中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

探究精神獎

080414

三角形的趣味勞作—探討角平分線性質

學校名稱：高雄市新興區新興國民小學

作者：	指導老師：
小五 蘇宥蓁	陳怡萍

關鍵詞：角平分線、連動桿、外接圓

摘　要

為了某一個國際型數學比賽，在搜尋以前的一些數學考古題當中，發現有一些題目與角平分線有相關的考題。在研究這些考題當中,有了一些想法及靈感可以與連動桿的相互結合。在研究的過程當中，自己親手動手設計與製作連動桿，並且，使用的材料選用以符合環保精神為主的工具製作教具，完成此項的研究。

壹、研究動機

因為資優班要看一些科普的課外知識書籍，因此，筆者就萌生對幾何有很大的興趣，意外發現這個問題後，因為有平分線應用在這題目上，而如何還原圖形，這件事情更深深吸引了筆者，於是筆者決心投入精神研究題目。且加上以前的學校戶外活動課程中，也接觸過連動桿的活動，因此，筆者希望能結合兩者，相互應用在題目上設計。

貳、研究目的

一、 了解原題目及其解法

二、 研究連動桿的設計原理

三、 自己設計零件，製作連動桿，與原始題目相呼應。

參、研究設備及器材

一、圓規。

二、直尺。

三、三角板。

四、筆紙。

五、工業用打動器。

六、工業用剪刀。

七、雞眼扣。

八、螺帽。

九、螺絲。

十、厚紙板。

十一、牛皮厚紙板

肆、研究過程與方法

一、文獻探討

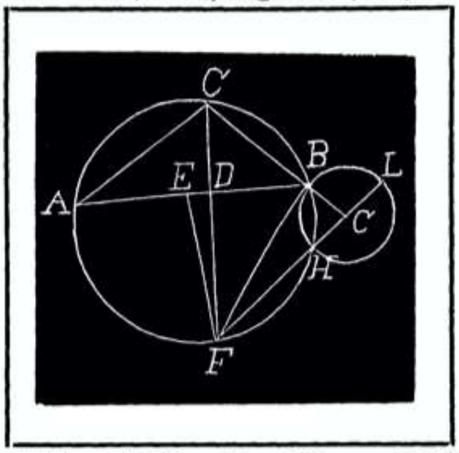
(一) 原始題目：

已知 △ABC 之頂角∠C 之角平分線長 M，底邊 AB 長以及∠ ACB 之大小，求作此三角形。

310. Proposed by L. H. MacDONALD, A. M., Ph. D., Sometime Tutor in the University of Cambridge, Jersey City, N. J.

Construct a plane triangle having given the base, the vertical angle, and the bisector of the vertical angle.

Solution by G. B. M. ZERR, A. M., Ph. D., Parsons, W. Va.; J. SCHEFFER, A. M., Hagerstown, Md., and C. N. SCHMALL, A. B., 89 Columbia Street, New York.

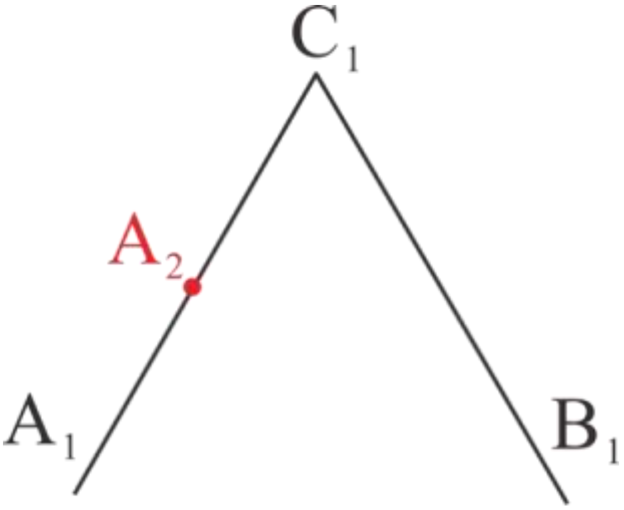


Upon the given base *AB* construct a circle whose segment *ACB* shall contain the given vertical angle. Through *E*, the mid-point of *AB*, draw *EF* perpendicular to *AB*, meeting the circumference at *F*. Join *FB*, and perpendicular to *FB* draw *BG* equal to one half the given bisector of the vertical angle. With *G* as center and *BG* as radius describe the circle *BHL*, and draw *FGL*. With *F* as center, *FL* as radius, describe a circle cutting the given circle in *C*. Join *FC*, cutting *AB* in *D*. Then *ABC* is the triangle required.

換句話說：有兩位小朋友在討論數學，其中甲同學先畫了一個三角形，並且，畫出頂角 C 之平分線，在旁邊另一處畫出底邊線段長 AB，然後擦掉底邊與延長兩腰，完成後拿圖給乙同學，問乙同學有辦法以尺規作圖還原此三角形嗎？

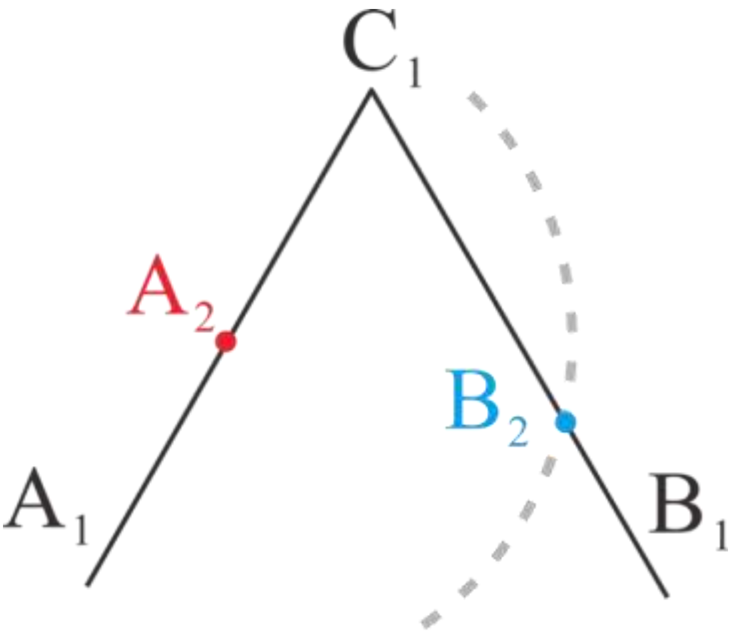
(二) 解決問題的方法：已知$\angle A_1C_1B_1$為題目給定之頂角，底邊長為 AB

Step1. 根據圖一 在$\angle A_1C_1B_1$之 C_1A_1 邊上任取一點 A_2



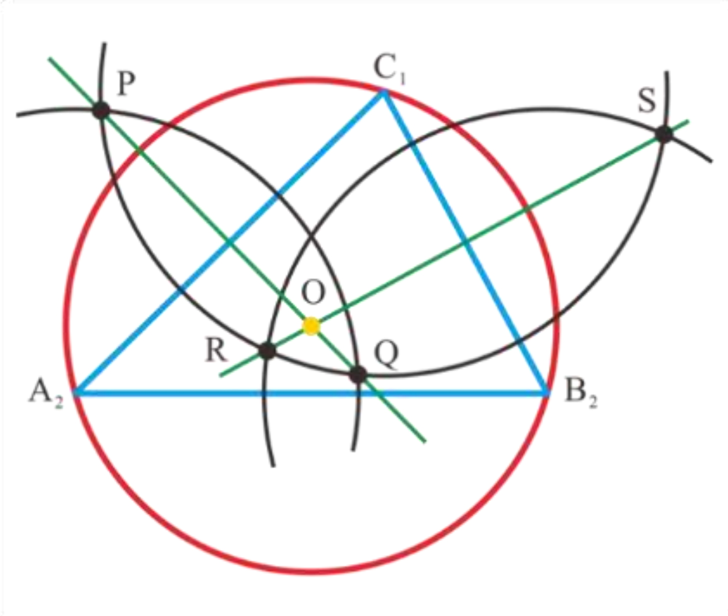
圖一

Step 2. 以 A_2 為圓心，AB 長為半徑畫弧相交 C_1B_1 於 B_2，達 A_2B_2＝AB (給定的底邊長)。



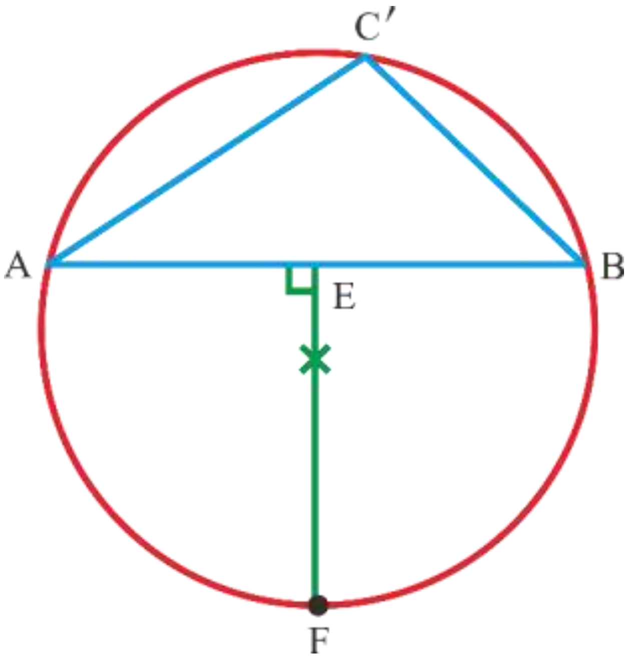
圖二

Step 3. 做 A_2C_1、B_2C_1 之中垂線交於 O_1，以 O_1 為圓心，O_1A 為半徑畫圓。



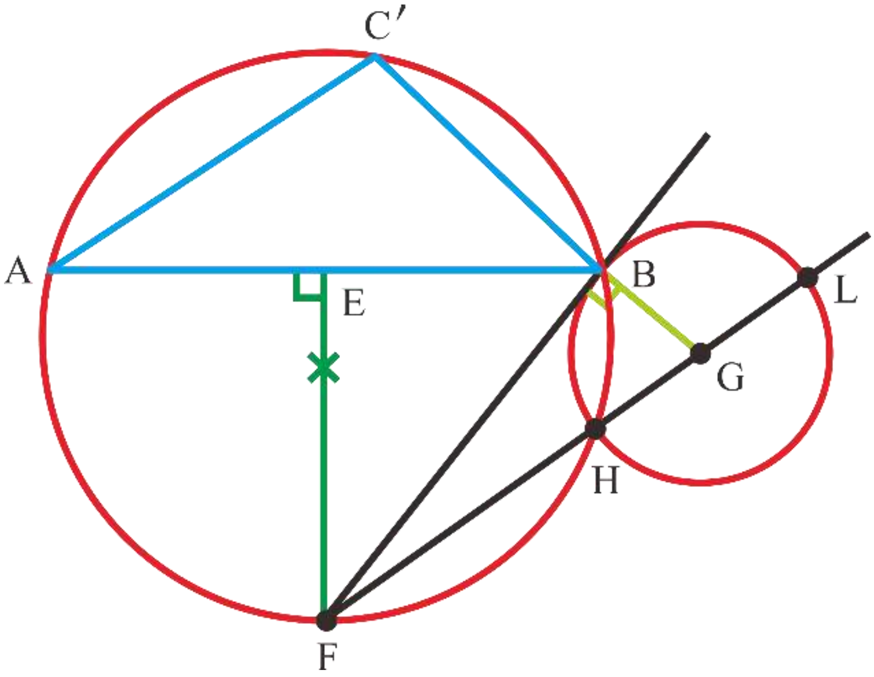
圖三

Step 4. 找出外接圓後，回到原題目，做$\overline{AB}$的中垂線交$\overline{AB}$於點 E，圓 O 於 F 點。



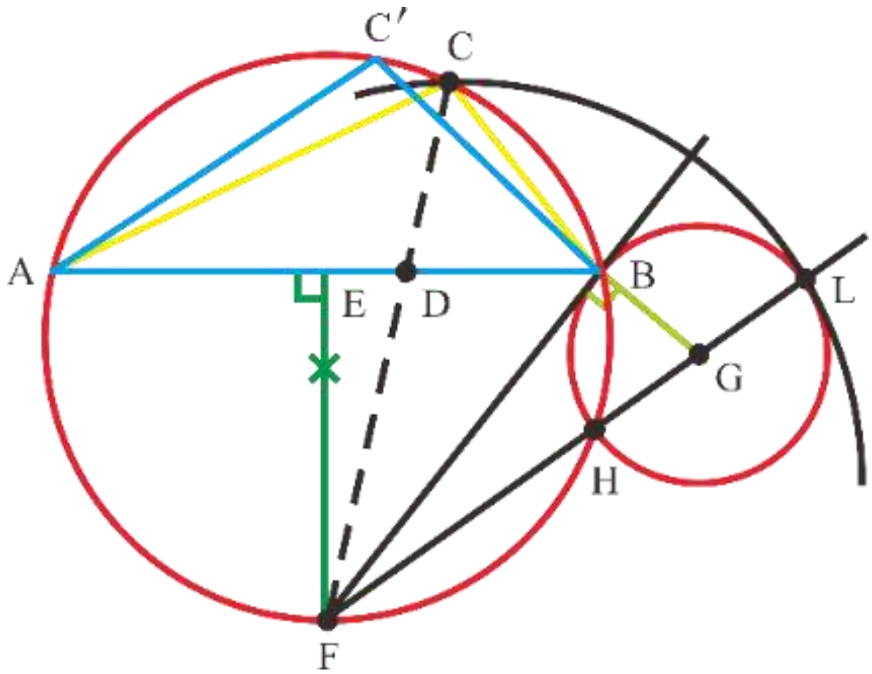
圖四

Step 5. 連 BF 做 BG⊥BF 其中 BG ＝½M (題目給定的底邊長)，以 G 為圓心，
BG 為半徑畫圓，延長所交圓 G 於 L 點



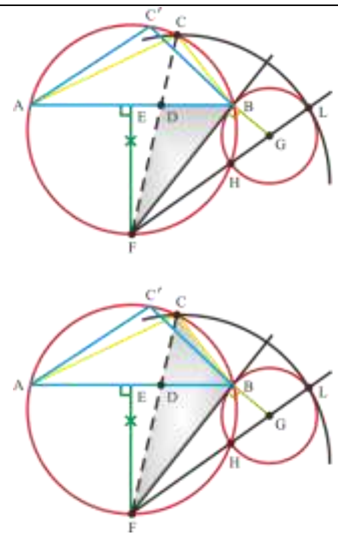
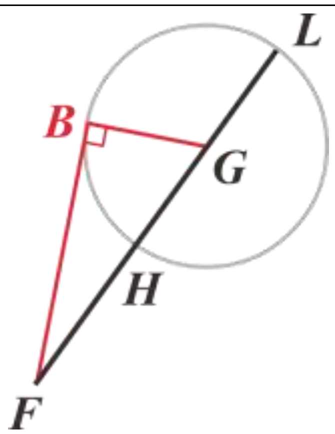
圖五

Step 6. 以 F 為圓心，FL 為半徑畫弧交圓 O，於 C，則ΔABC 即為所求

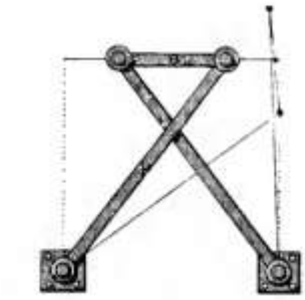


圖六

(三) 證明：已知 HL 為原三角形之底邊長

∵ EF 垂直平分 AB ∴ $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{FB}$ ⇒ ∠ACF ＝∠BCF ⇒ CD 為△ACB 之頂角平分線 同理 ∠FCB ＝∠FBA 在△FCB、△FBD 中，又因為∠CFB 是共用角 ⇒ △FCB～△FBD (AA 相似性質) ⇒ FC：FB ＝ FB：FD (對應邊等比例) …(*)	 圖七
根據圓的外冪性質 FB × FB ＝ FH × FL ⇒ FL：FB ＝ FB：FH 又 FL ＝ FC (圖七)，則上式可得 ⇒ FC：FB ＝ FB：FH …(**) 則由(*)、(**)可得 FB：FD ＝ FB：FH ⇒ FD ＝ FH ⇒ CD ＝ FC－FD ＝ FL－FH ＝ HL	 圖八

二、研究 I：古書上所畫出的直線的連動桿



圖九

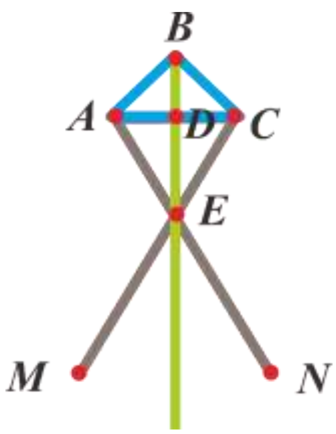
Kempe 的著作中是以圖七的方式畫出直線，了解 Kempe 的設計的用途後，筆者思考如何將此設計，應用在原本的題目上。

三、研究 II：找出外心的連動桿設計

經過文獻探討後，筆者發現，解此一題目時，找出外心是重要的關鍵點。

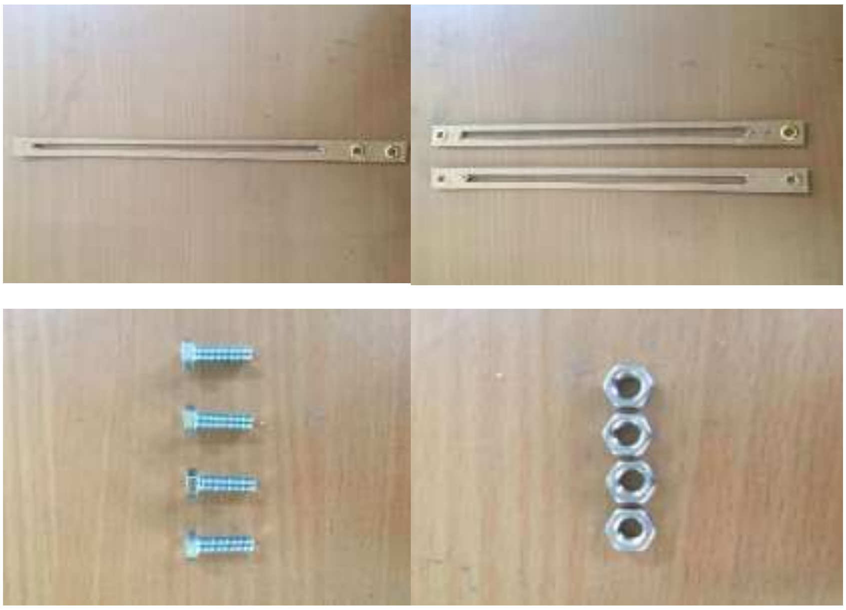
(一) 筆者自創的連動桿設計圖：

以等腰三角形 ABC 之頂點 B 與底邊 AC 之中點 D 為準，加入中心軸 BDE(綠色)，由於 AE＝CE、ME＝NE，則中心軸必通過線段 MN 之中點



圖十

(二) 零件的製作



圖十一

(三) 成品的展示

圖十二

伍、研究結果

一、原始題目與解法，讓筆者更深刻了解外心圓與相似形的應用。

二、根據幾何原理，製作出實體的連動桿。

三、透過手作，了解理論與實際的結合，成為難能可貴的學習經驗。

四、在本題目中，筆者也學到了逆向思考的經驗及學習設計。

五、用牛皮紙板、金屬雞眼扣等物品，皆符合環保理念。

陸、討論

一、在研究過程中，我們所應用的理論：

(一) 圓的外冪性質。

(二) 等弧之圓內角與圓周角的關係。

(三) 相似形，對應邊等比例。

二、在研究過程中，我們得到：

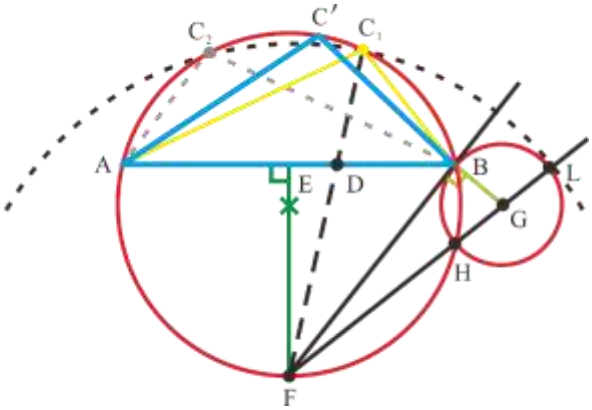
(一) 一開始，只使用普通厚紙板和兩腳釘，誤差極大；厚紙板的穩定性也不好，沒辦法達到理想的效果，知道材料之重要性的體悟。

(二) 經過多次的研究、討論與搜尋適合的材料，發現使用牛皮厚紙板和工業用雞眼扣穩定性較高，了解鋼性對於機械操作的重要性。

(三)原來勞作可以跟數學結合。

(四)經研究後發現，原始題目有兩個解。

作圖步驟中若以 F 為圓心，FL 為半徑畫弧交圓 O (弧長穿過整個圓)於 C_1、C_2，則ΔABC_1、ΔABC_2 即為所求



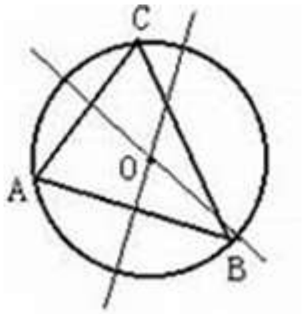
圖十三

柒、結論

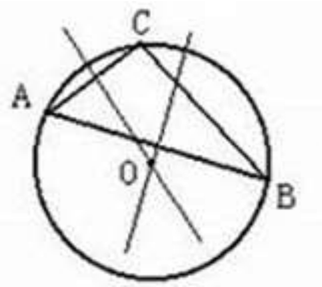
一、由於 1907 距今已超過百年，當時的人使用語言的方式與表達的形式跟現在迥然不同加上又是英文的文獻，因此，原本無法清楚徹底的了解題意，雖然，曾經幾度想放棄，但是，秉持著學習培養『鍥而不捨』的精神，在經過多次摸索與老師討論後，改以說故事的方式重新詮釋這個題目才讓自己真正明白題意，這對筆者而言是一個重要的新體驗，對於看不懂的知識如何耐下心來多次嘗試理解並解以舉例淺顯易懂的生活事件幫助自己了解與解釋給他人分享。

二、幾何證明不是國小數學的範圍，可是，透過本次的科展研究筆者學到了如何證明此一幾何的命題與增加了課外經驗，更學到了做事情的原則與完整性是很重要的，給了題目也要有給完整的證明才叫做做完事情，讓筆者有機會了解做學問與做事情該因有的負責態度。

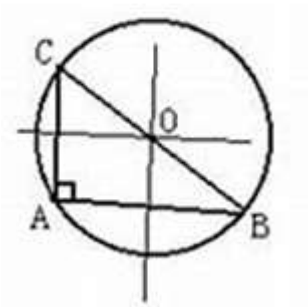
三、因題目最重要是找出三角形的外心，因反覆的畫圖中，發現三角形的大小會改變外心的位置，因此，分別畫出銳角三角形、頓角三角形、直角三角形；



圖十四



圖十五



圖十六

把圓的半徑設為相同的固定值，銳角三角形的外心在三角形內（圖十四），頓角三角形的外心在三角形外（圖十五），直角三角形的外心在三角形上（圖十六）。

四、 本次的題目帶給筆者逆向思考作圖過程的經驗,不論是課本上的知識或是生活上的知識,大多是都是直接給我們結果與結論，鮮少要我們去探究這知識的回朔，本次的經驗在研究回朔的過程中我們反而得到的更多也學到的更多，也啟蒙了逆向思考的方法，有時我們需要鞭策自我超越過去小小的一步其實就可以有海闊天空的成果。

五、由於科展的精神包含了提倡環保的理念，因此，配合響應此一理念，我們的製作過程中材料分別選用了厚紙板、金屬雞眼釦等，避免使用塑膠製品與未來會形成環境污染的材質，藉以達到環保的訴求。

六、由於在校的課業多半是屬於被動式的接受，相較之下主動的學習是比較難得的，筆者在此要感謝學校老師的指導與家人的支持，讓自己有了這次的科展研究可以有機會主動學習設計件，並且，自己動手製作體驗實作的精神，從毫無構想到了有想法甚至做出小小的東西，都是想絞盡腦汁，雖然，由於過去完全沒有類似的經驗以至於初期做出來的零件未盡理想而失敗了好幾次,最後有了先前的經驗才能讓自己做的零件品質穩定了下來,途中遇到的許多困難都是和老師們一起面對、解決，才完成了作品，我們高興極了，那種成就感不知如何形容! 而因為這次的科展製作,我們更懂的分工合作,互相勉勵與包容,彼此之間才能磨擦出美麗火花，也清楚了解到，即便是連動桿，也能做出美麗的作品。

捌、參考資料及其他

一、The American Mathematical Monthly, Vol. 14, No. 4 (Apr., 1907), pp. 75-76

二、How to draw a straight line ; a lecture on linkages By Kempe Alfred Bray 1877

三、Geogebra: https://www.geogebra.org

四、維基百科:http://zh.wikipedia.org

【評語】080414

本研究從了解一個原始的數學題目 (作出符合已知條件的三角形) 出發，嘗試尋求解法，此部分的原創性雖稍嫌不足；然而作者能利用角平分線的相關性質，進一步設計並製作連動桿，不但能透過動手體現實作的精神，也能使數學的學習獲得連結與應用，值得嘉許；惟建議對於自製連動桿的設計圖，除了說明結構外，宜清楚標示固定點、移動點、移動範圍……等，對於連動桿實體，宜介紹其功能，將更有助於讀者瞭解。

作品海報

摘　要

為了某一個國際型數學比賽，在搜尋以前的一些數學考古題當中，發現有一些題目與角平分線有相關的考題。在研究這些考題當中，有了一些想法及靈感可以與連動桿的相互結合。在研究的過程當中，自己親手動手設計與製作連動桿，並且，使用的材料選用以符合環保精神為主的工具製作教具，完成此項的研究。

壹 研究動機

因為資優班要看一些科普的課外知識書籍，因此，筆者就萌生對幾何有很大的興趣，意外發現這個問題後，因為有平分線應用在這題目上，而如何還原圖形，這件事情更深深吸引了筆者，於是筆者決心投入精神研究題目。且加上以前的學校戶外活動課程中，也接觸過連動桿的活動，因此，筆者希望能結合兩者，相互應用在題目上設計。

貳 研究目的

一、了解原題目及其解法
二、研究連動桿的設計原理
三、自己設計零件，製作連動桿，與原始題目相呼應。

叁 研究過程與方法

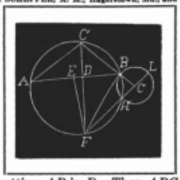
❶ 文獻探討

(一) 原始題目：
已知△ABC之頂角∠C之角平分線長M，底邊AB長以及∠ACB之大小，求作此三角形。

310. Proposed by L. H. MacDONALD, A. M., Ph. D., Sometime Tutor in the University of Cambridge, Jersey City, N. J.

Construct a plane triangle having given the base, the vertical angle, and the bisector of the vertical angle.

Solution by G. B. M. ZERR, A. M., Ph. D., Parsons, W. Va.; J. SCHEFFER, A. M., Hagerstown, Md., and C. N. SCHMALL, A. B., 89 Columbia Street, New York.



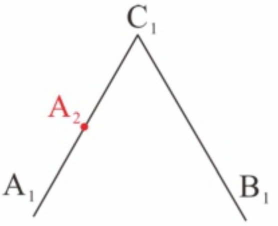
Upon the given base *AB* construct a circle whose segment *ACB* shall contain the given vertical angle. Through *E*, the mid-point of *AB*, draw *EF* perpendicular to *AB*, meeting the circumference at *F*. Join *FB*, and perpendicular to *FB* draw *BG* equal to one half the given bisector of the vertical angle. With *G* as center and *BG* as radius describe the circle *BHL*, and draw *FGL*. With *F* as center, *FL* as radius, describe a circle cutting the given circle in *C*. Join *FC*, cutting *AB* in *D*. Then *ABC* is the triangle required.

換句話說：有兩位小朋友在討論數學，其中甲同學先畫了一個三角形，並且，畫出頂角C之平分線，在旁邊另一處畫出底邊線段長AB，然後擦掉底邊與延長兩腰，完成後拿圖給乙同學，問乙同學有辦法以尺規作圖還原此三角形嗎？

(二) 解決問題的方法：已知$\angle A_1C_1B_1$為題目給定之頂角，底邊長為AB

STEP 1

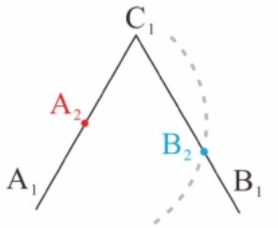
根據圖一在$\angle A_1C_1B_1$之C_1A_1邊上任取一點A_2。



（圖一）

STEP 2

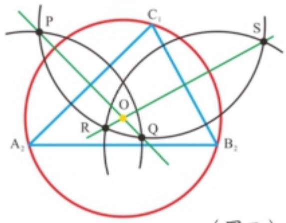
以A_2為圓心，AB長為半徑畫弧相交C_1B_1於B_2，達A_2B_2＝AB（給定的底邊長）。



（圖二）

STEP 3

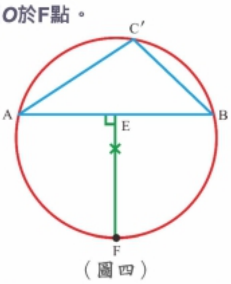
做A_2C_1、B_2C_1之中垂線交於O_1，以O_1為圓心，O_1A_2為半徑畫圓。



（圖三）

STEP 4

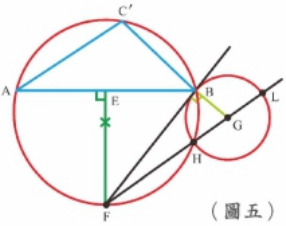
找出外接圓後，回到原題目，做$\overline{AB}$的中垂線交$\overline{AB}$於點E，圓O於F點。



（圖四）

STEP 5

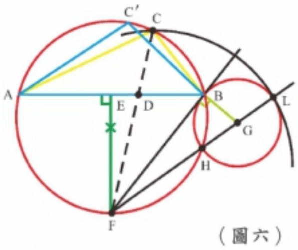
連BF做BG⊥BF其中BG=½M（題目給定的底邊長），以G為圓心，BG為半徑畫圓，延長所交圓G於L點。



（圖五）

STEP 6

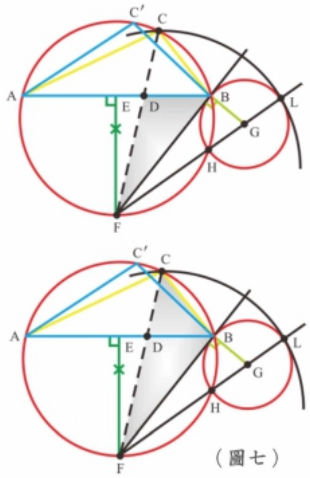
以F為圓心，FL為半徑畫弧交圓O，於C，則△ABC即為所求。



（圖六）

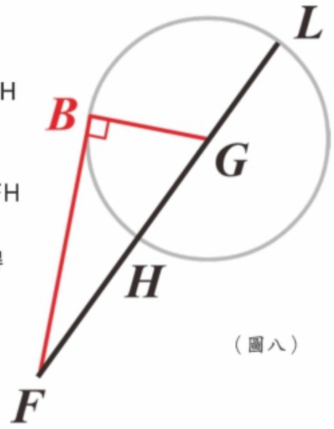
(三) 證明：已知HL為原三角形之底邊長

∵ EF垂直平分AB
∵ $\overset{\frown}{AF}=\overset{\frown}{FB}$
⇒∠ACF =∠BCF
⇒ CD為△ACB
之頂角平分線
同理∠FCB =∠FBA
在△FCB、△FBD中，
又因為∠CFB是共用角
⇒△FCB～△FBD
(AA相似性質)
⇒FC：FB = FB：FD
(對應邊等比例) ... (*)



(圖七)

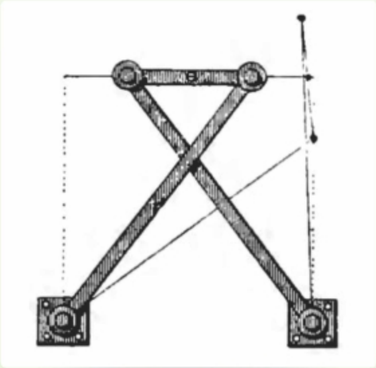
根據圓的外冪性質
FB × FB = FH × FL
⇒FL：FB = FB：FH
又 FL = FC (圖七)，
則上式可得
⇒FC：FB = FB：FH
... (**)
則由 (*)、(**)可得
FB：FD = FB：FH
⇒FD = FH
⇒CD = FC - FD =
FL - FH = HL



(圖八)

❷ 研究 I：古書上所畫出的直線的連動桿

Kempe的著作中是以圖七的方式畫出直線，了解Kempe的設計的用途後，筆者思考如何將此設計，應用在原本的題目上。



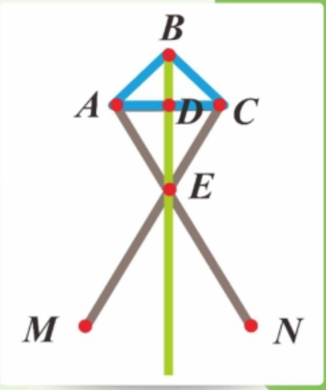
(圖九)

❸ 研究 II：找出外心的連動桿設計

經過文獻探討後，筆者發現，解此一題目時，找出外心是重要的關鍵點。

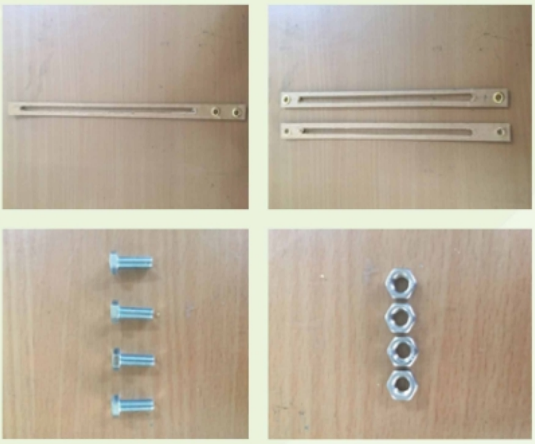
(一) 筆者自創的連動桿設計圖：

以等腰三角形ABC之頂點B與底邊AC之中點D為準，加入中心軸BDE(綠色)，由於AE = CE、ME = NE，則中心軸必通過線段MN之中點。



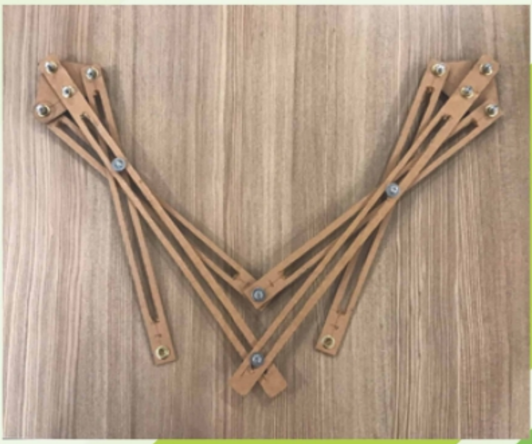
(圖十)

(二) 零件的製作



(圖十一)

(三) 成品的展示



(圖十二)

肆 研究結果

一、原始題目與解法，讓筆者更深刻了解外心圓與相似形的應用。
二、根據幾何原理，製作出實體的連動桿。
三、透過手作，了解理論與實際的結合，成為難能可貴的學習經驗。
四、在本題目中，筆者也學到了逆向思考的經驗及學習設計。
五、用牛皮紙板、金屬雞眼扣等物品，皆符合環保理念。

伍 討論

一、在研究過程中，我們所應用的理論：

(一) 圓的外冪性質。

(二) 等弧之圓內角與圓周角的關係。

(三) 相似形，對應邊等比例。

二、在研究過程中，我們得到：

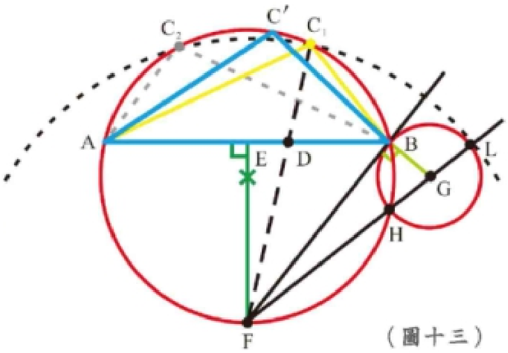
(一) 一開始，只使用普通厚紙板和兩腳釘，誤差極大；厚紙板的穩定性也不好，沒辦法達到理想的效果，知道材料之重要性的體悟。

(二) 經過多次的研究、討論與搜尋適合的材料，發現使用牛皮厚紙板和工業用雞眼扣穩定性較高，了解鋼性對於機械操作的重要性。

(三) 原來勞作可以跟數學結合。

(四) 經研究後發現，原始題目有兩個解。

作圖步驟中若以F為圓心，FL為半徑畫弧交圓O（弧長穿過整個圓）於C_1、C_2，則$\triangle ABC_1$、$\triangle ABC_2$即為所求。

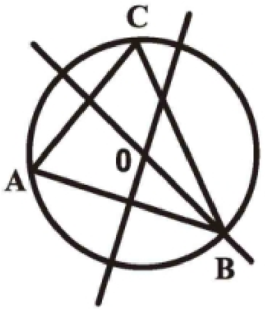


（圖十三）

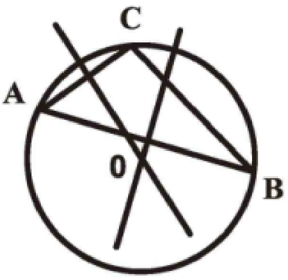
陸 結論

一 由於1907距今已超過百年，當時的人使用語言的方式與表達的形式跟現在迥然不同，加上又是英文的文獻，因此，原本無法清楚徹底的了解題意，但是，秉持著學習培養『鍥而不捨』的精神，改以說故事的方式重新詮釋這個題目才讓自己真正明白題意。

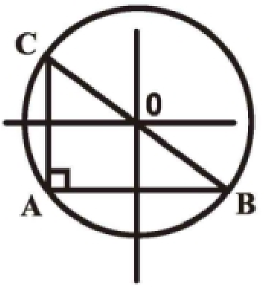
二 透過本研究筆者學到了如何證明此一幾何的命題與增加了課外經驗，了解不同三角形的外心為何。



（圖十四）



（圖十五）



（圖十六）

三 本次的題目帶給筆者逆向思考作圖過程的經驗，不論是課本上的知識或是生活上的知識，大多是直接給我們答案與結論，此研究增加許多再探的方向。

四 由於科展的精神包含了提倡環保的理念，因此，連動桿的製作配合響應此一理念。

五 透過科展研究，使筆者有機會主動學習設計出連動桿作品，體驗自己動手製作體驗實作的精神。

柒 參考資料及其他

一、The American Mathematical Monthly, Vol. 14, No. 4 (Apr., 1907), pp. 75-76

二、How to draw a straight line ; a lecture on linkages By Kempe Alfred Bray 1877

三、Geogebra: https://www.geogebra.org

四、維基百科:http://zh.wikipedia.org