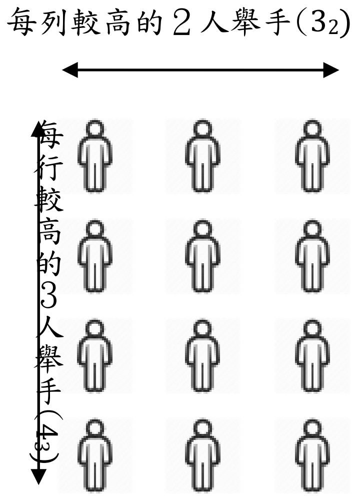


圖 3. 隊員排成 $3_2 \times 4_3$ 的示意圖

符號 6.3. 「$A_a \times B_b \times H_h$」表示 A×B×H 位隊員排成每列 A 人、每行 B 人、每縱高 H 人—即 A 行 B 列 H 層的隊形，a 表示每列較高的 a 個人舉手；b 表示每行較高的 b 個人舉手；h 表示每縱高較高的 h 個人舉手，其中 $0 < a \leqq A-1$，$0 < b \leqq B-1$，$0 < h \leqq H-1$。

例子 6.4(符號 6.3 的舉例說明**).**

$$3_2 \times 4_3 \times 5_4 \tag{2}$$

指 60 人排成 3×4×5 的長方體(見圖 4)，足碼表示較高舉手人數—每列較高的 2 人舉手、每

行較高的 3 人舉手、每縱高較高的 4 人舉手。

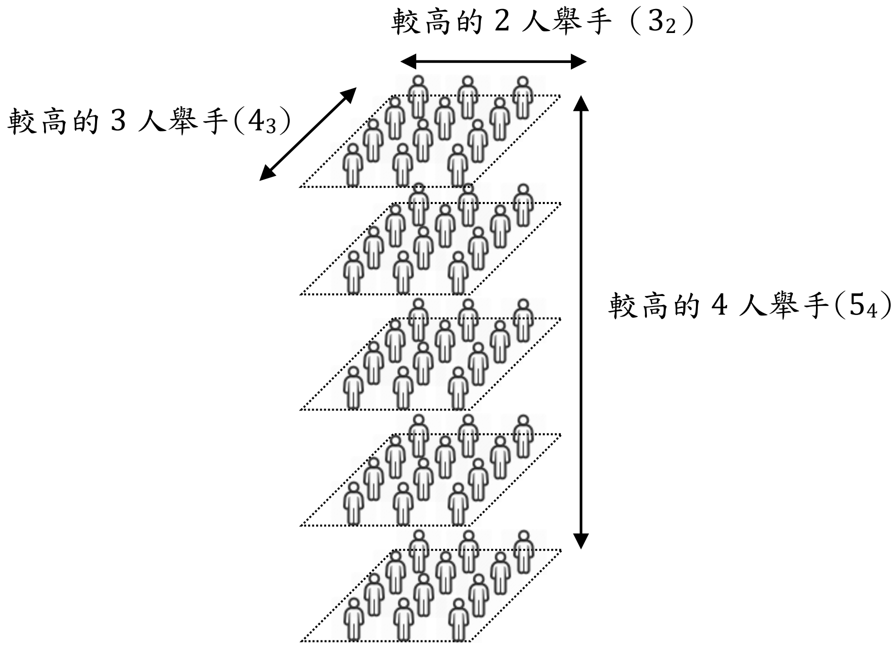


圖 4. 隊員排成 $3_2\times4_3\times5_4$ 的示意圖

符號 6.5(收場地人數最大值). 「$M(A_a\times B_b)$」記作給定 $A_a\times B_b$，收場地人數的最大值；「$M(A_a\times B_b\times H_h)$」記作給定 $A_a\times B_b\times H_h$，收場地人數的最大值。

符號 6.6(收場地人數最小值). 「$m(A_a\times B_b)$」記作給定 $A_a\times B_b$，收場地人數的最小值；「$m(A_a\times B_b\times H_h)$」記作給定 $A_a\times B_b\times H_h$，收場地人數的最小值。

三、平面的隊形

研究過程依序呈現：必收場地的編號與必不收場地的編號、排出指定編號收場地與否的隊形、收場地人數最大值和最小值、排出指定人數收場地的隊形。

（一）必收場地與必不收場地的編號

1. 觀察例子. 觀察

$$5_3\times7_4。\tag{3}$$

35 位球員排成每列 5 人、每行 7 人的長方形隊形，橫列較高的 3 人舉手、直行較高的 4 人舉手。依身高由矮至高編號 1、2、3、…、35。

根據條件，對每個編號而言，若比其同列中的 3 個人矮、或比其同行中的 4 個人矮便不用收場地；換句話說，不可能比

$$\min\{3,4\}=3$$

個人矮的球員，必定要收場地，也就是身高的前三名，得到：

$$\text{必收場地的編號：}35\text{、}34\text{、}33\text{。} \tag{4}$$

根據條件，對每個編號而言，至少要比同列的 5－3＝2 個人高、且至少要比同行 7－4＝3 個人高才有可能收場地，也就是最矮的

$$(5-3)+(7-4)=2+3=5$$

個人不可能收場地，得到：

$$\text{必不收場地的編號：}1\text{、}2\text{、}3\text{、}4\text{、}5\text{。} \tag{5}$$

補充說明 6.7. 由(4)和(5)可推測：介於 6～32 間編號的人有可能收或有可能不收場地。

2. 一般化. A×B 位球員排成每列 A 人，每行 B 人的長方形隊形，橫列較高的 a 人舉手，直行較高的 b 人舉手，依身高由矮至高編號 1、2、3、⋯、A×B。
根據條件，對每個編號而言，若比同列的 a 個人矮或比同行的 b 個人矮便不用收場地。換句話說，不可能比 min{a,b}個人矮的球員，必定要收場地，也就是身高的前 min{a,b}名，得到：

結果 6.8. 給定 $A_a \times B_b$，必收場地的編號為

$$A\times B\text{、}A\times B-1\text{、}A\times B-2\text{、}\cdots\text{、}A\times B-\min\{a,b\}+1\text{。} \tag{6}$$

根據條件，對每個編號而言，每列至少要比 A－a 個人高、每行至少要比 B－b 個人高才有可能收場地，也就是最矮的

$$(A-a)+(B-b)=A+B-(a+b)$$

個人不可能收場地，得到：

結果 6.9. 給定 $A_a \times B_b$，必不用收場地的編號為

$$1\text{、}2\text{、}3\text{、}\cdots\text{、}A+B-(a+b)\text{。} \tag{7}$$

（二)**指定編號收場地與不收場地**

1. 觀察例子. 觀察 $5_3\times7_4$，取編號 10，根據補充說明 6.7，由於 6≦10≦32，推測 10 號隊員可能收場地也可能不收場地；例子 6.10 和例子 6.11 分別給出確定的結果。

例子 6.10(使 $5_3\times7_4$ 的 10 號收場地的排列). 在 10 同列排入 1、2，且在同行排入 3、4、5，必使得 10 要收場地，見圖 5，注意到

$$2=5-3，5=(5+7)-(3+4)。\tag{8}$$

10	1	2		
3				
4				
5				

圖 5. 給定 $5_3\times7_4$，使編號 10 收場地的排法

例子 6.11(使 $5_3\times7_4$ 的 10 號不收場地的排列). 在 10 同列排入 33、34、35，使得 10 在橫列方向沒有比 3 個人高；或在 10 同行排入 32、33、34、35，使得 10 在直行方向沒有比 4 個人高，見圖 6，因而 10 不用收場地。注意到

$$33=35-3+1，32=35-4+1。\tag{9}$$

3 和 4 分別是列和行較高舉手的人數。

10	33	34	35	

甲. 在 10 的同列放入前 3 大的數

10				
32				
33				
34				
35				

乙. 在 10 的同行放入前 4 大的數

圖 6. 給定 $5_3\times7_4$，使編號 10 不收場地的排法

2. 一般化. 藉由例子 6.10 和例子 6.11 的協助，給出使指定編號收場地與不收場地的一般化方法。

方法 6.12(使得指定編號 x 收場地的方法). 若 $A+B-(a+b)+1 \leqq x \leqq A\times B-\min\{a,b\}$，且在 x 的同列排入 1、2、…、$A-a$，且在同行排入 $A-a+1$、$A-a+2$、…、$A+B-(a+b)$。

方法 6.13(使得指定編號 x 不收場地的方法). 承方法 6.12 的條件，在與 x 同列排入 $A\times B$、$A\times B-1$、$A\times B-2$、…、$A\times B-a+1$，或在與 x 同行排入 $A\times B$、$A\times B-1$、、$A\times B-2$、…、$A\times B-b+1$。

(三)**收場地人數最大值**

1. 收場地人數最大值的理想值. 觀察

$$11_8\times 7_5 \tag{10}$$

根據題目給定的條件，橫列較高的 8 人舉手，表示每列最多有 8 個人收場地，共 7 列，合計收場地人數至多有

$$8\times 7=56。\tag{11}$$

直行較高的 5 個人舉手，表示每行最多有 5 個人收場地，共 11 行，合計人數至多有

$$11\times 5=55。\tag{12}$$

當有 2 個理想值出現，較大的那個值不可能排得出來，因為兩者都是在最理想的情況下求出的理想值，分別已達到最大可能，若(11)的 56 人是實際最大值，表示(12)的 55 人不是；若真的不是，推得至少有一行有 6 個人收場地，與給定條件矛盾！

用數學符號表示即 $11_8\times 7_5$ 有收場地人數最大值理想值為

$$M(11_8\times 7_5)\leqq\min\{11\times 5，8\times 7\}=\min\{55，56\}=55。\tag{13}$$

用一般化的符號表示，就是

$$M(A_a\times B_b)\leqq\min\{A\times b，B\times a\}。\tag{14}$$

如果能排出 $A_a\times B_b$ 恰有 $\min\{A\times b，B\times a\}$位隊員收場地，就得到了收場地人數的最大值，事實上我們真的排得出來，見次頁。

2. 恰有 min{A×b，B×a}人收場地的具體排法．以排出 $11_8 \times 7_5$ 收場地人數最大值 55 人的過程說明。見圖 7-甲，每格的帶圈序號標示置放收場地編號的「位置」以及我們找位置的順序。當填入編號時，就從最大的 77 開始，由大至小，依圖 7–甲安排的順序，填入有號碼的格子中，填完即如圖 7–乙，其餘空白的格子可任意填入 1～22。

①	⑧	⑮		㉒	㉙		㊱	㊸	㊿	
②	⑨		⑯	㉓	㉚		㊲	㊹		(51)
③	⑩		⑰	㉔		㉛	㊳	㊺		(52)
④		⑪	⑱	㉕		㉜	㊴		㊻	(53)
⑤		⑫	⑲		㉖	㉝	㊵		㊼	(54)
	⑥	⑬	⑳		㉗	㉞		㊶	㊽	(55)
	⑦	⑭		㉑	㉘	㉟		㊷	㊾	

甲．填入編號的先後次序及位置

77	70	63		56	49		42	35	28	
76	69		62	55	48		41	34		27
75	68		61	54		47	40	33		26
74		67	60	53		46	39		32	25
73		66	59		52	45	38		31	24
	72	65	58		51	44		37	30	23
	71	64		57	50	43		36	29	

乙．在圖 7–甲標示的位置由大至小填入編號

圖 7．$11_8 \times 7_5$ 收場地最多人數—55 人的具體排法

補充說明 6.14(圖 7-甲的靈感來源)．圖 7–甲的排法靈感取自四年級數學課本，求有十字架形步道的長方形公園面積而來，空格如同步道一樣。

方法 6.15(一般化構造長方形收場地最多人數的方法)．不失一般性，設 $M(A_a \times B_b) = A \times b$。選取收場地編號位置的方法為：自第 1 行第 1 列起直向連續 b 格—b 即直行需舉手的人數，次行從第 b+1 列連續 b 格，若剩下不足 b 格則從同一行上方第一列起繼續填，保持每一行被選到 b 格，接著次行接續下一列直向連續 b 格，一直到最後一行為止。然後由大至小依序填入編號，其餘未標記的格子可任意填入剩下來的編號。

一般化說明方法 6.15 符合問題 2.3 的規定．設 $M(A_a \times B_b) = A \times b$，依方法 6.15 安排如圖 8，將收場地的位置用藍底標示，每一行藍色部份代表的收場地編號數量為 b。

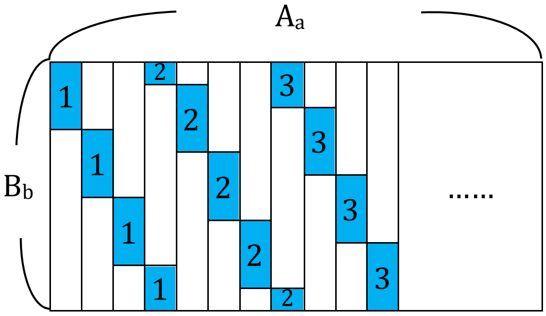


圖 8. 收場地的格子用藍底標示，號碼表示當舉人數向左集中時，同編號的藍色部份會在同一行。

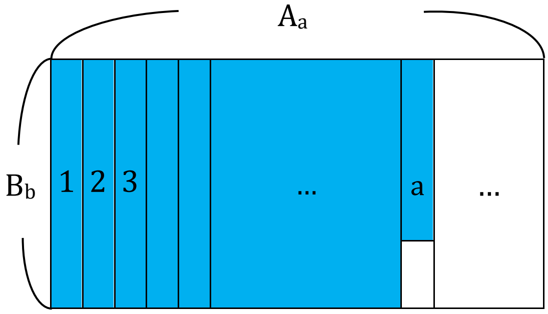


圖 9. 移動圖 8 中收場地的編號(藍色格子)水平向左集中

顯然每一行的舉手人數已符合題目規定，因為是我們刻意安排的結果。接著看橫向，若將所有收場地人數向左移，即成為圖 9(這裡參考了電玩遊戲俄羅斯方塊的連塊貼合概念)，由於我們構造的安排方式，使得舉手人數全部向左移時會填滿每一行，注意藍色部份的最後一行不一定填滿，例如 $11_8 \times 7_5$ 就是如此。由於藍色部份收場地人數＝$A \times b \leqq B \times a$，表示圖 9 藍色的每一條列長$\leq a$，故證明了我們構造的方式符合題目條件設定。

補充說明 6.16. 方法 6.15 經過一些演變，我們嘗試二、三種策略後才得到。

根據方法 6.15，表示我們排得出恰有 $\min\{A \times b, B \times a\}$人收場地，於是有

結果 6.17. $M(A_a \times B_b) = \min\{A \times b, B \times a\}$。

(四)最少人數

1. 觀察數據

(1) $3_2 \times 3_2$、$4_3 \times 4_3$、$5_4 \times 5_4$ 收場地人數的最小值. 注意到編號 1 號不會比任何人高，故完全不會舉手。每列至少有 2 人舉手，共 3 列；每行有 2 人舉手，共 3 行，合計至少有

$$2 \times 3 + 2 \times 3 = 12$$

人次舉手，由於 1 號不舉手，故至多有 8 人舉手，表示至少有

$$12 - 8 = 4$$

個人次舉了兩次手，顯然這 4 個人分別在列和行都是較高的那一群才舉兩次手，因而推得至少有 4 人收場地。實際上我們也排得出恰有 4 人收場地，如圖 10：

9	8	3
7	6	2
5	4	1

圖 10. $3_2 \times 3_2$ 收場地人數最小值 4 人的排法，收場地的編號為藍底的部份

也就得到

$$m(3_2 \times 3_2) = 2 \times 2 = 4。 \tag{15}$$

同求 $3_2 \times 3_2$ 收場地人數最小值的算法，分別求出「$4_3 \times 4_3$」「$5_4 \times 5_4$」收場地人數最小值的理想值為「9」和「16」，而恰為 9 人和 16 人收場地的隊形能排得出來，見圖 11 和圖 12。

16	15	14	4
13	12	11	3
10	9	8	2
7	6	5	1

圖 11. $4_3 \times 4_3$ 恰有 9 人收場地的排法，收場地的編號為藍底的部份

25	24	23	22	5
21	20	19	18	4
17	16	15	14	3
13	12	11	10	2
9	8	7	6	1

圖 12. $5_4 \times 5_4$ 恰有 16 人收場地的排法，收場地的編號為藍底的部份

也就得到

$$m\,(4_3 \times 4_3) = 3 \times 3 = 9。 \tag{16}$$

$$m\,(5_4 \times 5_4) = 4 \times 4 = 16。 \tag{17}$$

(2) $4_3 \times 3_2$、$5_4 \times 4_3$、$6_5 \times 5_4$ 收場地人數的最小值. 注意到編號 1 號不會比任何人高，故完全不會舉手。每列有 3 人舉手，共 3 列；每行有 2 人舉手，共 4 行，合計至少有 $3 \times 3+4 \times 2 = 17$ 人次舉手，由於 1 號不舉手，故至多有 $12-1=11$ 人舉手，推得至少有

$$17-11=6$$

個人次舉了兩次手，顯然這 6 個人分別在列和行都是較高的那一群才舉兩次手，因而推得至少有 6 人收場地。實際上我們排得出恰有 6 人收場地(見圖 13)，故得到

$$m(4_3 \times 3_2) = 3 \times 2 = 6。 \tag{18}$$

12	11	10	3
9	8	7	2
6	5	4	1

圖 13. $4_3 \times 3_2$ 收場地人數最小值 6 人的排法，收場地的編號為藍底的部份

同求 $4_3 \times 3_2$ 收場地人數最小值的算法，分別求出「$5_4 \times 4_3$」「$6_5 \times 5_4$」收場地人數最小值

的理想值為「12」和「20」，而恰為 12 人和 20 人收場地的隊形能排得出來，見圖 14 和圖 15。

20	19	18	17	4
16	15	14	13	3
12	11	10	9	2
8	7	6	5	1

圖 14. $5_4 \times 4_3$ 恰有 12 人收場地的排法，收場地的編號為藍底的部份

30	29	28	27	26	5
25	24	23	22	21	4
20	19	18	17	16	3
15	14	13	12	11	2
10	9	8	7	6	1

圖 15. $6_5 \times 5_4$ 恰有 20 人收場地的排法，收場地的編號為藍底的部份

也就得到

$$m(5_4 \times 4_3) = 4 \times 3 = 12。 \tag{19}$$

$$m(6_5 \times 5_4) = 5 \times 4 = 20。 \tag{20}$$

2. 推測長方形收場地人數最小值的規律.

(1)推測收場地人數最小值. 我們試排一些例子，見圖 16 和圖 17。

16	14	8	7
15	13	6	5
12	11	4	3
10	9	2	1

甲. $m(4_2 \times 4_2) \leqq 2 \times 2 = 4$

16	15	8	7
13	12	6	5
14	11	4	3
10	9	2	1

乙. $m(4_2 \times 4_3) \leqq 2 \times 3 = 6$

25	22	19	10	9
24	21	18	8	7
23	20	17	6	5
16	15	14	4	2
13	12	11	3	1

丙. $m(5_3 \times 5_3) \leqq 3 \times 3 = 9$

25	24	23	22	5
21	20	19	18	4
17	16	15	14	3
13	12	11	10	2
9	8	7	6	1

丁. $m(5_4 \times 5_2) \leqq 4 \times 2 = 8$

圖 16. 4 個試算收場地人數最小值的理想值上界

20	19	18	17	4
16	15	14	13	3
12	11	10	9	2
8	7	6	5	1

甲. $m(5_4\times 4_3)\leqq 4\times 3=12$

24	23	22	21	8	7
20	19	18	17	6	5
16	15	14	13	4	3
12	11	10	9	2	1

乙. $m(6_4\times 4_2)\leqq 4\times 2=8$

35	34	33	32	15	14	13
31	30	29	28	12	11	10
27	26	25	24	9	8	7
23	22	21	20	6	5	4
19	18	17	16	3	2	1

丙. $m(7_4\times 5_3)\leqq 4\times 3=12$

圖 17. 3 個長方形隊形試算收場地人數最小值的理想值上界

從(15)─(20)、圖 10—圖 17 來看，我們會猜測收場地人數最小值就是<u>舉手人數乘積</u>。

(2)理想值算法推不出舉手人數乘積. 可惜用求理想值的方法並非總能證實前述的猜測，見例子 6.18：

例子 6.18(最小值理想值算法得不到舉手人數乘積). 試用理想值算法求 $m(4_2\times 4_2)$。注意到編號 1 號和 2 號不會比 2 個人高，故這兩號不舉手。每列至少有 2 個人舉手，共 4 列；每行至少有 2 個人舉手，共 4 行，合計至少有 $4\times 2+4\times 2=16$ 人次舉手。由於編號 1 和 2 號未曾舉手，故至多有 $16-2=14$ 人舉手，而 $16-14=2$，表示最小值的理想情形為 2 人收場地，由於 $2<2\times 2$，故用理想值求最小值的的方法推不出 $m(4_2\times 4_2)=2\times 2$。

3. $m(A_a\times B_b)=a\times b$. 以下改採另一種想法去證實收場地人數最小值即為舉手人數乘積。

結果 6.19. $m(A_a\times B_b)=a\times b$。

說明. 我們將說明無論如何安排編號，至少有 $a\times b$ 位隊員收場地。注意到編號放置的順序不影響收場地人數，重點是**位置**，故可看作編號由大至小，依序安排至 $A\times B$ 的各個位置。

(1)主列和主行. 在排入編號的過程中，規定若某一列恰好排入 a 個編號或某一行恰好有 b 個編號時，稱形成一條「**主列**」或「**主行**」。

(2)「賓果遊戲」連線的思維. 當主列或主行出現，這條列或行上的 a 個或 b 個編號之中：如果有一些號碼的<u>垂直方向</u>還沒形成主行或主列，則這些編號必收場地，因為在垂直方向，這些編號屬於前 b 大或前 a 大，而接下來放入的編號值漸小，不會高過它們。

(3)形成 8 條主行後必有 $a\times b$ 個收場地的編號. <u>以 $11_8\times 7_5$ 為例</u>，以下要說明若先形成 8 條主行或 5 條主列，則至少出現 $8\times 5=40$ 個收場地的編號，現在不妨設先形成 8 條主行。

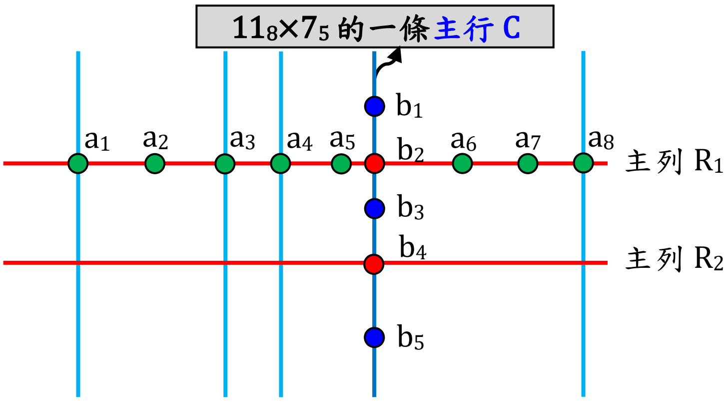


圖 18. **主行 C** 為形成前 8 條主行中的一條，它上面的前 5 大編號恰分成兩種情形：**未在某主列上**(如 b_1、b_3、b_5)；**已在某主列上**(如 b_2、b_4)；若 b_2 不屬於主列 R_1 上前 8 大的編號時，則用 a_1、a_2、…、a_8 表示前 R_1 上 8 大的編號，並設 a_1、a_3、a_4、a_8 各已在某主行上。

以下針對恰形成 8 條主行前的情形：設 b_1、b_3、b_5 不在某主列上，故此 3 個編號必收場地；設 b_2、b_4 分別在主列 R_1 和主列 R_2 上，先討論 b_2，分兩種情況討論：

情況 1. 若 b_2 在主列 R_1 的前 8 大編號中，則 b_2 要收場地；

情況 2. 若 b_2 不在主列 R_1 的前 8 大編號中，則 b_2 不收場地。注意到條件為恰有 8 條主行出現之前，故在形成主行 C 之前，最多已有 7 條主行，主列 R_1 的前 8 大編號中最多有 7 個分別在某主行上，故主列 R_1 上前 8 大編號中一定有不在主行上的，見圖 18，設 a_2、a_5、a_6、a_7 不在某主行上，這 4 個編號必收場地，**取 a_2、a_5、a_6、a_7 的最大值**—記作 **b'_2**，作為 b_2 的代表。

同理，也可在主列 R_2 上找到一個收場地的編號 **b'_4** 作為 b_4 的代表，加上已收場地的 b_1、b_3、b_5，推得主行 C 至少代表 5 個收場地的編號。

從情況 2 的討論得知：對於每一個屬於主行上前 5 大但未收場地的編號 y，它所在的橫列，總有一個收場地編號 y' 可代表且只代表 y，因而當出現前 8 條主行時，每條主行可代表 5 個收場地的編號—且每個編號只屬於 1 條主行，表示必出現 8x5 個收場地的編號，故結果 6.19 成立。

補充說明 6.20(無法用主列主行求立體收場地人數最小值). 當我們也想用主列主行的想法去探討立體的情形時，試著觀察一條主列，會有主行與主高(縱高已排入 h 個編號)兩個方向要考慮，情況變得複雜，且一直沒有得到結果成立的論述，因此改成計數舉手次數的方式，終於得到立體情形的正確討論。

(五)排出指定人數的隊形.

1. 排列出指定人數的方法. 試排 $11_8 \times 7_5$ 的各種收場地人數，由於

$$M(11_8 \times 7_5) = \min\{11 \times 5，7 \times 8\} = 55，m(11_8 \times 7_5) = 8 \times 5 = 40。 \qquad (22)$$

所以能排的人數介於 55 和 40 之間。

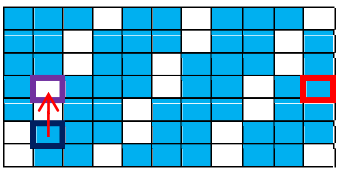
首先利用方法 6.15 排出 $11_8 \times 7_5$ 收場地人數最大值的排列，並在有收場地的格子用藍底標示，見圖 19：

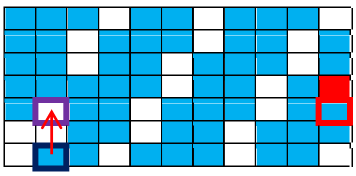
77	70	63	16	56	49	10	42	35	28	2
76	69	18	62	55	48	9	41	34	4	27
75	68	17	61	54	12	47	40	33	3	26
74	20	67	60	53	11	46	39	6	32	25
73	19	66	59	14	52	45	38	5	31	24
22	72	65	58	13	51	44	8	37	30	23
21	71	64	15	57	50	43	7	36	29	1

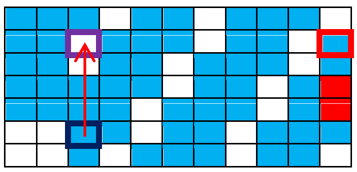
圖 19. $11_8 \times 7_5$ 收場地人數最大值之排法

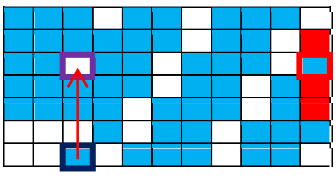
我們構造方法的重點為：「適當的對調標記要收場地的與未收場地的位置，每對調一次，使收場地人數恰減少 1 位」。

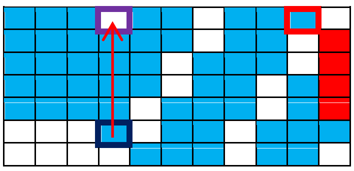
將圖 19 簡記為圖 20-a。圖 20-a～圖 20-p 是指：紅色格子代表本來有收場地的編號，因有別的藍色格子的編號調動後而受影響變成不用收場地。以圖 20-a 為例，深藍框處的編號 72 與紫框的編號 20 對調，則紅框處的編號 25 本來有收場地，經編號 72 與 20 對調後，使得紅框的編號 25 不能收場地──注意對調後恰使收場地少 1 人。

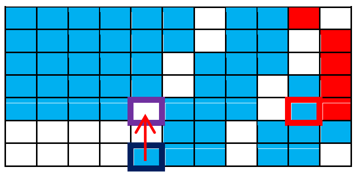

a. 55 人


b. 54 人


c. 53 人


d. 52 人


e. 51 人


f. 50 人

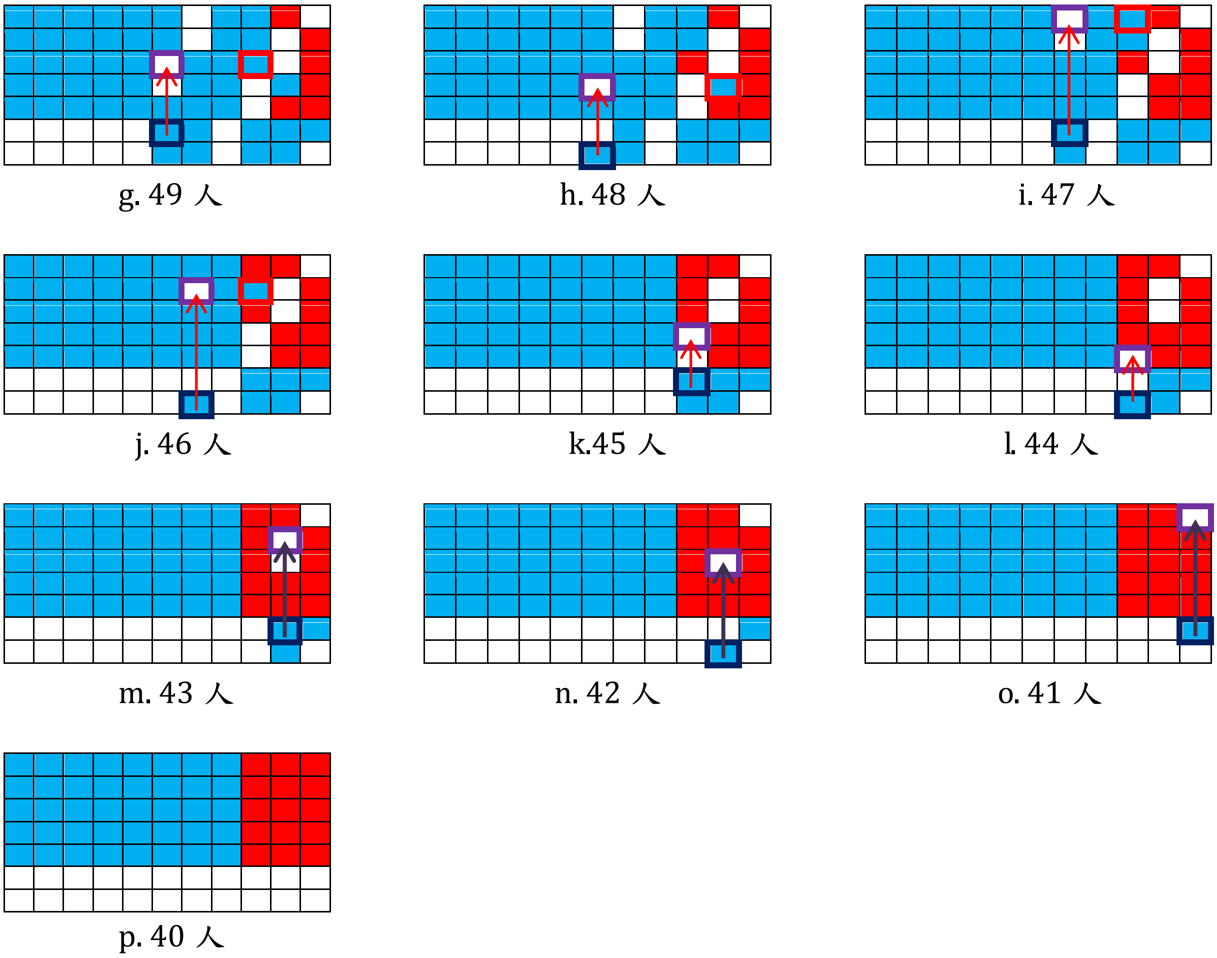


圖 20. 分別構造 $11_8\times7_5$ 收場地人數 55 人－40 人的過程

補充說明 6.21(藉由「華容道」想出構造人數的方法). 構造人數方法的靈感從圖 8、以及遊戲「華容道」，藉由對調編號去更動收場地的人數。

方法 6.22(構造指定收場地人數). 給定 $A_a\times B_b$，構造指定收場地人數的方法。

方法說明. 不失一般性，設

$$M(A_a\times B_b)=A\times b。\tag{23}$$

(1)依方法 6.15，排出收場地人數最大值的排列。

(2)從左起第 1 行起，若收場地的位置未連續填滿 b 格，由上而下，第一個未收場地的編號，與它的下方第一個收場地的編號對調。逐步將該行上方未收場地的編號與下方要收場地的編號對調，直到該行第一列到第 b 列都是收場地的編號。

(3)接著同樣操作下一行。

(4)每對調一次，收場地的人數恰少一位。

(5)如此調動直到出現所求收場地的人數值為止。

補充說明 6.23(單一行對調的可行性). 每一行可收場地的編號至多 b 個，持續對調同一行收場地的編號與未收場地的編號，至多填滿第 1 格到第 b 格的位置。

四、立體的隊形

(一)必收場地與必不收場地.

1. 例子觀察. 從(24)著手：

$$4_2\times6_3\times9_5。\tag{24}$$

216 位球員排成每列 4 人，每行 6 人、每層 9 人的長方體隊形，橫列較高的 2 人舉手，直行較高的 3 人舉手，每個縱高較高的 5 人舉手。

全部有 216 位球員，依身高由矮至高編號 1、2、3、…、216。

根據條件，對每個編號而言，若比同列的 2 個人矮，或比同行的 3 個人矮，或比同縱高的 5 個人矮便不用收場地；換句話說，不可能比

$$\min\{2,3,5\}=2$$

個人矮的球員，必定要收場地，也就是身高的前二名，得到：

$$\text{必收場地的編號：}216、215。\tag{25}$$

根據條件，對每個編號而言，至少要比同列的 2 個人高，且至少比同行的 3 個人高，且至少比同縱高的 4 個人高，才有可能收場地，也就是最矮的

$$(4-2)+(6-3)+(9-5)=2+3+4=9$$

人不可能收場地，因而得到：

$$\text{必不用收場地的編號：}1、2、3、\cdots、9。\tag{26}$$

補充說明 6.24. 由(25)(26)推測，編號介於 10～214 的人可能收或可能不收場地。

2. 一般化的結果. 給定 $A_a\times B_b\times H_h$，A×B×H 位球員排成每列 A 人，每行 B 人的，每縱高 H 人的隊形。橫列較高的 a 人舉手，直行較高的 b 人舉手，每個縱高較高的 h 人舉手，依身高由矮至高編號 1、2、3、…、A×B×H。

   根據條件，對每個編號而言，若比同列的 a 個人矮，或比同行的 b 個人矮，或比同縱高的 h 個人矮，便不用收場地。

換句話說，不可能比 min{a,b,h}個人矮的球員，必定要收場地，也就是身高的前 min{a,b,h}名，得到：

結果 6.25. 給定 $A_a \times B_b \times H_h$，必收場地的編號：

$$A\times B\times H、A\times B\times H-1、A\times B\times H-2、\cdots、A\times B\times H-\min\{a,b,h\}+1。 \quad (27)$$

根據條件，對每個編號而言，每列至少要比 A－a 個人高，且每行至少要比 B－b 個人高，且至少要比每個縱高 H－h 個人高才有可能收場地，也就是最矮的

$$(A-a)+(B-b)+(H-h)=A+B+H-(a+b+h)$$

個人不可能收場地，得到：

結果 6.26. 給定 $A_a \times B_b \times H_h$，必不收場地的編號：

$$1、2、3、\cdots、A+B+H-(a+b+h)。 \quad (28)$$

(二)**指定編號收場地與不收場地**

1. 觀察例子. 同樣給定 $4_2\times 6_3\times 9_5$。以編號 20 為例，由於 10≦20≦214，根據補充說明 6.24，推測 20 號隊員可能收場地也可能不收場地，例子 6.27 和例子 6.28 給出確定的結果。

例子 6.27(使編號 **20** 收場地的方法). 見圖 21，在 20 同列排入 1、2，同行排入 3、4、5，縱高方向排入 6、7、8、9，必使得 20 要收場地。

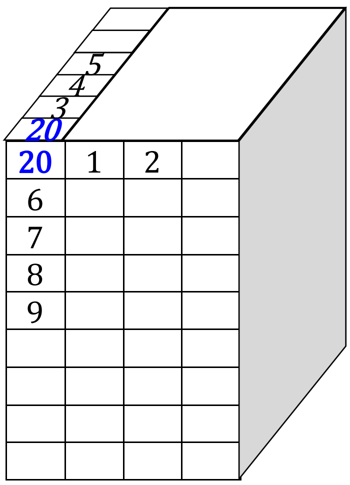
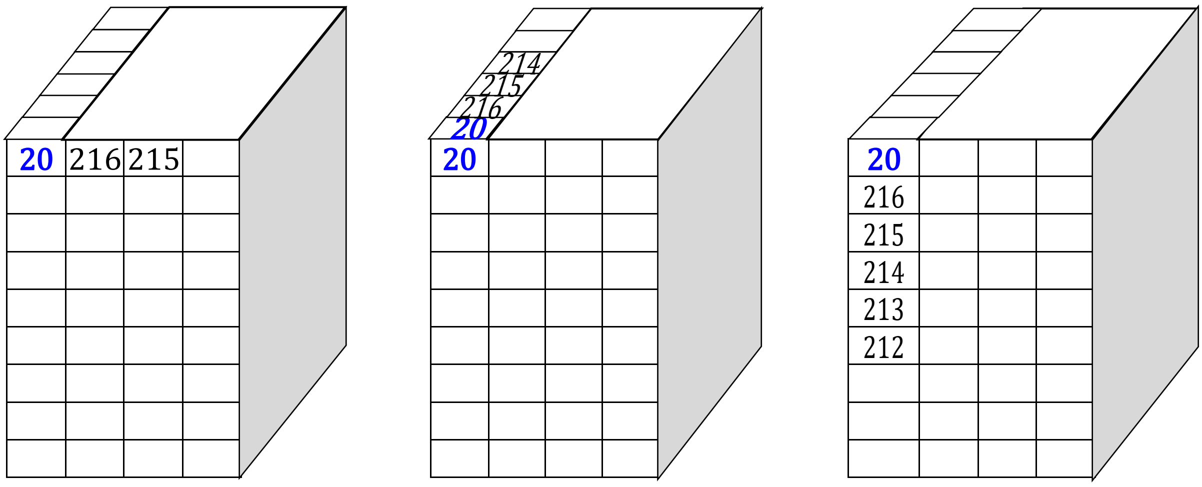


圖 21. 指定編號 20 收場地的排法

例子 6.28(使編號 20 不收場地的方法). 見圖 22，在 20 的同列排入 216、215，使得 20 在橫列方向沒有比 2 個人高(圖 22–甲)；或在 20 的直行方向排入 216、215、214(圖 22–乙)，使得 20 在直行的方向沒有比 3 個人高；或在 20 的縱高方向排入 216、215、214、213、212(圖 22–丙)，使得 20 在縱高方向沒有比 5 個人高，因而 20 不用收場地。



甲. 同列排入較高的 2 個編號　乙. 同行排入較高的 3 個編號　丙. 同縱高排入較高的 5 個編號

圖 22. 給定 $4_2 \times 6_3 \times 9_5$，使指定編號 20 不收場地的三種排法：甲、乙、丙

2. 一般化的結果. 依例子 6.27 和例子 6.28，給出一般化的敘述。給定 $A_a \times B_b \times H_h$，以及 x 的範圍如下：

$$A+B+H-(a+b+h)+1 \leqq x \leqq A \times B \times H-\min\{a,b,h\}。 \tag{29}$$

方法 6.29(立體隊形安排指定編號 x 收場地的方法). 在與 x 同列排入 1、2、⋯、A−a；且同行排入 A−a+1、A−a+2、⋯、A+B−(a+b)；且同縱高排入 A+B−(a+b)+1、、A+B−(a+b)+2、⋯、A+B+H−(a+b+h)。

方法 6.30(立體隊形安排指定編號 x 不收場地的方法). 在與 x 同列排入 A×B×H、、A×B×H−1、A×B×H−2、⋯、A×B×H−a+1；或在同行排入 A×B×H、A×B×H−1、、A×B×H−2、⋯、A×B×H−b+1；或在同縱高排入 A×B×H、A×B×H−1、A×B×H−2、、⋯、A×B×H−h+1。

(三)**最多人數**

1. 長方體.

(1)最多人數的理想值. 理想值為每個平面的收場地人數最大值乘以縱高人數，以「$6_4\times4_3\times5_2$」為例，示意如圖 23。

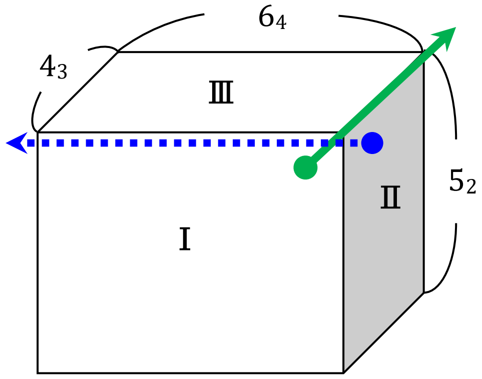


圖 23. $6_4\times4_3\times5_2$ 示意圖

如果要找出 $6_4\times4_3\times5_2$ 收場地人數最大值理想值，見圖 23，先求平面Ⅰ的收場地人數最大值 $M(6_4\times5_2)=\min\{6\times2，5\times4\}=6\times2=12$，然後將 12 乘以平面Ⅰ的層數「4」，即得

$$M(4_3\times5_2)\times4\min\{6\times2，5\times4\}\times4=6\times2\times4=48。\tag{31}$$

48 就是長方體收場地人數最大值的理想值之一。同理，我們分別從平面Ⅱ和平面Ⅲ(圖 23)出發，得到兩個理想值如(32)、(33)：

$$M(4_3\times5_2)\times6=\min\{4\times2，5\times3\}\times6=4\times2\times6=48。\tag{32}$$

$$M(6_4\times4_3)\times5=\min\{6\times3，4\times4\}\times5=4\times4\times5=80。\tag{33}$$

(31)(32)(33)得出三個收場地人數最大值的理想值，和(13)的討論相同，我們有

$$M(6_4\times4_3\times5_2)\leqq\min\{6\times2\times4，4\times2\times6，4\times4\times5\}=\min\{48，48，80\}=48。\tag{34}$$

從(34)觀察出收場地人數最大值理想值為取「**(兩邊人數積)x另一邊舉手人數**的最小值」，而且「**有兩個積相等**」(見(31)(32))，其實這不是巧合，為了方便解釋，我們用符號說明。

必有兩積相等的說明. 不失一般性，設 $\min\{A\times B\times h, A\times b\times H, a\times B\times H\}=A\times B\times h$，於是有

$$A\times B\times h\leqq A\times b\times H、A\times B\times h\leqq a\times B\times H，\tag{35}$$

根據等量公理，推得

$$B\times h \leqq b\times H、A\times h \leqq a\times H。 \tag{36}$$

表示 B×h 和 A×h 分別為平面 B×H 和平面 A×H 收場地的最多人數，所以計算立體收場地人數最大值理想值時，便有

$$(B\times h)\times A=(A\times h)\times B=A\times B\times h \tag{37}$$

以求 $M(6_4\times 4_3\times 5_2)$來說，參見圖 23 以及(34)，我們有

$M(6_4\times 4_3\times 5_2)\leqq$平面Ⅰ收場地人數最大值×縱高 4＝平面Ⅱ收場地人數最大值×縱高 6。 (38)

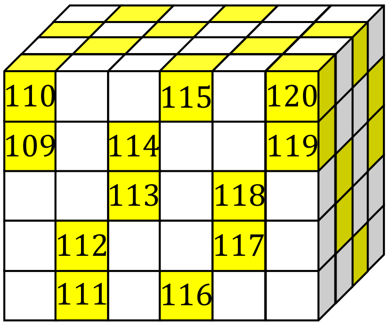
(38)給了我們排列收場地人數最大值的方法的啟示：

「平面Ⅰ(平面Ⅱ)每層依收場地最多人數排列，共排 4(6)層」。 (39)

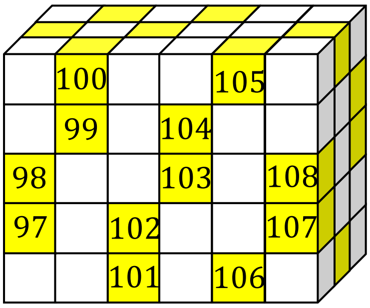
如果我們能使 $6_4\times 4_3\times 5_2$ 收場地人數恰為 48 人，那麼表示 $M(6_4\times 4_3\times 5_2)=48$。

利用(39)的想法，並參考圖 19、圖 23，以及反覆試排後，得到如圖 24 的排列方法。

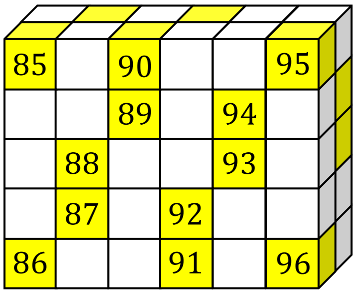
(2)排出收場地人數最大值的方法



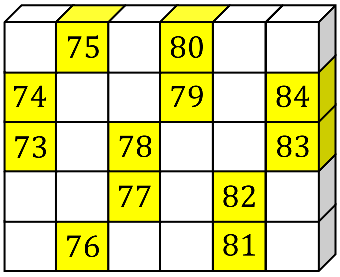
甲. 第一層



乙. 第二層



丙. 第三層



丁. 第四層

圖 24. 甲—丁為 $6_4\times 4_3\times 5_2$ 由平面Ⅰ起，沿著圖 23 綠色實線的方向，第 1 層至第 4 層的排法

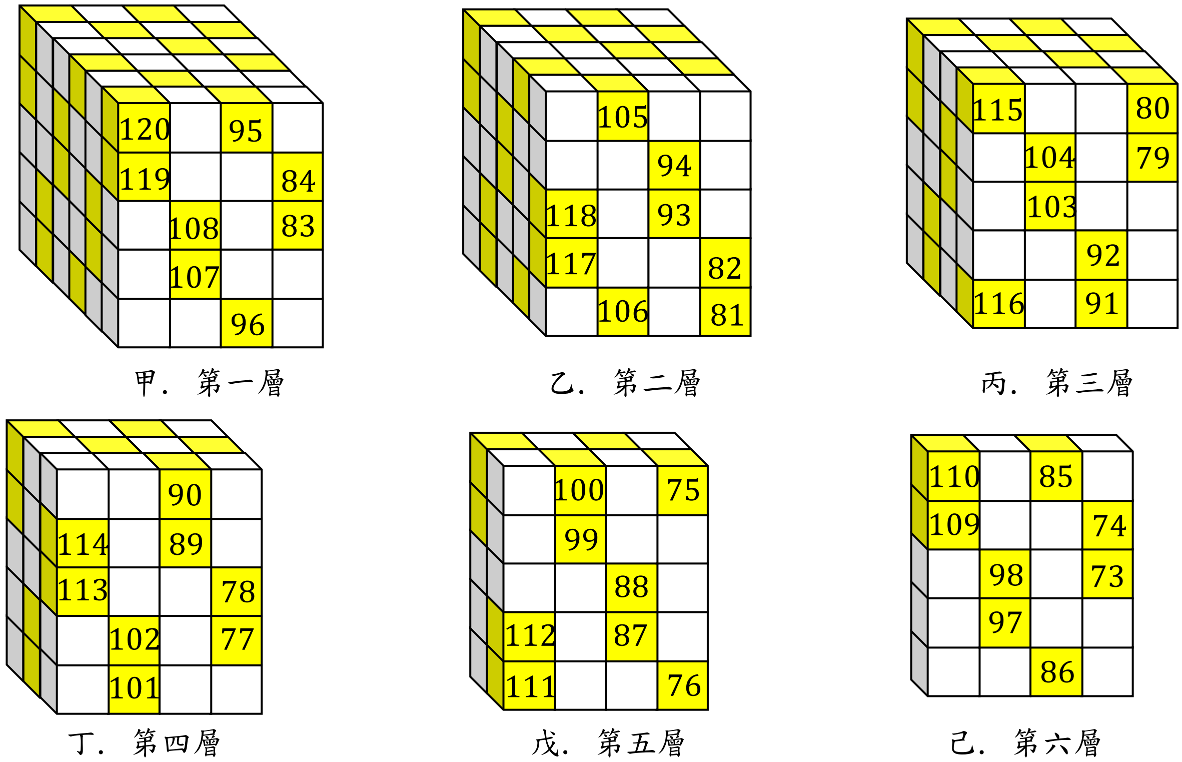


圖 25. 甲—己為 $6_4\times4_3\times5_2$ 由平面Ⅱ起，沿著圖 23 藍色虛線的方向，第 1 層至第 6 層的排法

方法 6.31(排出收場地人數最大值的方法). 見以下說明。

方法說明. 參考圖 23、圖 24、圖 25，我們的排法從平面 **I** 開始，以下皆指平面 **I** 。

①第一層右起依方法 6.15 標記收場地的位置。

②第二層右起第 1 行等同第一層右起第 2 行，然後向左依方法 6.15 標記收場地的位置。

③第三層右起第 1 行等同第二層右起第 2 行，然後向左依方法 6.15 標記收場地的位置。

④第 k 層右起第 1 行等同第 k−1 層第 2 行，然後向左依方法 6.15 標記收場地的位置。

⑤直到每一層都標記後，從第一層右起從最大編號依序填入標記收場地的位置。

⑥其餘未標記的位置，可任意填入剩下的編號。

說明方法 6.31 符合問題 2.4 的規定. 設收場地人數最大值為 $A\times B\times h$—即 $M(A_a\times B_b\times H_h)=$ $=$(平面Ⅰ收場地人數最大值)$\times B=$(平面Ⅱ收場地人數最大值)$\times A$，排法如圖 26。注意到第 k 層的平面Ⅱ(如圖 27)，是收集每一層平面Ⅰ的第 k 行，第 2 層平面Ⅰ的右起第 k 行就是第 1 層平面Ⅰ的右起第 k+1 行，第 3 層平面Ⅰ的右起第 k 行就是第 2 層平面Ⅰ的右起第 k+1 行──也就是第 1 層平面Ⅰ的右起第 k+2 行，…，表示平面Ⅱ第 k 層是在複製平面Ⅰ第 k 行起按收場地人數最大值的安排，由於平面Ⅱ收場地人數最大值為 $B\times h$，故可合乎規

定的排完，又因平面Ⅰ的列與行和平面Ⅱ的列與縱高都會符合規定，便推得平面Ⅲ的列與行也會符合規定。

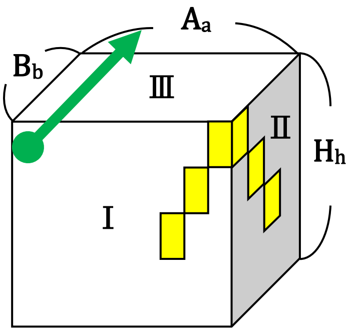


圖 26. 平面Ⅰ第一層依收場地人數最大值的排列，黃色方塊表示每 1 行要收場地的位置

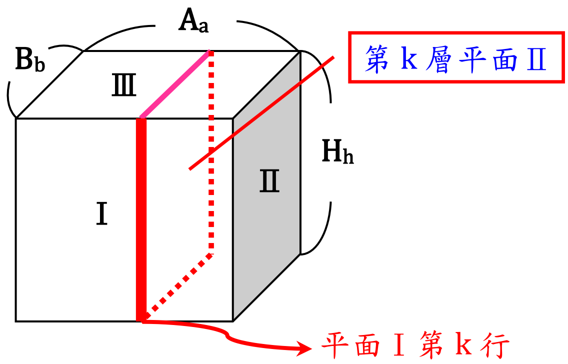


圖 27. 第 k 層平面Ⅱ即為每一層平面Ⅰ的第 k 行

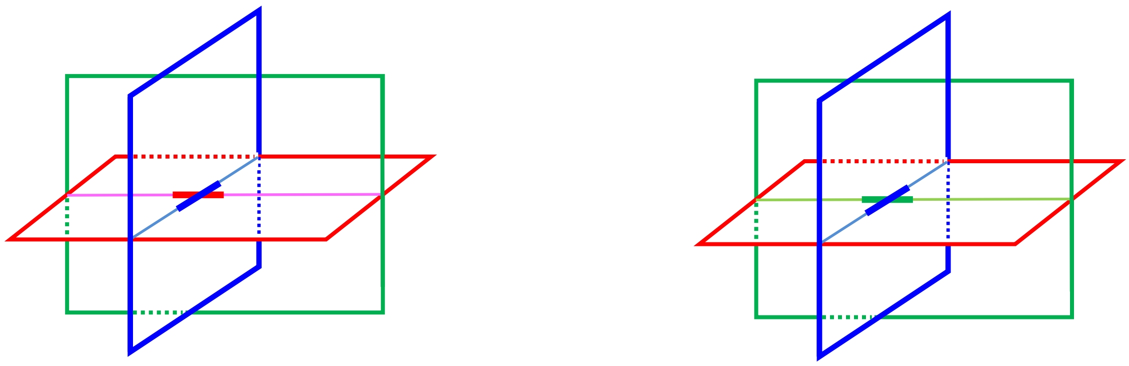
有了方法 6.31，表示排得出的收場地最多人數的理想值，於是得到：

結果 6.32(長方體收場地最多人數). $M(A_a\times B_b\times H_h)=\min\{A\times B\times h, A\times b\times H, a\times B\times H\}$。

(四)**最少人數.** 承補充說明 6.20，改採計數舉手次數的方法，我們用記號數量代替舉手次數。

1. 記號. 若編號在橫列較高的 4 個之中記一個「—」；在直行較高的 4 個之中記一個「｜」；在縱高較高的 4 個之中記一個「／」。收場地的編號就會同時有 3 個記號。

2. 恰有 1 個記號和恰有 2 個記號的人數和最大值. 見圖 28，對於恰有 2 個記號的編號來說，可看成它的 2 個記號分別來自不同的平面上的單一記號；對於恰有 1 個記號的編號來說，可看成它的 1 個記號來自某個平面上的單一記號。儘可能搜集每個平面的單一記號，搜集來的總量就是「恰有 2 記號與恰有 1 記號編號數量和的最大值之理想值」。



甲　　乙

圖 28. 恰有 2 個記號或恰有 1 個記號，可看作分別來自不同平面的單一記號，例如紅色記號看作來自紅色平面的單一記號，藍色記號看作來自藍色平面的單一記號(圖甲)；或藍色記號看作來自紅色平面的單一記號，綠色記號看作來自綠色平面的單一記號(圖乙)。

將 $A_a \times B_b \times H_h$ 中恰有 1 記號與 2 記號人數最大值記作 $M_{1,2}(A_a \times B_b \times H_h)$，接著試求 $M_{1,2}(7_5 \times 9_6 \times 11_7)$，見圖 29，我們先算出理想值，然後說明理想值能具體排得出來。

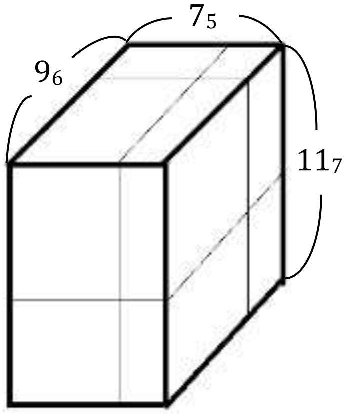


圖 29. $7_5 \times 9_6 \times 11_7$ 示意圖

平面單一記號數量最大值＝「**記號總數量**」－「**有 2 記號編號數量最小值**」，見(40)。

$$7 \times 6+9 \times 5-2 \times 5 \times 6=(5+2) \times 6+(6+3) \times 5-2 \times 5 \times 6=2 \times 6+3 \times 5 。 \tag{40}$$

(40)即為求平面 $7_5 \times 9_6$ 單一記號數量最大值，因為該平面共 11 層，整個長方體有

$$(2 \times 6+3 \times 5) \times 11 。 \tag{41}$$

同理，從平面 $9_6 \times 11_7$ 和平面 $7_5 \times 11_7$ 出發，分別得到單一記號數量至多有

$$(3 \times 7+4 \times 6) \times 7， \tag{42}$$

$$(2 \times 7+4 \times 5) \times 9， \tag{43}$$

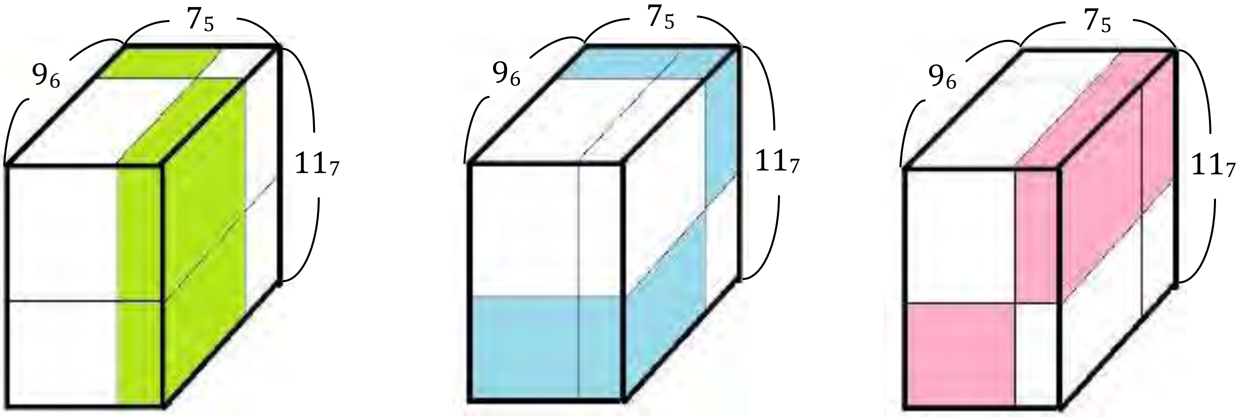
每個記號正好被重複計數一次(因同屬於 2 個平面)，所以

$$M_{1,2}(7_5 \times 9_6 \times 11_7) \leqq [(41)+(42)+(43)] \div 2 。 \tag{44}$$

實際上我們排得出來恰有 2 記號與 1 號的編號數量＝[(41)+(42)+(43)]÷2 的排列。

方法 6.33(排出恰有 2 記號與恰有 1 記號的編號數量達到理想值的排列). 以 $7_5 \times 9_6 \times 11_7$ 為例，在 $7_5 \times 9_6$ 的平面，第一層填入 $7 \times 9 \times 11$、$7 \times 9 \times 11-1$、$7 \times 9 \times 11-2$、…
…、$7 \times 9 \times 11-62$，依圖 17 的排法，將第一層平面填完，接著第二層平面依同樣配置，從編號 $7 \times 9 \times 11-63$ 填起，繼續填滿第二層，…，如此下去，直到填完整個立體。

補充說明 6.34. 見次頁圖 31，方法 6.33 能排出恰有 $5 \times 6 \times 7$ 的人收場地(圖 31 紅色部份)，且有 $2 \times 3 \times 4$ 個編號沒有任何記號(圖 31 藍色部份)。



甲. 配合(41)　　　乙. 配合(42)　　　丙. 配合(43)

圖 30. 依方法 6.33，分別從 3 個方向計數恰有 2 記號或 1 記號編號數量的最大值

見圖 30-甲，**綠色部份**表示「$7_5 \times 9_6$ **平面恰有** 1 個記號的部份堆疊 11 層」，於此同時，從另外兩個方向也會形成類似的情況，也就是圖 30-乙和圖 30-丙，合計圖 30 的甲、乙、丙的**著色**部份，即為圖 31 立體的**空白**部份—恰有 2 個或 1 個記號的編號的集合。

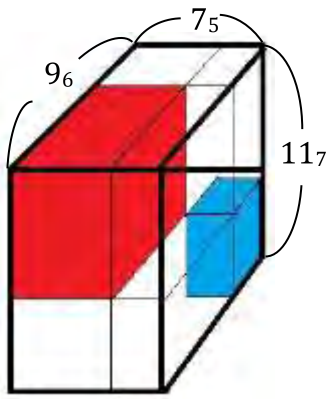


圖 31. 紅色部分表示恰有 3 個記號的編號(數量為補充說明 6.34 提到的 5x6x7)，藍色部份表示沒有記號的編號(數量為補充說明 6.34 提到的 2x3x4)，空白部份即為恰有 2 個或 1 個記號的編號集合。

3. 得到收場地人數最小值. **$m_0(7_5 \times 9_6 \times 11_7)$記作在立體 $7_5 \times 9_6 \times 11_7$ 中沒有任何記號的編號數量之最小值**，將說明

$$m(7_5 \times 9_6 \times 11_7)+M_{1,2}(7_5 \times 9_6 \times 11_7)+m_0(7_5 \times 9_6 \times 11_7)=7\times 9\times 11。 \tag{45}$$

當恰有 2 個記號與 1 個記號的數量達到最大值時，命 **m_3 為此時有 3 個記號的編號數量、M_0 為沒有記號的編號數量**。考慮下列等式

$$m_3+M_{1,2}(7_5 \times 9_6 \times 11_7)+M_0=7\times 9\times 11， \tag{46}$$

注意到立體中，每個恰有 2 個記號以及恰有 1 個記號的來源，取自於每個平面上的單

一記號，由於我們已收集全部平面的所有單一記號，此時收集到恰有 2 記號與恰有 1 記號的記號總量也達到最大值。如果 m_3 不是收場地人數最小值，則當排出收場地人數最小值的排列，這個排列的恰有 2 記號與恰有 1 記號的記號總數量比(46)的還多，如此一來，就與記號總量已達最大值矛盾！故推得 $m_3 = m(7_5 \times 9_6 \times 11_7)$。

注意立體中，每個恰有 2 個記號的編號可看作「恰有 1 個無記號」；恰有 1 個記號的編號可看作「恰有 2 個無記號」，因而 $M_{1,2}(7_5 \times 9_6 \times 11_7)$也是「恰有 1 個無記號」與「恰有 2 個無記號」的編號數量最大值，同說明 m_3 為最小值的過程，推得 $M_0 = m_0(7_5 \times 9_6 \times 11_7)$。接著根據(44)等號右邊計數 $M_{1,2}(7_5 \times 9_6 \times 11_7)$的值：

$$M_{1,2}(7_5 \times 9_6 \times 11_7) = [(2\times6+3\times5)\times11+(3\times7+4\times6)\times7+(2\times7+4\times5)\times9]\div2=$$

$$=[(2\times6+3\times5)\times(7+4)+(3\times7+4\times6)\times(5+2)+(2\times7+4\times5)\times(6+3)]\div2=$$

$$=2\times6\times7+2\times6\times4+3\times5\times7+3\times5\times4+3\times7\times2+4\times6\times5。\tag{47}$$

根據(46)則有

$$7\times9\times11=(5+2)\times(6+3)\times(7+4)=5\times6\times7+2\times3\times4+(2\times6\times7+2\times6\times4+3\times5\times7+3\times5\times4+3\times7\times2+ +4\times6\times5)=5\times6\times7+2\times3\times4+M_{1,2}(7_5 \times 9_6 \times 11_7)，\tag{48}$$

統整(45)和(48)，推得

$$m(7_5 \times 9_6 \times 11_7)+m_0(7_5 \times 9_6 \times 11_7)=5\times6\times7+2\times3\times4。\tag{49}$$

(49)的等號右邊符合圖 31 的紅色及藍色部份的和，根據補充說明 6.34 可得到：

$$m(7_5 \times 9_6 \times 11_7)\leqq 5\times6\times7，\tag{50}$$

$$m_0(7_5 \times 9_6 \times 11_7)\leqq 2\times3\times4。\tag{51}$$

只要(50)或(51)其中一個的「＜」成立，將會使得

$$m(7_5 \times 9_6 \times 11_7)+m_0(7_5 \times 9_6 \times 11_7)<5\times6\times7+2\times3\times4，\tag{52}$$

與(49)矛盾！所以得到

$$m(7_5 \times 9_6 \times 11_7)=5\times6\times7。\tag{53}$$

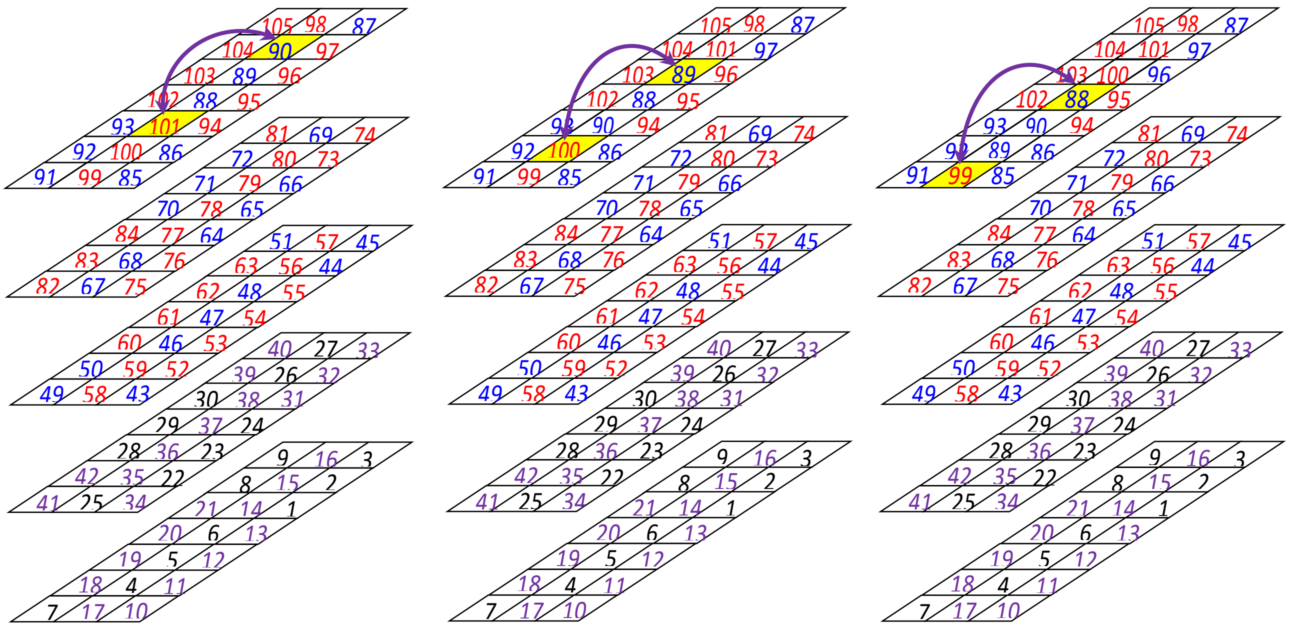
同時也說明方法 6.33 具體給出一種排出收場地人數最小值的方法，於是有

結果 6.35(長方體隊形收場地最少人數). $m(A_a \times B_b \times H_h) = a \times b \times h$。

(五)排出指定人數的方法.

1. 以構造「$3_2\times7_4\times5_3$」的指定人數為例. 圖 32 和圖 33 中的**紅色編號代表收場地**。

(1)同一平面對調，收場地人數減少，36 人→35 人(圖 32-乙)，35 人→34 人(圖 32-丙)。



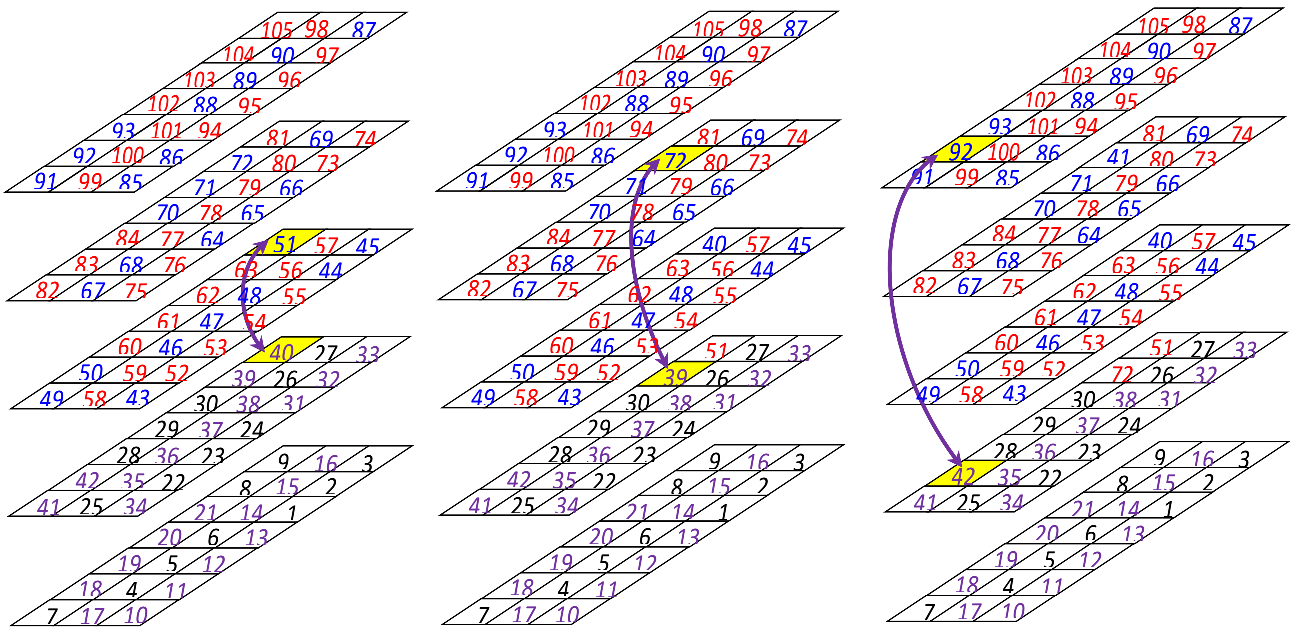
甲. 對調 90 和 101，將得到乙圖的 35 人收場地

乙. 對調 89 和 100，將得到丙圖的 34 人收場地

丙. 恰為 34 人收場地，再對調 88 和 99，將得到 33 人收場地

圖 32. $3_2\times7_4\times5_3$ 的收場地人數從 36 人到 35 人、35 人到 34 人的排法

(2)縱高方向對調，人數增加，36 人→37 人(圖 33-乙)，37 人→38 人(圖 33-丙)。



甲. 對調 40 和 51，將得到乙圖的 37 人收場地

乙. 對調 39 和 72，將得到丙圖的 38 人收場地

丙. 恰為 38 人收場地，再對調 92 和 42，將得到 39 人收場地

圖 33. $3_2\times7_4\times5_3$ 的收場地人數從 36 人到 37 人、37 人到 38 人的排法

2. 構造 $3_2\times7_4\times5_3$ 指定人數的方法. 可指定的人數介於最小值 24 人與最大值 60 人之間。

預備步驟(排出恰有 36 人收場地). 將 $3_2\times7_4\times5_3$ 依方法 6.31 標記要收場地的位置，由上而下，第 1 層排入編號 85—105，第 2 層排入編號 64—84，第 3 層排入編號 43—63，第 4 層排入編號 22—42，第 5 層排入編號 1—21。

補充說明 6.36(收場地人數恰為 36 的理由). 因為第一層到第三層的編號皆大於第四層、第五層全部的編號，故第四、五層的人不會收場地。而第一層至第三層皆各以 $3_2\times7_4$ 的收場地人數最大值排列，所以一層恰有 12 人收場地，表示此時恰有 12x3＝36 人收場地。

構造收場地人數 36 人～24 人的步驟. 第一層至第三層平面，每層平面依序用方法 6.22 構造收場地人數 12 人～8 人，從第一層到第三層，可構造出收場地人數 36 人～24 人。

構造收場地人數 36 人～60 人的步驟. 見圖 33-甲和圖 33-乙，在同一個縱高方向，將第一層～第三層中未收場地的編號，依序與第四層標記收場地的編號對調，直到第四層標記要收場地的編號都被對調完畢為止，如此一來增加了第 4 層的 12 人，可構造收場地人數從 36 人～48 人；然後第五層標記要收場地的編號繼續與上方未收場地的編號都被對調完畢為止，便可構造收場地人數從 48 人～60 人。

3. 一般化的方法

方法 6.37(長方體構造指定人數收場地). 參見下列說明。

方法說明. 不失一般性，設 $M(A_a\times B_b\times H_h)=a\times B\times H$，注意到 $M(A_a\times B_b)=a\times B$。

預備步驟(構造恰有 axBxh 人收場地). 由 AxB 的平面沿著平行 H 的方向，依方法 6.31 標記要收場地的位置。第一層填入的編號為 AxBxH～AxBxH－AxB+1、第二層填入的編號為 AxBxH－AxB～AxBxH－2xAxB+1、第三層填入的編號為 AxBxH－2xAxB～AxBxH－3xAxB+1、…、第 H 層填入的編號為 AxBxH－(H－1)xAxB～1。

構造收場地人數 a×B×h～a×b×h 的步驟. 同平面對調使得收場地人數 a×B×h 人～a×b×h 人. 從第 1 層到第 h 層，每層平面分別可依方法 6.22 構造 a×B 人～a×b 人收場地。

構造收場地人數 a×B×h～a×B×H 的步驟. 在縱高方向，將第 h+1 層中收場地的編號，與第 1 層到第 h 層由上而下第一個標記未收場地的編號對調，直到第 h+1 層標記要收場地的編號都被對調完畢為止，如此一來收場地人數從 a×B×h 人～a×B×(h+1)人；逐次操作第 h+1 層、第 h+2 層、…、第 H 層，當標記要收場地的編號繼續與上方未收場地的編號都被對調完畢，收場地人數達到 a×B×H 人。

說明方法 6.37 符合問題 2.4 的規定. 以下依要構造的人數分別說明：

(1)a×B×h 人～a×b×h 人. 在第 1 層到第 h 層調動編號時，對每一個收場地編號來說，縱高方向都是在前 h 大的值；而在自己所在的平面，已是在橫列方向和直行方向都是較高的部份，所以上層的編號移動不會影響自己，直到自己所在的平面開始調動編號為止。

(2) a×B×h 人～a×B×H 人. 設立體縱高為 7_4，並設經過構造指定人數的第一步安排後，某縱高如圖 35，橫線作為分隔用，橫線以上 4 格放比較大的數，以下 3 格放比較小的數。

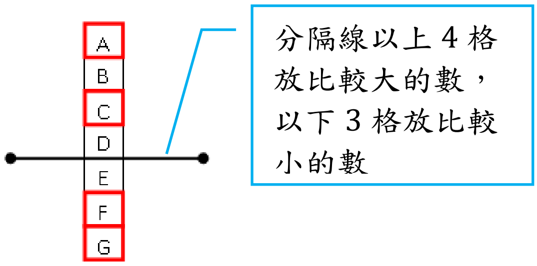


圖 34. 某縱高依構造人數的安排後的配置：A、C 收場地，B、D、E、F、G 不收場地

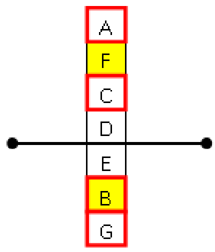


圖 35. B 與 F 對調後，B 可以收場地

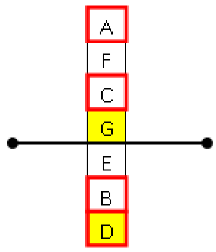


圖 36. D 與 G 對調後，D 可以收場地

設立體縱高設定為 7_4，並設經過構造指定人數的第一步安排後，某縱高的編號設置如圖 34，分隔線僅作為標示用，線以上 4 格放比較大的數；以下 3 格放比較小的數。

圖 34 的紅框部份表示在安排收場地人數最大值時，應收場地的位置。而依構造指定人數的安排，顯然有「A＞B＞C＞D＞E＞F＞G」。根據我們一開始的設定，A 與 C 會收場地；而 B 與 D 雖在縱高屬於前 4 大，但目前所在的平面不是屬於可以收場地的編號，故 B 與 D 在立體中不會收場地。

由於 7_4 表示縱高方向較高的 4 人舉手，故 F 與 G 不會收場地，注意若只看平面，F 與 G 在它們目前平面上是可以收場地的。**將 B 與 F 對調**(圖 35)，F 仍不會收場地，但 **B 會變得可以收**—因為 F 在原平面本來屬於可收場地，B 取代 F 的位置，且為縱高前 4 大的編號。此時恰增加 1 位收場地人數。接著**將 D 與 G 對調後**(圖 36)，同理，**D 變得可以收場地**。縱高方向第 1 層到第 4 層未收場地的位置數量，就等於第 5 層到第 7 層預定收場地的位置數量。也就得到縱高方向必可透過對調使得收場地人數增加。

陸、研究結論

一、平面的結論. 設全部有 A×B 位學生，排列 A 行 B 列，每列較高的 a 人舉手，每行較高的 b 人舉手，兩次都有舉手的人收場地。

(一)依身高由矮至高依次編號：1、2、3、…、A×B，必收場地的編號為：A×B、A×B－1、…

…、$A\times B-\min\{a,b\}+1$；必不收場地的編號為：1、2、3、…、$A+B-(a+b)$；

(二)承(一)，當 $A+B-(a+b)+1\leqq x\leqq A\times B-\min\{a,b\}$，分別給出使編號 x 收場地與不收場地的排列方法；

(三)收場地人數最大值為 $\min\{A\times b,B\times a\}$；

(四)收場地人數最小值為 $a\times b$；

(五)承(三)、(四)，當 $a\times b\leqq p\leqq\min\{A\times b,B\times a\}$，給出恰使得 p 人收場地的排列方法。

二、立體的結論. 設全部有 $A\times B\times H$ 位學生，排成如長＝A、寬＝B，高＝H 的長方體，平行長邊較高 a 人舉手、平行寬邊較高的 b 人舉手、平行縱高的方向較高的 h 人舉手，三次都有舉手的人收場地。

(一)依身高由矮至高依次編號：1、2、3、…、$A\times B\times H$，必收場地的編號為：$A\times B\times H$、$A\times B\times H-1$、…、$A\times B\times H-\min\{a,b,h\}+1$；必不收場地的編號為：1、2、3、…、$A+B+H--(a+b+h)$；

(二)承(一)，當 $(A+B+H)-(a+b+h)+1\leqq x\leqq A\times B\times H-\min\{a,b,h\}$，分別給出使編號 x 收場地與不收場地的排列方法；

(三)收場地人數最大值為 $\min\{A\times B\times h，A\times b\times H，a\times B\times H\}$；

(四)收場地人數最小值為 $a\times b\times h$；

(五)承(三)、(四)，當 $a\times b\times h\leqq p\leqq\min\{A\times B\times h，A\times b\times H，a\times B\times H\}$，給出恰使得 p 人收場地的排列方法。

柒、參考文獻

一、游森棚(2018) 九人收場地。科學研習月刊 57 卷第 2 期。上網日期：2018/07/01。取自：https://www.ntsec.gov.tw/User/Article.aspx?a=3498

二、南一文教事業教科書編輯委員會(民 107)整數四則運算。國民小學數學課本第九冊。臺南市。國家教育研究院。

三、南一文教事業教科書編輯委員會(民 106)周長和面積。國民小學數學課本第九冊。臺南市。國家教育研究院。

四、南一文教事業教科書編輯委員會(民 107)正方體和長方體。國民小學數學課本第十冊。臺南市。國家教育研究院。

五、南一文教事業教科書編輯委員會(民 107)怎樣列式。國民小學數學課本第十冊。臺南市。國家教育研究院。

【評語】080415

1. 從一個有趣的益智問題出發，主題有趣且吸引人，透過各個子題的開展，將問題一般化，然後循序漸進地求解，方法簡潔，巧妙地解決了最佳化問題，值得肯定。
2. 能在進行探究前，先給予清楚的符號定義與說明，有助於作品更清晰簡潔地呈現。
3. 解決問題的方法適切，結果的分析與討論也很完整，研究內容具創意，值得肯定。

作品海報

摘要

九個好友組成足球隊，身高兩兩不同，比賽完排成3x3(如圖1)。教練說：「每一橫列最高的兩人舉手！」，接著教練說：「手放下，現在每一直排最高的兩人舉手！」最後教練說：「手放下，兩次都有舉到手的人去收場地，其他的解散。」

我們用簡潔的方法、巧妙借用益智遊戲的規則，探討問題在任意長方形和長方體的情形；本作品的創意在做更多的延伸探討，得到完整且豐富的結果。

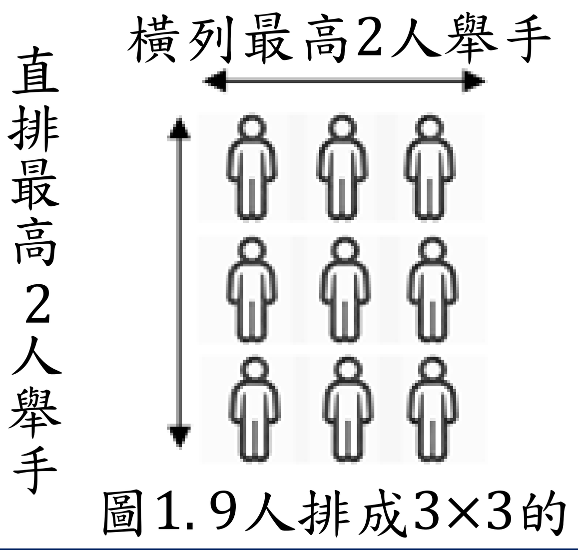


圖1. 9人排成3×3的隊形

研究問題

如果隊員排成長方形、長方體的隊形：

一、將學生依身高由矮至高編號1、2、3、…，求出「必收場地」的編號、「必不收場地」的編號；

二、承一，若編號 x 為可能會收也可能不收場地的編號，分別排出使 x 收場地的隊形及使 x 不收場地的隊形。

三、收場地人數的最大值；

四、收場地人數的最小值；

五、若人數 p 介於最多人數與最少人數之間，排出恰為 p 人收場地的隊形。

名詞定義

一、「$A_a\times B_b$」表示 $A\times B$ 位隊員排成每列 A 人、每行 B 人—即 A 行 B 列的隊形，a 表示每列較高的 a 個人舉手；b 表示每行較高的 b 個人舉手，其中 $0<a\le A-1$，$0<b\le B-1$（範例見圖2）。

二、「$A_a\times B_b\times H_h$」表示 $A\times B\times H$ 位隊員排成每列 A 人、每行 B 人、每縱高 H 人—即 A 行 B 列 H 層的隊形，a 表示每列較高的 a 個人舉手；b 表示每行較高的 b 個人舉手；h 表示每縱高較高的 h 個人舉手，其中 $0<a\le A-1$，$0<b\le B-1$，$0<h\le H-1$（範例見圖3）。

三、$M(A_a\times B_b)$ 記作 $A_a\times B_b$ 收場地人數最大值；$M(A_a\times B_b\times H_h)$ 記作 $A_a\times B_b\times H_h$ 收場地人數最大值。

四、$m(A_a\times B_b)$ 記作 $A_a\times B_b$ 收場地人數最小值；$m(A_a\times B_b\times H_h)$ 記作 $A_a\times B_b\times H_h$ 收場地人數最小值。

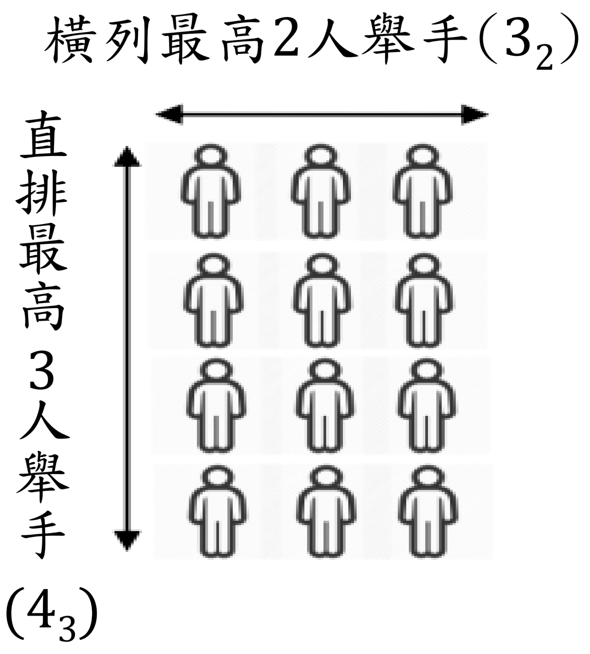


圖2. $3_2\times4_3$

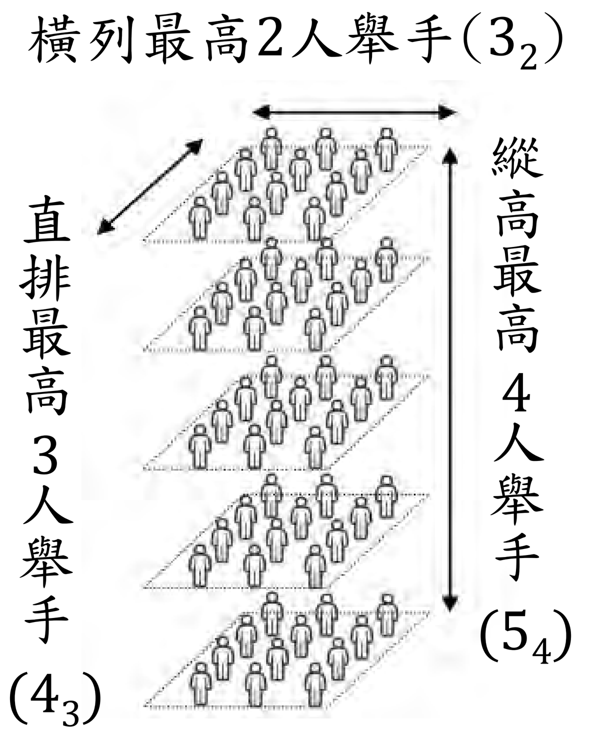


圖3. $3_2\times4_3\times5_4$

研究與討論過程

平面

必收場地的編號

結果6.8. 給定 $A_a\times B_b$，必收場地的編號為

$$A\times B、A\times B-1、A\times B-2、\cdots、A\times B-\min\{a,b\}+1$$

必不收場地的編號

結果6.9. 給定 $A_a\times B_b$，必不收場地的編號為

$$1、2、3、\cdots、A+B-(a+b)$$

使指定編號收場地或不收場地的方法

方法6.12(使得指定編號 x 收場地的方法). 若 $A+B-(a+b)+1\le x\le A\times B-\min\{a,b\}$，在 x 的同列排入 $1、2、3、\cdots、A-a$ 且在同行排入 $A-a+1、A-a+2、\cdots、A+B-(a+b)$。

方法6.13(使得指定編號 x 不收場地的方法). 承方法6.12的條件，在與 x 同列排入 $A\times B、A\times B-1、A\times B-2、\cdots、A\times B-a+1$，或在與 x 同行排入 $A\times B、A\times B-1、A\times B-2、\cdots、A\times B-b+1$。

收場地人數最大值

最大值的理想值

$$M(A_a\times B_b)\le\min\{A\times b, B\times a\}$$

具體排法

以排出 $11_8\times7_5$ 的收場地人數最大值為例：見圖4和圖5。

1	8	15		22	29		36	43	50	
2	9		16	23	30		37	44		51
3	10		17	24		31	38	45		52
4		11	18	25		32	39		46	53
5		12	19		26	33	40		47	54
	6	13	20		27	34		41	48	55
	7	14		21	28	35		42	49	

圖4. 標出 $11_8\times7_5$ 要收場地的位置

77	70	63		56	49		42	35	28	
76	69		62	55	48		41	34		27
75	68		61	54		47	40	33		26
74		67	60	53		46	39		32	25
73		66	59		52	45	38		31	24
	72	65	58		51	44		37	30	23
	71	64		57	50	43		36	29	

圖5. 由大而小在標示的位置填入收場地的編號

排法成立的理由

1.直排方向已符合規定；

2.橫向的所有收場地人數向左移，由於藍色部份收場地人數 $=A\times b\le B\times a$，表示每一列藍色部份長 $\le a$。

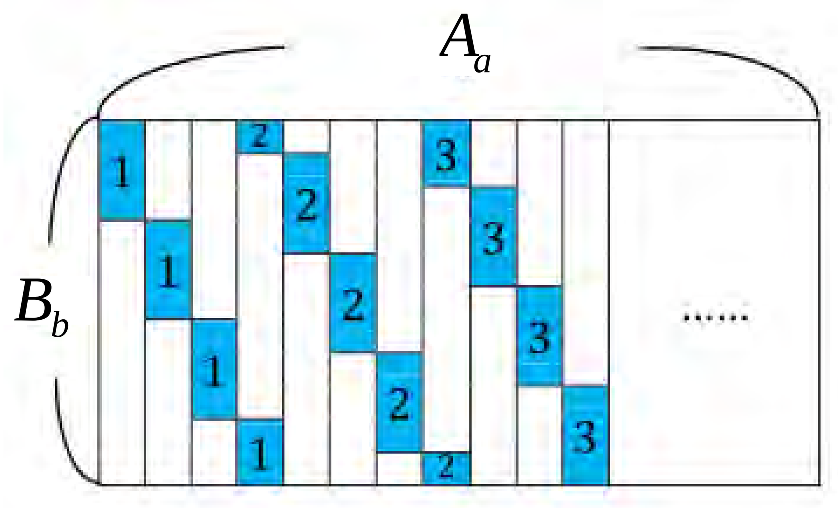


圖6. 收場地的位置用藍底標示

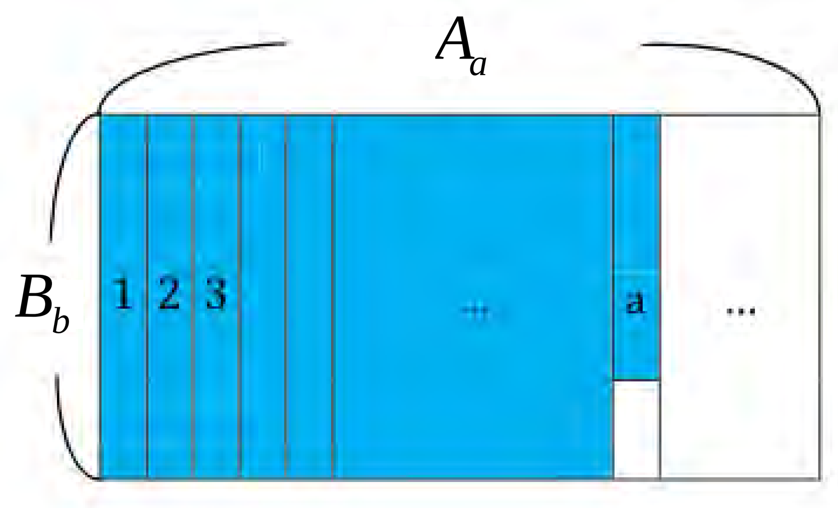


圖7. 藍底部份水平向左集中

收場地人數最小值

結果6.19. $m(A_a \times B_b) = a \times b$。

簡略說明. 編號由大至小排入。

- 主列：某列恰放入 a 個編號則稱形成一條主列。
  主行：某行恰放入 b 個編號則稱形成一條主行。
- 如果某主行上的前 b 大編號有未收場地的編號 b_2，則必可在 b_2 所在的主列找一個收場地的編號 b_2' 代表它。
- 恰出現 a 條主行或恰出現 b 條主列時，至少出現 $a \times b$ 個收場地的編號。

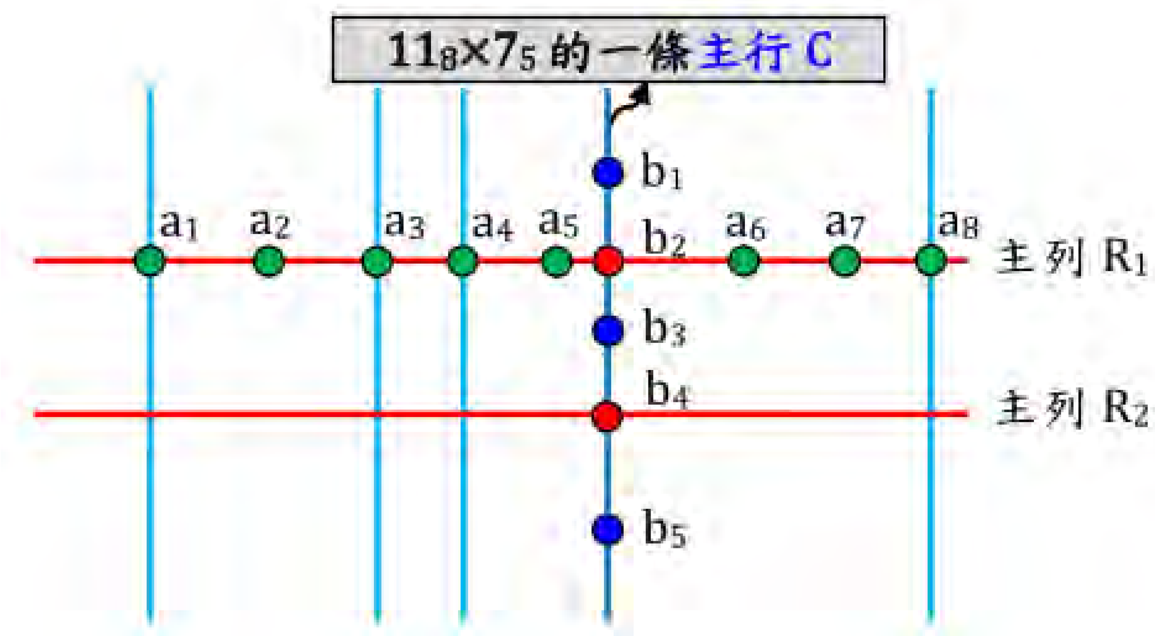


圖8. 探討 $11_8 \times 7_5$ 前8條主行中的某1條上的前5大編號

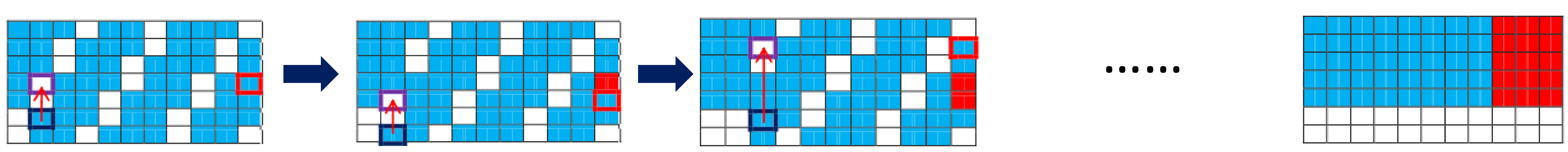
構造指定人數的排列

先排出收場地人數最大值

77	70	63	16	56	49	10	42	35	28	2
76	69	18	62	55	48	9	41	34	4	27
75	68	17	61	54	12	47	40	33	3	26
74	20	67	60	53	11	46	39	6	32	25
73	19	66	59	14	52	45	38	5	31	24
22	72	65	58	13	51	44	8	37	30	23
21	71	64	15	57	50	43	7	36	29	1

圖9. 排出 $11_8 \times 7_5$ 收場地人最大值，簡記為圖10-a

適當的對調以減少人數



a.55人　b.54人　c.53人　……　d.40人

圖10. 構造出 $11_8 \times 7_5$ 指定人數的過程

立體

必收場地的編號

結果6.25. 給定 $A_a \times B_b \times H_h$，必收場地的編號：

$$A \times B \times H、A \times B \times H - 1、A \times B \times H - 2、\cdots、A \times B \times H - \min\{a,b,h\} + 1$$

必不收場地的編號

結果6.26. 給定 $A_a \times B_b \times H_h$，必不收場地的編號：

$$1、2、3、\cdots、A + B + H - (a + b + h)$$

使指定編號收場地或不收場地

方法6.29(使得指定編號 x 收場地的方法). 若 $A + B + H - (a + b + h) + 1 \le x \le A \times B \times H - \min\{a,b,h\}$，在 x 的同列排入 $1、2、3、\cdots、A - a$，且在同行排入 $A - a + 1、A - a + 2、\cdots、A + B - (a + b)$，在同縱高排入 $A - (a + b) - 1、A - (a + b) - 2、\cdots、A + B + H - (a + b + h)$。

方法6.30(使得指定編號 x 不收場地的方法). 承方法6.29的條件，在與 x 同列排入 $A \times B \times H、A \times B \times H - 1、A \times B \times H - 2、\cdots$，$A \times B \times H - a + 1$，或在與 x 同行排入 $A \times B \times H、A \times B \times H - 1、A \times B \times H - 2、\cdots、A \times B \times H - b + 1$，或在與 x 同縱高排入 $A \times B \times H、A \times B \times H - 1、A \times B \times H - 2、\cdots、A \times B \times H - h + 1$。

收場地人數最大值

最大值的理想值

$$M(6_4 \times 4_3 \times 5_2) \le \min\{6 \times 2 \times 4, 4 \times 2 \times 6, 4 \times 4 \times 5\} = 6 \times 2 \times 4 = 4 \times 2 \times 6$$。

$M(6_4 \times 4_3 \times 5_2) \le$ 平面 I 收場地人數最大值×縱高4＝平面 II 收場地人數最大值×縱高6。

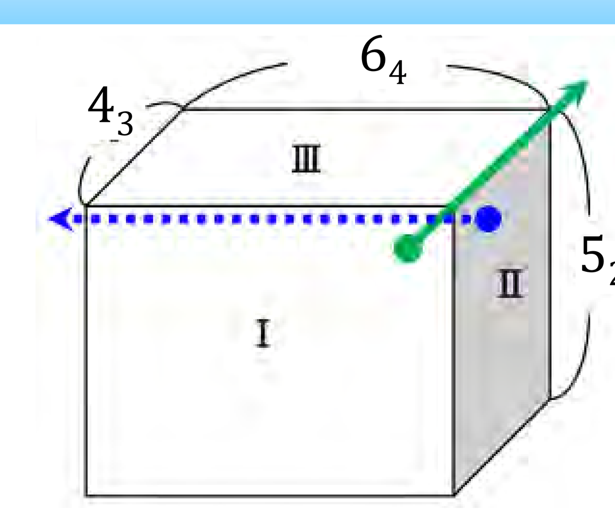


圖11. $6_4 \times 4_3 \times 5_2$ 示意圖

具體排法

方法6.31. 從圖11的平面 I 開始，以下皆指平面 I。

- 第k層右起第1行等同第k−1層第2行，然後向左依方法6.15標記收場地的位置。
- 直到每一層都標記後，從第一層右起從最大編號依序填入標記收場地的位置。
- 其餘未標記的位置，可任意填入剩下的編號。

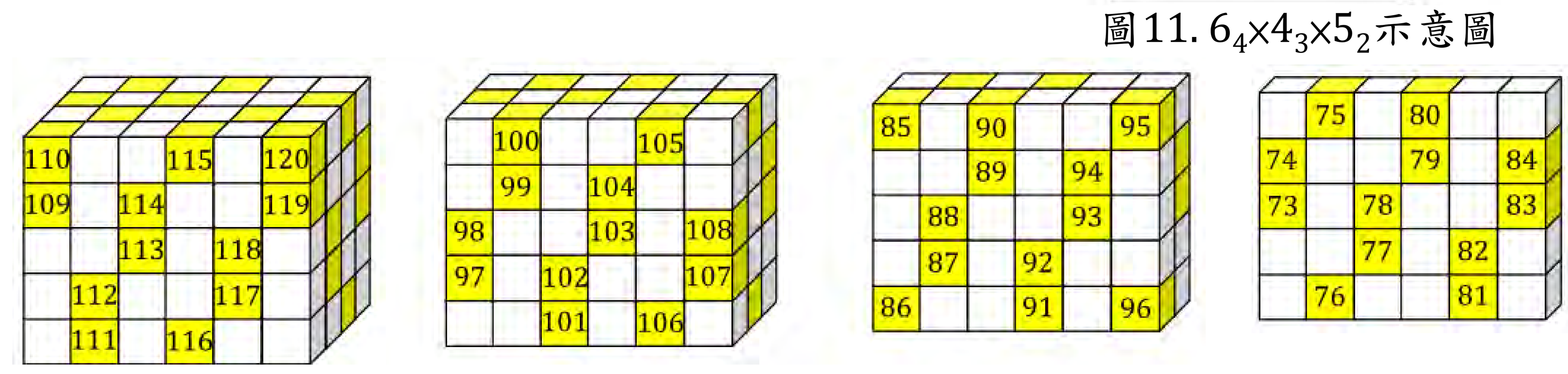


圖12. $6_4 \times 4_3 \times 5_2$ 依方法6.31排出收場地人數最大值

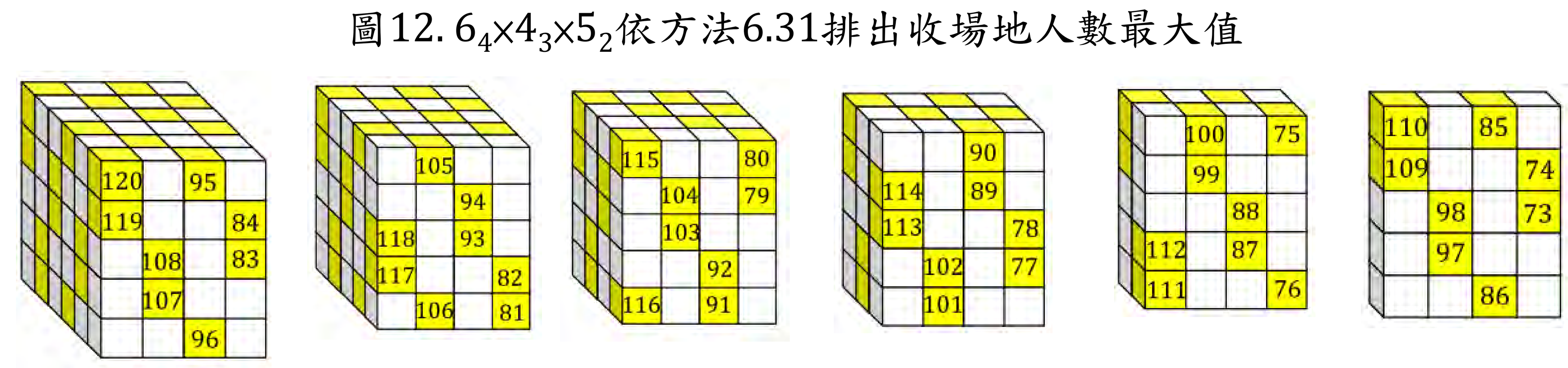


圖13. $6_4 \times 4_3 \times 5_2$ 排完最大值的排列後，從平面 II 沿圖10的藍色虛線，每一層的排法

排法成立的理由

簡略說明方法6.31符合問題2.4的規定. 設收場地人數最大值為 $A \times B \times H$ 一即 $M(A_a \times B_b \times H_h) =$

＝(平面 I 收場地人數最大值) ×B＝(平面 II 收場地人數最大值) ×A。

1. 平面 I 依排法必合乎規定。
2. 平面 II 第 k 層是在複製平面 I 第 k 行起按收場地人數最大值的安排，
3. 平面 III 的列與行也會符合規定。

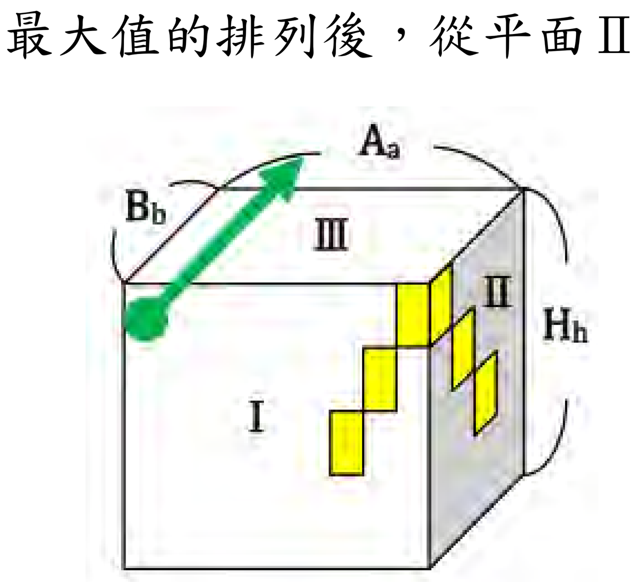


圖14. 平面 I 第一層依收場地人數最大值的排列，黃色方塊表示每1行要收場地的位置

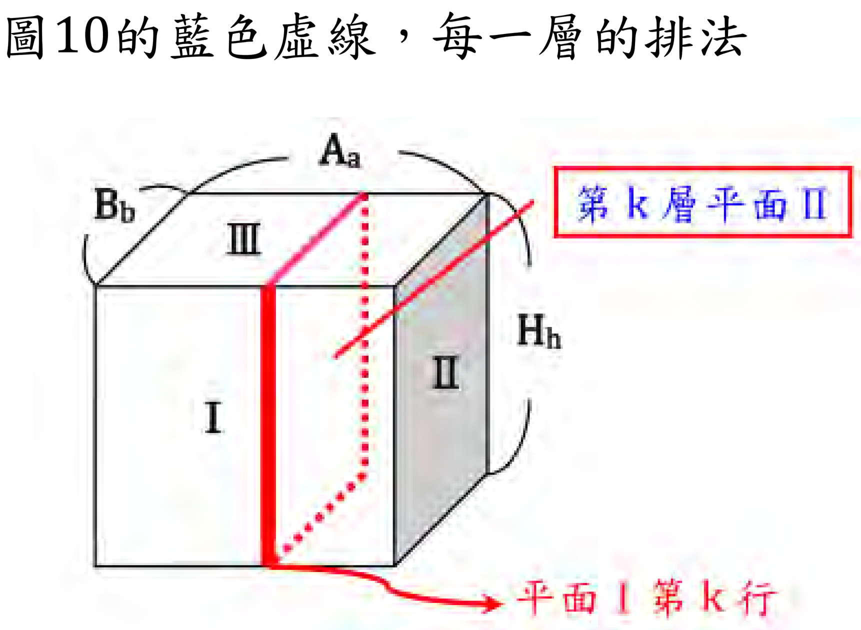


圖15. 第 k 層平面 II 即為每一層平面 I 的第 k 行

收場地人數最小值

記號的觀點

1. 若在某方向要舉手則記1個記號。
2. 每1個記號可看作來自某平面的單一記號。
3. 將 $A_a\times B_b\times H_h$ 中恰有1記號與2記號人數最大值記作

$$M_{1,2}(A_a\times B_b\times H_h)\quad。$$

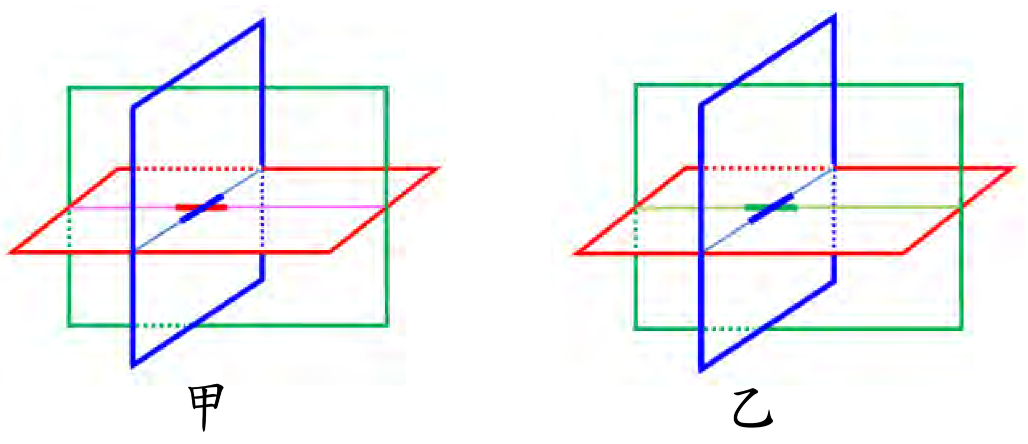


圖16. 2個記號可看作分別來自不同平面的單一記號

最小值的理想值

$m_0(7_5\times9_6\times11_7)$記作在立體$7_5\times9_6\times11_7$中沒有任何記號的編號數量之最小值。簡略說明下列式子成立：

$$m(7_5\times9_6\times11_7)+M_{1,2}(7_5\times9_6\times11_7)+m_0(7_5\times9_6\times11_7)=7\times9\times11。$$

命m_3為排出$M_{1,2}(7_5\times9_6\times11_7)$時，具有3個記號的編號數量、$M_0$為沒有記號的編號數量。

$$m_3+M_{1,2}(7_5\times9_6\times11_7)+M_0=7\times9\times11$$

由於$M_{1,2}(7_5\times9_6\times11_7)$已收集最多產生恰有2記號與1記號編號數量記號，因此$m_3=m(7_5\times9_6\times11_7)$，$M_0=m_0(7_5\times9_6\times11_7)$。

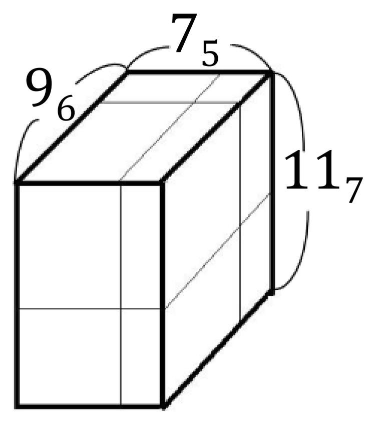


圖17. $7_5\times9_6\times11_7$示意圖

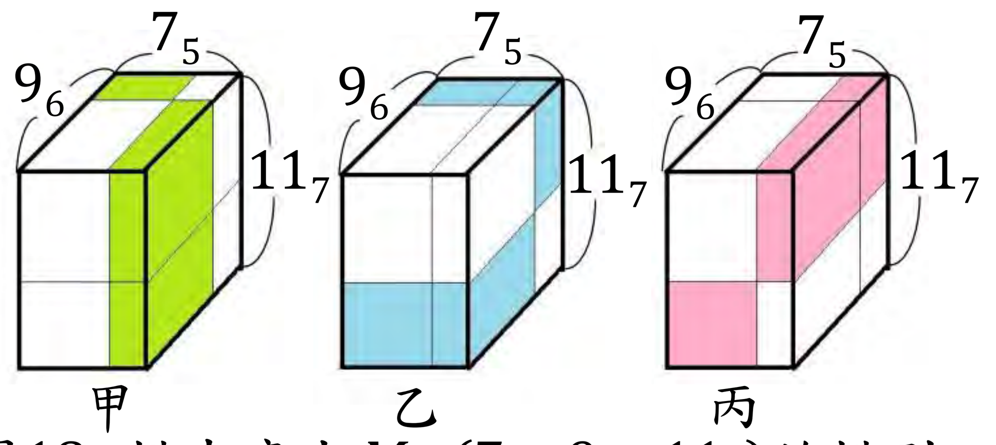


圖18. 排出產生$M_{1,2}(7_5\times9_6\times11_7)$的排列，著色部份代表恰有1記號或恰有2記號的編號

具體排法

方法6.33. 以$7_5\times9_6\times11_7$為例，在$7_5\times9_6$的平面，第一層填入$7\times9\times11$、$7\times9\times11-1$、$7\times9\times11-2$、…、$7\times9\times11-62$，依平面最小值的排法，將第一層平面填完，接著第二層平面依同樣配置，從編號$7\times9\times11-63$填起，繼續填滿第二層，…，如此下去，直到填完整個立體。

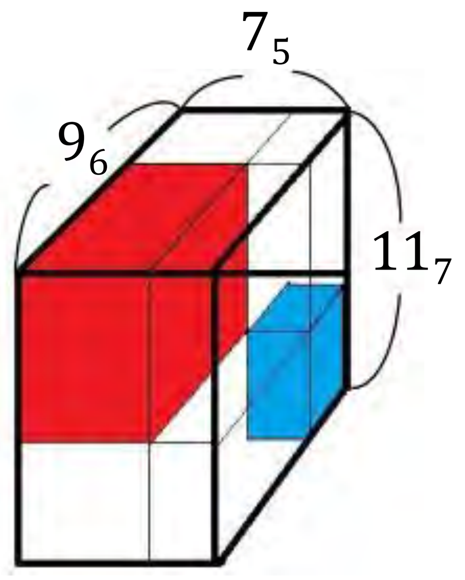


圖19. 排出$7_5\times9_6\times11_7$收場地人數最小值的排列

構造指定人數收場地

構造方法

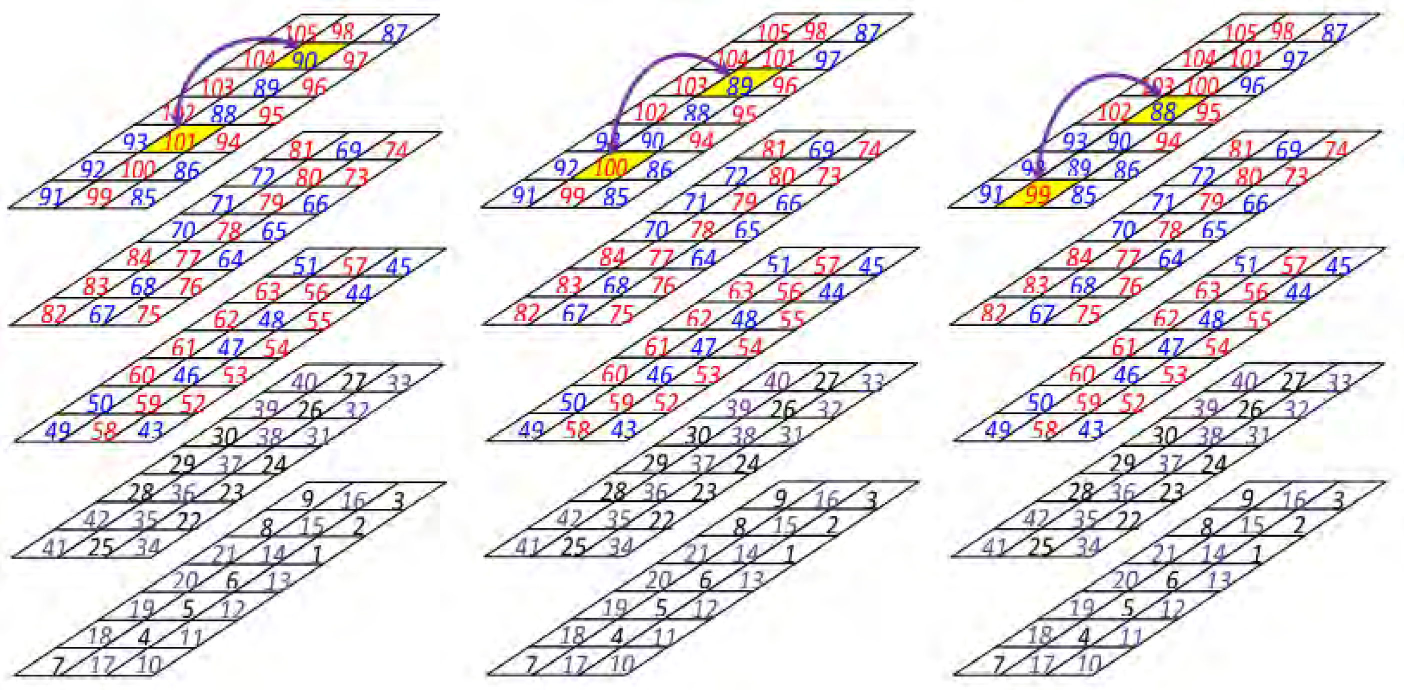


圖20. $7_5\times9_6\times11_7$適當的在同平面對調編號，收場地人數減少

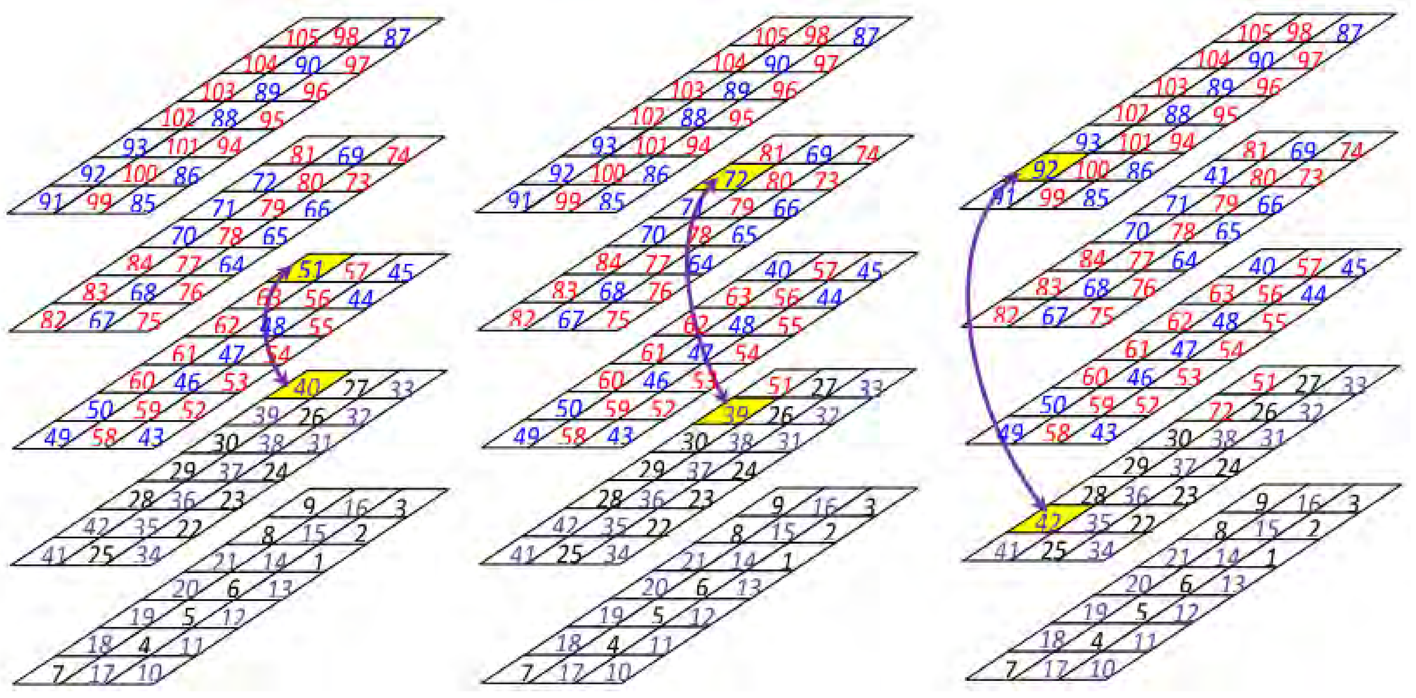


圖21. $7_5\times9_6\times11_7$適當的在同縱高對調編號，收場地人數增加

構造方法成立的理由

- $a\times B\times h$人～$a\times b\times h$人. 上層編號移動時不影響下層收場地人數，每個平面收場地人數由平面最大值逐漸變成最小值。
- $a\times B\times h$人～$a\times B\times H$人. 紅框為預定要收場地的位置，本來B和D不收場地，但分別和F及G對調後，B和D皆可收場地。

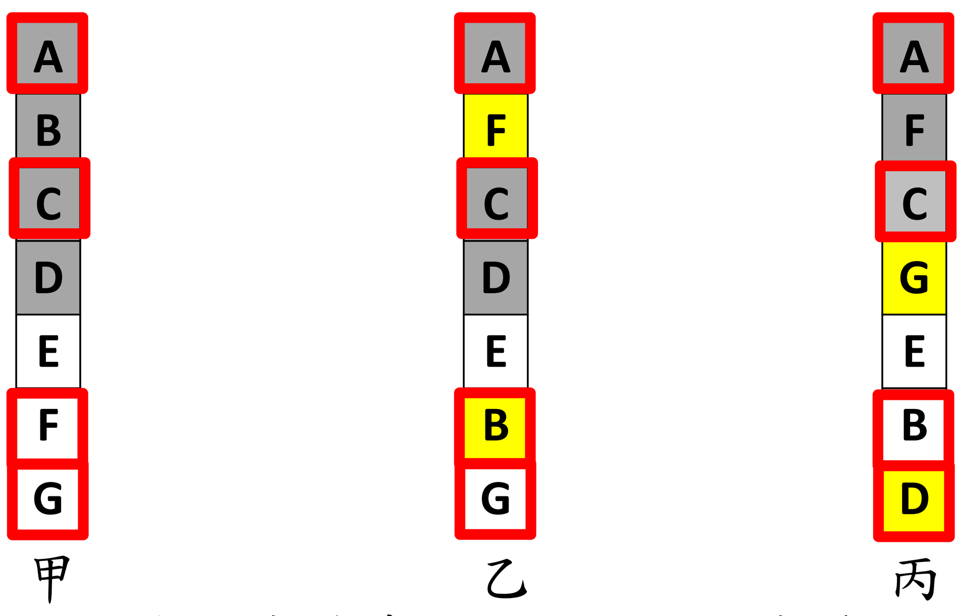


圖22. 在縱高適當對調編號，人數會增加

結論

一、平面的結論

(一)依身高由矮至高依次編號：1、2、3、…、$A\times B$，必收場地的編號為：$A\times B$、$A\times B-1$、$A\times B-2$、…、$A\times B-\min\{a,b\}+1$；必不收場地的編號為：1、2、3、…、$(A+B)-(a+b)$；

(二)承(一)，當 $A+B-(a+b)+1\le x\le A\times B-\min\{a,b\}$ ，分別給出使編號 x 收場地與不收場地的排列方法；

(三)收場地人數最大值為$\min\{A\times b,B\times a\}$；

(四)收場地人數最小值為 $a\times b$；

(五)當$a\times b\le p\le\min\{A\times b,B\times a\}$，給出恰使得 p人收場地的排列方法。

二、立體的結論

(一)依身高由矮至高依次編號：1、2、3、…、$A\times B\times H$，必收場地的編號為：$A\times B\times H$、$A\times B\times H-1$、…、$A\times B\times H-\min\{a,b,h\}+1$；必不收場地的編號為：1、2、3、…、$(A+B+H)-(a+b+h)$；

(二)當$A+B+H-(a+b+h)+1\le x\le A\times B\times H-\min\{a,b,h\}$，分別給出使編號$x$收場地與不收場地的排列方法；

(三)收場地人數最大值為 $\min\{A\times B\times h,A\times b\times H,a\times B\times H\}$；

(四)收場地人數最小值為 $a\times b\times h$；

(五)當$a\times b\times h\le p\le\min\{A\times B\times h,A\times b\times H,a\times B\times H\}$，給出恰使得 p人收場地的排列方法。

參考文獻

一、游森棚（民107）。九人收場地。**科學研習月刊，57(2)**，44。
二、南一文教事業教科書編輯委員會(民107)。正方體和長方體。**國民小學數學課本**(第10冊)。臺南市：國家教育研究院。
三、南一文教事業教科書編輯委員會(民107)。怎樣列式。**國民小學數學課本**(第10冊) 。臺南市：國家教育研究院。