中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

第一名

080413

形中有形

學校名稱：臺中市私立明道普霖斯頓國民小學

作者：	指導老師：
小六 簡碩君 小五 葉鎮宇 小五 李亭霓	陳志平 蔡欣怡

關鍵詞：正多邊形、相似三角形、多角星

得獎感言

連頂線，連接起我們的冠軍之路！

「第一名…恭喜臺中市明道普霖斯頓小學！」當主持人說完這句話時，我只有一個念頭：「這一整年辛苦都值得了！」從去年八月開始，我們和老師就絞盡腦汁，想找出一個沒有人研究過的主題，一直到開學，我們才決定研究同中心的內外正多邊形，看看我們能在其中找出什麼樣的秘密。經過好幾個月的探討終於有了一些成果！但參加臺中市科展比賽，我們卻只得到第二！我已經要畢業了，再也沒有機會和我最尊敬的志平主任一起研究數學，雖然傷心，我還是收拾起失落的心，繼續把這次研究成果不足的地方好好思考。全國賽來到充滿熱情的高雄市，眼見各路高手雲集，談笑風生，讓我更是輾轉反側，每天都用煩惱和疲累伴我入眠，即便如此，不服輸的心依然支持著我們，記得在全國科展的第三天晚上，我們非常努力地研究評審教授問我們的題目，終於在一番努力下解出了答案，那一刻，我竟然覺得：其實比賽的結果倒是其次，找出解答的那種喜悅之情才真是令人難以言表！

隔天我們抱著愉悅的心情和評審們分享我們的心得，我和評審老師相視一笑，好不開心！我心中想：「原來研究數學的路，就是這麼充滿荊棘和樂趣啊！」(簡碩君)

這是我第一次參加科展，因為我喜歡數學，所以選擇了數學科展，這一年的研究過程中，老師帶領我們在數學世界裡探索，每次的討論，都讓我吸收更多知識，用不同的角度來看待數學，在台中市市賽，我們雖然只拿到了第二名，但是我們並不氣餒，依然全力以赴進軍全國賽，我們希望能夠把我們的作品，完整的在全國賽中呈現，我們更努力去調整，謝謝指導老師，還有隊友們的互相完美協助，讓我們在全國賽裡，得到了夢寐以求的全國第一名，我們都好開心，這是我小學生涯中，最棒最美好的回憶了，接下來的一年我將繼續研究新的主題，希望明年我能再度站上這個頒獎台，再次享受得獎的感動！(葉鎮宇)

這真的是一個奇妙的過程，為了研究數學科展，每天中午幾乎沒有午休的時間，但我們還是甘之如飴，研究過程中想破頭的痛苦、找到解決方法的感動，這些到現在還是讓我印象深刻。高雄這五天的比賽過程中，我看到許多優秀的作品和選手，甚至有的作者只有一個人，真是令人佩服，當我們得到夢想中的第一名，一切的辛苦都化成了美麗的果實，謝謝志平主任的傾囊相助，謝謝創辦人、校長的全力支持，我曾在一份報告上看過一句話：「不做科展不會怎樣，做了科展，你的人生很不一樣。」我現在深深體會到這句話的涵意，科展的種子已經深深埋在我的心裡。(李亭霓)

賽前做好準備，把我們研究成果好好展現出來吧！

透過生動活潑的解說，讓參觀者了解我們的研究成果。

創辦人、校長、家長會會長和主任專程到頒獎會場為我們打氣！

摘要

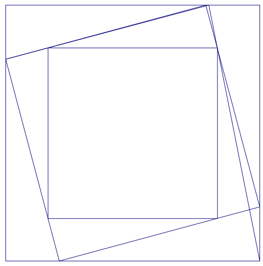
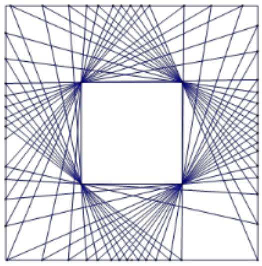
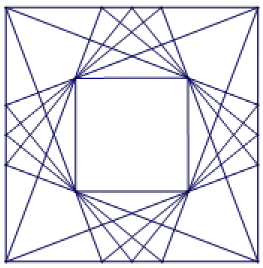
一、本研究探討正方形內有一個同中心的正方形，由外部正方形邊上的一個點出發，反覆對內部正方形的頂點作連頂線[註一]所產生的圖形。

二、我們發現原正多邊形和其內部同中心的正多邊形的邊長比例會有一個臨界值，若小於等於這個臨界值，反覆作連頂線的結果會產生原正多邊形的內接正多邊形，若大於臨界值，則在一定的條件下會產生多角星。

三、原正 n 邊形與其內部的正 n 邊形會產生內接正 n 邊形的邊長比值臨界值為

$\left\{\csc\left[(n-2)\times 90^\circ \div n\right]\right\}^2$。

四、整理出 X_n、外部正方形邊長 a 及內部正方形邊長 b 與繪製出來圖形三者之間的關係。

a、b 的關係	X_n	產生的圖形	圖例
$b<a\leq 2b$	最後形成一個定值 $\dfrac{b-\sqrt{b^2-(a-b)^2}}{2}$	內接正方形	
a >2b	無規則	無規則連頂線	
	固定數字重複	多角星	

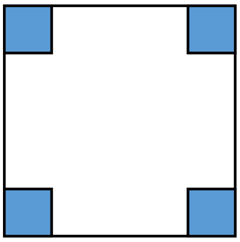
註一：請參閱專有名詞定義

壹、研究動機

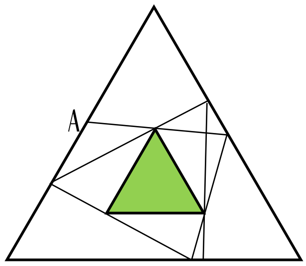
2015 年美國 AMC8 數學測驗的題目中有一個題目[1]：

「如圖一，在邊長為 5 公分的正方形的四個角落，分別切掉一個邊長為 1 公分的正方形。試問在剩下的區域內能放入最大的正方形面積為多少平方公分？」

另外臺灣師範大學數學系游森棚教授在科學研習月刊中[2]，發表一個題目：如圖二，正三角形的公園中有一個邊長為公園邊長$\frac{1}{3}$的小正三角形綠地，公園和綠地兩者方向相同，而且中心重合。兩三角形之間為開放空間，民眾可自由活動。小志從公園邊上的 A 點出發，每次都朝著綠地的頂點跑「切線」，跑到公園的另一邊的一點，然後再從這個點出發，反覆一直跑下去，能得到什麼結論？



圖一



圖二

這兩個題目乍看之下似乎沒什麼關聯性，但我們經過討論後，發現能從中找到許多有趣的結果，於是由這兩個題目為起點，開始我們「形中有形」的研究。

貳、研究目的

基於以上的研究動機，本研究的研究目的有二：

一、找出研究動機中兩個題目的解答。

二、改變內外正方形的比例，探討其連頂線的變化。

參、研究設備及器材

紙、筆、動態幾何系統 the geometer's sketchpad、計算機、Microsoft Excel 軟體、組合智慧片、白線、頂點珠、架構棒、GeoGebra 繪圖軟體。

肆、研究過程

一、專有名詞定義

連頂線：指由外部正方形邊上一點出發，連接同中心的內部正方形的頂點，再延伸至外部正方形邊上的線段。在科學研習月刊題目中以「切線」表示，但切線的定義為一條剛好觸碰到曲線上某一點的直線，與題目的意思不同，故另定名詞表示，而本研究中的 X_n 為第 n 次的連頂線在外部正方形上的交點與內部正方形邊的延長線之距離。

二、找出研究動機中兩個題目的解答

(一) AMC8 數學測驗的題目[1]

1.2015 年美國 AMC8 數學測驗的題目中，如圖三，在邊長為 5 公分的正方形的四個角落，分別切掉一個邊長為 1 公分的正方形，正方形內部剩下的區域內能

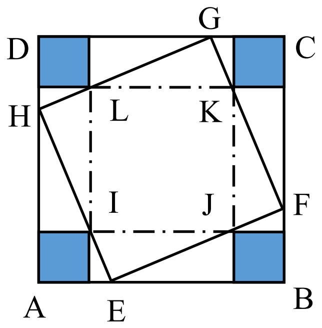
放入最大的正方形面積，內部正方形 EFGH 的頂點必須與原正方形 ABCD 的邊相接才能產生最大的面積。計算如下：

正方形 IJKL 面積=3×3=9

△IJE 面積=$3\times1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$(底$\overline{IJ}$=3，高為 1)

所求最大正方形為 EFGH

其面積為 $9+4\times\frac{3}{2}=15$ 平方公分

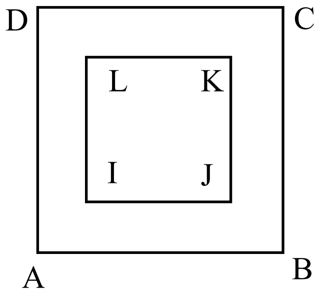


圖三

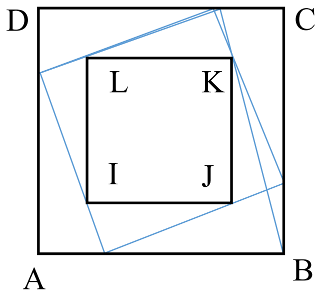
我們假設外部正方形 ABCD 的邊長為 a，
內部正方形 IJKL 的邊長為 b，

則內部最大的正方形面積為 $b^2+4\times〔\frac{1}{2}\times(\frac{a-b}{2})\times b〕= b^2+(a-b)\times b = ab$

2.要從圖一中直接畫出正方形 ABCD 的內接正方形並不容易，但是我們發現將圖一改成圖四的形式，畫出與正方形 ABCD 同中心且同方向的內部正方形 IJKL，從 B 點出發，每次作內部正方形的連頂線，經過幾次後就會產生正方形 ABCD 的內接正方形，如圖五。



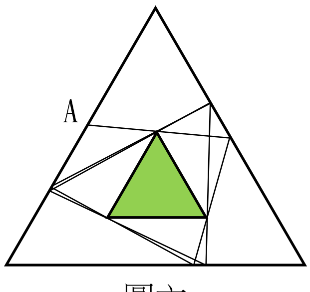
圖四



圖五

(二)科學研習月刊中題目[2]

正三角形的公園中有一個邊長為公園邊長$\frac{1}{3}$的小正三角形綠地，公園和綠地兩者方向相同，而且中心重合。從公園邊上的 A 點出發，如圖二，每次都朝著綠地的頂點跑「切線」，跑到公園的另一邊的一點，然後再從這個點出發，反覆一直跑下去，如此反覆做內部正三角形頂點的「切線」(本研究稱為連頂線)，方法與上述(一)中圖五的做法相同，試著畫出結果，發現也如同上述，持續畫下去，似乎會漸漸趨近正三角形的內接正三角形，如圖六。

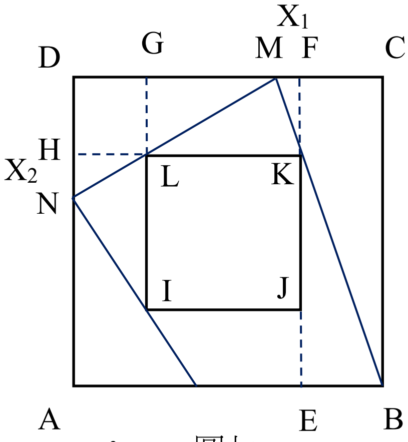


圖六

解答了這兩個題目，讓我們又產生了新的疑問，是否任何比例的內外正方形都會產生相同的圖形呢？

三、改變內外正方形的比例，探討其連頂線的變化

(一)我們將內部正方形 IJKL 部分的邊延長，分別與外部正方形 ABCD 交於點 E、點 F、點 G 和點 H，如圖七，由點 B 往點 K 作連頂線與正方形 ABCD 相交於點 M，令外部正方形的邊長為 a，



圖七

內部正方形的邊長為 b，則$\overline{BE}=\overline{FK}=\frac{a-b}{2}$，$\overline{EK}=\frac{a+b}{2}$，

令 X_n 為第 n 次的連頂線在外部正方形上的交點與內部正方形邊的延長線之距離，

其中△BKE~△MKF，則$\overline{BE}$：$\overline{EK}=\overline{MF}$：$\overline{FK}$，得出 $X_1=\dfrac{(a-b)^2}{2(a+b)}$，

從 M 為起點往點 L 作第二次連頂線，與正方形 ABCD 相交於點 N，則△MGL~△LHN，$\overline{GM}$：$\overline{GL}=\overline{HL}$：$\overline{HN}$，$\overline{GL}=\overline{HL}=\frac{a-b}{2}$，$\overline{GM}=b-X_1$，得出 $X_2=\dfrac{(a-b)^2}{4(b-X_1)}$，

每次作連頂線都可以產生相似三角形，利用相似三角形邊長間的比例，可以得出 $X_n=\dfrac{(a-b)^2}{4(b-X_{n-1})}$ 。

(二)利用上述的公式，將內外不同比例的正方形，用 EXCEL 軟體將 X_n 列出，來找出每次連頂線的變化，如下表：(a 表示外部正方形的邊長，b 表示內部正方形的邊長)

令 b=1，a=1.1b

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	…	X_{98}	X_{99}	X_{100}
0.002381	0.002506	0.002506	0.002506	0.002506	…	0.002506	0.002506	0.002506

令 b=1，a=1.2b

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	…	X_{98}	X_{99}	X_{100}
0.009091	0.010092	0.010102	0.010102	0.010102	…	0.010102	0.010102	0.010102

令 b=1，a=1.5b

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	…	X_{98}	X_{99}	X_{100}
0.05	0.065789	0.066901	0.066981	0.066987	…	0.066987	0.066987	0.066987

令 b=1，a=1.8b

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	…	X_{98}	X_{99}	X_{100}
0.114286	0.180645	0.195276	0.198826	0.199707	…	0.2	0.2	0.2

令 b=1，a=2b

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	…	X_{98}	X_{99}	X_{100}
0.166667	0.3	0.357143	0.388889	0.409091	…	0.494924	0.494975	0.495025

令 b=1，a=2.1b

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	…	X_{98}	X_{99}	X_{100}
0.195161	0.375852	0.48466	0.586992	0.732431	…	0.480227	0.581985	0.723658

令 b=1，a=2.5b

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	…	X_{98}	X_{99}	X_{100}
0.321429	0.828947	3.288462	-0.2458	0.451518	…	0.259064	0.759175	2.335719

令 b=1，a=3b

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	…	X_{98}	X_{99}	X_{100}
0.5	2	-1	0.5	2	…	2	-1	0.5

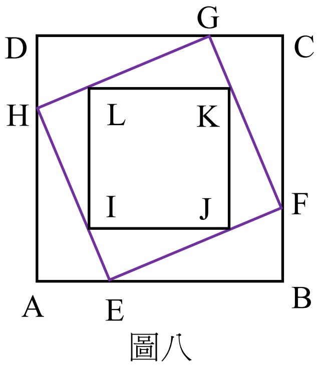
觀察不同內外正方形的比例，所產生每次連頂線在外部正方形上的交點與內部正方形邊的延長線之距離，發現了以下幾點：

1.在外部正方形邊長 a 與內部正方形邊長 b 的比值小於等於 2 時，X_n 會逐漸趨近一個定值，而比值愈小，X_n 會愈快達到這個定值。

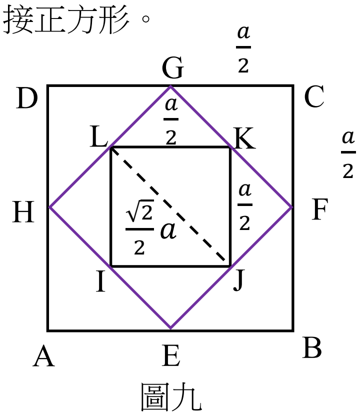
2.當比值大於 2 時，X_n 的數值不再趨近於定值，有時甚至會產生負數。

3.當比值等於 3 時，X_n 的數值只有 0.5、2、-1 三個數。

(三)由外部正方形 ABCD 作內部正方形 IJKL 頂點的連頂線，會產生正方形 ABCD 的內接正方形 EFGH，如圖八，內部的正方形 IJKL 愈小，內接正方形 EFGH 也愈小，內接正方形最小為 EFGH 分別為正方形 ABCD 的中點時，如圖九，由畢氏定理可知$\overline{FG}=\overline{JL}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，則$\overline{KL}=\overline{JK}=\frac{a}{2}$，即內部的正方形 IJKL 等於外部正方形 ABCD 的一半，外部正方形的邊長 a 與內部正方形邊長 b 的比值等於 2 為一個臨界值，若比值小於等於 2，才會產生外部正方形的內接正方形。



圖八



圖九

已知內接正方形的面積為 ab，若固定 a 的長度，當 a 和 b 的比值為 2 時，即 a=2b 時，會產生最小內接正方形，所以 b< a≦2b 一定能產生內接正方形。

(四)將正 n 邊形取其每邊的中點連接起來找出最小的內接正 n 邊形，再將內接正 n 邊形取每邊的中點連接起來，即可得到內部正 n 邊形，如圖十，將圖十局部放大成圖十一，A 為正 n 邊形的一個頂點，B 為邊上的中點，從點 A 和點 B 做中垂線分別交內部正 n 邊形於點 C 和點 D，點 C 為內部正 n 邊形的頂點，點 D 為內部正 n 邊形的中點，

假設$\overline{CD}$=1，

$\angle CBD=(n-2)\times180^{\circ}\div2n=(n-2)\times90^{\circ}\div n$，

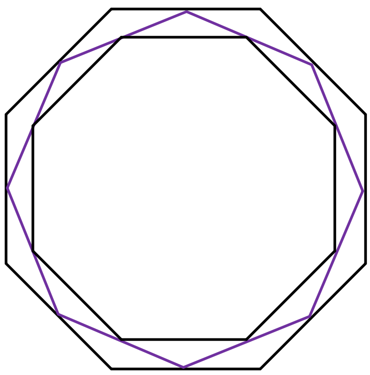
則$\overline{BC}=\csc[(n-2)\times90^{\circ}\div n]$，

$\angle BAC=(n-2)\times180^{\circ}\div2n=(n-2)\times90^{\circ}\div n$，

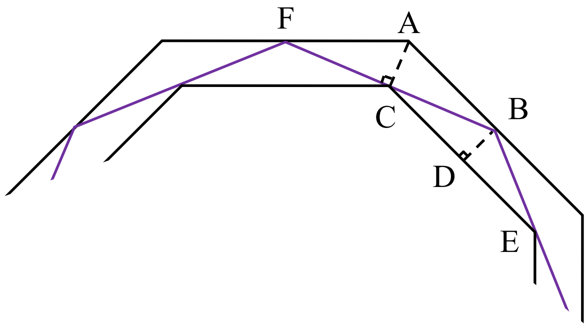
則$\overline{AB}=\overline{BC}\times\csc[(n-2)x90^{\circ}\div n]=\left\{\csc\left[\left(n-2\right)\times90^{\circ}\div n\right]\right\}^{2}$，

而$\overline{CD}$與$\overline{AB}$分別為內外正 n 邊形邊長的一半，

故外部正 n 邊形與內部正 n 邊形邊長的比值為$\left\{\csc\left[\left(n-2\right)\times90^{\circ}\div n\right]\right\}^{2}$



圖十



圖十一

外部正 n 邊形與內部正 n 邊形邊長的比值小於等於$\left\{\csc\left[\left(n-2\right)\times90^{\circ}\div n\right]\right\}^{2}$時，從外部正 n 邊形對內部正 n 邊形的頂點作連頂線，會產生外部正 n 邊形的內接正 n 邊形。若為正三角形，則其臨界值為$\left\{\csc\left[\left(3-2\right)\times90^{\circ}\div3\right]\right\}^{2}=(\csc30^{\circ})^{2}=4$；

若為正方形，其臨界值為$\left\{\csc\left[\left(4-2\right)\times90^{\circ}\div4\right]\right\}^{2}=(\csc45^{\circ})^{2}=2$

(五)證明正 n 邊形取每邊中點連接起來所得到的是最小的內接正 n 邊形

在圖十一中，我們假設正 n 邊形取每邊中點連接起來所得到的不是最小的內接正 n 邊形，

則△ABF 不會最大

必存在一個△AB'F'>△ABF，且點 B'及點 F'不是正 n 邊形邊上的中點，

令$\overline{AB}=\overline{AF}=1$

則$\triangle ABF=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta$，其中θ為∠BAF

令△AB'F'的兩邊 $\overline{AB'}$=1-x， $\overline{AF'}$=1+x，其中 0<x<1

$\triangle AB'F'=\frac{1}{2}(1-x)\times(1+x)\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times(1-x^2)\times\sin\theta$

$\because \triangle AB'F'>\triangle ABF$

$\therefore \frac{1}{2}\times(1-x^2)\times\sin\theta>\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta$

$(1-x^2)>1 \quad (\rightarrow\leftarrow)$

故得證，正 n 邊形取每邊中點連接起來所得到的是最小的內接正 n 邊形。

四、找出正方形內的多角星

(一)在三-(二)的研究中，我們發現當外部正方形與內部正方形邊長的比值大於 2 時會有兩種情形，其一，例如比值為 2.5 時，如表一， X_n 的數值無固定規則，其圖形無統一的形狀，如圖十二；其二，如當比值為 3 時， X_n 的數值只有 0.5、2、-1 三個數，如表二，其圖形為一個八角星，如圖十三。

令 b=1，a=2.5b

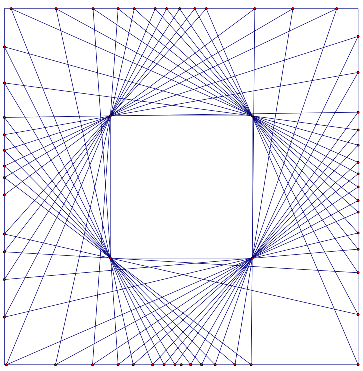
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	…	X_{98}	X_{99}	X_{100}
0.321429	0.828947	3.288462	-0.2458	0.451518	…	0.259064	0.759175	2.335719

表一

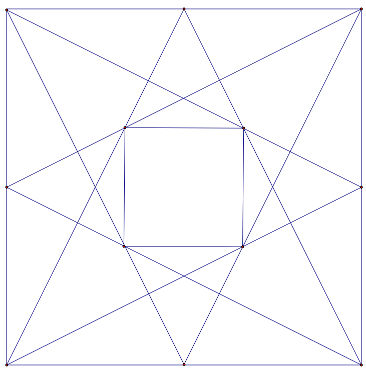
令 b=1，a=3b

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	…	X_{98}	X_{99}	X_{100}
0.5	2	-1	0.5	2	…	2	-1	0.5

表二

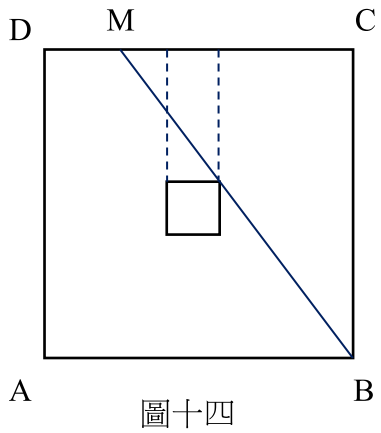


圖十二



圖十三

(二)當外部正方形與內部正方形邊長的比值大於 2 時，X_n 的數值有的大於內部正方形邊長 b=1，有的大於外部正方形邊長 a，甚至也有負數，表示當外部正方形與內部正方形邊長的比值大於臨界值時，從外部正方形向內部正方形的頂點作連頂線，和外部正方形的交點有些已在內部正方形邊的延長線之外，如圖十四，故公式必須修正。



圖十四

1.當 $X_{n-1}>b$，交點 M 已在內部正方形邊的延長線外面，如圖十五，

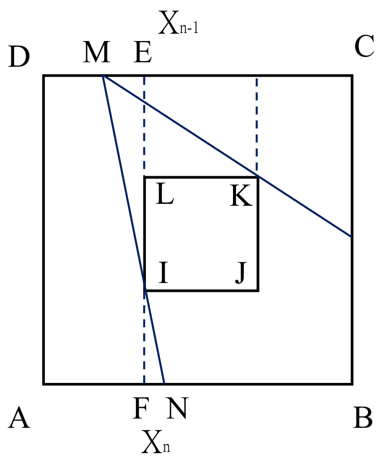
其中△EIM~△FIN，

$\overline{EM}：\overline{EI}=\overline{FN}：\overline{FI}$

$\overline{EM}=X_{n-1}-b$，$\overline{EI}=\frac{a+b}{2}$，$\overline{FI}=\frac{a-b}{2}$

$X_{n-1}-b：\frac{a+b}{2}=X_n：\frac{a-b}{2}$

則 $X_n=\frac{(a-b)(X_{n-1}-b)}{a+b}$



圖十五

2.當 $X_{n-1}=b$，交點 M 剛好在內部正方形邊的延長線上，如圖十六，

由點 M 為起點往內部正方形頂點作連頂線，會沿著內部正方形的邊，

與外部正部正方形交於 N，也會在內部正方形邊的延長線上，

則 $X_n=0$，

再繼續往內部正方形的頂點作第 n+1 條連頂線，

與外部正方形交於點 O，

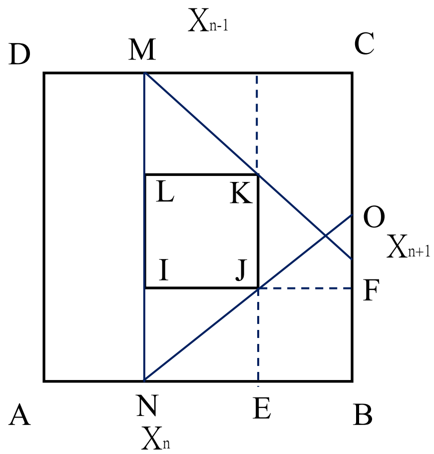
其中△EJN~△FOJ，

$\overline{EJ}：\overline{EN}=\overline{FO}：\overline{FJ}$

$\overline{EN}=b$，$\overline{EJ}=\overline{FJ}=\frac{a-b}{2}$，

$\frac{a-b}{2}：b=X_{n+1}：\frac{a-b}{2}$

則 $X_{n+1}=\frac{(a-b)^2}{4b}$



圖十六

3.而 $X_{n-1}<b$ 有下列兩種情形：

(1)由點 M 往內部正方形頂點作連頂線，與外部正方形的交點 N 在$\overline{CD}$的鄰邊上，如圖十七

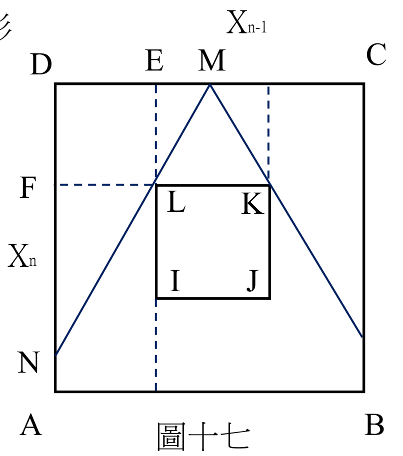
其中△ELM~△FNL，

$\overline{EL}:\overline{EM}=\overline{FN}:\overline{FL}$

$\overline{EL}=\overline{FL}=\frac{a-b}{2}$，$\overline{EM}=b-X_{n-1}$，

$\frac{a-b}{2}:b-X_{n-1}=X_n:\frac{a-b}{2}$

則 $X_n=\frac{(a-b)^2}{4(b-X_{n-1})}$。



圖十七

(2)由點 M 往內部正方形頂點作連頂線，與外部正方形的交點 N 在$\overline{CD}$的對邊上，如圖十八

其中△ELM~△FLN，

$\overline{EL}:\overline{EM}=\overline{FL}:\overline{FN}$

$\overline{EL}=\frac{a-b}{2}$，$\overline{FL}=\frac{a+b}{2}$，$\overline{EM}=b-X_{n-1}$，

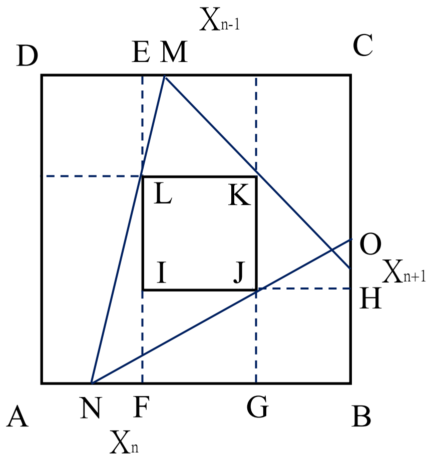
則 $X_n=\frac{(a+b)(b-X_{n-1})}{a-b}$

且△GJN~△HOJ

$\overline{GJ}:\overline{GN}=\overline{HO}:\overline{HJ}$

$\overline{GJ}=\overline{HJ}=\frac{a-b}{2}$，$\overline{GN}=b+X_n$，

則 $X_{n+1}=\frac{(a-b)^2}{4(b+X_n)}$



圖十八

故當外部正方形與內部正方形邊長的比值大於 2 時，

$X_1=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$，

當 $X_{n-1}<b$ 時，會有兩種情形 $X_n=\frac{(a-b)^2}{4(b-X_{n-1})}$ or $X_n=\frac{(a+b)(b-X_{n-1})}{a-b}$

其中當 $X_n=\frac{(a+b)(b-X_{n-1})}{a-b}$ 時，$X_{n+1}=\frac{(a-b)^2}{4(b+X_n)}$

當 $X_{n-1}>b$ 時，$X_n=\frac{(a-b)(X_{n-1}-b)}{a+b}$

當 $X_{n-1}=b$ 時，$X_n=0$，$X_{n+1}=\frac{(a-b)^2}{4b}$

將外部正方形與內部正方形邊長的比值為 3 的 X_n 的值，重新列出如表三：

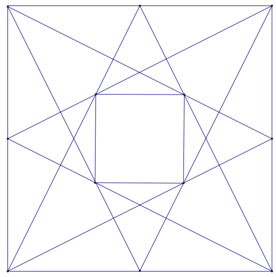
令 b=1，a=3b

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	…
0.5	2	0.5	2	0.5	2	0.5	2	…

表三

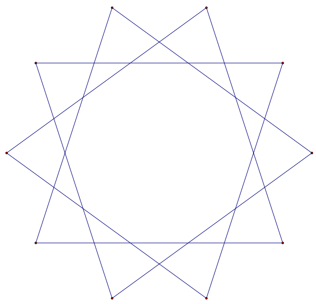
可以發現 X_n 的值只有 0.5 和 2 兩種，0.5 代表連頂線交於外部正方形邊上的中點，2 表示連頂線交於外部正方形的頂點上，如圖十三。

我們試著用不同比例的內外正方形來找出其他的多角星，但卻找不到，在後續的研究中我們才發現其他多角星的內外正方形並不是簡單的整數比，我們改用由正多角星來找其他的正方形內多角星。

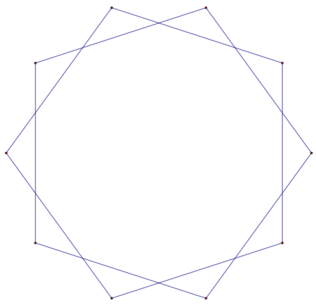


圖十三

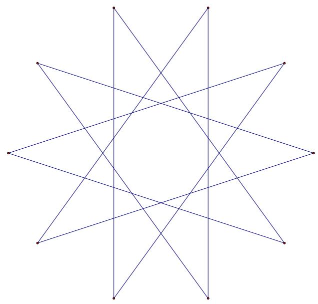
(三)梁惠珍、柳賢(2014)[3]研究中指出正多角星共有三種，分別為「一筆畫」成星、「正 m 邊形」成星及「一筆畫正 m 角星」成星，一筆畫成星是以一筆畫的方式完成一個正多角星，如圖十九為一筆畫正十角星；正 m 邊形成星是由幾個正 m 邊形組成的正多角星，如圖二十為 2 個正五邊形組成的正十角星；而一筆畫正 m 角星成星則是由幾個正 m 角星組成的正多角星，如圖二十一為 2 個正五角星組成的正十角星。



圖十九



圖二十



圖二十一

我們所要找出來正方形內的多角星屬於其中的一筆畫成星，在一個圓上，將圓平分成 n 等分，會產生 n 個等分點，並將 n 個等分點間隔 a 個等分弧連接起來，其中 $n \geq 5$，$a<\frac{n}{2}$，且(n，a)=1 時則可畫出一筆畫正多角星。利用同樣的原理，我們在正方形的邊上作等分點，以動態幾何系統 the geometer's sketchpad 軟體，先畫出在正方形內的多角星，再計算出內外正方形的比例關係。

(四)我們找出正方形內 4 的倍數：8、12、16 角星，為了方便計算，我們讓外部正方形的邊長為 18，利用相似三角形來計算出內外正方形的比例：

1.八角星：

如圖二十二

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$\overline{AB}：\overline{BC}=\overline{AD}：\overline{DE}$

$9-\overline{BO}：\overline{BC}=18：9$

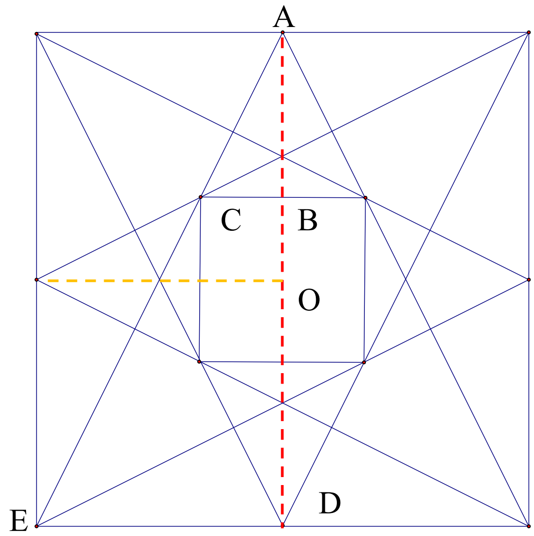
$\overline{BO}=\overline{BC}$

$9-\overline{BC}=2\overline{BC}$

$3\overline{BC}=9$

$\overline{BC}=3$

外部和內部正方形的邊長比值為 9/3=3



圖二十二

2.十二角星：

如圖二十三

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$

$\overline{AB}：\overline{BC}=\overline{DE}：\overline{EC}$

$9+\overline{GB}：18=\overline{DE}：9-\overline{EH}$

$\because \overline{DE}=2\overline{GB}=2\overline{EH}$

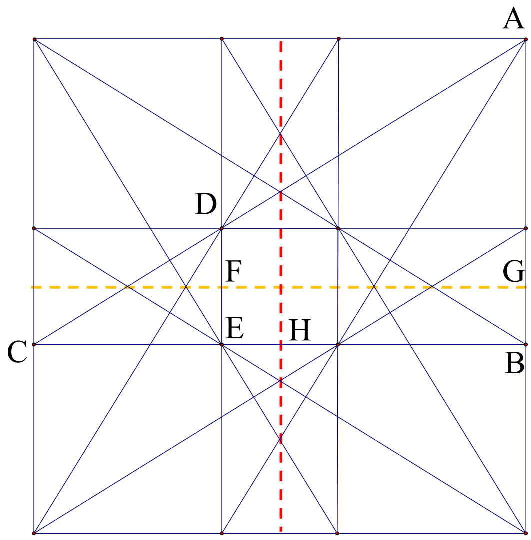
$\therefore 9+\overline{EH}：18=2\overline{EH}：9-\overline{EH}$

$\overline{EH}^2+36\overline{EH}-81=0$

$\overline{EH} \fallingdotseq 2.125$

外部和內部正方形的邊長比值

約為 9/2.125≒4.24



圖二十三

3.十六角星(間隔 5[註二])：

如圖二十四

$\triangle ABC \sim \triangle AFG$

$\overline{AB}：\overline{BC}=\overline{AF}：\overline{FG}$

$9-\overline{BO}：\overline{BC}=9+\overline{OF}：9$

$\because \overline{BO}=\overline{BC}$ $\quad \therefore \overline{OF}=\frac{81}{\overline{BC}}-18$

$\triangle CDE \sim \triangle HIE$

$\overline{CD}：\overline{DE}=\overline{HI}：\overline{IE}$

$\overline{CJ}-\overline{DJ}：9-\overline{DK}=9-\overline{IL}：18$

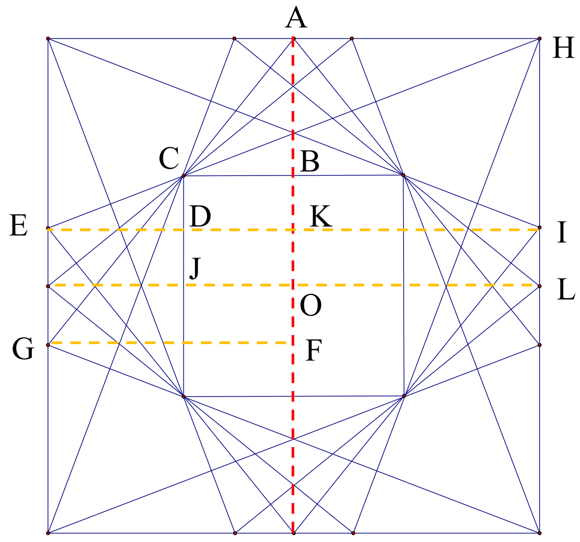
$\because \overline{CJ}=\overline{DK}=\overline{BC}$，$\overline{DJ}=\overline{IL}=\overline{OF}$且$\overline{OF}=\frac{81}{\overline{BC}}-18$

$\therefore \overline{BC}-(\frac{81}{\overline{BC}}-18)：9-\overline{BC}=9-(\frac{81}{\overline{BC}}-18)：18$

$45\overline{BC}^2=729$ ，$\overline{BC}^2=16.2$

$\overline{BC}≒4.025$

外部和內部正方形的邊長比值約為 9/4.025≒2.24



圖二十四

註二：和 16 互質的數有 3、5、7、9、11、13、15，但間隔 3、13、15 在正方形內在畫多角星時，會產生連接兩個點時卻在同一邊上，故無法形成多角星，而間隔 5 和 11 畫出來的圖形相同，間隔 7 和 9 畫出來的圖形相同，所以正方形內的十六角星有間隔 5 和間隔 7 兩種。

4.十六角星(間隔 7)：

如圖二十五

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$\overline{AB}：\overline{BC}=\overline{AD}：\overline{DE}$

$18：\overline{BC}=9-\overline{DO}：\overline{DE}$

$\because \overline{DO}=\overline{DE}$

$\therefore 18：\overline{BC}=9-\overline{DE}：\overline{DE}$

$\overline{BC}=\frac{18\overline{DE}}{9-\overline{DE}}$

$\triangle FGC \sim \triangle IHC$

$\overline{FG}：\overline{GC}=\overline{IH}：\overline{HC}$

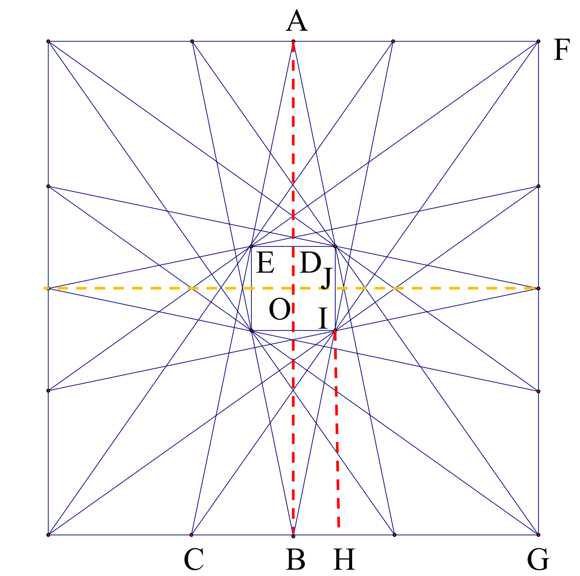
$18：9+\overline{BC}=9-\overline{IJ}：\overline{BH}+\overline{BC}$

$\because \overline{BH}=\overline{IJ}=\overline{DE}$，且$\overline{BC}=\frac{18\overline{DE}}{9-\overline{DE}}$

$18：9+\frac{18\overline{DE}}{9-\overline{DE}}=9-\overline{DE}：\overline{DE}+\frac{18\overline{DE}}{9-\overline{DE}}$

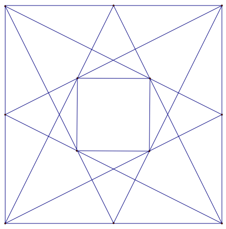
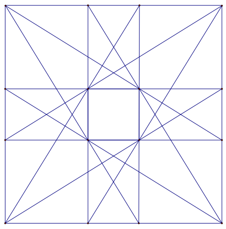
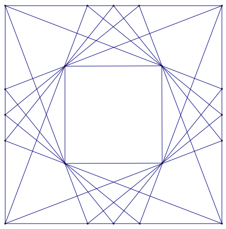
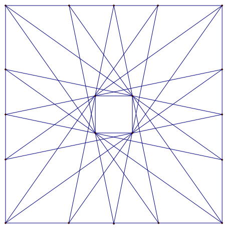
$\overline{DE}^2-54\overline{DE}+81=0$，則$\overline{DE}≒1.544$

外部和內部正方形的邊長比值約為 9/1.544≒5.83

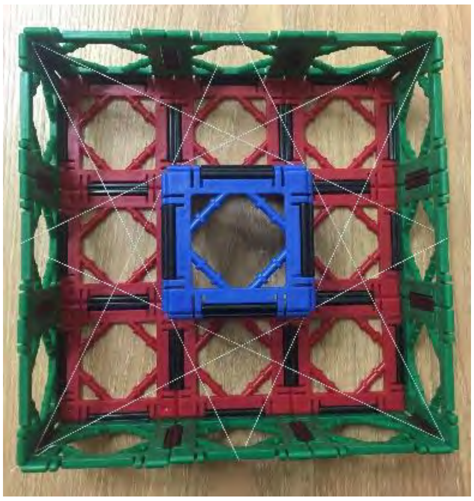


圖二十五

將以上結果整理如下表。(其中 a：外部正方形的邊長，b：內部正方形的邊長)

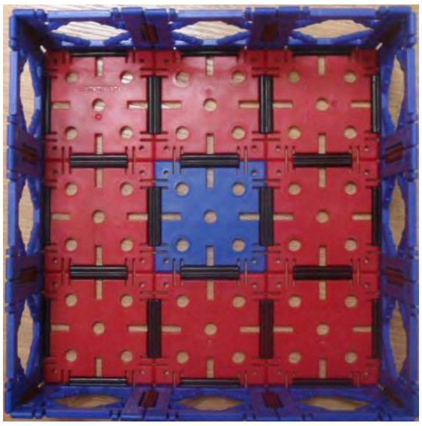
名稱	圖形	內外正方形比例
八角星		a=3b
十二角星		a≒4.24b
十六角星(間隔 5)		a≒2.24b
十六角星(間隔 7)		a≒5.83b

(五)利用組合智慧片和白線，我們把正方形內的八角星做出來，如圖二十六，

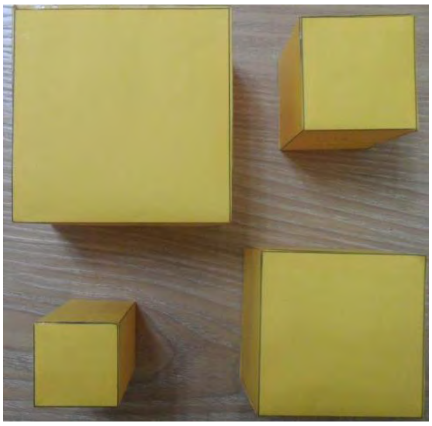


圖二十六

因為組合智慧片的大小是固定的，故只能做出外部正方形與內部正方形邊長的比值為 3 的正方形內的八角星，為了做出其他多角星，我們依然利用組合智慧片做出固定大小的外部正方形，而內部正方形則依實際的比例，利用紙張做出正四角柱的展開圖，由組合智慧片所做出來的外部正方形邊長為 19.5cm，如圖二十七，將 19.5cm 除以外部和內部正方形邊長的比例，即可得到內部正方形的邊長，再利用正四角柱的展開圖做出合適大小的正四角柱，如圖二十八。



圖二十七



圖二十八

另外，我們再以之前所得出 X_n 數值的公式，來驗證這些多角星，其公式如下：

$X_1=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$，

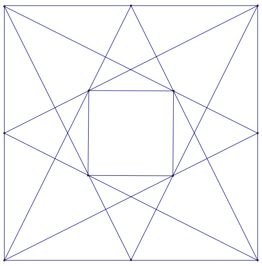
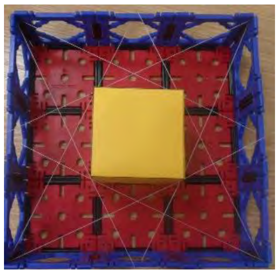
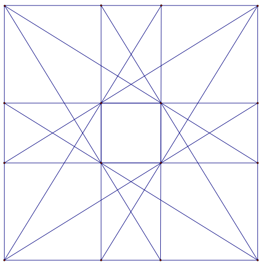
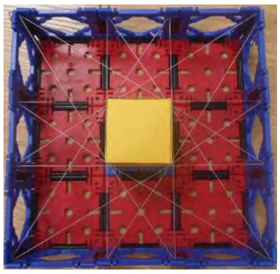
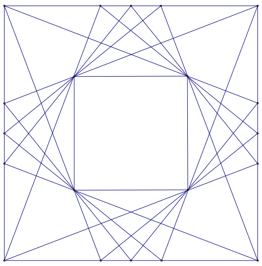
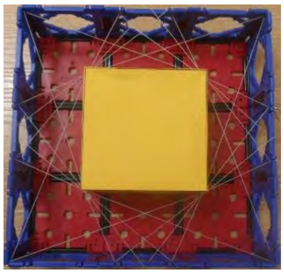
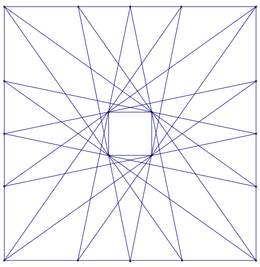
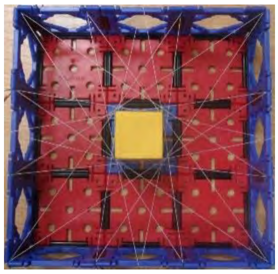
當 $X_{n-1}<b$ 時，會有兩種情形 $X_n=\frac{(a-b)^2}{4(b-X_{n-1})}$ or $X_n=\frac{(a+b)(b-X_{n-1})}{a-b}$

其中當 $X_n=\frac{(a+b)(b-X_{n-1})}{a-b}$ 時，$X_{n+1}=\frac{(a-b)^2}{4(b+X_n)}$

當 $X_{n-1}>b$ 時，$X_n=\frac{(a-b)(X_{n-1}-b)}{a+b}$

當 $X_{n-1}=b$ 時，$X_n=0$，$X_{n+1}=\frac{(a-b)^2}{4b}$

我們將組合智慧片、紙張、白線做成的正方形內的多角星，以及 X_n 的數值整理如下表：

<table>
<tr><td>名稱及比例</td><td colspan="12">八角星，a=3b</td></tr>
<tr><td rowspan="2">X_n 數值</td><td>X_1</td><td>X_2</td><td>X_3</td><td>X_4</td><td>X_5</td><td>X_6</td><td>X_7</td><td>X_8</td><td>X_9</td><td>X_{10}</td><td>X_{11}</td><td>⋯</td></tr>
<tr><td>0.5</td><td>2</td><td>0.5</td><td>2</td><td>0.5</td><td>2</td><td>0.5</td><td>2</td><td>0.5</td><td>2</td><td>0.5</td><td>⋯</td></tr>
<tr><td>繪製多角星</td><td colspan="5"></td><td colspan="2">製作多角星</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>名稱及比例</td><td colspan="12">十二角星，a≒4.24b</td></tr>
<tr><td rowspan="2">X_n 數值</td><td>X_1</td><td>X_2</td><td>X_3</td><td>X_4</td><td>X_5</td><td>X_6</td><td>X_7</td><td>X_8</td><td>X_9</td><td>X_{10}</td><td>X_{11}</td><td>⋯</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>2.62</td><td>1</td><td>0</td><td>2.62</td><td>1</td><td>0</td><td>2.62</td><td>1</td><td>0</td><td>⋯</td></tr>
<tr><td>繪製多角星</td><td colspan="5"></td><td colspan="2">製作多角星</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>名稱及比例</td><td colspan="12">十六角星(間隔 5)，a≒2.24b</td></tr>
<tr><td rowspan="2">X_n 數值</td><td>X_1</td><td>X_2</td><td>X_3</td><td>X_4</td><td>X_5</td><td>X_6</td><td>X_7</td><td>X_8</td><td>X_9</td><td>X_{10}</td><td>X_{11}</td><td>⋯</td></tr>
<tr><td>0.24</td><td>0.5</td><td>0.76</td><td>1.62</td><td>0.24</td><td>0.5</td><td>0.76</td><td>1.62</td><td>0.24</td><td>0.5</td><td>0.76</td><td>⋯</td></tr>
<tr><td>繪製多角星</td><td colspan="5"></td><td colspan="2">製作多角星</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>名稱及比例</td><td colspan="12">十六角星(間隔 7)，a≒5.83b</td></tr>
<tr><td rowspan="2">X_n 數值</td><td>X_1</td><td>X_2</td><td>X_3</td><td>X_4</td><td>X_5</td><td>X_6</td><td>X_7</td><td>X_8</td><td>X_9</td><td>X_{10}</td><td>X_{11}</td><td>⋯</td></tr>
<tr><td>1.71</td><td>0.5</td><td>0.71</td><td>3.41</td><td>1.71</td><td>0.5</td><td>0.71</td><td>3.41</td><td>1.71</td><td>0.5</td><td>0.71</td><td>⋯</td></tr>
<tr><td>繪製多角星</td><td colspan="5"></td><td colspan="2">製作多角星</td><td colspan="5"></td></tr>
</table>

(六)將內部正方形旋轉 45°或讓多角星的頂點不在外部正方形的頂點上，而都在外部正方形的邊上，也能產生不同的多角星，計算出內外正方形邊長的比例，並作出這些不同的多角星如下：

1.八角星，內部正方形轉 45°：

如圖二十九

$\triangle AOD \sim \triangle ABC$

$\overline{AO}:\overline{OD}=\overline{AB}:\overline{BC}$

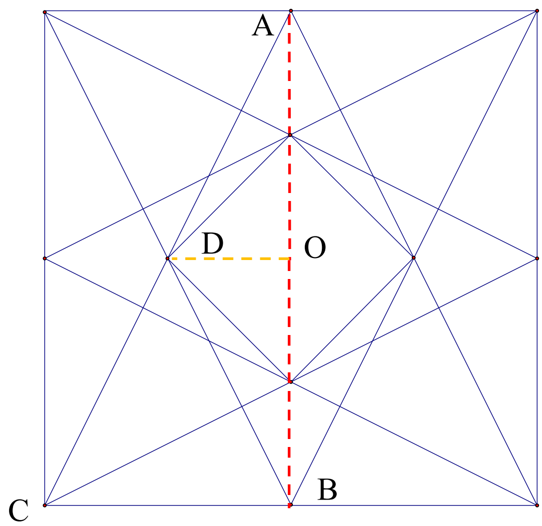
$9:\overline{OD}=18:9$

$2\overline{OD}=9$

$\overline{OD}=4.5$

外部正方形邊長和

內部正方形的對角線長比值為 9/4.5=2



圖二十九

2.八角星，頂點皆在外部正方形邊上：

如圖三十

$\triangle ABC \sim \triangle DFC$

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DF}:\overline{FC}$

$9+\overline{GB}:9+\overline{BE}=\overline{DF}:9-\overline{EF}$

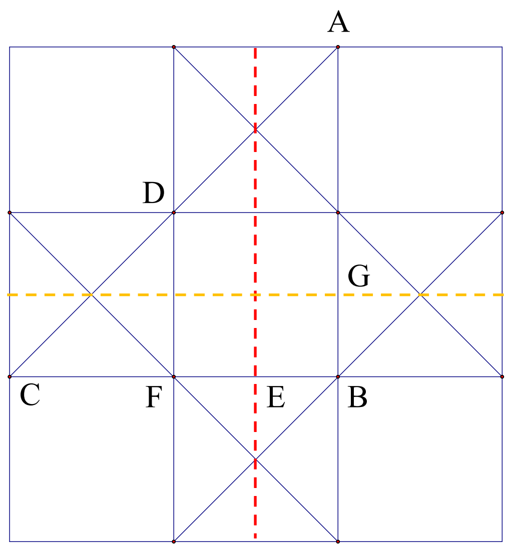
$\because \overline{DF}=2\overline{GB}=2\overline{BE}=2\overline{EF}$

$\therefore 9+\overline{EF}:9+\overline{EF}=2\overline{EF}:9-\overline{EF}$

$3\overline{EF}=9$

$\overline{EF}=3$

外部和內部正方形的邊長比值為 9/3=3



圖三十

3.八角星，內部正方形旋轉 45°，

頂點皆在外部正方形邊上：

如圖三十一

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$

$\overline{AB}$：$\overline{BC}$=$\overline{DE}$：$\overline{EC}$

9+$\overline{GB}$：9+$\overline{BE}$=$\overline{DE}$：9

∵$\overline{DE}$=2$\overline{GB}$=2$\overline{BE}$

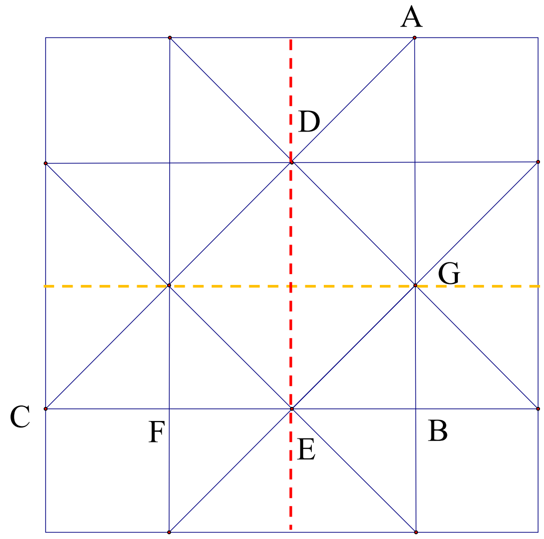
∴9+$\overline{BE}$：9+$\overline{BE}$=2$\overline{BE}$：9

2$\overline{BE}$=9

$\overline{BE}$=4.5

外部正方形邊長和

內部正方形的對角線長比值為 9/4.5=2



圖三十一

4.十二角星，內部正方形旋轉 45°：

如圖三十二

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$

$\overline{AB}$：$\overline{BC}$=$\overline{DE}$：$\overline{EC}$

18：9+$\overline{CF}$=9：$\overline{EC}$

∵$\overline{EC}$=2$\overline{CF}$=2$\overline{DO}$

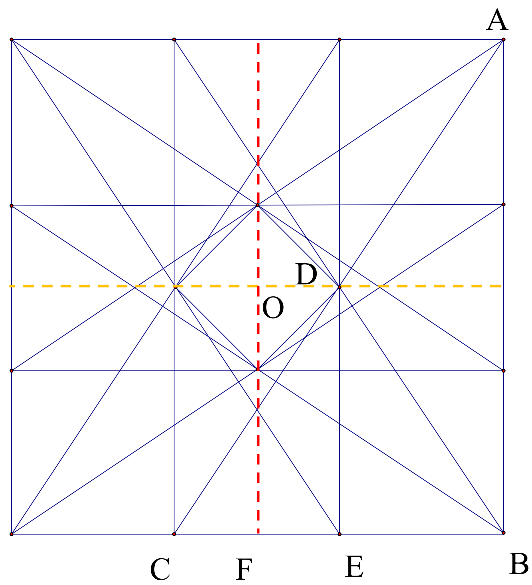
∴18：9+$\overline{DO}$=9：2$\overline{DO}$

81+9$\overline{DO}$=36$\overline{DO}$

27$\overline{DO}$=81，$\overline{DO}$=3

外部正方形邊長和

內部正方形的對角線長比值為 9/3=3



圖三十二

5.十二角星，頂點皆在外部正方形邊上：

如圖三十三

△ABC~△ADE

$\overline{AB}$：$\overline{BC}$=$\overline{AD}$：$\overline{DE}$

18：$\overline{BC}$=9-$\overline{DO}$：$\overline{ED}$

∵$\overline{DO}$=$\overline{ED}$

∴18：$\overline{BC}$=9-$\overline{ED}$：$\overline{ED}$

$\overline{BC}$=$\frac{18\overline{ED}}{9-\overline{ED}}$，

△GHC~△IFC

$\overline{GH}$：$\overline{HC}$=$\overline{IF}$：$\overline{FC}$

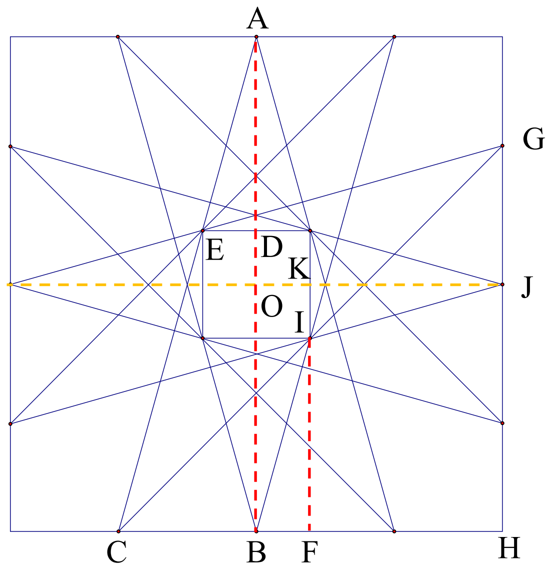
9+$\overline{GJ}$：9+$\overline{BC}$=9-$\overline{IK}$：$\overline{BC}$+$\overline{BF}$

∵$\overline{GJ}$=$\overline{BC}$，$\overline{IK}$=$\overline{BF}$=$\overline{ED}$，且$\overline{BC}$=$\frac{18\overline{ED}}{9-\overline{ED}}$

∴9+$\frac{18\overline{ED}}{9-\overline{ED}}$：9+$\frac{18\overline{ED}}{9-\overline{ED}}$=9-$\overline{ED}$：$\frac{18\overline{ED}}{9-\overline{ED}}$+$\overline{ED}$

2$\overline{ED}^2$-45$\overline{ED}$+81=0，則$\overline{ED}$≒1.973

外部和內部正方形的邊長比值約為 9/1.973≒4.56



圖三十三

6.十二角星，內部正方形旋轉 45°，

頂點皆在外部正方形邊上：

如圖三十四

△ABC~△AOD

$\overline{AB}$：$\overline{BC}$=$\overline{AO}$：$\overline{OD}$

18：$\overline{BC}$=9：$\overline{OD}$

$\overline{BC}$=2$\overline{OD}$，

△EFC~△GBC

$\overline{EF}$：$\overline{FC}$=$\overline{GB}$：$\overline{BC}$

9+$\overline{EI}$：9+$\overline{BC}$=9-$\overline{OG}$：$\overline{BC}$

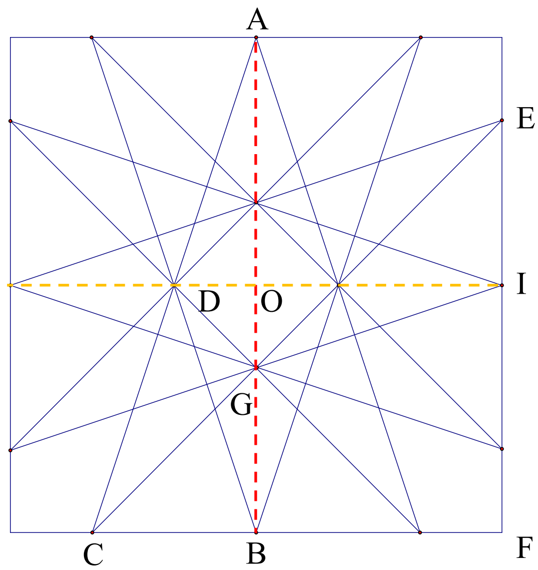
∵$\overline{EI}$=$\overline{BC}$，$\overline{OG}$=$\overline{OD}$且$\overline{BC}$=2$\overline{OD}$

∴1：1=9-$\overline{OD}$：2$\overline{OD}$

2$\overline{OD}$=9-$\overline{OD}$

$\overline{OD}$=3

外部正方形邊長和內部正方形的對角線長比值為 9/3=3



圖三十四

7.十六角星(間隔 5)，內部正方形旋轉 45°：

如圖三十五

$\triangle ABC \sim \triangle AOD$

$\overline{AB}：\overline{BC}=\overline{AO}：\overline{OD}$

$9+\overline{OB}：9=9：\overline{OD}$

$\overline{OB}=\frac{81}{\overline{OD}}-9$

$\triangle EFD \sim \triangle EGH$

$\overline{EF}：\overline{FD}=\overline{EG}：\overline{GH}$

$9：\overline{OD}-\overline{OF}=18：9-\overline{IG}$

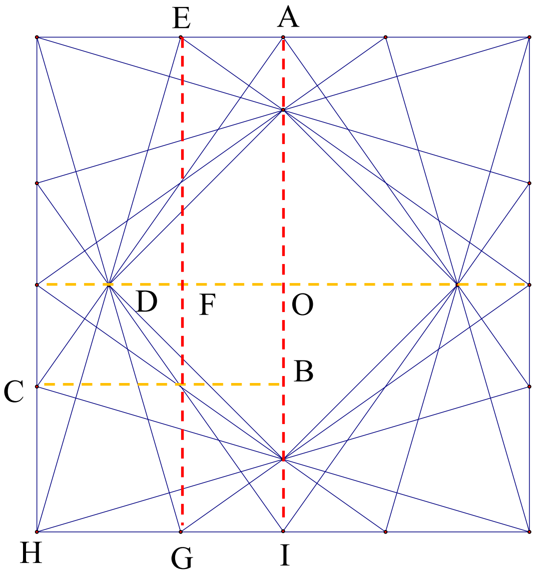
$\because \overline{OF}=\overline{IG}=\overline{OB}$ 且 $\overline{OB}=\frac{81}{\overline{OD}}-9$

$\therefore 9：\overline{OD}-(\frac{81}{\overline{OD}}-9)=18：9-(\frac{81}{\overline{OD}}-9)$

$18\overline{OD}^2=729$ ，$\overline{OD}^2=40.5$

$\overline{OD}≒6.364$

外部正方形邊長和內部正方形的對角線長比值為 9/6.364≒1.41



圖三十五

8.十六角星(間隔 5)，頂點皆在外部正方形邊上：

如圖三十六

$\triangle ABC \sim \triangle CDE$

$\overline{AB}：\overline{BC}=\overline{CD}：\overline{DE}$

$9-\overline{BJ}：\overline{BC}=\overline{CD}：9-\overline{DK}$

$\because \overline{CD}=2\overline{BJ}=2\overline{DK}$

$\therefore 9-\overline{DK}：\overline{BC}=2\overline{DK}：9-\overline{DK}$

$\overline{BC}=\frac{\overline{DK}}{2}+\frac{81}{2\overline{DK}}-9$

$\triangle FGH \sim \triangle ILH$

$\overline{FG}：\overline{GH}=\overline{IL}：\overline{LH}$

$\because \overline{FG}=\overline{GH}$

$\therefore \overline{IL}=\overline{LH}$

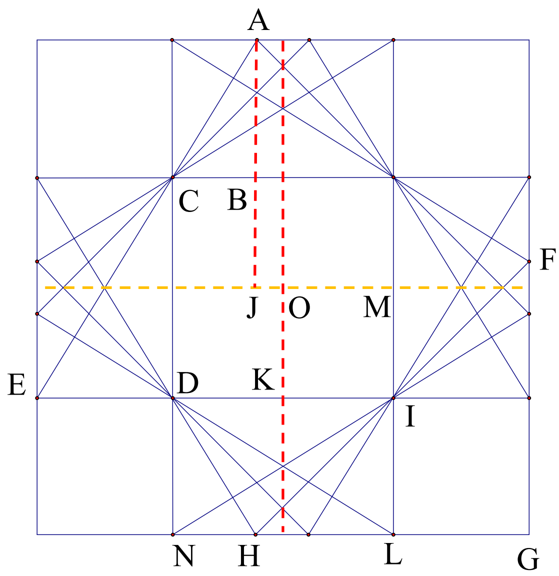
$9-\overline{MI}=\overline{LN}-\overline{NH}$

$\because \overline{LN}=2\overline{MI}=2\overline{DK}$，$\overline{NH}=\overline{BC}$ 且 $\overline{BC}=\frac{\overline{DK}}{2}+\frac{81}{2\overline{DK}}-9$

$\therefore 9-\overline{DK}=2\overline{DK}-(\frac{\overline{DK}}{2}+\frac{81}{2\overline{DK}}-9)$

$5\overline{DK}^2=81$ ，$\overline{DK}^2=16.2$，$\overline{DK}≒4.025$

外部和內部正方形的邊長比值約為 9/4.025≒2.24

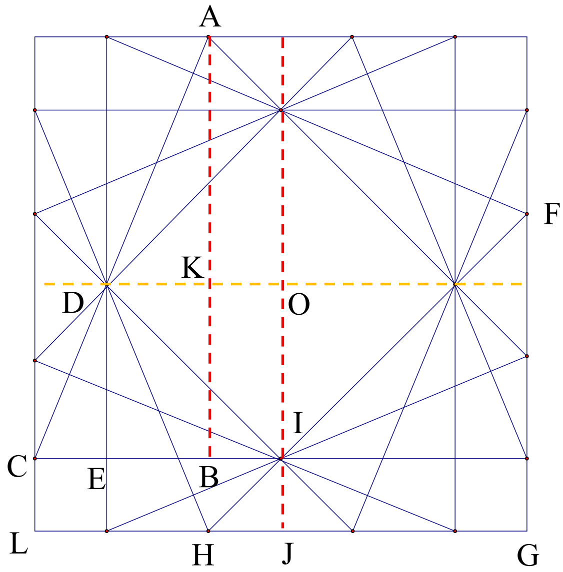


圖三十六

9.十六角星(間隔 5)，內部正方形旋轉 45°，

頂點皆在外部正方形邊上：

如圖三十七



圖三十七

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EC}$

$9+\overline{BK}:\overline{BC}=\overline{DE}:9-\overline{IE}$

$\because \overline{BK}=\overline{DE}=\overline{IE}=\overline{OD}$

$\therefore 9+\overline{OD}:\overline{BC}=\overline{OD}:9-\overline{OD}$

$\overline{BC}=\frac{81}{\overline{OD}}-\overline{OD}$

$\triangle FGH \sim \triangle IJH$

$\overline{FG}:\overline{GH}=\overline{IJ}:\overline{JH}$

$\because \overline{FG}=\overline{GH}$

$\therefore \overline{IJ}=\overline{JH}$

$9-\overline{OI}=9-\overline{LH}$

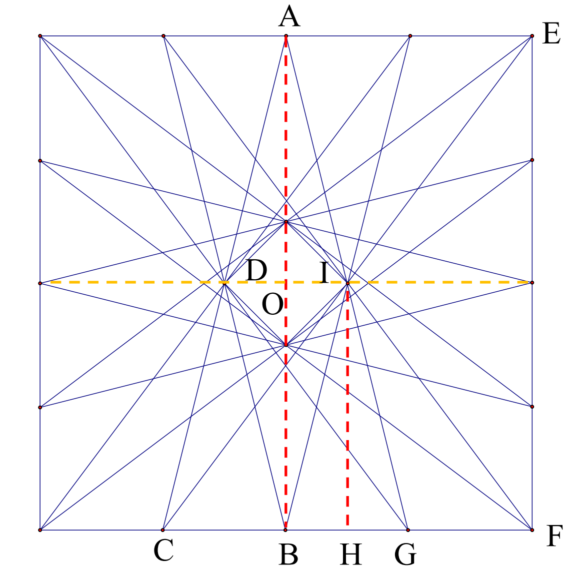
$\because \overline{OI}=\overline{OD}$，$\overline{LH}=\overline{BC}$且$\overline{BC}=\frac{81}{\overline{OD}}-\overline{OD}$

$\therefore 9-\overline{OD}=9-(\frac{81}{\overline{OD}}-\overline{OD})$ $2\overline{OD}^2=81$ ，$\overline{OD}^2=40.5$ ，$\overline{OD}\fallingdotseq 6.364$

外部正方形邊長和內部正方形的對角線長比值為 9/6.364≒1.41

10.十六角星(間隔 7)，內部正方形旋轉 45°：

如圖三十八



$\triangle ABC \sim \triangle AOD$

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AO}:\overline{OD}$

$18:\overline{BC}=9:\overline{OD}$

$\overline{BC}=2\overline{OD}$

$\triangle EFC \sim \triangle IHC$

$\overline{EF}:\overline{FC}=\overline{IH}:\overline{HC}$

$18:9+\overline{BC}=9:\overline{HB}+\overline{BC}$

$\because \overline{HB}=\overline{OD}$，且$\overline{BC}=2\overline{OD}$

$\therefore 18:9+2\overline{OD}=9:\overline{OD}+2\overline{OD}$

$36\overline{OD}=81$

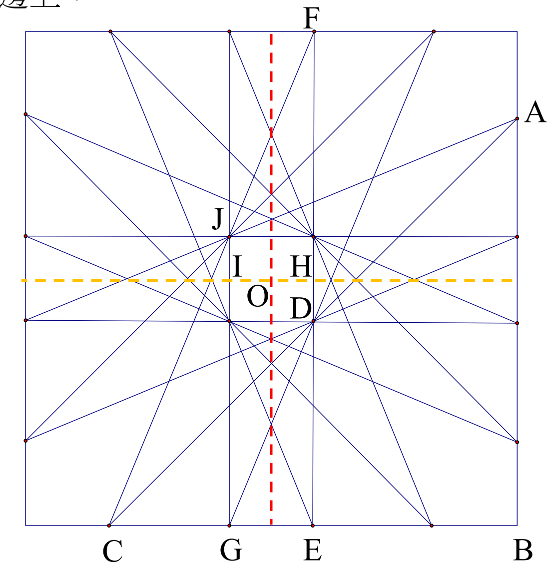
$\overline{OD}=2.25$

外部正方形邊長和內部正方形的對角線長比值為 9/2.25=4

圖三十八

11.十六角星(間隔 7)，頂點皆在外部正方形邊上：

如圖三十九



圖三十九

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$

$\overline{AB}：\overline{BC}=\overline{DE}：\overline{EC}$

$\because \overline{AB}=\overline{BC}$

$\therefore \overline{DE}=\overline{EC}$

$9-\overline{DH}=\overline{EG}+\overline{GC}$

$\because \overline{EG}=2\overline{DH}$

$\therefore \overline{GC}=9-3\overline{DH}$

$\triangle FEC \sim \triangle JGC$

$\overline{FE}：\overline{EC}=\overline{JG}：\overline{GC}$

$18：\overline{EG}+\overline{GC}=9+\overline{IJ}：\overline{GC}$

$\because \overline{EG}=2\overline{IJ}=2\overline{DH}$，且$\overline{GC}=9-3\overline{DH}$

$18：2\overline{DH}+9-3\overline{DH}=9+\overline{DH}：9-3\overline{DH}$

$81-\overline{DH}^2=162-54\overline{DH}$

$\therefore \overline{DH}^2-54\overline{DH}+81=0$

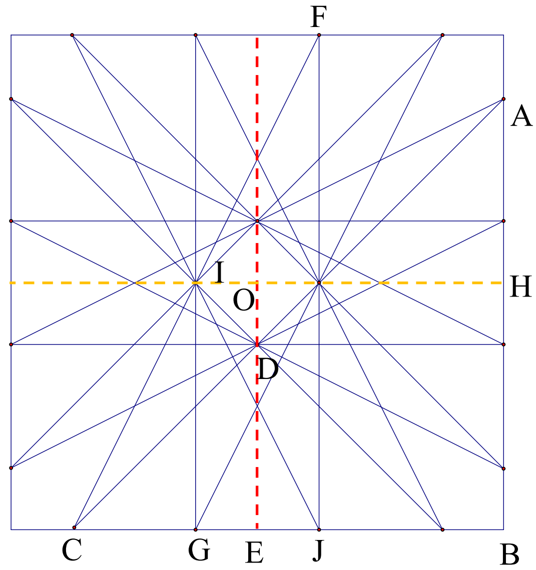
$\overline{DH} \fallingdotseq 1.544$

外部和內部正方形的邊長比值約為 9/1.544≒5.83

12.十六角星(間隔 7)，內部正方形旋轉 45°，

頂點皆在外部正方形邊上：

如圖四十



圖四十

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$

$\overline{AB}：\overline{BC}=\overline{DE}：\overline{EC}$

$\because \overline{AB}=\overline{BC}$

$\therefore \overline{DE}=\overline{EC}$

$9-\overline{OD}=\overline{EG}+\overline{GC}$

$\because \overline{EG}=\overline{OD}$

$\therefore \overline{GC}=9-2\overline{OD}$

$\triangle FJC \sim \triangle IGC$

$\overline{FJ}：\overline{JC}=\overline{IG}：\overline{GC}$

$18：\overline{JG}+\overline{GC}=9：\overline{GC}$

$\because \overline{JG}=2\overline{OD}$，且$\overline{GC}=9-2\overline{OD}$

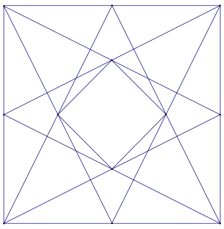
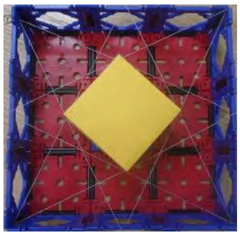
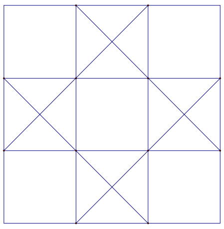
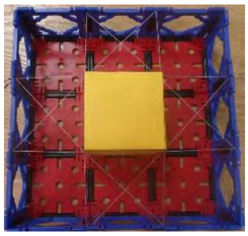
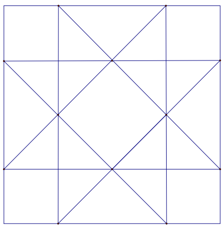
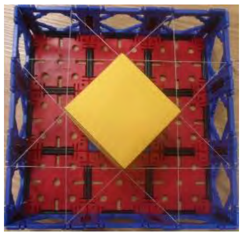
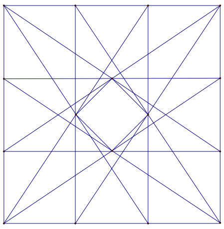
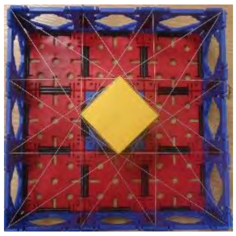
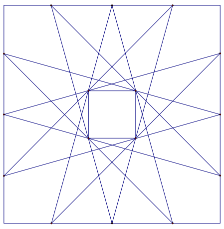
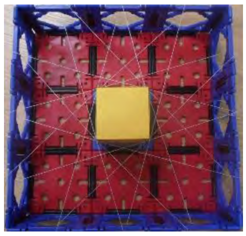
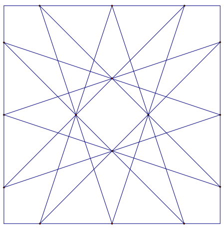
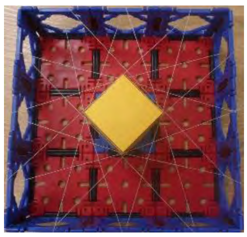
$18：2\overline{OD}+9-2\overline{OD}=9：9-2\overline{OD}$

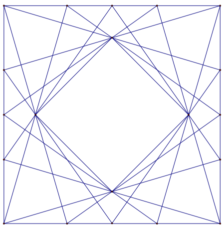
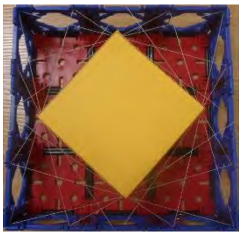
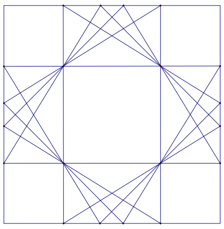
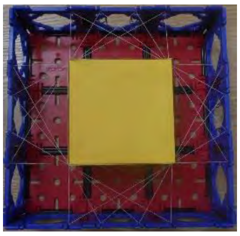
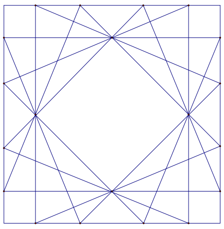
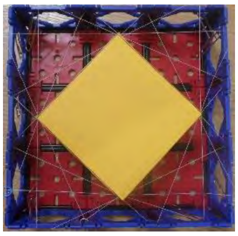
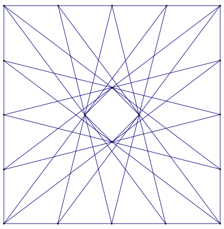
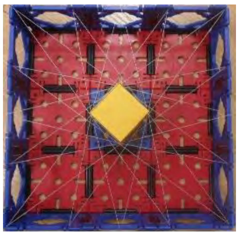
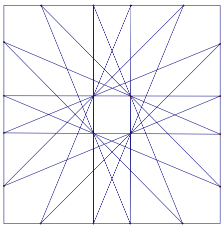
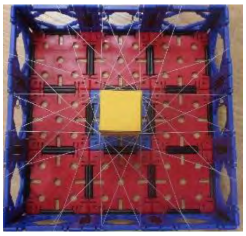
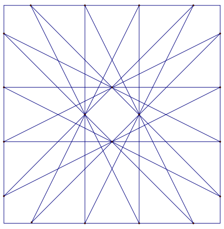
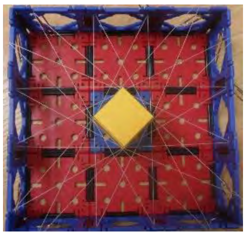
$\therefore 4\overline{OD}=9$

$\overline{OD}=2.25$

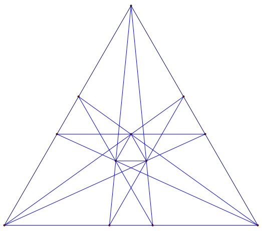
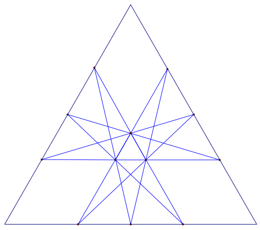
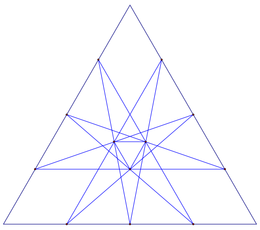
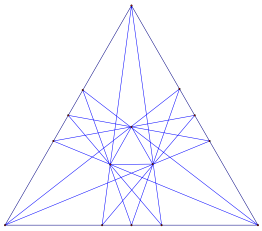
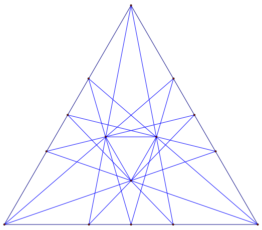
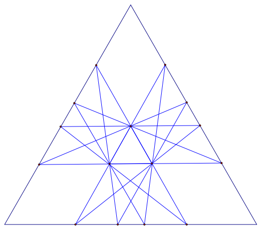
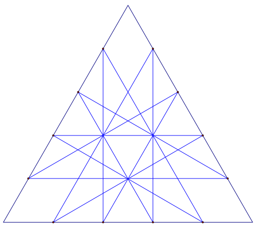
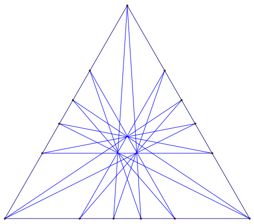
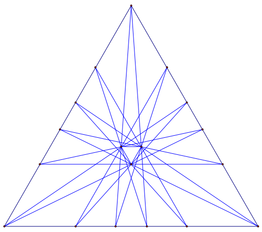
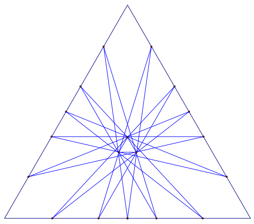
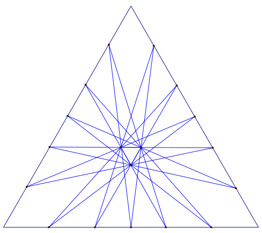
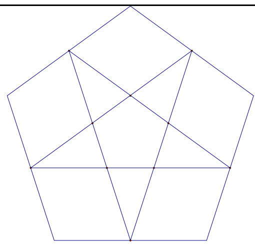
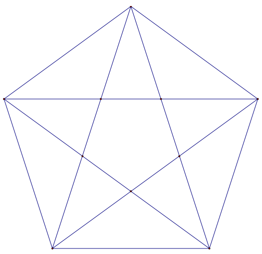
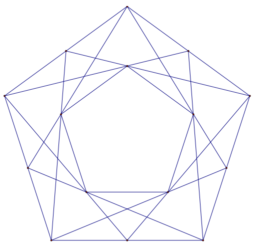
外部正方形邊長和內部正方形的對角線長比值為 9/2.25=4

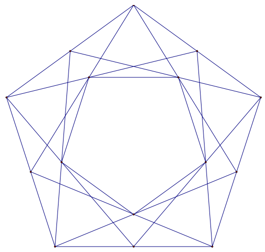
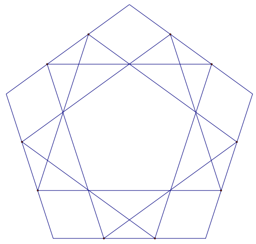
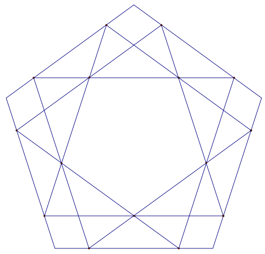
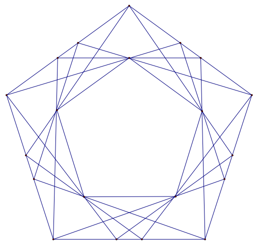
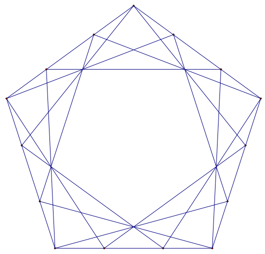
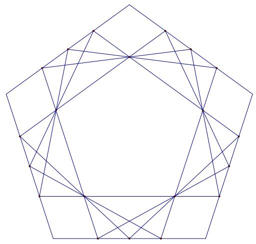
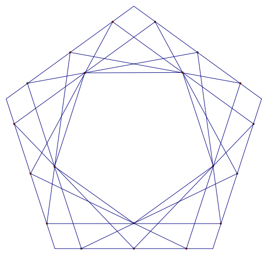
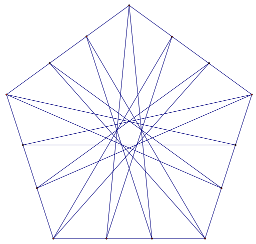
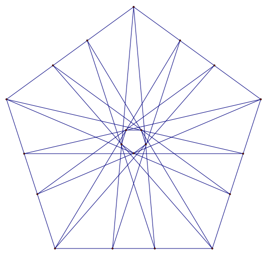
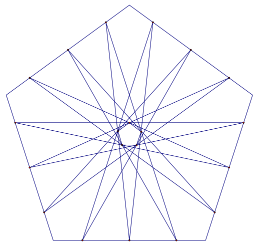
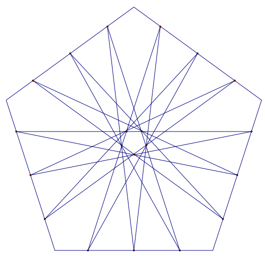
將以上結果及組合智慧片做成外正方形、摺紙做成內部正四角柱和白線製作出的正方形內多角星整理如下表。(其中 a：外部正方形的邊長，b：內部正方形的邊長，c：內部正方形的對角線長)

名稱	繪製多角星	製作多角星	內外正方形比例
八角星，內正方形旋轉 45°			a=2c
八角星，頂點皆在外部正方形邊上			a=3b
八角星，內正方形旋轉 45°，頂點皆在外部正方形邊上			a=2c
十二角星，內正方形旋轉 45°			a=3c
十二角星，頂點皆在外部正方形邊上			a≒4.56b
十二角星，內正方形旋轉 45°，頂點皆在外部正方形邊上			a=3c

十六角星(間隔 5)，內正方形旋轉 45˚			a≒1.41c
十六角星(間隔 5)， 頂點皆在外部正方形邊上			a≒2.24b
十六角星(間隔 5)，內正方形旋轉 45˚ ，頂點皆在外部正方形邊上			a≒1.41c
十六角星(間隔 7)，內正方形旋轉 45˚			a=4c
十六角星(間隔 7)， 頂點皆在外部正方形邊上			a≒5.83b
十六角星(間隔 7)，內正方形旋轉 45˚ ，頂點皆在外部正方形邊上			a=4c

(七)我們也利用動態幾何系統 the geometer's sketchpad 軟體將正三角形和正五邊形內部一些倍數的多角星畫出來，如下表：

名稱	繪製多角星	名稱	繪製多角星
正三角形內九角星		正三角形內九角星，頂點皆在外正三角形邊上	
正三角形內九角星，內正三角形旋轉 60°，頂點皆在外正三角形邊上		正三角形內十二角星	
正三角形內十二角星，內正三角形旋轉 60°		正三角形內十二角星，頂點皆在外正三角形邊上	
正三角形內十二角星，內正三角形旋轉 60°，頂點皆在外正三角形邊上		正三角形內十五角星	
正三角形內十五角星，內正三角形旋轉 60°		正三角形內十五角星，頂點皆在外正三角形邊上	
正三角形內十五角星，內正三角形旋轉 60°，頂點皆在外正三角形邊上		正五邊形內五角星	
正五邊形內五角星，內正五邊形旋轉 36°		正五邊形內十角星	

正五邊形內十角星， 內正五邊形旋轉 36°		正五邊形內十角星， 頂點皆在外正五邊形邊上	
正五邊形內十角星， 內正五邊形旋轉 36°， 頂點皆在外正五邊形邊上		正五邊形內十五角星 (間隔 4 [註三])	
正五邊形內十五角星 (間隔 4)， 內正五邊形旋轉 36°		正五邊形內十五角星 (間隔 4)， 頂點皆在外正五邊形邊上	
正五邊形內十五角星 (間隔 4)， 內正五邊形旋轉 36°， 頂點皆在外正五邊形邊上		正五邊形內十五角星 (間隔 7)	
正五邊形內十五角星 (間隔 7)， 內正五邊形旋轉 36°		正五邊形內十五角星 (間隔 7)， 頂點皆在外正五邊形邊上	
正五邊形內十五角星 (間隔 7)， 內正五邊形旋轉 36°， 頂點皆在外正五邊形邊上			

註三：和 15 互質的數有 2、4、7、8、11、13、14，其中間隔 2、13 和 14 在正五邊形內畫多角星時，會產生連接兩個點時卻在同一邊上，故無法形成多角星，而間隔 4 和 11 畫出來的圖形相同，間隔 7 和 8 畫出來的圖形相同，所以正五邊形內的十五角星有間隔 4 和間隔 7 兩種。

伍、研究結果

一、在邊長為 a 正方形的內部有一個同中心、同方向且邊長為 b 的正方形，內外正方形之間可以放置最大的正方形面積為 ab。

二、在科學研習月刊中的題目，小志最後跑步的路徑是公園的內接正三角形，如果公園和綠地的邊長比值大於 4，則有可能跑成多角星的形狀。

三、原正多邊形和其內部的正多邊形的邊長比例會有一個臨界值，若小於等於這個臨界值，反覆作連頂線的結果會產生原正多邊形的內接正多邊形，若大於臨界值，則在一定的條件下會產生多角星。

五、原正 n 邊形與其內部的正 n 邊形的邊長比值臨界值為 $\left\{\csc\left[\left(n-2\right)\times 90°\div n\right]\right\}^2$。

六、在正方形內，令 X_n 為第 n 次的連頂線在外部正方形上的交點與內部正方形邊的延長線之距離，計算出 X_n 的數值，來驗證重複連頂線產生的圖形。

七、繪製出正方形內的多角星圖形，並利用組合智慧片、正四角柱及白線拉製出多角星。

八、繪製出正三角形及正五邊形內的多角星。

陸、討論

一、證明邊長為 a 的正方形，往同中心邊長為 b 的內部正方形作連頂線，若能夠產生內接正方形，則 a、b 的關係必符合 b<a≤2b。

若能產生內接正方形，則 X_n 必定最後會成為一個定值，

假設從 n-1 開始，X_{n-1}=s

由我們的計算中可以得知 $X_n=\dfrac{(a-b)^2}{4(b-X_{n-1})}$

則 s=$\dfrac{(a-b)^2}{4(b-s)}$

$4bs-4s^2=(a-b)^2$

$4s^2-4bs+(a-b)^2=0$

$s=\dfrac{4b\pm\sqrt{16b^2-16(a-b)^2}}{8}=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-(a-b)^2}}{2}$

判別式 $D=16b^2-16(a-b)^2\geq 0$

$b^2-(a-b)^2\geq 0$

$(a-b)^2-b^2\leq 0$

$(a-b+b)(a-b-b) \leq 0$

$a(a-2b) \leq 0$

$(a-2b) \leq 0$

$a \leq 2b$

∵以 b 為邊長的正方形在以 a 為邊長的正方形之內部

∴$b<a\leq 2b$

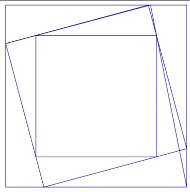
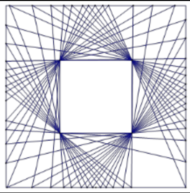
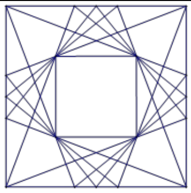
故得證，若能夠產生內接正方形，必符合 $b<a\leq 2b$；反之若 $a>2b$ 則不會產生外部正方形的內接正方形

另外我們也得知若有定值，此定值為 $s=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-(a-b)^2}}{2}$

二、利用 $s=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-(a-b)^2}}{2}$ 來驗證之前算出來產生內接正方形的 X_n 值，X_n 值會有兩個值，是因為分別由內部正方形左右兩邊的延長線來計算距離，我們繪製的圖形從外部正方形右下角的頂點出發，逆時針旋轉，如圖五，而我們計算距離是靠右的這一邊，數值較小，故令 $s=\dfrac{b-\sqrt{b^2-(a-b)^2}}{2}$，將不同比例的內外正方形所產生的 X_n 值及 s 整理如下表：

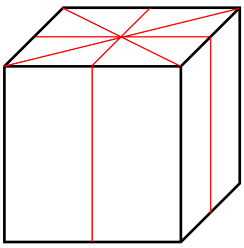
內外正方形的邊長	X_1	X_2	…	X_{99}	X_{100}	$s=\dfrac{b-\sqrt{b^2-(a-b)^2}}{2}$
b=1，a=1.1b	0.002381	0.002506	…	0.002506	0.002506	$\dfrac{1-\sqrt{0.99}}{2}\fallingdotseq 0.002506$
b=1，a=1.2b	0.009091	0.010092	…	0.010102	0.010102	$\dfrac{1-\sqrt{0.75}}{2}\fallingdotseq 0.010102$
b=1，a=1.5b	0.065789	0.066901	…	0.066987	0.066987	$\dfrac{1-\sqrt{0.36}}{2}\fallingdotseq 0.066987$
b=1，a=1.8b	0.114286	0.180645	…	0.2	0.2	$\dfrac{1-\sqrt{0.36}}{2}=0.2$
b=1，a=2b	0.166667	0.3	…	0.494975	0.495025	$\dfrac{1}{2}=\mathbf{0.5}$

三、統整出 X_n、外部正方形邊長 a 及內部正方形邊長 b、繪製出來的圖形三者之間的關係如下表：

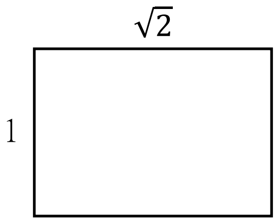
a、b 的關係	X_n	產生的圖形	圖例
$b<a\le 2b$	最後形成一個定值 $\dfrac{b-\sqrt{b^2-(a-b)^2}}{2}$	外部正方形的內接正方形	
$a>2b$	無規則	外部正方形內無規則連頂線	
	固定數字重複	外部正方形內的多角星	

四、畫出立體多角星

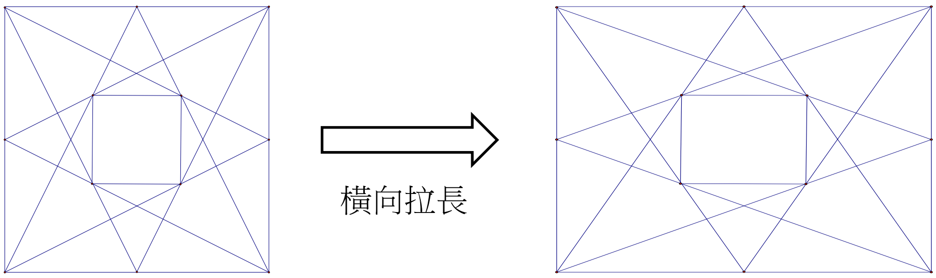
我們順利在正方形內畫出多角星，是否也能在立方體內畫出立體的多角星呢？我們畫出一個正立方體，如圖四十一，由立方體上方的正方形往下切，我們切出了四個平面，試著在這四個切面上做出多角星，這四個切面有兩個是正方形，兩個是長方形(對角線)，長方形的長寬比為 $\sqrt{2}:1$，如圖四十二，我們發現將正方形內多角星整個圖形橫向拉成長方形，即成為長方形內的多角星，以八角星為例，如圖四十三，我們利用有顏色的線、頂點珠、架構棒做出正方體內的立體多角星如圖四十四、圖四十五、圖四十六。



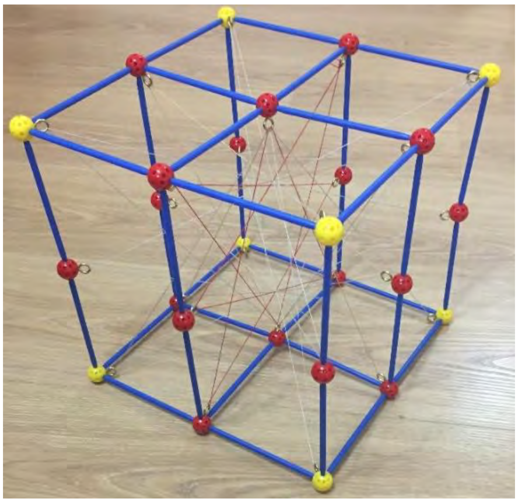
圖四十一



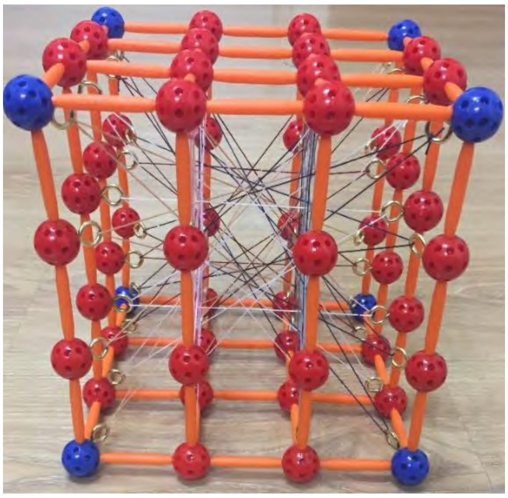
圖四十二



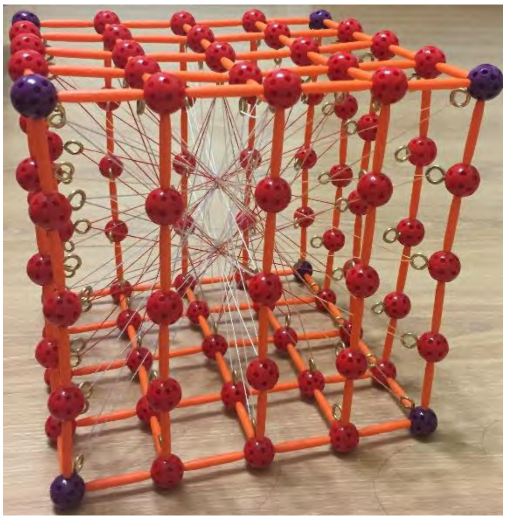
圖四十三



圖四十四 立體八角星

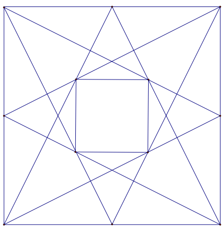
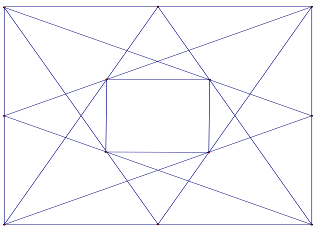
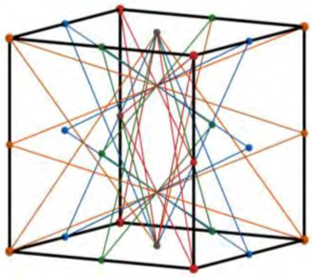
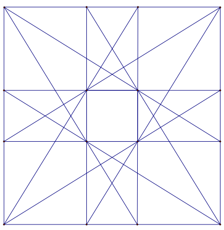
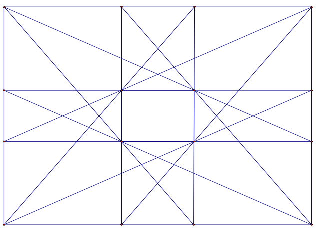
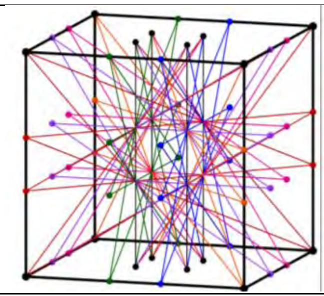


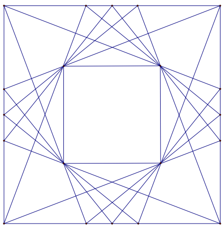
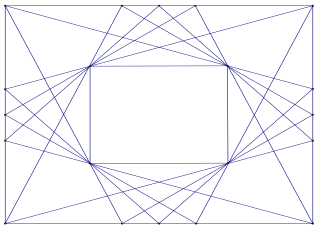
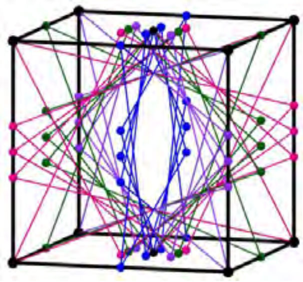
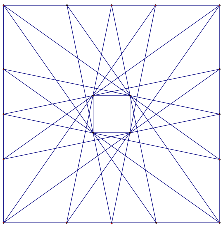
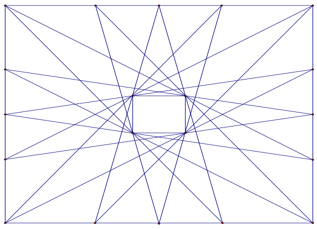
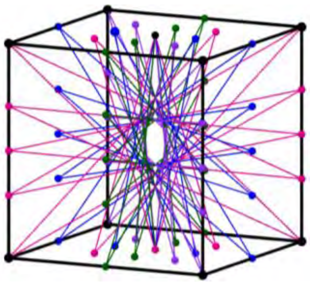
圖四十五 立體十二角星



圖四十六 立體十六角星

將上述研究中部分的多角星繪製在正立方體中，整理如下表：

名稱	正方形內多角星	長方形內多角星(對角線)	GeoGebra 軟體作圖
八角星			
十二角星			

十六角星 (間隔 5)			
十六角星 (間隔 7)			

柒、結論

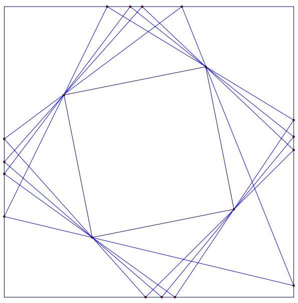
一、這次的研究中，我們從兩個數學的題目開始著手，順利找出解答後，試著改變內外正方形的比例，不斷地用繪圖軟體來作連頂線，偶然中找到了正方形內的八角星，但卻無法用同樣的方式再找到其他的多角星。

二、在研究過程中我們發現一條路無法順利達到目的時必須尋找另外的路，無法由改變內外正方形的比例來找多角星，反過來我們先利用繪圖軟體來畫出多角星，再利用相似三角形來計算出內外正方形的比例。

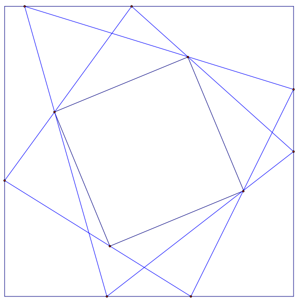
三、在研究中我們發現耐心與細心非常重要，當多角星的角愈多，要計算出內外正方形的比例愈複雜，有時需要用到兩次的相似三角形才有辦法計算出來。

四、未來發展方向：

目前我們做出正方形內的多角星，內部的正方形可以旋轉 45°，但如圖四十七、四十八卻是旋轉不同角度的多角星，內部正方形的旋轉角度以及內外正方形的比例為何？才能畫出這些特殊的多角星呢？是未來可以研究的方向。



圖四十七



圖四十八

捌、參考資料

一、陳榮輝（2017）・*美國 AMC8 數學測驗歷屆試題暨詳解(II)*・臺北市：博凱。

二、游森棚（2018）・公園跑切線・*科學研習月刊*，*57*(7)，44。

三、梁惠珍、柳賢（2014）・正 n 角星的繪圖與光芒角之探討・*科學教育月刊*，*367*，35-41。

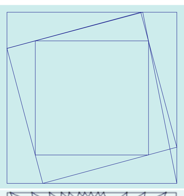
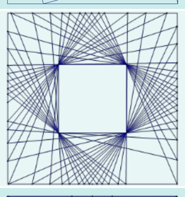
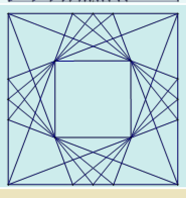
#【評語】080413

從解決數學的兩個題目出發，巧妙地將兩個問題結合，從中獲得啟發，從而思考、構想出「形中有形」的探究，是一個很好的探尋問題的起點；循序漸進、耐心細心地尋找答案後，再透過改變條件，然後探討其間的變化，最後又擴充至立方體，進行相關的討論，也進一步使得研究結果更為豐富，同時善用科技來協助研究及驗證結果，一系列的發現有完整的分析與說明且結果具實用性，值得讚賞。

作品海報

摘要

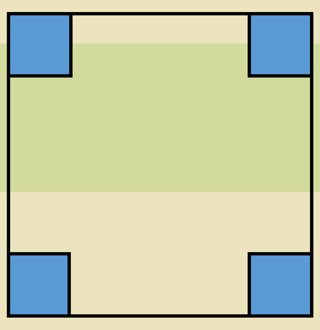
一、本研究探討正方形內有一個同中心的正方形，由外部正方形邊上的一個點出發，反覆對內部正方形的頂點作連頂線[註一]所產生的圖形。
二、我們發現原正多邊形和其內部同中心的正多邊形的邊長比例會有一個臨界值，若小於等於這個臨界值，反覆作連頂線的結果會產生原正多邊形的內接正多邊形，若大於臨界值，則在一定的條件下會產生多角星。
三、原正n邊形與其內部的正n邊形會產生內接正n邊形的邊長比值臨界值為$\{\csc[(n-2)\times 90^\circ \div n]\}^2$。
四、整理出X_n、外部正方形邊長a及內部正方形邊長b與繪製出來圖形三者之間的關係。

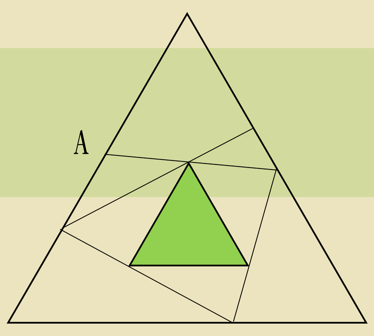
a、b的關係	X_n	產生的圖形	圖例
b<a≤2b	最後形成一個定值 $\frac{b-\sqrt{b^2-(a-b)^2}}{2}$	內接正方形	
a>2b	無規則	無規則連頂線	
	固定數字重複	多角星	

註一：請參閱專有名詞定義

壹、研究動機

2015年美國AMC8數學測驗的題目中有一個題目[1]：
「如圖一，在邊長為5公分的正方形的四個角落，分別切掉一個邊長為1公分的正方形。試問在剩下的區域內能放入最大的正方形面積為多少平方公分？」
另外臺灣師範大學數學系游森棚教授在科學研習月刊中[2]，發表一個題目：如圖二 ，正三角形的公園中有一個邊長為公園邊長$\frac{1}{3}$的小正三角形綠地，公園和綠地兩者方向相同，而且中心重合。兩三角形之間為開放空間，民眾可自由活動。小志從公園邊上的A點出發，每次都朝著綠地的頂點跑「切線」，跑到公園的另一邊的一點，然後再從這個點出發，反覆一直跑下去，能得到什麼結論？


圖一



圖二

貳、研究目的

基於以上的研究動機，本研究的研究目的有二：
一、找出研究動機中兩個題目的解答。
二、改變內外正方形的比例，探討其連頂線的變化。

參、研究器材

紙、筆、動態幾何系統the geometer's sketchpad、計算機、Microsoft Excel軟體、組合智慧片、白線、頂點珠、架構棒、GeoGebra繪圖軟體。

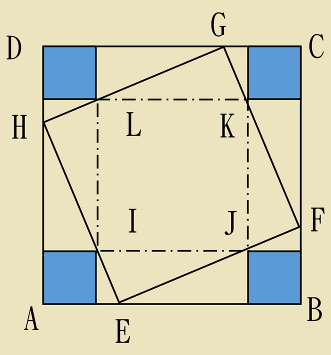
肆、研究過程

一、 專有名詞定義

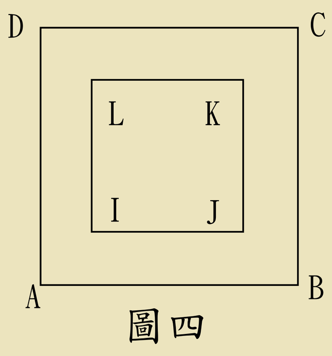
連頂線：指由外部正方形邊上一點出發，連接同中心的內部正方形的頂點，再延伸至外部正方形邊上的線段。在科學研習月刊題目中以「切線」表示，但切線的定義為一條剛好觸碰到曲線上某一點的直線，與題目的意思不同，故另定名詞表示，而本研究中的Xn為第n次的連頂線在外部正方形上的交點與內部正方形邊的延長線之距離。

二、 找出研究動機中兩個題目的解答

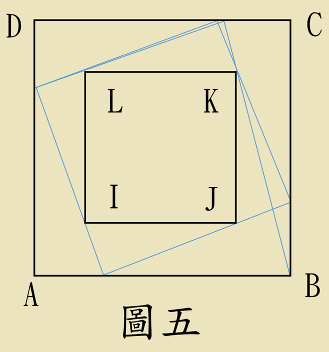
(一)AMC8數學測驗的題目[1]
1. 2015年美國AMC8數學測驗的題目中，如圖三，在邊長為5公分的正方形的四個角落，分別切掉一個邊長為1公分的正方形，正方形內部剩下的區域內能放入最大的正方形面積，內部正方形EFGH的頂點必須與原正方形ABCD的邊相接才能產生最大的面積。計算如下：
正方形IJKL面積=3x3=9
△IJE面積=3x1x$\frac{1}{2}$=$\frac{3}{2}$(底$\overline{IJ}$=3，高為1)
所求最大正方形為EFGH
其面積為9+4x$\frac{3}{2}$=15平方公分
我們假設外部正方形ABCD的邊長為a，
內部正方形IJKL的邊長為b，
則內部最大的正方形面積為$b^2+4\times[\frac{1}{2}\times(\frac{a-b}{2})\times b] = b^2+(a-b)\times b = ab$



圖三



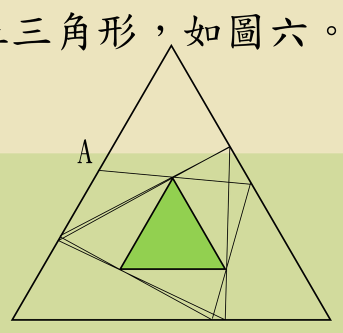
圖四



圖五

2. 要從圖一中直接畫出正方形ABCD的內接正方形並不容易，但是我們發現將圖一改成圖四的形式，畫出與正方形ABCD同中心的內部正方形IJKL，從B點出發，每次作內部正方形的連頂線，經過幾次後就會產生正方形ABCD的內接正方形，如圖五。

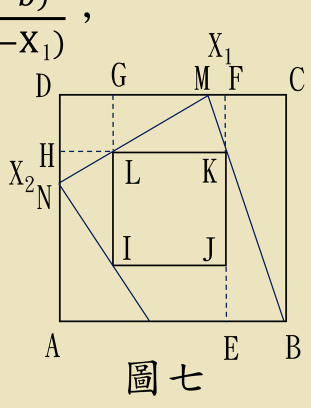
(二)科學研習月刊中題目[2]
正三角形的公園中有一個邊長為公園邊長$\frac{1}{3}$的小正三角形綠地，公園和綠地兩者方向相同，而且中心重合。從公園邊上的A點出發，如圖二，每次都朝著綠地的頂點跑「切線」，跑到公園的另一邊的一點，然後再從這個點出發，反覆一直跑下去，如此反覆做內部正三角形頂點的切線(本研究稱為連頂線)，方法與上述(一)中圖五的做法相同，試著畫出結果，發現也如同上述，持續畫下去，似乎會漸漸趨近正三角形的內接正三角形，如圖六。
解答了這兩個題目，讓我們又產生了新的疑問，是否任何比例的內外正方形都會產生相同的圖形呢？



圖六

三、改變內外正方形的比例，探討其連頂線的變化

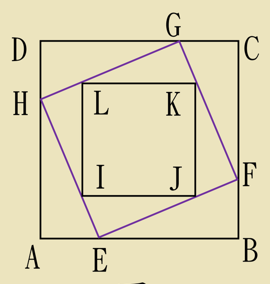
(一)我們將內部正方形IJKL部分的邊延長，分別與外部正方形ABCD交於點E、點F、點G和點H，如圖七，由點B往點K作連頂線與正方形ABCD相交於點M，
令外部正方形的邊長為a，內部正方形的邊長為b，則$\overline{BE}=\overline{FK}=\frac{a-b}{2}$，$\overline{EK}=\frac{a+b}{2}$，
令X_n為第n次的連頂線在外部正方形上的交點與內部正方形邊的延長線之距離，其中△BKE~△MKF，則$\overline{BE}:\overline{EK}=\overline{MF}:\overline{FK}$，得出$X_1=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$，
從M為起點往點L作第二次連頂線，與正方形ABCD相交於點N，則△MGL~△LHN，$\overline{GM}:\overline{GL}=\overline{HL}:\overline{HN}$，$\overline{GL}=\overline{HL}=\frac{a-b}{2}$，$\overline{GM}=b-X_1$，得出$X_2=\frac{(a-b)^2}{4(b-X_1)}$，
每次作連頂線都可以產生相似三角形，利用相似三角形邊長間的比例，可以得出$X_n=\frac{(a-b)^2}{4(b-X_{n-1})}$。



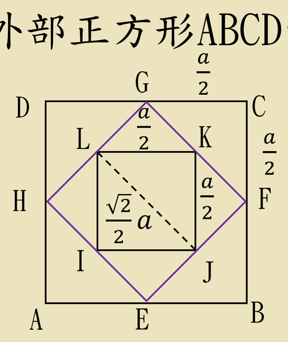
圖七

(二)利用上述的公式，將內外不同比例的正方形，用EXCEL軟體將X_n列出，來找出每次連頂線的變化，如作品說明書第4頁~5頁。
觀察不同內外正方形的比例，所產生每次連頂線在外部正方形上的交點與內部正方形邊的延長線之距離，發現了以下幾點：
1. 在外部正方形邊長a與內部正方形邊長b的比值小於等於2時，X_n會逐漸趨近一個定值，而比值愈小，X_n會愈快達到這個定值。
2. 當比值大於2時，X_n的數值不再趨近於定值，有時甚至會產生負數。
3. 當比值等於3時，X_n的數值只有0.5、2、-1三個數。

(三)由外部正方形ABCD做內部正方形IJKL頂點的連頂線，會產生正方形ABCD的內接正方形EFGH，如圖八，內部的正方形IJKL愈小，內接正方形EFGH也愈小，內接正方形最小為EFGH分別為正方形ABCD的中點時，如圖九，由畢氏定理可知$\overline{FG}=\overline{JL}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，則$\overline{KL}=\overline{JK}=\frac{a}{2}$，即內部的正方形IJKL等於外部正方形ABCD的一半，外部正方形的邊長a與內部正方形邊長b的比值等於2為一個臨界值，若比值小於等於2，
才會產生外部正方形的內接正方形。
已知內接正方形的面積為ab，若固定a的長度，當a和b的比值為2時，即a=2b時，會產生最小內接正方形，
所以b<a≤2b一定能產生內接正方形。

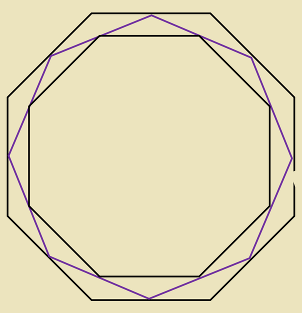


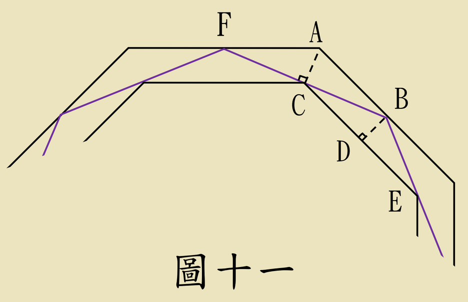
圖八



圖九

(四)將正n邊形取其每邊的中點連接起來找出最小的內接正n邊形，再將內接正n邊形取每邊的中點連接起來，即可得到內部正n邊形，如圖十，將圖十局部放大成圖十一，A為正n邊形的一個頂點，B為邊上的中點，從點A和點B做中垂線分別交內部正n邊形於點C和點D，點C為內部正n邊形的頂點，點D為內部正n邊形的中點，
假設$\overline{CD}$=1，
∠CBD=(n-2)x180°÷2n=(n-2)x90°÷n，
則$\overline{BC}$=csc[(n-2)x90°÷n]，
∠BAC=(n-2)x180°÷2n=(n-2)x90°÷n，
則$\overline{AB}=\overline{BC}$xcsc[(n-2)x90°÷n]={csc[(n-2)x90°÷n]}²，
而$\overline{CD}$與$\overline{AB}$分別為內外正n邊形邊長的一半，
故外部正n邊形與內部正n邊形邊長的比值為{csc[(n-2)x90°÷n]}²
外部正n邊形與內部正n邊形邊長的比值小於等於{csc[(n-2)x90°÷n]}²的正n邊形，從外部正n邊形對內部正n邊形的頂點作連頂線，會產生外部正n邊形的內接正n邊形，
若為正三角形，則其臨界值為{csc[(3-2)x90°÷3]}²=(csc30°)²=4；若為正方形，其臨界值為{csc[(4-2)x90°÷4]}²=(csc45°)²=2


圖十



圖十一

(五)證明正n邊形取每邊中點連接起來所得到的是最小的內接正n邊形

在圖十一中，我們假設正n邊形取每邊中點連接起來所得到的不是最小的內接正n邊形，則△ABF不會最大，必存在一個△AB´F´>△ABF，且點B´及點F´不是正n邊形邊上的中點，

令$\overline{AB}=\overline{AF}=1$，則$\triangle ABF=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta$，其中$\theta$為$\angle BAF$

令△AB´F´的兩邊$\overline{AB'}=1-x$，$\overline{AF'}=1+x$，其中$0<x<1$；則$\triangle AB'F'=\frac{1}{2}(1-x)\times(1+x)\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times(1-x^2)\times\sin\theta$

$\because \triangle AB'F'>\triangle ABF \quad \therefore \frac{1}{2}\times(1-x^2)\times\sin\theta>\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin\theta$

得到$(1-x^2)\times>1$ $(\rightarrow\leftarrow)$

故得證，正n邊形取每邊中點連接起來所得到的是最小的內接正n邊形。

四、找出正方形內的多角星

(一)在三-(二)的研究中，我們發現當外部正方形與內部正方形邊長的比值大於2時會有兩種情形，其一，例如比值為2.5時，如表一，X_n的數值無固定規則，其圖形無統一的形狀，如圖十二；其二，如當比值為3時，X_n的數值只有0.5、2、-1三個數，如表二，其圖形為一個八角星，如圖十三。

令b=1，a=2.5b

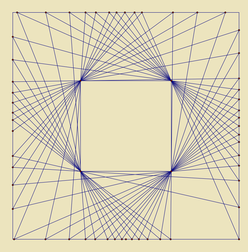
X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	…	X_{98}	X_{99}	X_{100}
0.321429	0.828947	3.288462	-0.2458	0.451518	…	0.259064	0.759175	2.335719

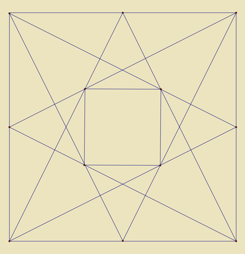
表一

令b=1，a=3b

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	…	X_{98}	X_{99}	X_{100}
0.5	2	-1	0.5	2	…	2	-1	0.5

表二


圖十二


圖十三

(二)當外部正方形與內部正方形邊長的比值大於2時，X_n的數值有的大於內部正方形邊長b=1，有的大於外部正方形邊長a，甚至也有負數，表示當外部正方形與內部正方形邊長的比值大於臨界值時，從外部正方形向內部正方形的頂點作連頂線，和外部正方形的交點有些已在內部正方形邊的延長線之外，如圖十四，故公式必須修正。

1. 當$X_{n-1}>b$，交點M已在內部正方形邊的延長線外面，如圖十五，

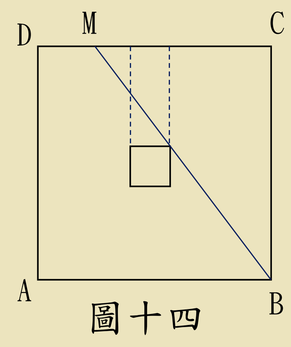
其中△EIM~△FIN，

$\overline{EM}:\overline{EI}=\overline{FN}:\overline{FI}$

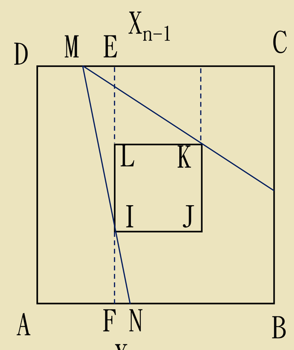
$\overline{EM}=X_{n-1}-b$，$\overline{EI}=\frac{a+b}{2}$，$\overline{FI}=\frac{a-b}{2}$

$X_{n-1}-b:\frac{a+b}{2}=X_n:\frac{a-b}{2}$

則$X_n=\frac{(a-b)(X_{n-1}-b)}{a+b}$



圖十四



圖十五

2. 當$X_{n-1}=b$，交點M剛好在內部正方形邊的延長線上，如圖十六，

由點M為起點往內部正方形頂點作連頂線，會沿著內部正方形的邊，

與外部正部正方形交於N，也會在內部正方形邊的延長線上，

則$X_n=0$，

再繼續往內部正方形的頂點做第n+1條連頂線，與外部正方形交於點O，

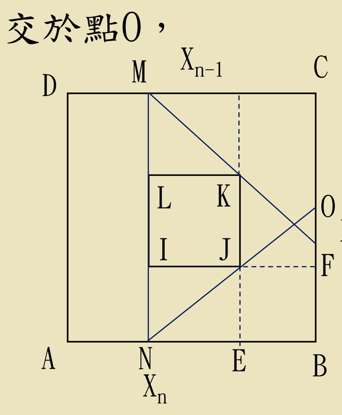
其中△EJN~△FOJ，

$\overline{EJ}:\overline{EN}=\overline{FO}:\overline{FJ}$

$\overline{EN}=b$，$\overline{EJ}=\overline{FJ}=\frac{a-b}{2}$，

$\frac{a-b}{2}:b=X_{n+1}:\frac{a-b}{2}$

則$X_{n+1}=\frac{(a-b)^2}{4b}$



圖十六

3. 而$X_{n-1}<b$有下列兩種情形：

(1)由點M往內部正方形作連頂線，與外部正方形的交點N在$\overline{CD}$的鄰邊上，如圖十七

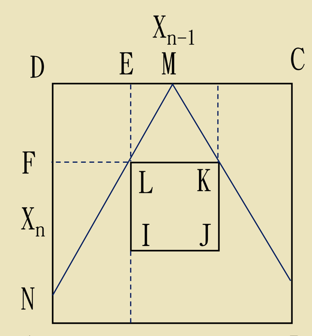
其中△ELM~△FNL，

$\overline{EL}:\overline{EM}=\overline{FN}:\overline{FL}$

$\overline{EL}=\overline{FL}=\frac{a-b}{2}$，$\overline{EM}=b-X_{n-1}$，

$\frac{a-b}{2}:b-X_{n-1}=X_n:\frac{a-b}{2}$

則$X_n=\frac{(a-b)^2}{4(b-X_{n-1})}$



圖十七

(2)由點M往內部正方形作連頂線，與外部正方形的交點N在$\overline{CD}$的對邊上，如圖十八

其中△ELM~△FLN，

$\overline{EL}:\overline{EM}=\overline{FL}:\overline{FN}$

$\overline{EL}=\frac{a-b}{2}$，$\overline{FL}=\frac{a+b}{2}$，$\overline{EM}=b-X_{n-1}$，

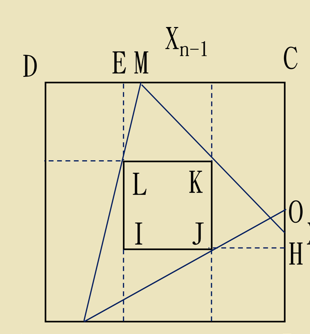
則$X_n=\frac{(a+b)(b-X_{n-1})}{a-b}$

且△GJN~△HOJ

$\overline{GJ}:\overline{GN}=\overline{HO}:\overline{HJ}$

$\overline{GJ}=\overline{HJ}=\frac{a-b}{2}$，$\overline{GN}=b+X_n$，

則$X_{n+1}=\frac{(a-b)^2}{4(b+X_n)}$



圖十八

故當外部正方形與內部正方形邊長的比值大於2時，$X_1=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$，

當$X_{n-1}<b$ 時，會有兩種情形$X_n=\frac{(a-b)^2}{4(b-X_{n-1})}$ or $X_n=\frac{(a+b)(b-X_{n-1})}{a-b}$

其中當$X_n=\frac{(a+b)(b-X_{n-1})}{a-b}$ 時，$X_{n+1}=\frac{(a-b)^2}{4(b+X_n)}$

當$X_{n-1}>b$ 時，$X_n=\frac{(a-b)(X_{n-1}-b)}{a+b}$

當$X_{n-1}=b$時， $X_n=0$，$X_{n+1}=\frac{(a-b)^2}{4b}$

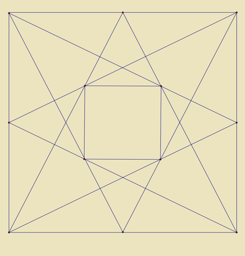
將外部正方形與內部正方形邊長的比值為3的X_n的值，重新列出如表三：

令b=1，a=3b

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	…
0.5	2	0.5	2	0.5	2	0.5	2	…

表三

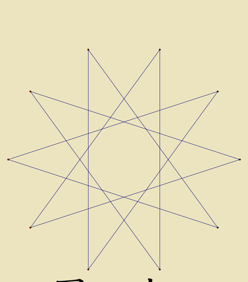
可以發現Xn的值只有0.5和2兩種，0.5代表連頂線交於外部正方形邊上的中點，2表示連頂線交於外部正方形的頂點上，如圖十三。我們試著用不同比例的內外正方形來找出其他的多角星，但卻找不到，在後續的研究中我們才發現其他多角星的內外正方形並不是簡單的整數比，我們改用由正多角星來找其他的正方形內多角星。


圖十三

(三)梁惠珍、柳賢(2014)[3]研究中指出正多角星共有三種，分別為「一筆畫」成星、「正m邊形」成星及「一筆畫正m角星」成星，一筆畫成星是以一筆畫的方式完成一個正多角星，如圖十九為一筆畫正十角星；正m邊形成星是由幾個正m邊形組成的正多角星，如圖二十為2個正五邊形組成的正十角星；而一筆畫正m角星成星則是由幾個正m角星組成的正多角星，如圖二十一為2個正五角星組成的正十角星。


圖十九


圖二十


圖二十一

我們所要找出來正方形內的多角星屬於其中的一筆畫成星，在一個圓上，將圓平分成n等分，會產生n個等分點，並將n個等分點間隔a個等分弧連接起來，其中$n\geq5$，$a<\frac{n}{2}$，且(n，a)=1時則可畫出一筆畫正多角星。利用同樣的原理，我們在正方形的邊上作等分點，我們以動態幾何系統the geometer's sketchpad軟體，先畫出在正方形內的多角星，再計算出內外正方形的比例關係。

(四)我們找出正方形內4的倍數：8、12、16角星，為了方便計算，我們讓外部正方形的邊長為18，利用相似三角形來計算出內外正方形的比例：

1. 八角星：

如圖二十二

△ABC~△ADE

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{DE}$

$9-\overline{BO}:\overline{BC}=18:9$

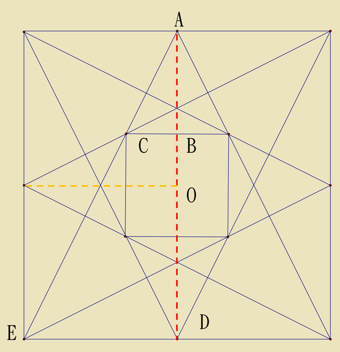
$\overline{BO}=\overline{BC}$

$9-\overline{BC}=2\overline{BC}$

$3\overline{BC}=9$

$\overline{BC}=3$

外部和內部正方形的邊長比值為9/3=3



圖二十二

2. 十二角星：

如圖二十三

△ABC~△DEC

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{EC}$

$9+\overline{GB}:18=\overline{DE}:9-\overline{EH}$

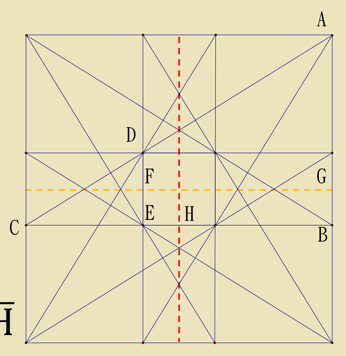
$\because\overline{DE}=2\overline{GB}=2\overline{EH}$

$\therefore 9+\overline{EH}:18=2\overline{EH}:9-\overline{EH}$

$\overline{EH}^2+36\overline{EH}-81=0$

$\overline{EH}\fallingdotseq2.125$

外部和內部正方形的邊長比值約為9/2.125≒4.24



圖二十三

3. 十六角星(間隔5[註二])：

如圖二十四

△ABC~△AFG

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AF}:\overline{FG}$

$9-\overline{BO}:\overline{BC}=9+\overline{OF}:9$

$\because\overline{BO}=\overline{BC} \quad \therefore\overline{OF}=\frac{81}{\overline{BC}}-18$

△CDE~△HIE

$\overline{CD}:\overline{DE}=\overline{HI}:\overline{IE}$

$\overline{CJ}-\overline{DJ}:9-\overline{DK}=9-\overline{IL}:18$

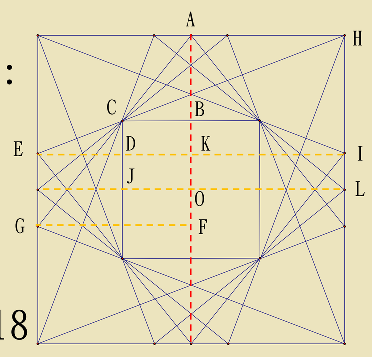
$\because\overline{CJ}=\overline{DK}=\overline{BC}$，$\overline{DJ}=\overline{IL}=\overline{OF}$且$\overline{OF}=\frac{81}{\overline{BC}}-18$

$\therefore\overline{BC}-(\frac{81}{\overline{BC}}-18):9-\overline{BC}=9-(\frac{81}{\overline{BC}}-18):18$

$45\overline{BC}^2=729$，$\overline{BC}^2=16.2$

$\overline{BC}\fallingdotseq4.025$

外部和內部正方形的邊長比值約為9/4.025≒2.24



圖二十四

4. 十六角星(間隔7)：

如圖二十五

△ABC~△ADE

$\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{AD}:\overline{DE}$

$18:\overline{BC}=9-\overline{DO}:\overline{DE}$

$\because\overline{DO}=\overline{DE}$

$\therefore 18:\overline{BC}=9-\overline{DE}:\overline{DE}$

$\overline{BC}=\frac{18\overline{DE}}{9-\overline{DE}}$

△FGC~△IHC

$\overline{FG}:\overline{GC}=\overline{IH}:\overline{HC}$

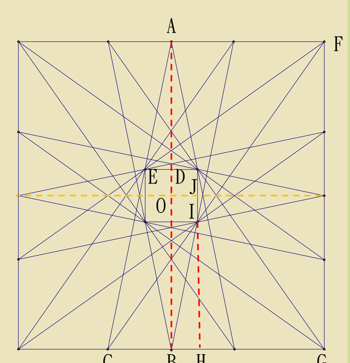
$18:9+\overline{BC}=9-\overline{IJ}:\overline{BH}+\overline{BC}$

$\because\overline{BH}=\overline{IJ}=\overline{DE}$，且$\overline{BC}=\frac{18\overline{DE}}{9-\overline{DE}}$

$18:9+\frac{18\overline{DE}}{9-\overline{DE}}=9-\overline{DE}:\overline{DE}+\frac{18\overline{DE}}{9-\overline{DE}}$

$\overline{DE}^2-54\overline{DE}+81=0$，則$\overline{DE}\fallingdotseq1.544$

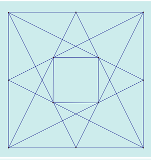
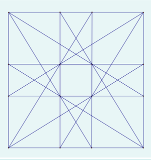
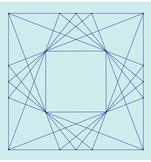
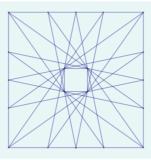
外部和內部正方形的邊長比值約為9/1.544≒5.83



圖二十五

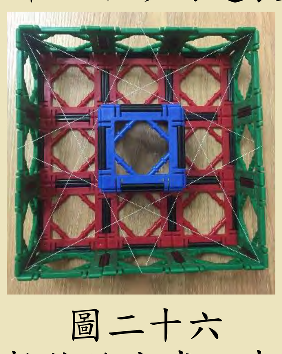
註二：和16互質的數有3、5、7、9、11、13、15，但間隔3、13、15在正方形內在畫多角星時，會產生連接兩個點時卻在同一邊上，故無法形成多角星，而間隔5和11畫出來的圖形相同，間隔7和9畫出來的圖形相同，故正方形內的十六角星有間隔5和間隔7兩種。

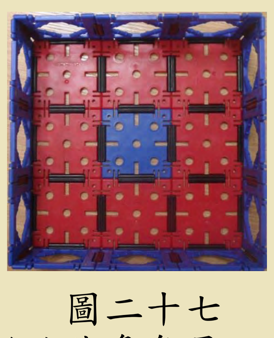
將以上結果整理如下表。(其中a：外部正方形的邊長，b：內部正方形的邊長)

名稱	圖形	內外正方形比例
八角星		a=3b
十二角星		a≒4.24b
十六角星(間隔5)		a≒2.24b
十六角星(間隔7)		a≒5.83b

(五)利用組合智慧片和白線，我們把正方形內的八角星做出來，如圖二十六，

因為組合智慧片的大小是固定的，故只能做出外部正方形與內部正方形邊長的比值為3的正方形內的八角星，為了做出其他多角星，我們依然利用組合智慧片做出固定大小的外部正方形，而內部正方形則依實際的比例，利用紙張做出正四角柱的展開圖，由組合智慧片所做出來的外部正方形邊長為19.5cm，如圖二十七，將19.5cm除以外部和內部正方形邊長的比例，即可得到內部正方形的邊長，再利用正四角柱的展開圖做出合適大小的正四角柱，如圖二十八。


圖二十六


圖二十七


圖二十八

另外，我們再以之前所得出X_n數值的公式，來驗證這些多角星，其公式如下：

$X_1=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$，

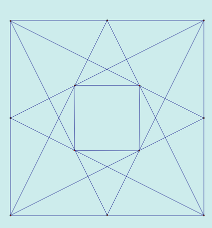
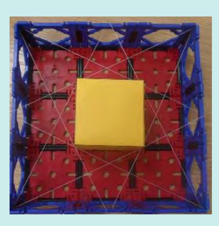
當$X_{n-1}<b$ 時，會有兩種情形$X_n=\frac{(a-b)^2}{4(b-X_{n-1})}$ or $X_n=\frac{(a+b)(b-X_{n-1})}{a-b}$

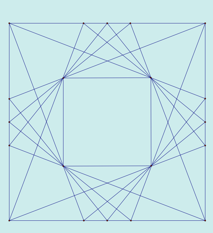
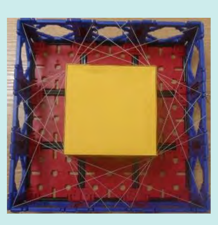
其中當$X_n=\frac{(a+b)(b-X_{n-1})}{a-b}$ 時，$X_{n+1}=\frac{(a-b)^2}{4(b+X_n)}$

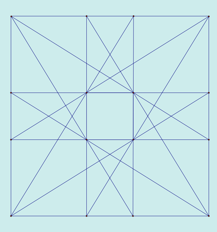
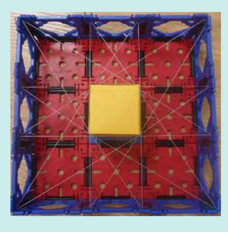
當$X_{n-1}>b$ 時，$X_n=\frac{(a-b)(X_{n-1}-b)}{a+b}$

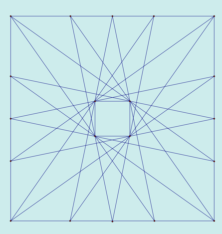
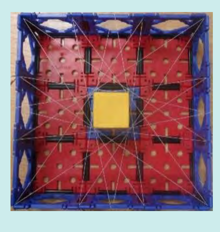
當$X_{n-1}=b$時， $X_n=0$，$X_{n+1}=\frac{(a-b)^2}{4b}$

我們將利用組合智慧片、紙張、白線做成的正方形內的多角星，以及X_n的數值整理如下表：

名稱及比例	八角星，a=3b											
X_n數值	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	…
	0.5	2	0.5	2	0.5	2	0.5	2	0.5	2	0.5	…
繪製多角星		製作多角星										

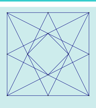
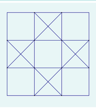
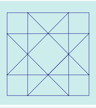
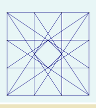
名稱及比例	十六角星(間隔5)，a≒2.24b											
X_n數值	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	…
	0.24	0.5	0.76	1.62	0.24	0.5	0.76	1.62	0.24	0.5	0.76	…
繪製多角星		製作多角星										

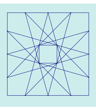
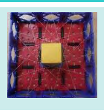
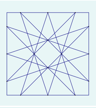
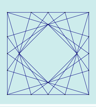
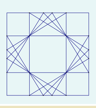
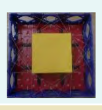
名稱及比例	十二角星，a≒4.24b											
X_n數值	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	…
	1	0	2.62	1	0	2.62	1	0	2.62	1	0	…
繪製多角星		製作多角星										

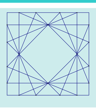
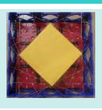
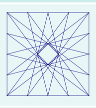
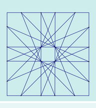
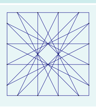
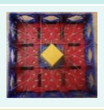
名稱及比例	十六角星(間隔7)，a≒5.83b											
X_n數值	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	…
	1.71	0.5	0.71	3.41	1.71	0.5	0.71	3.41	1.71	0.5	0.71	…
繪製多角星		製作多角星										

(六)將內部正方形旋轉45°或讓多角星的頂點不在外部正方形的頂點上，而都在外部正方形的邊上，也能產生不同的多角星，計算出內外正方形邊長的比例，並作出這些不同的多角星如作品說明書第16頁~21頁。

將以上結果及利用組合智慧片做成外正方形、摺紙做成內部正四角柱和白線製作出的正方形內多角星整理如下表。(其中a：外部正方形的邊長，b：內部正方形的邊長，c：內部正方形的對角線長)

名稱	繪製多角星	製作多角星	內外正方形比例
八角星，內正方形旋轉45°			a=2c
八角星，頂點皆在外正方形邊上			a=3b
八角星，內正方形旋轉45°，頂點皆在外正方形邊上			a=2c
十二角星，內正方形旋轉45°			a=3c

名稱	繪製多角星	製作多角星	內外正方形比例
十二角星，頂點皆在外正方形邊上			a≒4.56b
十二角星，內正方形旋轉45°，頂點皆在外正方形邊上			a=3c
十六角星(間隔5)，內正方形旋轉45°			a≒1.41c
十六角星(間隔5)，頂點皆在外正方形邊上			a≒2.24b

名稱	繪製多角星	製作多角星	內外正方形比例
十六角星(間隔5)，內正方形旋轉45°，頂點皆在外正方形邊上			a≒1.41c
十六角星(間隔7)，內正方形旋轉45°			a=4c
十六角星(間隔7)，頂點皆在外正方形邊上			a≒5.83b
十六角星(間隔7)，內正方形旋轉45°，頂點皆在外正方形邊上			a=4c

(七)我們也利用動態幾何系統the geometer´s sketchpad軟體將正三角形和正五邊形內部一些倍數的多角星畫出來，如作品說明書第24頁~25頁。

伍、研究結果

一、在邊長為a正方形的內部有一個同中心、同方向且邊長為b的正方形，內外正方形之間可以放置最大的正方形面積為ab。

二、在科學研習月刊中的題目，小志最後跑步的路徑是公園的內接正三角形，如果公園和綠地的邊長比值大於4，則有可能跑成多角星的形狀。

三、原正多邊形和其內部的正多邊形的邊長比例會有一個臨界值，若小於等於這個臨界值，反覆作連頂線的結果會產生原正多邊形的內接正多邊形，若大於臨界值，則在一定的條件下會產生多角星。

四、原正n邊形與其內部的正n邊形的邊長比值臨界值為$\{\csc[(n-2)\times 90^\circ\div n]\}^2$。

五、在正方形內，令X_n為第n次的連頂線在外部正方形上的交點與內部正方形邊的延長線之距離，計算出X_n的數值，來驗證重複連頂線產生的圖形。

六、繪製出正方形內的多角星圖形，並利用組合智慧片、正四角柱及白線拉製出多角星。

七、繪製出正三角形及正五邊形內的多角星。

陸、討論

一、證明邊長為a的正方形，往同中心邊長為b的內部正方形作連頂線，

若能夠產生內接正方形，則a、b的關係必符合b<a≤2b。

若能產生內接正方形，則X_n必定最後會成為一個定值，假設從n-1開始，$X_{n-1}=s$

由我們的計算中可以得知$X_n=\frac{(a-b)^2}{4(b-X_{n-1})}$

則$s=\frac{(a-b)^2}{4(b-s)}$

$4bs-4s^2=(a-b)^2$

$4s^2-4bs+(a-b)^2=0$

$s=\frac{4b\pm\sqrt{16b^2-16(a-b)^2}}{8}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-(a-b)^2}}{2}$

判別式$D=16b^2-16(a-b)^2\geq 0$

$b^2-(a-b)^2\geq 0$

$(a-b)^2-b^2\leq 0$

$(a-b+b)(a-b-b)\leq 0$

$a(a-2b)\leq 0$

$(a-2b)\leq 0$

$a\leq 2b$

∵以b為邊長的正方形在以a為邊長的正方形之內部

∴b<a≤2b

故得證，若能夠產生內接正方形，必符合b<a≤2b；

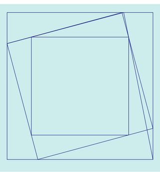
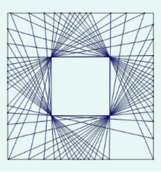
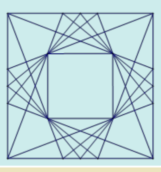
反之若a>2b則不會產生外部正方形的內接正方形

另外我們也得知若有定值，此定值為$s=\frac{b\pm\sqrt{b^2-(a-b)^2}}{2}$

二、利用$s=\frac{b\pm\sqrt{b^2-(a-b)^2}}{2}$來驗證之前算出來產生內接正方形的$X_n$值，$X_n$值會有兩個值，是因為分別由內部正方形左右兩邊的延長線來計算距離，我們繪製的圖形從外部正方形右下角的頂點出發，逆時針旋轉，如圖五，而我們計算距離是靠右的這一邊，數值較小，故令$s=\frac{b-\sqrt{b^2-(a-b)^2}}{2}$，將不同比例的內外正方形所產生的$X_n$值及s整理如下表：

內外正方形的邊長	X_1	X_2	…	X_{99}	X_{100}	$s=\frac{b-\sqrt{b^2-(a-b)^2}}{2}$
b=1，a=1.1b	0.002381	0.002506	…	0.002506	0.002506	$\frac{1-\sqrt{0.99}}{2}$ ≒0.002506
b=1，a=1.2b	0.009091	0.010092	…	0.010102	0.010102	$\frac{1-\sqrt{0.96}}{2}$ ≒0.010102
b=1，a=1.5b	0.065789	0.066901	…	0.066987	0.066987	$\frac{1-\sqrt{0.75}}{2}$ ≒0.066987
b=1，a=1.8b	0.114286	0.180645	…	0.2	0.2	$\frac{1-\sqrt{0.36}}{2}$ =0.2
b=1，a=2b	0.166667	0.3	…	0.494975	0.495025	$\frac{1}{2}$ =0.5

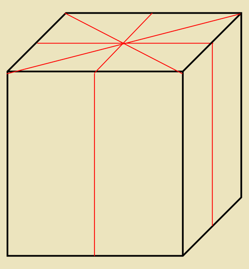
三、統整出X_n、外部正方形邊長a及內部正方形邊長b、繪製出來的圖形三者之間的關係如下表：

a、b的關係	X_n	產生的圖形	圖例
b<a≤2b	最後形成一個定值 $\frac{b-\sqrt{b^2-(a-b)^2}}{2}$	外部正方形的內接正方形	
a>2b	無規則	外部正方形內無規則連頂線	
	固定數字重複	外部正方形內的多角星	

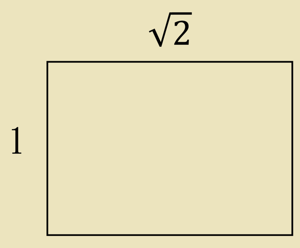
四、畫出立體多角星

我們順利在正方形內畫出多角星，是否也能在立方體內畫出立體的多角星呢？

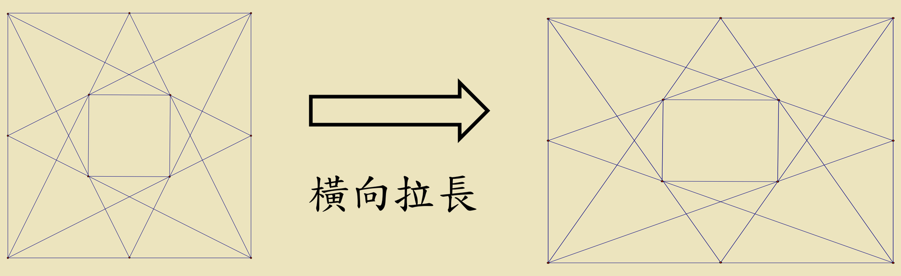
我們畫出一個正立方體，如圖四十一，由立方體上方的正方形往下切，我們切出了四個平面，試著在這四個切面上做出多角星，這四個切面有兩個是正方形，兩個是長方形(對角線)，長方形的長寬比為$\sqrt{2}$：1，如圖四十二，我們發現將正方形內多角星整個圖形橫向拉成長方形，即成為長方形內的多角星，以八角星為例，如圖四十三，我們利用有顏色的線、頂點珠、架構棒做出正立方體內的立體多角星如圖四十四、圖四十五、圖四十六。



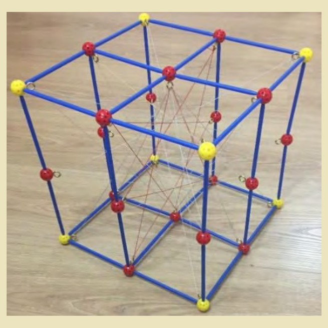
圖四十一



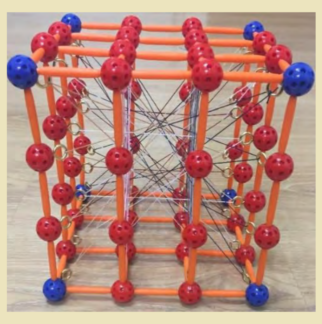
圖四十二



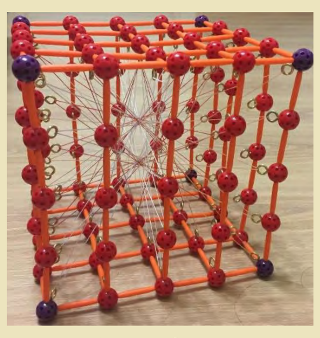
圖四十三



圖四十四
立體八角星

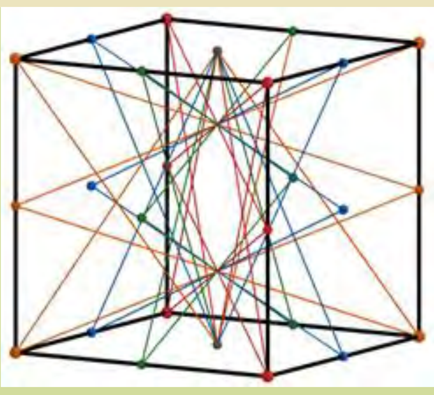


圖四十五
立體十二角星

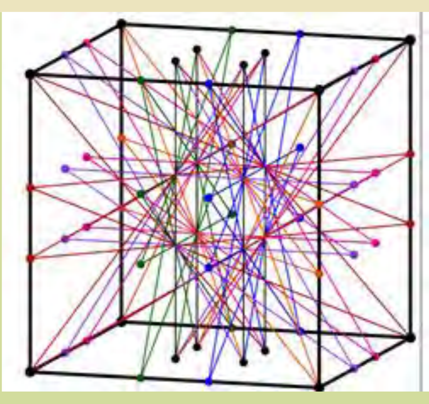


圖四十六
立體十六角星

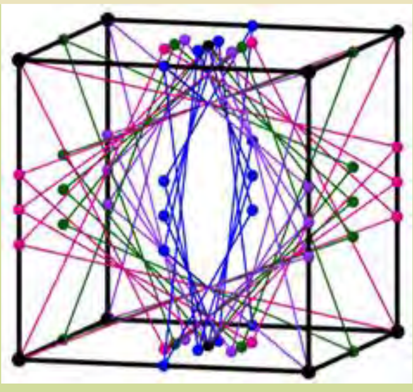
將上述研究中部分的多角星利用GeoGebra軟體繪製在正立方體中如下：



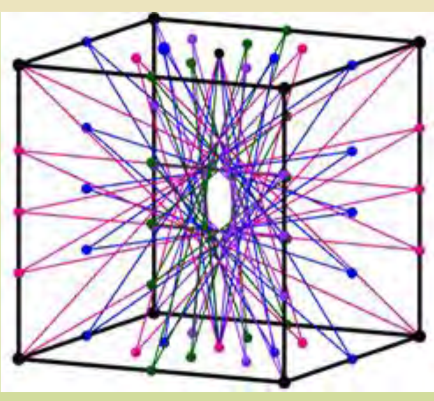
立體八角星



立體十二角星



立體十六角星
(間隔5)



立體十六角星
(間隔7)

柒、結論

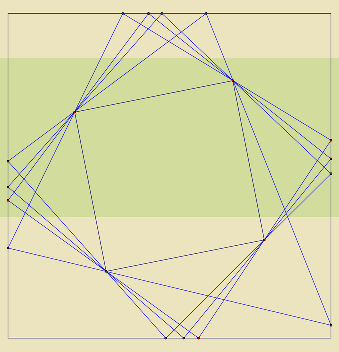
一、這次的研究中，我們從兩個數學的題目開始著手，順利找出解答後，試著改變內外正方形的比例，不斷地用繪圖軟體來作連頂線，偶然中找到了正方形內的八角星，但卻無法用同樣的方式再找到其他的多角星。

二、在研究過程中我們發現一條路無法順利達到目的時必須尋找另外的路，無法由改變內外正方形的比例來找多角星，反過來我們先利用繪圖軟體來畫出多角星，再利用相似三角形來計算出內外正方形的比例。

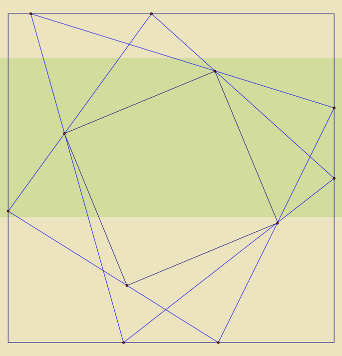
三、在研究中我們發現耐心與細心非常重要，當多角星的角愈多，要計算出內外正方形的比例愈複雜，有時需要用到兩次的相似三角形才有辦法計算出來。

四、未來發展方向：

目前我們做出正方形內的多角星，內部的正方形可以旋轉45°，但如圖四十七、四十八卻是旋轉不同角度的多角星，內部正方形的旋轉角度以及內外正方形的比例為何？才能畫出這些特殊的多角星呢？是未來可以研究的方向。



圖四十七



圖四十八

捌、參考資料

一、陳榮輝(2017)．*美國AMC8數學測驗歷屆試題暨詳解(II)*．臺北市：博凱。
二、游森棚(2018)．公園跑切線．*科學研習月刊*，*57*(7)，44。
三、梁惠珍、柳賢(2014)．正n角星的繪圖與光芒角之探討．*科學教育月刊*，*367*，35-41。