中華民國第59屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080412

異中求同的數字方塊

學校名稱：南投縣私立普台國民小學

作者：	指導老師：
小五　王翊綸 小五　謝安瑀	陳正勳 徐昇民

關鍵詞：數字方塊，等差級數、數列

作品摘要

1. 三角形數字方塊在特定區間內，都只能找到二組數多層的數列，在特定區間 H~N 中 a>b>c。
   i. 當 a-b=1 時，當 b- c＝N－2 時，可以產生 N-H 內層的三角形，所以數列為數(N,N-1,H)。
   ii. 當 b- c=1 時，當 a-b＝N－2 時，可以產生 N-H 內層的三角形，所以數列為數(N,H+1,H)。
2. 正方形數字方塊得知數字(a,b,c,d)，【a-b＞b-c 與 b-c＞c-d 時】、【(a-b)-(b-c)＜(b-d)、與 (a-b)-(b-c)＞(b-c)-(c-d)】與【(b-c)+(b-d)-(a-b)＞(a-d)-3(b-c)】以上條件，在特定的區間可以往下推論到有 7 層以上的正方形。
3. 取四個數字為(a,b,c,d)時，第 2 層為(a-b,b-c,c-d,a-d)，發現(a-d)=(a-b)+(b-c)+(c-d)的關係，為最小的三個數加總等於最大數。
4. 特定區間內最內層一定為(0，0，0，0)，最內第二層一定為四個數字相同，且利用倒數第二層為(2,2,2,2) 乘 2 倍、4 倍、8 倍、16 倍…可以反推的方式找到 (a,b,c,d)有最多的內層正方形。

壹、研究的動機

在才藝課老師讓我們進行數學遊戲趣味解題，其中三邊形的三個頂點寫下任意正整數，並算出其相鄰兩頂點的差值，放在兩點間的中點位置，隨後不斷的再往內層計算，最後卻會出現一模一樣的數字覺得很有趣，於是就和同學研究是否可依找到三邊形的規律性並歸納其類別，也想進一步利用三邊形任意數差層次的規律，試找四邊形任意數差往內層計算，是否也其規律性，所以想以此主題來進行研究與討論。

貳、研究的目的

一、三角形數字方塊的最多層數。
二、正方形數字方塊的最多層數。

叁、研究問題

一、在特定區間內，在三角形數字方塊能做到最多層數為何？
　(一) 1~4 區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？
　(二) 1~5 區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？
　(三) 1~6 區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？
　(四) 1~7 區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？
　(五) 1~8 區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？
　(六) 1~9 區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？
　(七) 1~１０區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？
二、利用問題一在特定區間內，使用未知數去探討在三角形數字方塊最多內層為何？
三、利用問題二，使用未知數去探討在正方形數字方塊最多內層為何？
四、利用問題三發現相關聯性，倒數第二層為相同的四個數字且最小的三個數加總等於最大數的關係，從最內層去反推並尋找出(a,b,c,d)的數列為何?

肆、研究設備及器材

一、電腦
二、紙、筆

伍、研究過程或方法

【問題一】：在特定區間內，在三角形數字方塊能做到最多層數為何？數字之間有何關係？

【問題 1-1】：數字 1~4 中在三角形數字方塊能做到最多層數為何？

【做法 1-1】：

1. 每個角的大數減去小數，算出兩個角數字的差，寫在邊線的中點，再以三個中點畫一個新的三角形，依此類推所產生的新三角形三個角，每次都可得到新的數字，直到最後三個數字都循環就停止。
2. 數字 1~4 排列組合有 4 種

1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1				
1	2	4	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1
1	3	4	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0
2	3	4	→	1	1	2	→	0	1	1				

【發現 1-1】：

1. 從數字 1~4 的組合有 2 種（1，2 ，4 ）與（1，3， 4 ）可以產生內層有 3 個的三角形。

【問題 1-2】：數字 1~5 中在三角形數字方塊能做到最多層數為何？

【做法 1-2】：

1. 每個角的大數減去小數，算出兩個角數字的差，寫在邊線的中點，再以三個中點畫一個新的三角形，依此類推所產生的新三角形三個角，每次都可得到新的數字，直到最後三個數字都循環就停止。
2. 數字 1~5 排列組合有 10 種

1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1								
1	2	4	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1				
1	3	4	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0				
1	2	5	→	1	3	4	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0
1	3	5	→	2	2	4	→	0	2	2								
1	4	5	→	3	1	4	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0
2	3	4	→	1	1	2	→	0	1	1								
2	3	5	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1				
2	4	5	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0				
3	4	5	→	1	1	2	→	0	1	1								

【發現 1-2】：

1. 從數字 1~5 的組合有 2 種（1， 2 ，5）與（1，4，5）可以產生內層有 4 個的三角形。

【問題 1-3】：數字 1~6 中在三角形數字方塊能做到最多層數為何？

【做法 1-3】：

1. 每個角的大數減去小數，算出兩個角數字的差，寫在邊線的中點，再以三個中點畫一個新的三角形，依此類推所產生的新三角形三個角，每次都可得到新的數字，直到最後三個數字都循環就停止。
2. 數字 1~6 排列組合有 20 種

1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1												
1	2	4	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1								
1	3	4	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0								
1	2	5	→	1	3	4	→	2	1	3	→	1	2	1		1	1	0				
1	3	5	→	2	2	4	→	0	2	2												
1	4	5	→	3	1	4	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0				
1	2	6	→	1	4	5	→	3	1	4	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0
1	3	6	→	2	3	5	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1				
1	4	6	→	3	2	5	→	1	3	2	→	2	1	1	→	1	0	1				
1	5	6	→	4	1	5	→	3	4	1	→	1	3	2	→	2	1	1	→	1	0	1
2	3	4	→	1	1	2	→	0	1	1												
2	3	5	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1								
2	4	5	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0								
2	3	6	→	1	3	4	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0				
2	4	6	→	2	2	4	→	0	2	2												
2	5	6	→	3	1	4	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0				
3	4	5	→	1	1	2	→	0	1	1												
3	4	6	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1								
3	5	6	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0								
4	5	6	→	1	1	2	→	0	1	1												

【發現 1-3】:

1. 從數字 1~6 的組合有 2 種（1，2，6）與（1，5，6）可以產生內層有 5 個的三角形。

【問題 1-4】: 數字 1~7 中在三角形數字方塊能做到最多層數為何？

【做法 1-4】:

1. 每個角的大數減去小數，算出兩個角數字的差，寫在邊線的中點，再以三個中點畫一個新的三角形，依此類推所產生的新三角形三個角，每次都可得到新的數字，直到最後三個數字都循環就停止。
2. 數字 1~7 排列組合有 35 種

1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1												
1	2	4	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1								
1	3	4	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0								
1	2	5	→	1	3	4	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0				
1	3	5	→	2	2	4	→	0	2	2												
1	4	5	→	3	1	4	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0				
1	2	6	→	1	4	5	→	3	1	4	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0
1	3	6	→	2	3	5	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1				
1	4	6	→	3	2	5	→	1	3	2	→	2	1	1	→	1	0	1				
1	5	6	→	4	1	5	→	3	4	1	→	1	3	2	→	2	1	1	→	1	0	1

1 2 7	→	1 5 6	→	4 1 5	→	3 4 1	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1
1 3 7	→	2 4 6	→	2 2 4	→	0 2 2						
1 4 7	→	3 3 6	→	0 3 3								
1 5 7	→	4 2 6	→	2 4 2	→	2 2 0						
1 6 7	→	5 1 6	→	4 5 1	→	1 4 3	→	3 1 2	→	2 1 1	→	1 0 1
2 3 4	→	1 1 2	→	0 1 1								
2 3 5	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1						
2 4 5	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0						
2 3 6	→	1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0				
2 4 6	→	2 2 4	→	0 2 2								
2 5 6	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0				
2 3 7	→	1 4 5	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0		
2 4 7	→	2 3 5	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1				
2 5 7	→	3 2 5	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1				
2 6 7	→	4 1 5	→	3 4 1	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1		
3 4 5	→	1 1 2	→	0 1 1	→							
3 4 6	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1						
3 5 6	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0						
3 4 7	→	1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0				
3 5 7	→	2 2 4	→	0 2 2	→							
3 6 7	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0				
4 5 6	→	1 1 2	→	0 1 1								
4 5 7	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1						
4 6 7	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0						
5 6 7	→	1 1 2	→	0 1 1								

【發現 1-4】：

1. 從數字 1~7 的組合有 2 種（1， 2 ，7）與（1，6，7）可以產生內層有 6 個的三角形。

【問題 1-5】：數字 1~8 中在三角形數字方塊能做到最多層數為何？

【做法 1-5】：

1. 每個角的大數減去小數，算出兩個角數字的差，寫在邊線的中點，再以三個中點畫一個新的三角形，依此類推所產生的新三角形三個角，每次都可得到新的數字，直到最後三個數字都循環就停止。
2. 數字 1~8 排列組合有 56 種，與 1~7 新增 21 種不同的排序

1 2 8	→	1 6 7	→	5 1 6	→	4 5 1	→	1 4 3	→	3 1 2	→	2 1 1	→	1 0 1
1 3 8	→	2 5 7	→	3 2 5	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1				
1 4 8	→	3 4 7	→	1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0				
1 5 8	→	4 3 7	→	1 4 3	→	3 1 2	→	2 1 1	→	1 0 1				
1 6 8	→	5 2 7	→	3 5 2	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0				

1	7	8	→	6	1	7	→	5	6	1	→	1	5	4	→	4	1	3	→	3	2	1	→	1	1	2	→	0	1	1
2	3	8	→	1	5	6	→	4	1	5	→	3	4	1	→	1	3	2	→	2	1	1	→	1	0	1				
2	4	8	→	2	4	6	→	2	2	4	→	0	2	2																
2	5	8	→	3	3	6	→	0	3	3																				
2	6	8	→	4	2	6	→	2	4	2	→	2	2	0																
2	7	8	→	5	1	6	→	4	5	1	→	1	4	3	→	3	1	2	→	2	1	1	→	1	0	1				
3	4	8	→	1	4	5	→	3	1	4	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0								
3	5	8	→	2	3	5	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1												
3	6	8	→	3	2	5	→	1	3	2	→	2	1	1	→	1	0	1												
3	7	8	→	4	1	5	→	3	4	1	→	1	3	2	→	2	1	1	→	1	0	1								
4	5	8	→	1	3	4	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0												
4	6	8	→	2	2	4	→	0	2	2																				
4	7	8	→	3	1	4	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0												
5	6	8	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1																
5	7	8	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0																
6	7	8	→	1	1	2	→	0	1	1																				

【發現 1-5】:

1. 從數字 1~8 的組合有 2 種（1，2，8）與（1，7， 8）可以產生內層有 7 個的三角形。

【問題 1-6】:數字 1~9 中在三角形數字方塊能做到最多層數為何？

【做法 1-6】:

1. 每個角的大數減去小數，算出兩個角數字的差，寫在邊線的中點，再以三個中點畫一個新的三角形，依此類推所產生的新三角形三個角，每次都可得到新的數字，直到最後三個數字都循環就停止。
2. 數字 1~9 排列組合有 84 種，與 1~8 新增 28 種不同的排序

1	2	9	→	1	7	8	→	6	1	7	→	5	6	1	→	1	5	4	→	4	1	3	→	3	2	1	→	1	1	2	→	0	1	1
1	3	9	→	2	6	8	→	4	2	6	→	2	4	2	→	2	2	0																
1	4	9	→	3	5	8	→	2	3	5	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1												
1	5	9	→	4	4	8	→	0	4	4																								
1	6	9	→	5	3	8	→	2	5	3	→	3	2	1	→	1	1	2	→	0	1	1												
1	7	9	→	6	2	8	→	4	6	2	→	2	4	2	→	2	2	0																
1	8	9	→	7	1	8	→	6	7	1	→	1	6	5	→	5	1	4	→	4	3	1	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1
2	3	9	→	1	6	7	→	5	1	6	→	4	5	1	→	1	4	3	→	3	1	2	→	2	1	1	→	1	0	1				
2	4	9	→	2	5	7	→	3	2	5	→	1	3	2	→	2	1	1	→	1	0	1												
2	5	9	→	3	4	7	→	1	3	4	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0												
2	6	9	→	4	3	7	→	1	4	3	→	3	1	2	→	2	1	1	→	1	0	1												
2	7	9	→	5	2	7	→	3	5	2	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0												
2	8	9	→	6	1	7	→	5	6	1	→	1	5	4	→	4	1	3	→	3	2	1	→	1	1	2	→	0	1	1				
3	4	9	→	1	5	6	→	4	1	5	→	3	4	1	→	1	3	2	→	2	1	1	→	1	0	1								

3	5	9	→	2	4	6	→	2	2	4	→	0	2	2												
3	6	9	→	3	3	6	→	0	3	3																
3	7	9	→	4	2	6	→	2	4	2	→	2	2	0												
3	8	9	→	5	1	6	→	4	5	1	→	1	4	3	→	3	1	2	→	2	1	1	→	1	0	1
4	5	9	→	1	4	5	→	3	1	4	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0				
4	6	9	→	2	3	5	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1								
4	7	9	→	3	2	5	→	1	3	2	→	2	1	1	→	1	0	1								
4	8	9	→	4	1	5	→	3	4	1	→	1	3	2	→	2	1	1	→	1	0	1				
5	6	9	→	1	3	4	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0								
5	7	9	→	2	2	4	→	0	2	2																
5	8	9	→	3	1	4	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0								
6	7	9	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1												
6	8	9	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0												
7	8	9	→	1	1	2	→	0	1	1																

【發現 1-6】：

1. 從數字 1~9 的組合有 2 種（1， 2 ，9）與（1，8，9）可以產生內層有 8 個的三角形。

【問題 1-7】：數字 1~10 中在三角形數字方塊能做到最多層數為何？

【做法 1-7】：

1. 每個角的大數減去小數，算出兩個角數字的差，寫在邊線的中點，再以三個中點畫一個新的三角形，依此類推所產生的新三角形三個角，每次都可得到新的數字，直到最後三個數字都循環就停止。
2. 數字 1~10 排列組合有 120 種

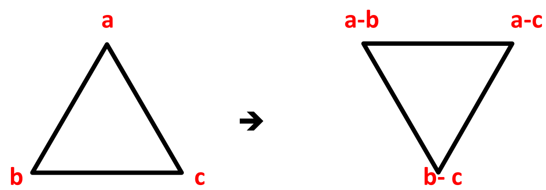
1	2	10	→	1	8	9	→	7	1	8	→	6	7	1	→	1	6	5	→	5	1	4	→	4	3	1	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1
1	3	10	→	2	7	9	→	5	2	7	→	3	5	2	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0												
1	4	10	→	3	6	9	→	3	3	6	→	0	3	3																								
1	5	10	→	4	5	9	→	1	4	5	→	3	1	4	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0												
1	6	10	→	5	4	9	→	1	5	4	→	4	1	3	→	3	2	1	→	1	1	2	→	0	1	1												
1	7	10	→	6	3	9	→	3	6	3	→	3	3	0																								
1	8	10	→	7	2	9	→	5	7	2	→	2	5	3	→	3	2	1	→	1	1	2	→	0	1	1												
1	9	10	→	8	1	9	→	7	8	1	→	1	7	6	→	6	1	5	→	5	4	1	→	1	3	4	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0
2	3	10	→	1	7	8	→	6	1	7	→	5	6	1	→	1	5	4	→	4	1	3	→	3	2	1	→	1	1	2	→	0	1	1				
2	4	10	→	2	6	8	→	4	2	6	→	2	4	2	→	2	2	0																				
2	5	10	→	3	5	8	→	2	3	5	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1																
2	6	10	→	4	4	8	→	0	4	4																												
2	7	10	→	5	3	8	→	2	5	3	→	3	2	1	→	1	1	2	→	0	1	1																
2	8	10	→	6	2	8	→	4	6	2	→	2	4	2	→	2	2	0																				
2	9	1	→	7	1	8	→	6	7	1	→	1	6	5	→	5	1	4	→	4	3	1	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1				

		0																																
3	4	10	→	1	6	7	→	5	1	6	→	4	5	1	→	1	4	3	→	3	1	2	→	2	1	1	→	1	0	1				
3	5	10	→	2	5	7	→	3	2	5	→	1	3	2	→	2	1	1	→	1	0	1												
3	6	10	→	3	4	7	→	1	3	4	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0												
3	7	10	→	4	3	7	→	1	4	3	→	3	1	2	→	2	1	1	→	1	0	1												
3	8	10	→	5	2	7	→	3	5	2	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0												
3	9	10	→	6	1	7	→	5	6	1	→	1	5	4	→	4	1	3	→	3	2	1	→	1	1	2	→	0	1	1				
4	5	10	→	1	5	6	→	4	1	5	→	3	4	1	→	1	3	2	→	2	1	1	→	1	0	1								
4	6	10	→	2	4	6	→	2	2	4	→	0	2	2																				
4	7	10	→	3	3	6	→	0	3	3																								
4	8	10	→	4	2	6	→	2	4	2	→	2	2	0																				
4	9	10	→	5	1	6	→	4	5	1	→	1	4	3	→	3	1	2	→	2	1	1	→	1	0	1								
5	6	10	→	1	4	5	→	3	1	4	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0												
5	7	10	→	2	3	5	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1																
5	8	10	→	3	2	5	→	1	3	2	→	2	1	1	→	1	0	1																
5	9	10	→	4	1	5	→	3	4	1	→	1	3	2	→	2	1	1	→	1	0	1												
6	7	10	→	1	3	4	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0																
6	8	10	→	2	2	4	→	0	2	2																								
6	9	10	→	3	1	4	→	2	3	1	→	1	2	1	→	1	1	0																
7	8	10	→	1	2	3	→	1	1	2	→	0	1	1																				
7	9	10	→	2	1	3	→	1	2	1	→	1	1	0																				

【發現 1-7】：

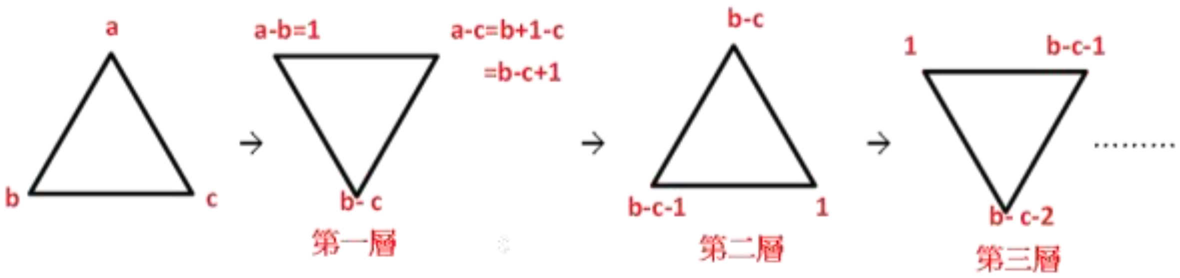
1. 從數字 1~10 的組合有 2 種（1， 2 ，10）與（1，9，10）可以產生內層有 9 個的三角形。

【問題二】：在特定區間內，使用未知數去探討在三角形數字方塊能找到最多層數為何？
假設特定區間內取 a、b、c 三正整數，且 a>b>c



【問題 2-1】：假設 a−b=1 時，a=b+1

【做法 2-1】：



【發現 2-1】:

1. 假設數字 a-b=1 時，且 a>b>c，所以 b-c 不會等於 0，當 b-c=1 時，也就是三個數字是連續三個數字，可以產生內層有 2 個的三角形。
2. 假設數字 a-b=1 時，且 a>b>c，當 b-c 越大時，可以產生越多內層的三角形。

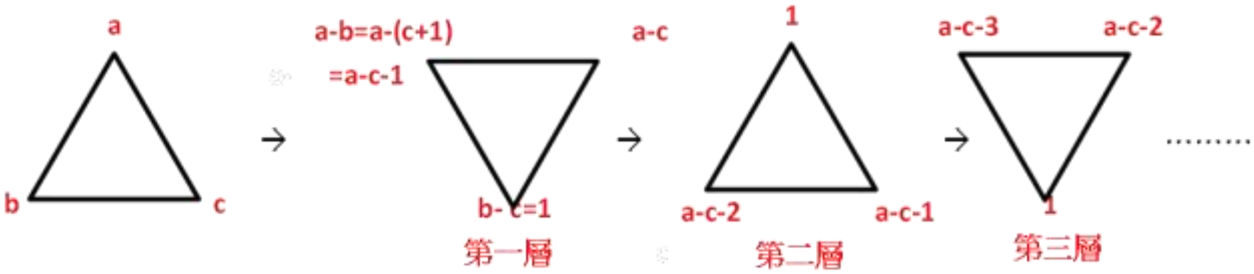
【問題 2-2】: 假設 a-c=1 時，a=c+1

【發現 2-2】:

1. 假設數字 a-c=1 時，且 a>b>c，因 a、b、c 為正整數，所以 a-c=1 的假設並不會成立。

【問題 2-3】: 假設 b-c=1 時，b=c+1

【做法 2-3】:

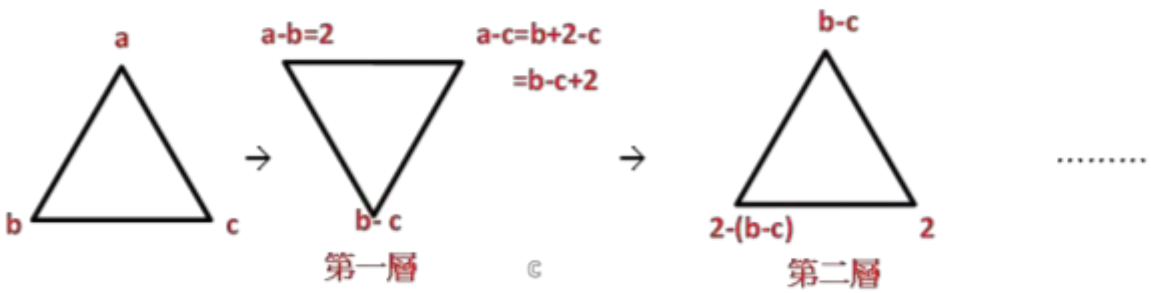


【發現 2-3】:

1. 假設數字 b-c=1 時，且 a>b>c，所以 a-c 不會等於 0 與 1，當 a-c=2 時，也就是三個數字是連續三個數字，可以產生內層有 2 個的三角形。
2. 假設數字 b-c=1 時，且 a>b>c，當 a-c 越大時，可以產生越多內層的三角形。

【問題 2-4】: 假設 a-b=2 時，a=b+2

【做法 2-4】:

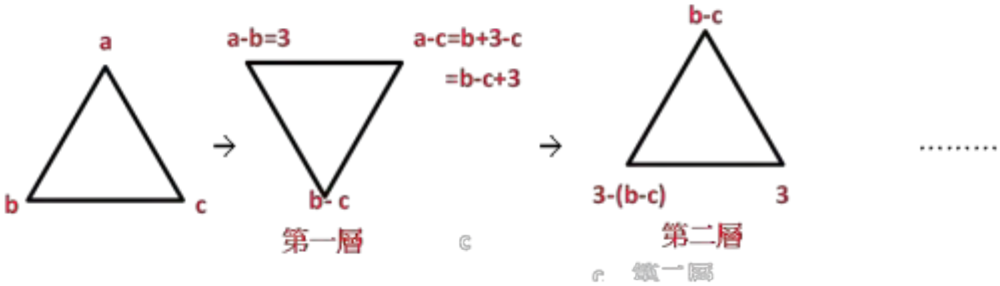


【發現 2-4】:

1. 假設 a-b=2 時，且 a>b>c，所以 a-c=b-c+2 >= a-b=2 >= b-c > 0，得知 2 >= b-c > 0，所以 b-c =2 或 b-c =1。
2. 當 a-b=2 與 b-c =2，可以產生內層有 2 個的三角形。
3. 當 a-b=2 與 b-c =1，可以產生內層有 3 個的三角形。

【問題 2-5】: 假設 a-b=3 時，a=b+3

【做法 2-5】:

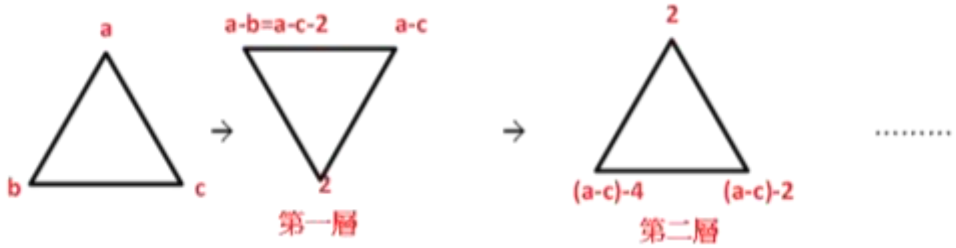


【發現 2-5】:

1. 假設 a-b=3 時，且 a>b>c，所以 a-c=b-c+3 >= a-b=3 >= b-c > 0，得知 3 >= b-c > 0，所以 b-c =3、b-c =2 或 b-c =1。
2. 當 a-b=3 與 b-c =3，可以產生內層有 2 個的三角形。
3. 當 a-b=3 與 b-c =2，可以產生內層有 4 個的三角形。
4. 當 a-b=3 與 b-c =1，可以產生內層有 4 個的三角形。

【問題 2-6】: 假設 b-c=2 時，b=c+2

【做法 2-6】:

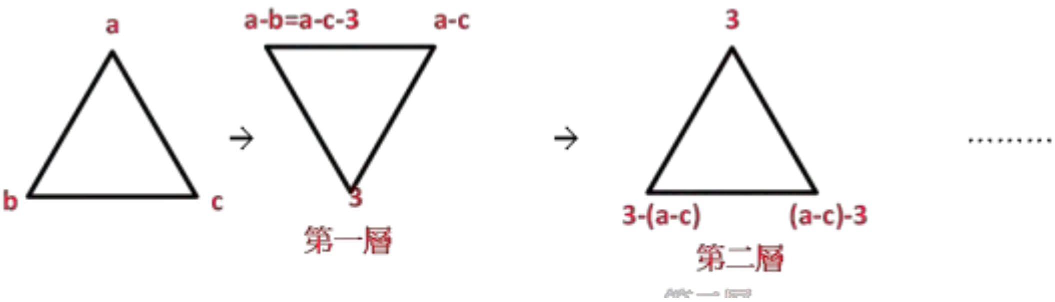


【發現 2-6】:

1. 假設 b-c=2 時，且 a>b>c，所以 a-c >= a-b=a-c-2 >= b-c=2 > 0，得知 a-c-2 >= 2。
2. 當 b-c =2 與 a-c =4，可以產生內層有 2 個的三角形。
3. 當 b-c =2 與 a-c =5，可以產生內層有 4 個的三角形。
4. 當 b-c =2 與 a-c =6，可以產生內層有 3 個的三角形。
5. 當 b-c =2 與 a-c =7，可以產生內層有 5 個的三角形。

【問題 2-7】: 假設 b-c=3 時，b=c+3

【做法 2-7】:



【發現 2-7】:

1. 假設 b-c=3 時，且 a>b>c，所以 a-c >= a-b=a-c-3 >= b-c=3 > 0，得知 a-c-3 >= 3。
2. 當 b-c =3 與 a-c =6，可以產生內層有 2 個的三角形。
3. 當 b-c =3 與 a-c =7，可以產生內層有 4 個的三角形。
4. 當 b-c =3 與 a-c =8，可以產生內層有 3 個的三角形。
5. 當 b-c =3 與 a-c =9，可以產生內層有 5 個的三角形。

【結論二】:

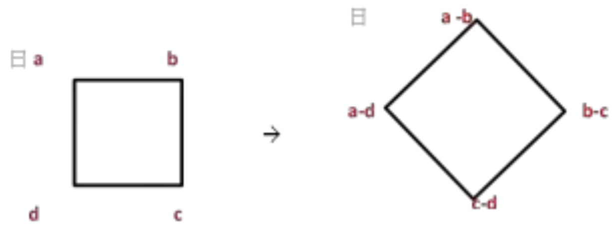
1. 由上列的推論得知有二種情況下，在特定區間 1～N 中有最多的內層產生。

在特定區間 1～N 中　a>b>c，　當 a-b=1 時，，當 b- c＝N－2 時，可以產生 N－1 內層的三角形，所以 a 必等於 N，b 必等於 N-1，c 必等於 1。
在特定區間 1～N 中　a>b>c，　當 b- c=1 時，，當 a-b＝N－2 時，可以產生 N－1 內層的三角形，所以 a 必等於 N，b 必等於 2，c 必等於 1。

2. 由上列的推論得知有二種情況下，在特定區間 H～N 中有最多的內層產生。

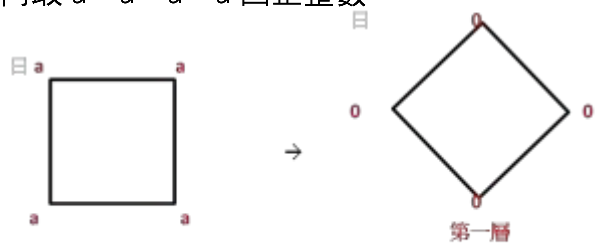
在特定區間 H～N 中　a>b>c，　當 a-b=1 時，，當 b- c＝N－2 時，可以產生 N－H 內層的三角形，所以 a 必等於 N，b 必等於 N-1，c 必等於 H。
在特定區間 H～N 中　a>b>c，　當 b- c=1 時，，當 a-b＝N－2 時，可以產生 N－H 內層的三角形，所以 a 必等於 N，b 必等於 H+1，c 必等於 H。

【問題三】：在特定區間內，使用未知數去探討在正方形數字方塊能找到最多層數為何？
假設特定區間內取 a、b、c、d 四正整數



【問題 3-1】：假設特定區間內取 a、a、a、a 四正整數

【做法 3-1】：

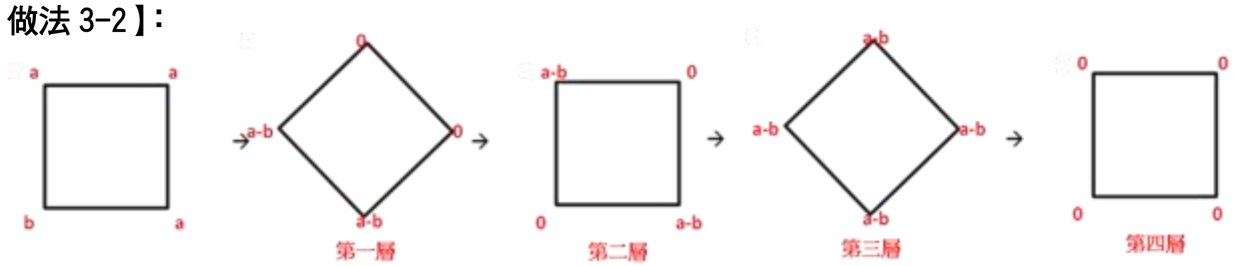


【發現 3-1】：

1. 假設特定區間內取四個相同的數字(a, a, a, a)，可以產生內層有 1 個的正方形。

【問題 3-2】：假設特定區間內取 a、a、a、b 四正整數，且 a>b

【做法 3-2】：

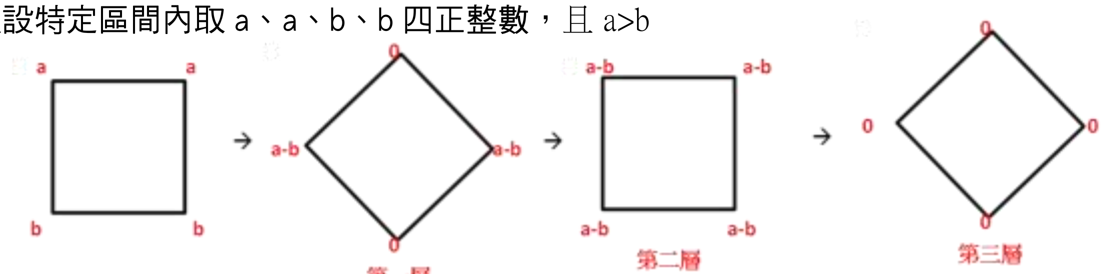


【發現 3-2】：

1. 假設特定區間內取四個數字(a, a, a, b)，可以產生內層有 4 個的正方形。

【問題 3-3】：假設特定區間內取 a、a、b、b 四正整數，且 a>b

【做法 3-3】：

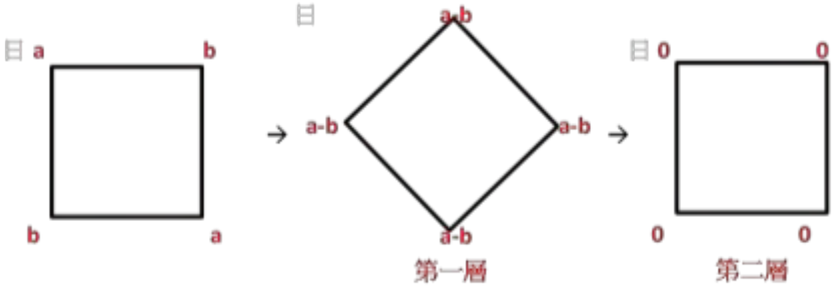


【發現 3-3】：

1. 假設特定區間內取四個數字(a, a, b, b)，可以產生內層有 3 個的正方形。

【問題 3-4】：假設特定區間內取 a、b、a、b 四正整數，且 a>b

【做法 3-4】：

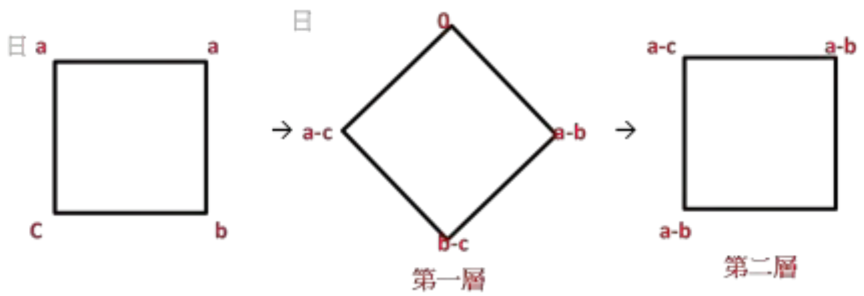


【發現 3-4】：

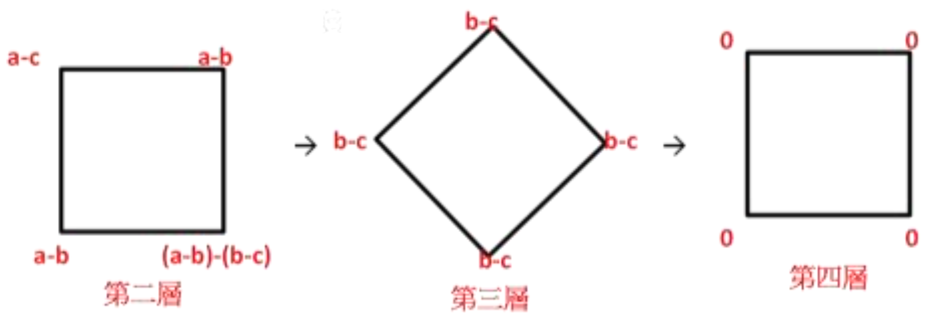
1. 假設特定區間內取四個數字(a, b, a, b)，可以產生內層有 2 個的正方形。

【問題 3-5】：假設特定區間內取 a、a、b、c 四正整數，且 a>b>c

【做法 3-5】：

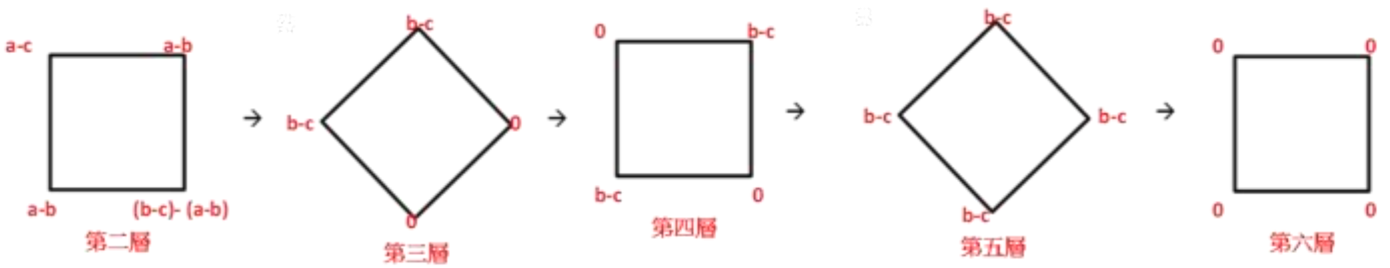


【3-5-1 當 a-b ＞ b-c 時】



【3-5-2 當 a-b =< b-c 時】

因為每產生的內層皆有最大的數等於其三數總和，在第三層中 b-c 是最大的數，所以|(b-c)-2(a-c)|必等於 0

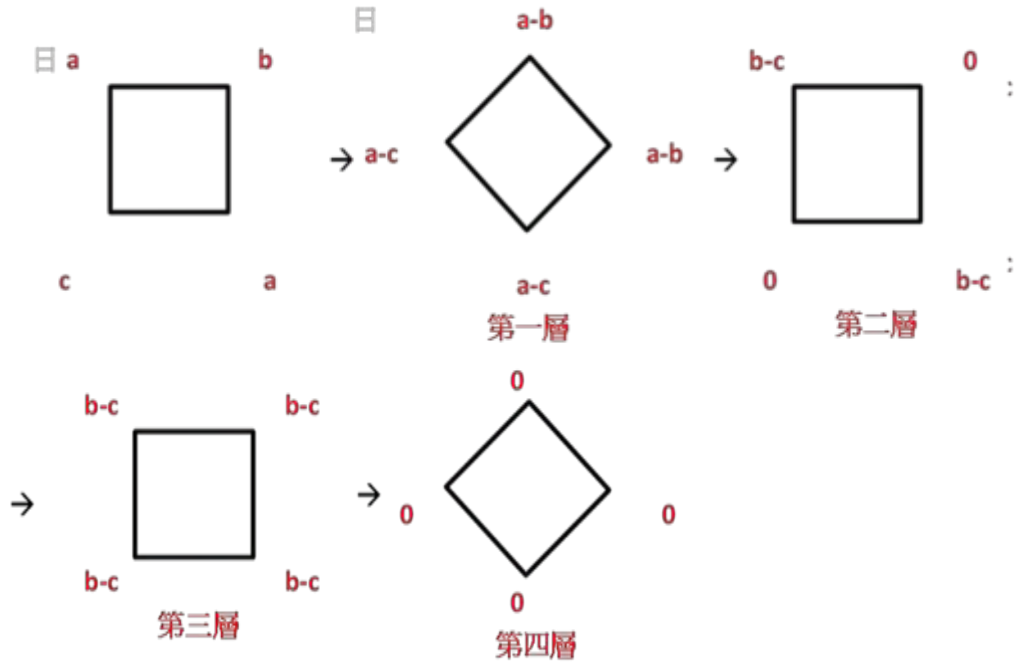


【發現 3-5】：

1. 假設特定區間內取四個數字(a, a, b, c)，當 a-b ＞ b-c 時，可以產生內層有 4 個的正方形。
2. 假設特定區間內取四個數字(a, a, b, c)，當 a-b =< b-c 時，可以產生內層有 6 個的正方形。

【問題 3-6】：假設特定區間內取 a、b、a、c 四正整數，且 a>b>c

【做法 3-6】：

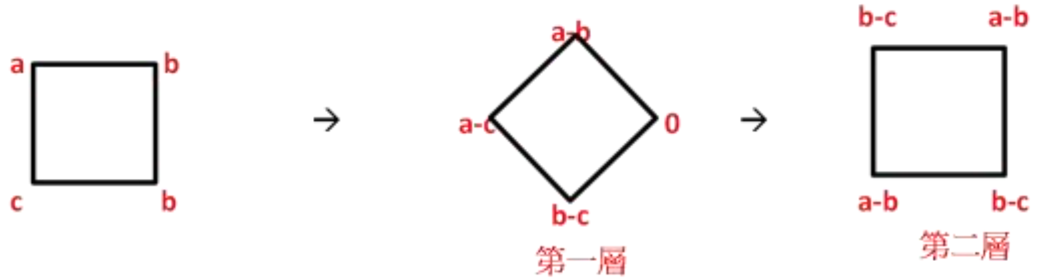


【發現 3-6】：

1. 假設特定區間內取四個數字(a, b, a, c)，可以產生內層有 4 個的正方形。

【問題 3-7】：假設特定區間內取 a、b、b、c 四正整數，且 a>b>c

【做法 3-7】：

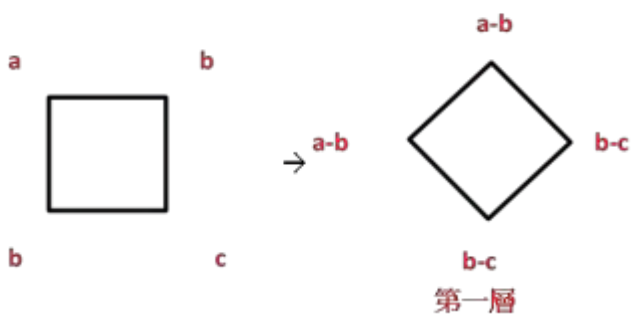


【發現 3-7】：

1. 從問題 3-4 中得知數字(a, b, a, b)，可以產生內層有 2 個的正方形，假設特定區間內取四個數字(a, b, b, c)，可以產生內層有 4 個的正方形。

【問題 3-8】：假設特定區間內取 a、b、c、b 四正整數，且 a>b>c

【做法 3-8】：

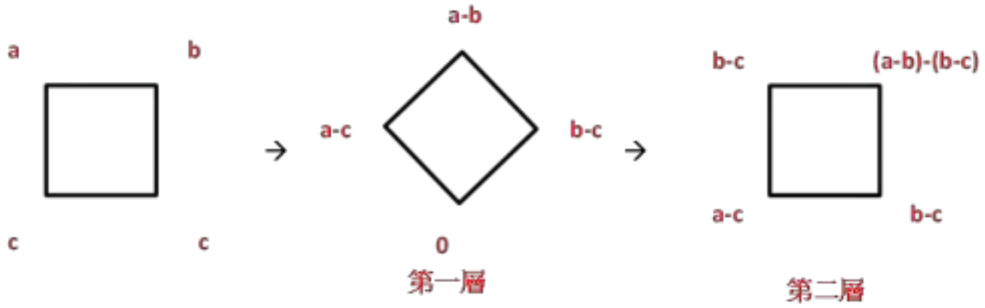


【發現 3-8】：

1. 從問題 3-3 中得知數字(a, b, c, b)，可以產生內層有 3 個的正方形，假設特定區間內取四個數字(a, b, c, b)，可以產生內層有 4 個的正方形。

【問題 3-9】：假設特定區間內取 a、b、c、c 四正整數，且 a>b>c

【做法 3-9】：

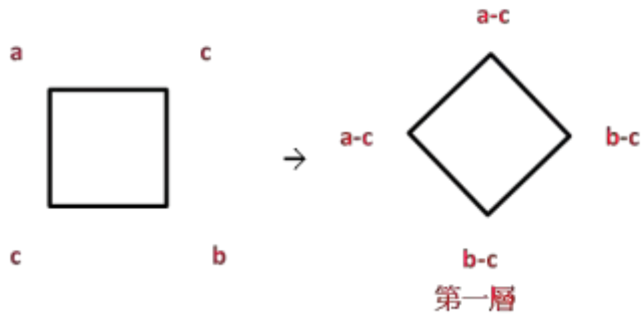


【發現 3-9】：

1. 從問題 3-8 中得知數字(a, b, c, b)，可以產生內層有 4 個的正方形，假設特定區間內取四個數字(a, b, c, c)，可以產生內層有 6 個的正方形。

【問題 3-10】：假設特定區間內取 a、c、b、c 四正整數，且 a>b>c

【做法 3-10】：

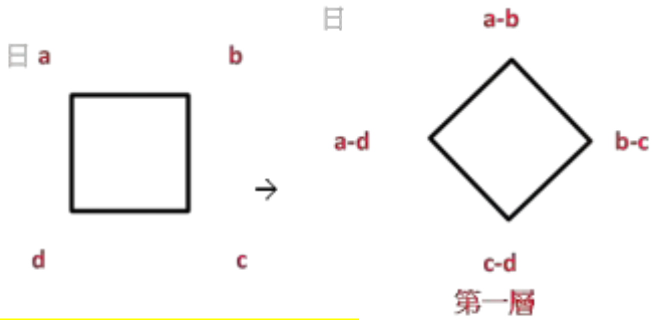


【發現 3-10】：

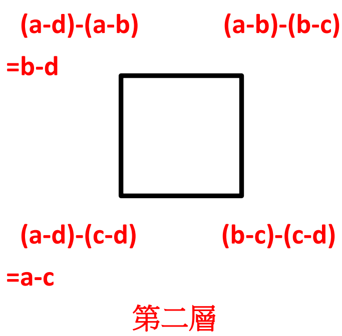
1. 從問題 3-3 中得知數字(a, a, b, b)，可以產生內層有 3 個的正方形，假設特定區間內取四個數字(a, c, b, c)，可以產生內層有 4 個的正方形。

【問題 3-11】：假設特定區間內取 a、b、c、d 四正整數，且 a>b>c>d

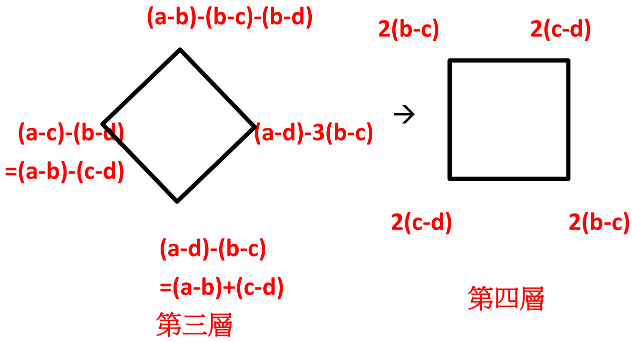
【做法 3-11】：



【3-11-1 當 a-b ＞ b-c 與 b-c ＞ c-d 時】

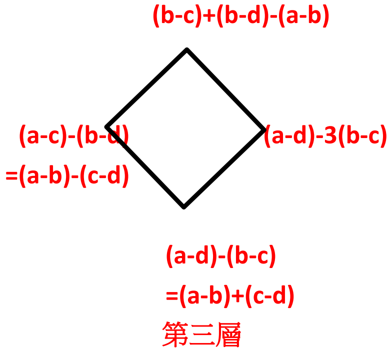


【3-11-1-1 當(a-b)-(b-c) >= (b-d) 與 (a-b)-(b-c) > (b-c)-(c-d)時】



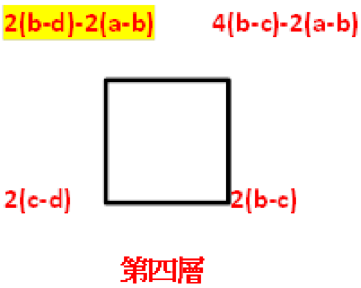
【發現 3-11-1-1】由問題 3-4 得知第四層後還可以有二層的正方形，所以當(a-b)-(b-c) > (b-d)與 (a-b)-(b-c) > (b-c)-(c-d)時，只能產生六層的正方形。

【3-11-1-2 當(a-b)-(b-c) < (b-d) 與 (a-b)-(b-c) > (b-c)-(c-d)時】

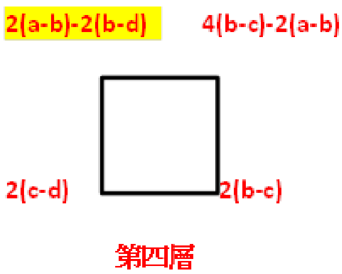


【3-11-1-2-1 當(b-c)+(b-d)-(a-b) > (a-d)-3(b-c)時】可以分成二種情況：

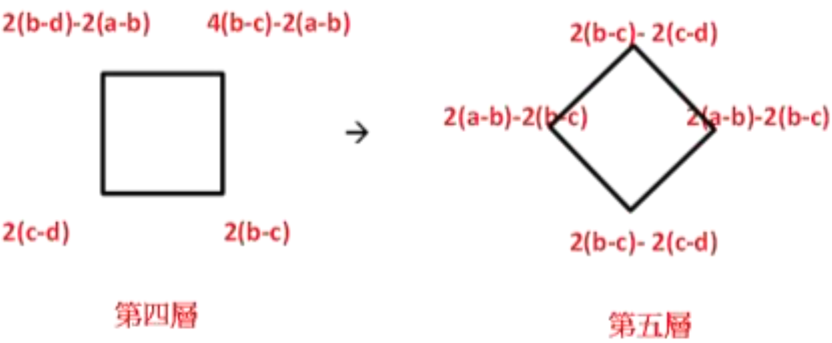
情況一：



情況二：

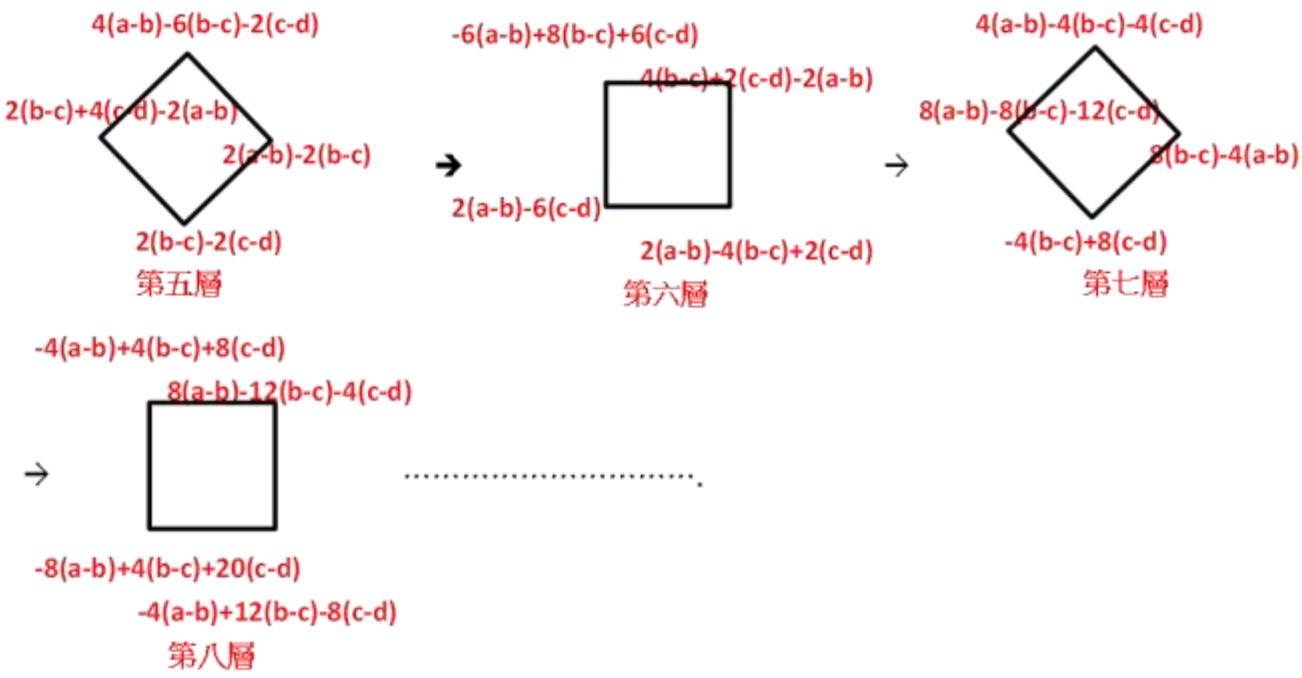


情況一：



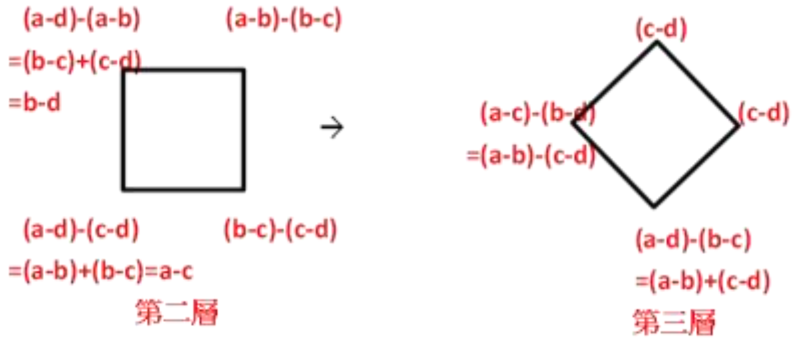
【發現 3-11-1-2-1】情況一由問題 3-4 得知第五層後還可以有二層的正方形，所以當(b-c)+(b-d)-(a-b) > (a-d)-3(b-c)時，只能產生七層的正方形。

情況二：



【發現 3-11-1-2-1】情況二當(b−c)+(b−d)−(a−b) ＞ (a−d)−3(b−c)時，可以產生內層最少有 8 個的正方形。

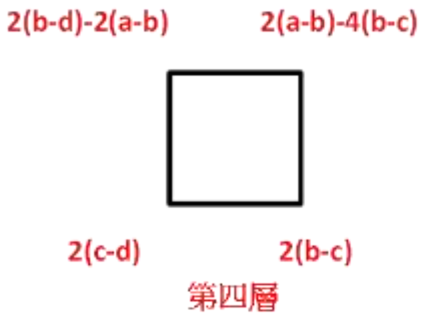
【3-11-1-2-2 當(b−c)+(b−d)−(a−b) ＝ (a−d)−3(b−c)時】



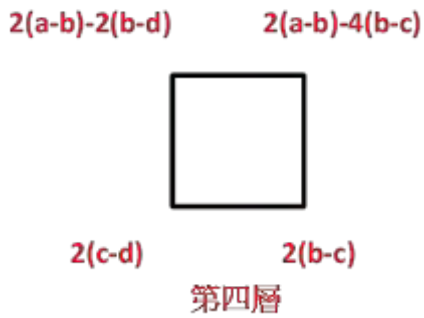
【發現 3-11-1-2-2】由問題 3-5 得知情況一當(a−b)−(c−d)＜ (c−d)時，可以產生內層有 4 個的正方形，只能產生七層的正方形。情況二當(a−b)−(c−d)＞(c−d)時，可以產生內層有 6 個的正方形，只能產生九層的正方形。。

【3-11-1-2-3 當(b−c)+(b−d)−(a−b) ＜ (a−d)−3(b−c)時】

情況一：



情況二：



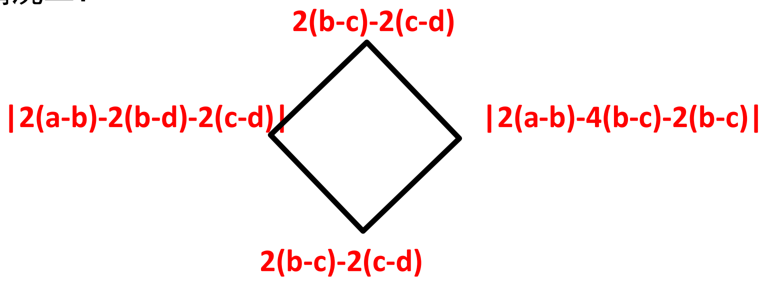
情況一:

2(b−d)−2(a−b) = 2(b−c)+2(c−d)−2(a−b) > 0

2(a−b)−4(b−c) = 2(a−b)−2(b−c)−2(b−c) > 0

因(b−c) > (c−d) ，所以情況一不成立。

情況二:



第五層

【發現 3-11-1-2-3】情況二由問題 3-10 得知第五層後還可以生成 5 層的正方形，所以當(b−c)+(b−d)−(a−b) < (a−d)−3(b−c)時，可以產生十層的正方形。

【3-11-1-3 當(a−b)−(b−c) >= (b−d) 與 (a−b)−(b−c) < (b−c)−(c−d)時】是不可能成立

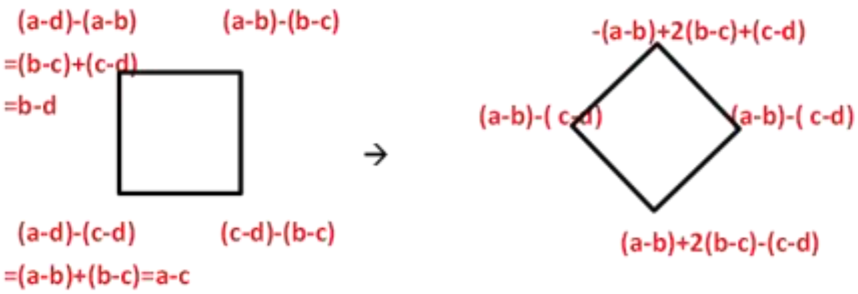
因為(a−b)−(b−c) >= (b−d)=(b−c)+(c−d)，所以和後面假設矛盾。

【3-11-1-4 當(a−b)−(b−c) >= (b−d) 與 (a−b)−(b−c) = (b−c)−(c−d)時】是不可能成立

因為 a>b>c>d，所以和後面假設矛盾。

【3-11-2 當 a−b > b−c 與 b−c < c−d 時】

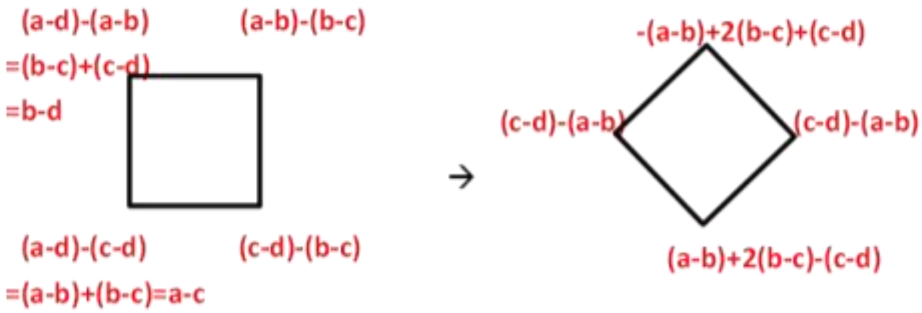
【3-11-2-1 當(a−b) >= (c−d)時】



第二層 第三層

【發現 3-11-2-1 當(a−b) >= (c−d)時】第三層與問題 3-6 得知(a, b, a, c)，可以再產生內層有 4 個的正方形，所以可以產生內層有 7 個的正方形

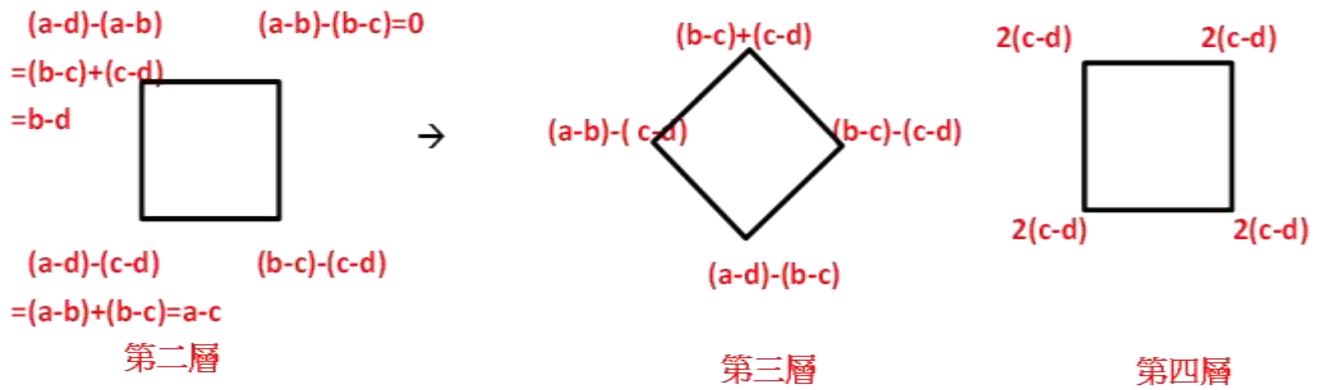
【3-11-2-2 當(a−b) < (c−d)時】



第二層 第三層

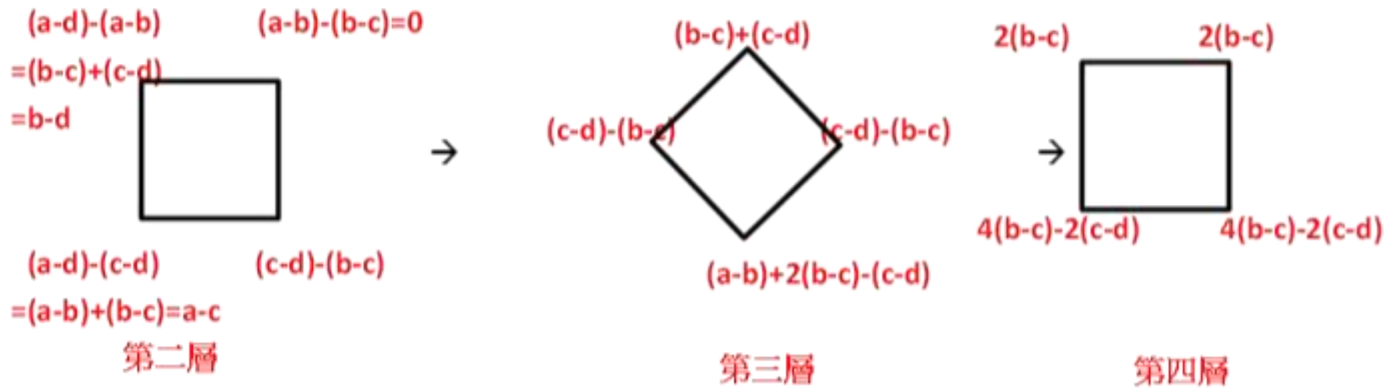
【發現 3-11-2-2 當(a-b) < (c-d)時】第三層與問題 3-6 得知(a, b, a, c)，可以再產生內層有 4 個的正方形，所以可以產生內層有 7 個的正方形

【3-11-3 當 a-b ＝ b-c 與 b-c ＞ c-d 時】



【發現 3-11-3 當 a-b ＝ b-c 與 b-c ＞ c-d 時】第四層與問題 3-1 得知(a, a, a, a)，可以再產生內層有 1 個的正方形，所以 3-8-2-1 的可以產生內層有 5 個的正方形

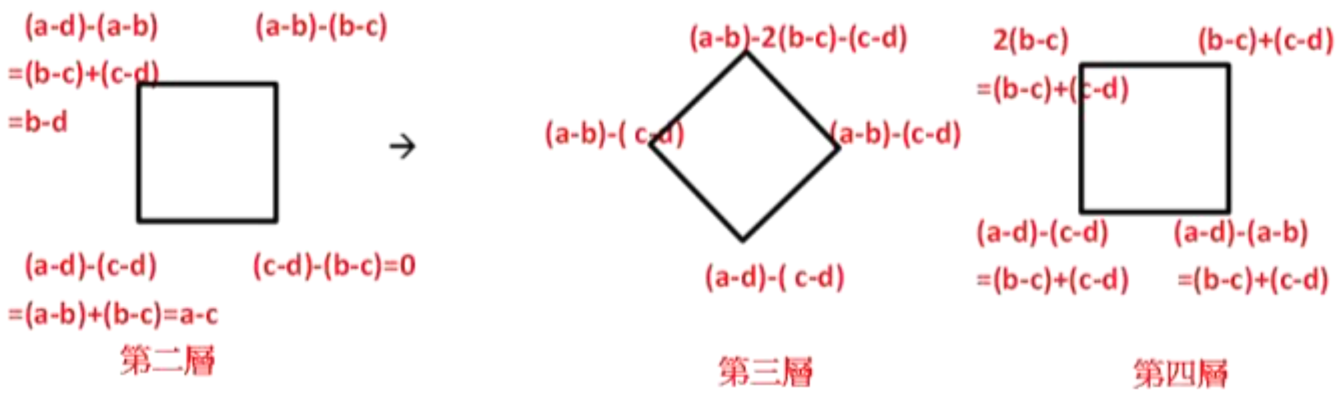
【3-11-4 當 a-b ＝ b-c 與 b-c ＜ c-d 時】



【發現 3-11-4 當 a-b = b-c 與 b-c < c-d 時】第四層與問題 3-3 得知(a, a, b, b)，可以再產生內層有 3 個的正方形，所以 3-8-2-1 的可以產生內層有 7 個的正方形。

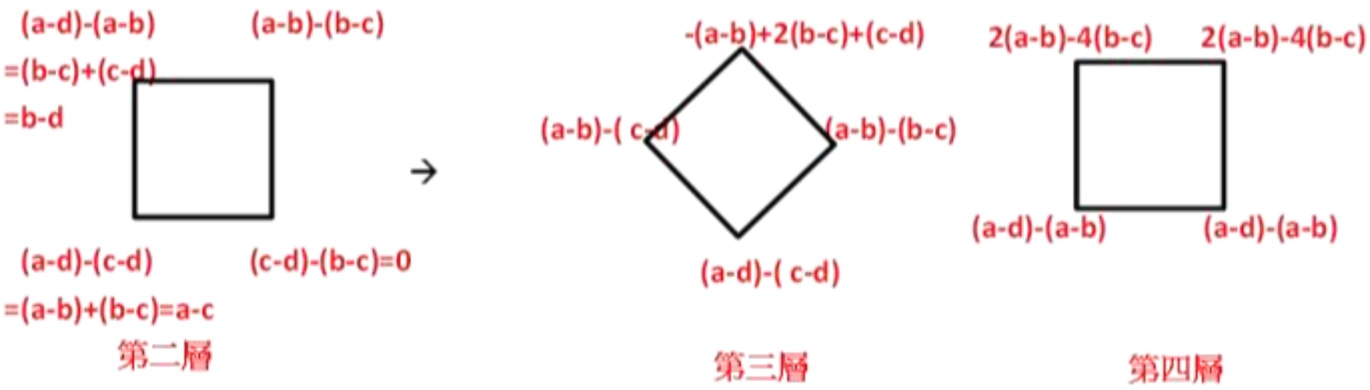
【3-11-5 當 a-b ＞ b-c 與 b-c ＝ c-d 時】

【3-11-5-1 當(a-b)－(b-c) ＞ (b-c)＋(c-d)時】



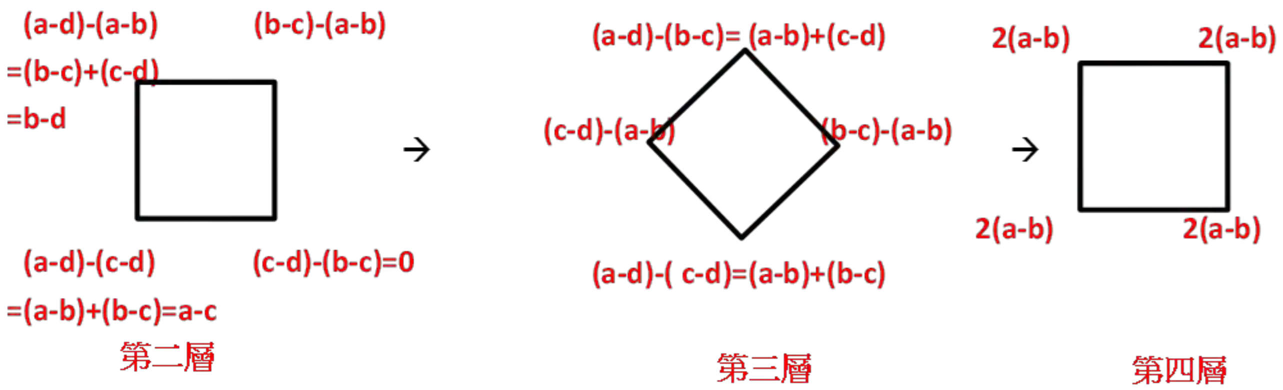
【發現 3-11-5-1 當(a-b)-(b-c) > (b-c)+(c-d)時】第四層與問題 3-1 得知(a, a, a, a)，可以再產生內層有 1 個的正方形，所以 3-8-5-1 的可以產生內層有 5 個的正方形

【3-11-5-2 當(a-b)-(b-c) < (b-c)+(c-d)時】



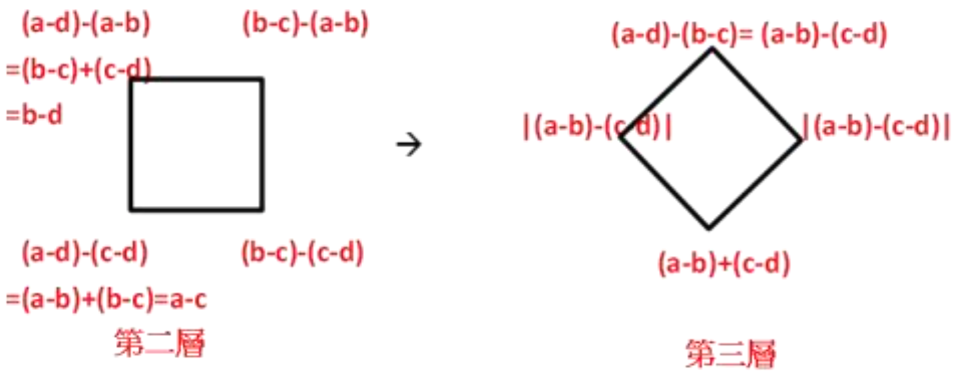
【發現 3-11-5-2 當(a-b)-(b-c) < (b-c)+(c-d)時】第四層與問題 3-3 得知(a, a, b, b)，可以再產生內層有 3 個的正方形，所以最多可以產生內層有 7 個的正方形

【3-11-6 當 a-b < b-c 與 b-c = c-d 時】



【發現 3-11-6 當 a-b < b-c 與 b-c = c-d 時】第四層與問題 3-1 得知(a, a, a, a)，可以再產生內層有 1 個的正方形，所以可以產生內層有 5 個的正方形

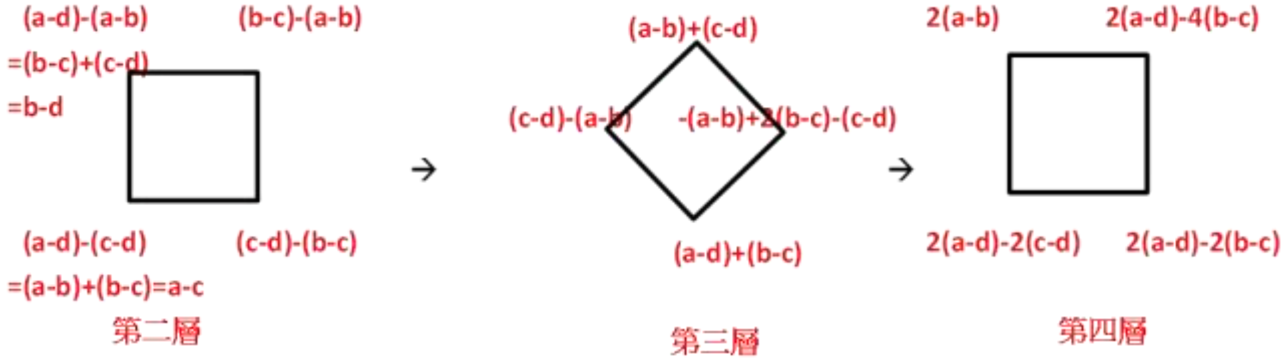
【3-11-7 當 a-b < b-c 與 b-c > c-d 時】

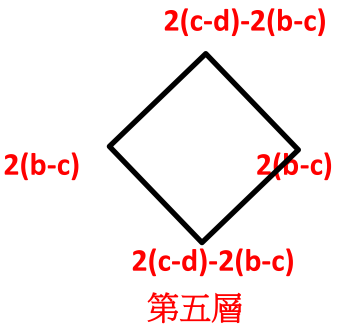


【發現 3-11-7 當 a-b < b-c 與 b-c > c-d 時】第三層與問題 3-4 得知(a, b, a, b)，可以再產生內層有 2 個的正方形，所以可以產生內層有 5 個的正方形

【3-11-7 當 a-b ＜ b-c 與 b-c ＜ c-d 時】

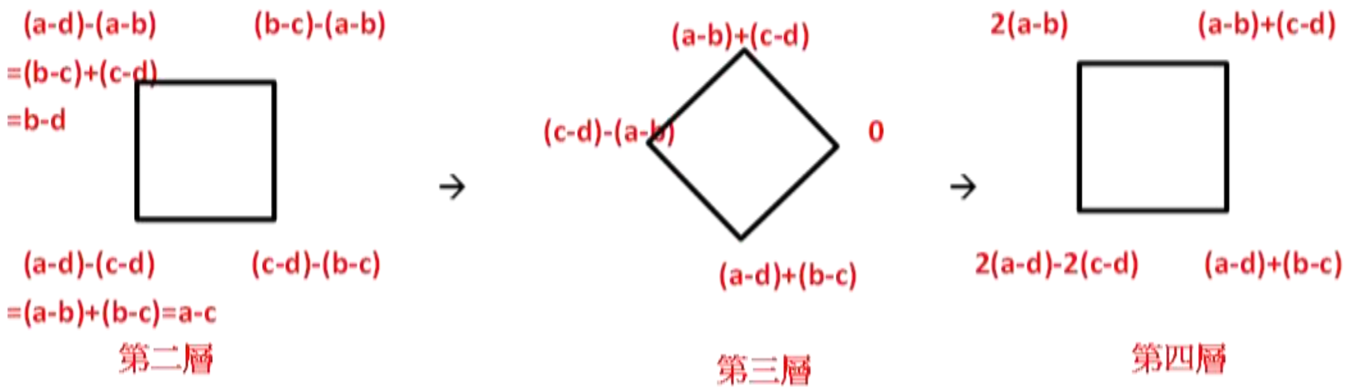
【3-11-7-1 當 (b-c)-(a-b) ＞ (c-d)-(b-c)時】

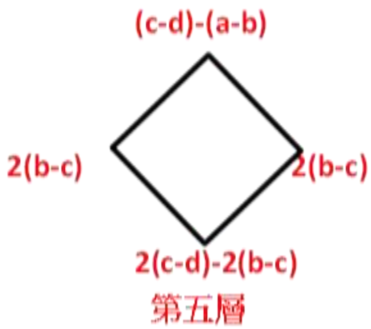




【發現 3-11-7-1 當 (b-c)-(a-b) ＞ (c-d)-(b-c)時】第五層與問題 3-4 得知(a, b, a, b)，可以再產生內層有 2 個的正方形，所以可以產生內層有 7 個的正方形

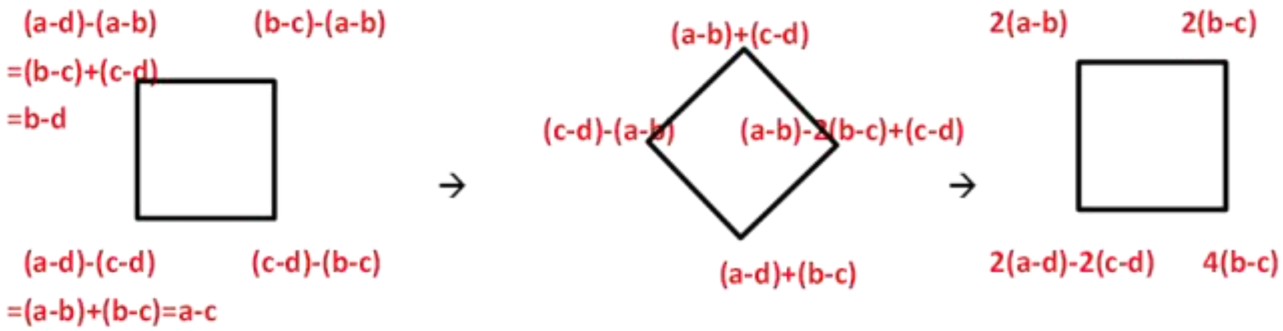
【3-11-7-2 當 (b-c)-(a-b) = (c-d)-(b-c)時】



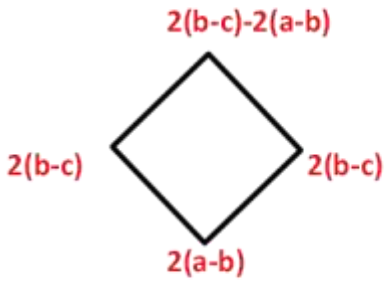


【發現 3-11-7-2 當 (b-c)-(a-b) = (c-d)-(b-c)時】第五層與問題 3-6 得知(a, b, a, c)，可以再產生內層有 4 個的正方形，所以可以產生內層有 9 個的正方形

【3-11-7-2 當 (b-c)-(a-b) < (c-d)-(b-c)時】



第二層　　第三層　　第四層



第五層

【發現 3-11-7-2 當 (b-c)-(a-b) < (c-d)-(b-c)時】第五層與問題 3-6 得知(a, b, a, c)，可以再產生內層有 4 個的正方形，所以 3-8-7-2 的可以產生內層有 9 個的正方形

【結論三】:

條件	產生內層最多有幾個的正方形
數字(a, a, a, a)	1
數字(a, a, a, b)	4
數字(a, a, b, b)	3
數字(a, b, a, b)	2
數字(a, a, b, c) 當 a-b > b-c 時 當 a-b =< b-c 時	 4 6
數字(a, b, a, c)	4
數字(a, b, b, c)	4
數字(a, b, c, b)	4
數字(a, b, c, c)	6
數字(a, c, b, c)	4
數字(a, b, c, d) 【a-b > b-c 與 b-c > c-d 時】 【(a-b)-(b-c) >= (b-d) 與 (a-b)-(b-c) > (b-c)-(c-d)】	 6

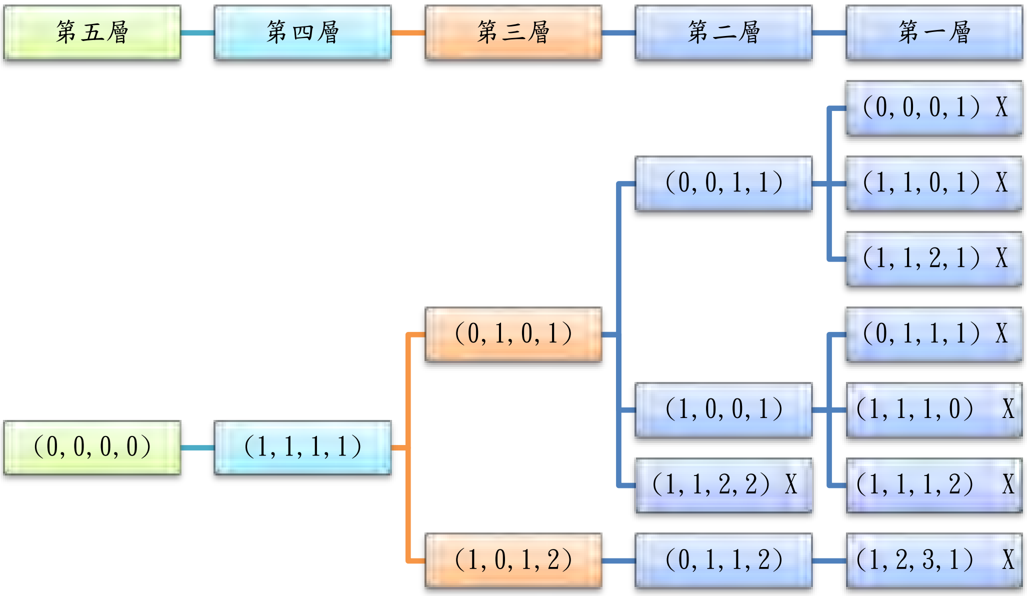
數字(a, b, c, d) 【$a-b > b-c$ 與 $b-c > c-d$ 時】 【$(a-b)-(b-c) < (b-d)$ 與 $(a-b)-(b-c) > (b-c)-(c-d)$】 【$(b-c)+(b-d)-(a-b) > (a-d)-3(b-c)$】	7 以上
數字(a, b, c, d) 【$a-b > b-c$ 與 $b-c > c-d$ 時】 【$(a-b)-(b-c) < (b-d)$ 與 $(a-b)-(b-c) > (b-c)-(c-d)$】 【$(b-c)+(b-d)-(a-b) = (a-d)-3(b-c)$】	9
數字(a, b, c, d) 【$a-b > b-c$ 與 $b-c > c-d$ 時】 【$(a-b)-(b-c) < (b-d)$ 與 $(a-b)-(b-c) > (b-c)-(c-d)$】 【$(b-c)+(b-d)-(a-b) < (a-d)-3(b-c)$】	10
數字(a, b, c, d) 【$a-b > b-c$ 與 $b-c > c-d$ 時】 【$(a-b)-(b-c) \geq (b-d)$ 與 $(a-b)-(b-c) < (b-c)-(c-d)$】	矛盾
數字(a, b, c, d) 【$a-b > b-c$ 與 $b-c > c-d$ 時】 【$(a-b)-(b-c) \geq (b-d)$ 與 $(a-b)-(b-c) = (b-c)-(c-d)$】	矛盾
數字(a, b, c, d) 【$a-b > b-c$ 與 $b-c < c-d$ 時】 【$(a-b) \geq (c-d)$】	7
數字(a, b, c, d) 【$a-b > b-c$ 與 $b-c < c-d$ 時】 【$(a-b) < (c-d)$】	7
數字(a, b, c, d) 【$a-b = b-c$ 與 $b-c > c-d$ 時】	5
數字(a, b, c, d) 【$a-b = b-c$ 與 $b-c < c-d$ 時】	7
數字(a, b, c, d) 【$a-b > b-c$ 與 $b-c = c-d$ 時】 【$(a-b)-(b-c) > (b-c)+(c-d)$】	5
數字(a, b, c, d) 【$a-b > b-c$ 與 $b-c = c-d$ 時】 【$(a-b)-(b-c) < (b-c)+(c-d)$】	7
數字(a, b, c, d) 【$a-b < b-c$ 與 $b-c = c-d$ 時】	5

數字(a, b, c, d) 【a-b ＜ b-c 與 b-c ＞ c-d 時】	5
數字(a, b, c, d) 【a-b ＜ b-c 與 b-c ＜ c-d 時】 【 (b-c)-(a-b) ＞ (c-d)-(b-c)】	7
數字(a, b, c, d) 【a-b ＜ b-c 與 b-c ＜ c-d 時】 【 (b-c)-(a-b) ＝ (c-d)-(b-c)】	9
數字(a, b, c, d) 【a-b ＜ b-c 與 b-c ＜ c-d 時】 【 (b-c)-(a-b) ＜ (c-d)-(b-c)】	9

2. 假設特定區間內取四個數字為(a, b, c, d)時，第 2 層為(a-b, b-c, c-d, a-d)，發現(a-d)=(a-b)+(b-c)+(c-d)的關係，為最小的三個數加總等於最大數。
3. 假設特定區間內取四個數字為(a, b, c, d)時，最內層一定為(0，0，0，0)，最內第二層一定為四個數字相同。
4. 假設特定區間內取四個數字為(a, b, c, d)，不管是乘 2 倍、3 倍、4 倍⋯. 最得到內層的正方形數是相同的。

【問題四】：利用倒數第二層為相同的四個數字且最小的三個數加總等於最大數的關係，從最內層去反推並尋找出(a, b, c, d)的數列為何?

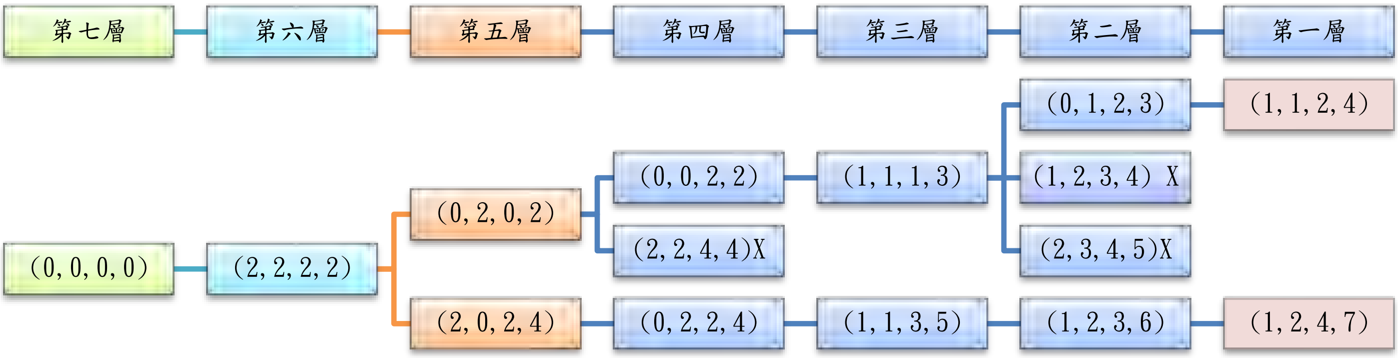
【問題 4-1】：假設第四層為(0, 0, 0, 0)，第三層為相同的(1, 1, 1, 1)是否可找出(a, b, c, d)的答案。



【結論 4-1】：

1. 第四層為相同的(1, 1, 1, 1)到向上推 3 層，就沒有辦法滿足問題三的結論最小的三個數加總等於最大數。
2. 倒數第二層為(1, 1, 1, 1)時無法找到特定區間(a, b, c, d)四個不同數字的解。

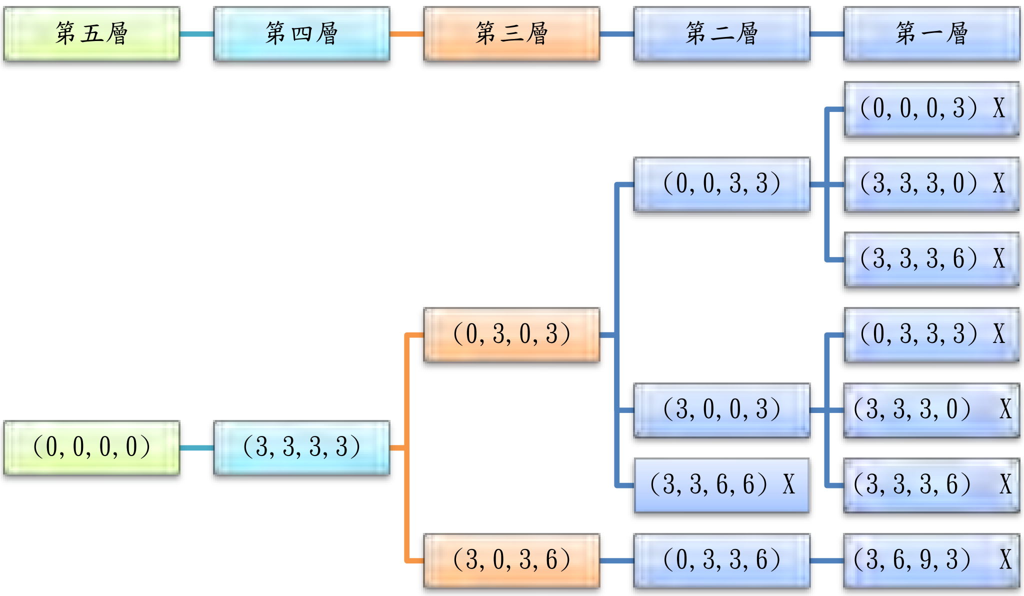
【問題 4-2】：假設第四層為(0, 0, 0, 0)，第三層為相同的(2, 2, 2, 2)是否可找出(a, b, c, d)的答案。



【結論 4-2】：

1. 第六層為相同的(2, 2, 2, 2) 滿足最小的三個數加總等於最大數可以向上推 5 層。
2. 倒數第二層為(2, 2, 2, 2)時可以找到特定區間(a, b, c, d)四個不同數字的解。
3. 在特定區間 1~5 為例，可以找到最多七層的數列(5，3，2，1)。

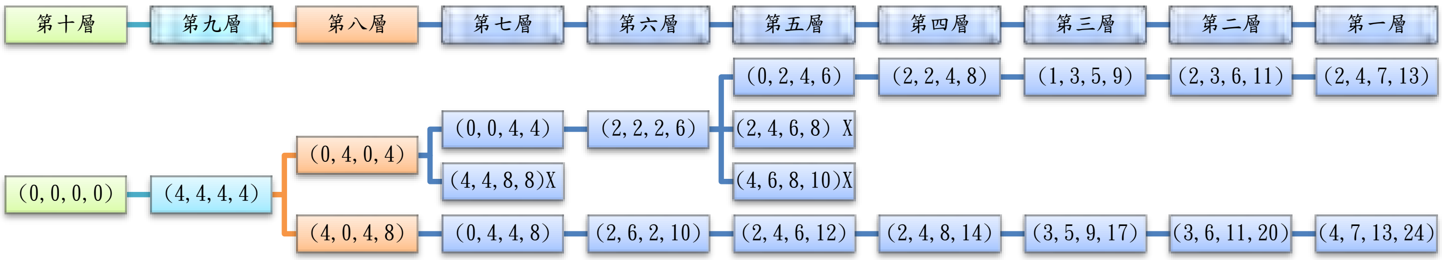
【問題 4-3】：假設第四層為(0, 0, 0, 0)，第三層為相同的(3, 3, 3, 3)是否可找出(a, b, c, d)的答案。



【結論 4-3】：

1. 第四層為相同的(3, 3, 3, 3)到向上推 3 層，就沒有辦法滿足問題三的結論最小的三個數加總等於最大數。
2. 倒數第二層為(3, 3, 3, 3)時在特定區間(a, b, c, d)四個不同數字的解，皆無法找出最多層的正方形。

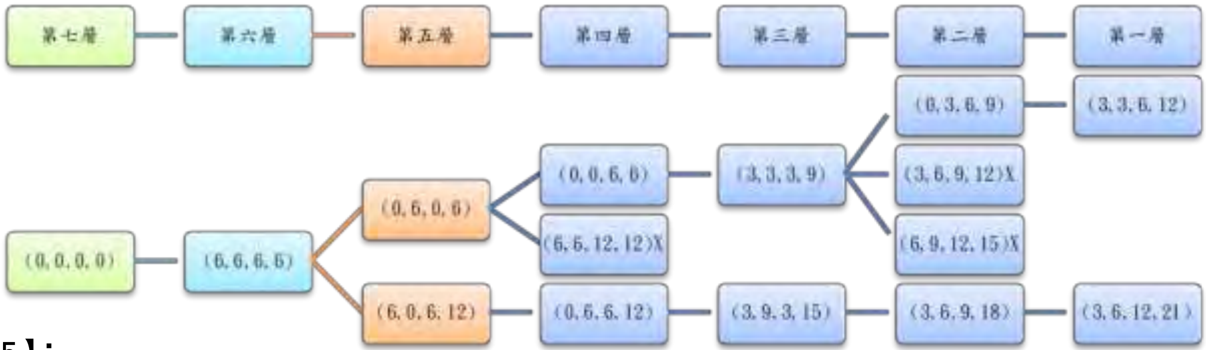
【問題 4-4】：假設第四層為(0, 0, 0, 0)，第三層為相同的(4, 4, 4, 4)是否可找出(a, b, c, d)的答案。



【結論 4-4】：

1. 第九層為相同的(4, 4, 4, 4) 滿足最小的三個數加總等於最大數可以向上推 8 層。
2. 倒數第二層為(4, 4, 4, 4)時可以找到特定區間(a, b, c, d)四個不同數字的解。

【問題 4-5】：假設第四層為(0, 0, 0, 0)，第三層為相同的(6, 6, 6, 6)是否可找出(a, b, c, d)的答案。



【結論 4-5】：

1. 第九層為相同的(6, 6, 6, 6) 滿足最小的三個數加總等於最大數可以向上推 8 層。
2. 倒數第二層為(6, 6, 6, 6)時在特定區間(a, b, c, d)四個不同數字的解，皆無法找出最多層的正方形。

【問題 4-6】：假設第四層為(0, 0, 0, 0)，第三層為相同的(8, 8, 8, 8)是否可找出(a, b, c, d)的答案。

【結論 4-6】：

1. 第九層為相同的(8, 8, 8, 8) 滿足最小的三個數加總等於最大數可以向上推 10 層。
2. 倒數第二層為(8, 8, 8, 8)時可以找到特定區間(a, b, c, d)四個不同數字的解。

【結論四】：

1. 倒數第二層為相同偶數的數列，可以利用反推的方式找到特定區間(a, b, c, d)有最多的內層正方形。
2. 利用問題 4-3 的(2, 2, 2, 2) 乘 2 倍、4 倍、8 倍、16 倍….，就可以反推出特定區間的答案。

陸、 研究結論

1. 三角形數字方塊在特定區間內，都只能找到二組數多層的數列。
2. 三角形數字方塊推論得知有二種情況下，在特定區間１～Ｎ中有最多的內層產生。
   - i. 在特定區間１～Ｎ中　a>b>c， 當 a-b=1 時，，當 b- c＝Ｎ－２時，可以產生Ｎ－１內層的三角形，所以 a 必等於Ｎ，b 必等於 N-1，c 必等於１。
   - ii. 在特定區間１～Ｎ中　a>b>c， 當 b- c=1 時，，當 a-b＝Ｎ－２時，可以產生Ｎ－１內層的三角形，所以 a 必等於Ｎ，b 必等於２，c 必等於１。
3. 三角形數字方塊推論得知有二種情況下，在特定區間Ｈ～Ｎ中有最多的內層產生。
   - i. 在特定區間Ｈ～Ｎ中　a>b>c， 當 a-b=1 時，，當 b- c＝Ｎ－２時，可以產生Ｎ－Ｈ內層的三角形，所以 a 必等於Ｎ，b 必等於 N-1，c 必等於Ｈ。
   - ii. 在特定區間Ｈ～Ｎ中　a>b>c， 當 b- c=1 時，，當 a-b＝Ｎ－２時，可以產生Ｎ－Ｈ內層的三角形，所以 a 必等於Ｎ，b 必等於 H+1，c 必等於Ｈ。
4. 正方形數字方塊推論得知數字(a,b,c,d),【a-b＞b-c 與 b-c＞c-d 時】、【(a-b)－(b-c)＜(b-d)、與 (a-b)－(b-c)＞(b-c)－(c-d)】與【(b-c)＋(b-d)－(a-b)＞(a-d)-3(b-c)】符合以上條件，可以特定的區間中可以往下推論到內層有７層以上的正方形。
5. 假設特定區間內取四個數字為(a,b,c,d)時，第２層為(a-b,b-c,c-d,a-d)，發現(a-d)＝(a-b)＋(b-c)＋(c-d)的關係，為最小的三個數加總等於最大數。
6. 假設特定區間內取四個數字為(a,b,c,d)時，最內層一定為(0，0，0，0)，最內第二層一定為四個數字相同。
7. 假設特定區間內取四個數字為(a,b,c,d)，不管是乘２倍、３倍、４倍….最得到內層的正方形數是相同的。
8. 倒數第二層為相同偶數的數列，且利用倒數第二層為(2,2,2,2) 乘２倍、4 倍、8 倍、16 倍…可以利用反推的方式找到特定區間(a,b,c,d)有最多的內層正方形。

柒、研究建議

我們從三角形與正方形的方塊找到規律，發現了三角形與正方形方塊的規律，我們在找三角形方塊中可以很容易推出規律，但進入到正方形方塊時，數列的組合就變得更多，增加了許多困難度，我們希望未來繼續找出其他五邊形、六邊形，來進行推論奇數邊方塊與偶數邊方塊是否有數列規律。

捌、參考資料

一、中華民國中34 屆小學科學展覽優勝作品『數字方塊』。

二、中華民國中45 屆國中科學展覽優勝作品『層出不窮』。

三、中華民國中第50 屆中小學科學展覽優勝作品『數字方塊尋極限』

四、昌爸工作坊『等比數字方塊』

五、葛老爹的推理遊戲２。

六、最ㄅㄧㄤˋ的數學公式。

【評語】080412

本作品主要探討三角形與正方形數字方塊之最多層數問題，作者給出三角形數字方塊最大數字為 n 時，最多層數為 n-1 的作法，並進一步推廣至正方形的情形，同時亦能針對書面報告與現場提問再尋求改進之道，進而提出解答，是一份值得鼓勵的佳作。

作品海報

壹、研究動機

在才藝課老師讓我們進行數學遊戲趣味解題，其中三邊形的三個頂點寫下任意正整數，並算出其相鄰兩頂點的差值，放在兩點間的中點位置，隨後不斷的再往內層計算，最後卻會出現一模一樣的數字覺得很有趣，於是就和同學研究是否可依找到三邊形的規律性並歸納其類別，也想進一步利用三邊形任意數差層次的規律，試找四邊形任意數差往內層計算，是否也其規律性，所以想以此主題來進行研究與討論。

貳、研究目的

一、找出三角形數字方塊的規律。

二、推理出正方形數字方塊是否有特殊規律?

叁、研究問題

一、在特定區間內，在三角形數字方塊最多能做到最多層數為何？

(一) 1~４區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？

(二) 1~５區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？

(三) 1~６區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？

(四) 1~７區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？

(五) 1~８區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？

(六) 1~９區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？

(七) 1~１０區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？

二、利用問題一在特定區間內，使用未知數去探討在三角形數字方塊最多內層為何？

三、利用問題二，使用未知數去探討在正方形數字方塊最多內層為何？

四、利用問題三發現相關聯性，倒數第二層為相同的四個數字且最小的三個數加總等於最大數的關係，從最內層去反推並尋找出(a,b,c,d)的數列為何?

肆、研究工具

一、電腦與EXCEL軟體

二、紙、筆

伍、研究過程或方法

【問題一】：在特定區間內，在三角形數字方塊能做到最多層數為何？數字之間有何關係？

【問題1-1】：數字1~4區間中，在三角形數字方塊最多內層為何？

【做法1-1】：

1. 每個角的大數減去小數，算出兩個角數字的差，寫在邊線的中點，再以三個中點畫一個新的三角形，依此類推所產生的新三角形三個角，每次都可得到新的數字，直到最後三個數字都循環就停止。
2. 數字1~4排列組合有4種

1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1		
1 2 4	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1
1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0
2 3 4	→	1 1 2	→	0 1 1		

【發現1-1】：

1. 從數字1~4的組合有2種（1， 2 ， 4 ）與（1，3， 4 ）可以產生內層有3個的三角形。

【問題1-2】：1~５區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？

【做法1-2】：

1. 每個角的大數減去小數，算出兩個角數字的差，寫在邊線的中點，再以三個中點畫一個新的三角形，依此類推所產生的新三角形三個角，每次都可得到新的數字，直到最後三個數字都循環就停止。
2. 數字1~5排列組合有10種

1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1				
1 2 4	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1		
1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0		
1 2 5	→	1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0
1 3 5	→	2 2 4	→	0 2 2				
1 4 5	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0
2 3 4	→	1 1 2	→	0 1 1				
2 3 5	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1		
2 4 5	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0		
3 4 5	→	1 1 2	→	0 1 1				

【發現1-2】：

1. 從數字1~5的組合有2種（1， 2 ，5）與（1，4，5）可以產生內層有4個的三角形。

【問題1-3】：數字1~6中在三角形數字方塊能做到最多層數為何？

【做法1-3】：

1. 每個角的大數減去小數，算出兩個角數字的差，寫在邊線的中點，再以三個中點畫一個新的三角形，依此類推所產生的新三角形三個角，每次都可得到新的數字，直到最後三個數字都循環就停止。
2. 數字1~6排列組合有20種。

1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1						
1 2 4	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1				
1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0				
1 2 5	→	1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1		1 1 0		
1 3 5	→	2 2 4	→	0 2 2						
1 4 5	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0		
1 2 6	→	1 4 5	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0
1 3 6	→	2 3 5	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1		
1 4 6	→	3 2 5	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1		
1 5 6	→	4 1 5	→	3 4 1	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1
2 3 4	→	1 1 2	→	0 1 1						
2 3 5	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1				
2 4 5	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0				
2 3 6	→	1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0		
2 4 6	→	2 2 4	→	0 2 2						
2 5 6	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0		
3 4 5	→	1 1 2	→	0 1 1						
3 4 6	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1				
3 5 6	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0				
4 5 6	→	1 1 2	→	0 1 1						

【發現1-3】：

1. 從數字1~6的組合有2種（1， 2 ，6）與（1，5，6）可以產生內層有5個的三角形。

【問題1-4】：1~７區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？

【做法1-4】：

1. 每個角的大數減去小數，算出兩個角數字的差，寫在邊線的中點，再以三個中點畫一個新的三角形，依此類推所產生的新三角形三個角，每次都可得到新的數字，直到最後三個數字都循環就停止。
2. 數字1~7排列組合有35種

1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1								
1 2 4	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1						
1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0						
1 2 5	→	1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0				
1 3 5	→	2 2 4	→	0 2 2								
1 4 5	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0				
1 2 6	→	1 4 5	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0		
1 3 6	→	2 3 5	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1				
1 4 6	→	3 2 5	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1				
1 5 6	→	4 1 5	→	3 4 1	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1		
1 2 7	→	1 5 6	→	4 1 5	→	3 4 1	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1
1 3 7	→	2 4 6	→	2 2 4	→	0 2 2						
1 4 7	→	3 3 6	→	0 3 3								
1 5 7	→	4 2 6	→	2 4 2	→	2 2 0						
1 6 7	→	5 1 6	→	4 5 1	→	1 4 3	→	3 1 2	→	2 1 1	→	1 0 1
2 3 4	→	1 1 2	→	0 1 1								
2 3 5	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1						
2 4 5	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0						
2 3 6	→	1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0				
2 4 6	→	2 2 4	→	0 2 2								
2 5 6	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0				
2 3 7	→	1 4 5	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0		
2 4 7	→	2 3 5	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1				
2 5 7	→	3 2 5	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1				
2 6 7	→	4 1 5	→	3 4 1	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1		
3 4 5	→	1 1 2	→	0 1 1	→							
3 4 6	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1						
3 5 6	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0						
3 4 7	→	1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0				
3 5 7	→	2 2 4	→	0 2 2	→							
3 6 7	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0				
4 5 6	→	1 1 2	→	0 1 1								
4 5 7	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1						
4 6 7	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0						
5 6 7	→	1 1 2	→	0 1 1								

【發現1-4】：

1. 從數字1~7的組合有2種（1， 2 ，7）與（1，6，7）可以產生內層有6個的三角形。

【問題1-5】：1~８區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？

【做法1-5】：

1. 每個角的大數減去小數，算出兩個角數字的差，寫在邊線的中點，再以三個中點畫一個新的三角形，依此類推所產生的新三角形三個角，每次都可得到新的數字，直到最後三個數字都循環就停止。
2. 數字1~8排列組合有56種，與1~7新增21種不同的排序

1 2 8	→	1 6 7	→	5 1 6	→	4 5 1	→	1 4 3	→	3 1 2	→	2 1 1	→	1 0 1
1 3 8	→	2 5 7	→	3 2 5	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1				
1 4 8	→	3 4 7	→	1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0				
1 5 8	→	4 3 7	→	1 4 3	→	3 1 2	→	2 1 1	→	1 0 1				
1 6 8	→	5 2 7	→	3 5 2	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0				
1 7 8	→	6 1 7	→	5 6 1	→	1 5 4	→	4 1 3	→	3 2 1	→	1 1 2	→	0 1 1
2 3 8	→	1 5 6	→	4 1 5	→	3 4 1	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1		
2 4 8	→	2 4 6	→	2 2 4	→	0 2 2								
2 5 8	→	3 3 6	→	0 3 3										
2 6 8	→	4 2 6	→	2 4 2	→	2 2 0								
2 7 8	→	5 1 6	→	4 5 1	→	1 4 3	→	3 1 2	→	2 1 1	→	1 0 1		
3 4 8	→	1 4 5	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0				
3 5 8	→	2 3 5	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1						
3 6 8	→	3 2 5	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1						
3 7 8	→	4 1 5	→	3 4 1	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1				
4 5 8	→	1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0						
4 6 8	→	2 2 4	→	0 2 2										
4 7 8	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0						
5 6 8	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1								
5 7 8	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0								
6 7 8	→	1 1 2	→	0 1 1										

【發現1-5】：

1. 從數字1~8的組合有2種（1， 2 ，8）與（1，7，8）可以產生內層有6個的三角形。

【問題1-6】：1~9區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？

【做法1-6】：

1. 每個角的大數減去小數，算出兩個角數字的差，寫在邊線的中點，再以三個中點畫一個新的三角形，依此類推所產生的新三角形三個角，每次都可得到新的數字，直到最後三個數字都循環就停止。
2. 數字1~9排列組合有84種，與1~8新增28種不同的排序。

1 2 9	→	1 7 8	→	6 1 7	→	5 6 1	→	1 5 4	→	4 1 3	→	3 2 1	→	1 1 2	→	0 1 1
1 3 9	→	2 6 8	→	4 2 6	→	2 4 2	→	2 2 0								
1 4 9	→	3 5 8	→	2 3 5	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1						
1 5 9	→	4 4 8	→	0 4 4												
1 6 9	→	5 3 8	→	2 5 3	→	3 2 1	→	1 1 2	→	0 1 1						
1 7 9	→	6 2 8	→	4 6 2	→	2 4 2	→	2 2 0								
1 8 9	→	7 1 8	→	6 7 1	→	1 6 5	→	5 1 4	→	4 3 1	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1
2 3 9	→	1 6 7	→	5 1 6	→	4 5 1	→	1 4 3	→	3 1 2	→	2 1 1	→	1 0 1		
2 4 9	→	2 5 7	→	3 2 5	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1						
2 5 9	→	3 4 7	→	1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0						
2 6 9	→	4 3 7	→	1 4 3	→	3 1 2	→	2 1 1	→	1 0 1						
2 7 9	→	5 2 7	→	3 5 2	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0						
2 8 9	→	6 1 7	→	5 6 1	→	1 5 4	→	4 1 3	→	3 2 1	→	1 1 2	→	0 1 1		
3 4 9	→	1 5 6	→	4 1 5	→	3 4 1	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1				
3 5 9	→	2 4 6	→	2 2 4	→	0 2 2										
3 6 9	→	3 3 6	→	0 3 3												
3 7 9	→	4 2 6	→	2 4 2	→	2 2 0										
3 8 9	→	5 1 6	→	4 5 1	→	1 4 3	→	3 1 2	→	2 1 1	→	1 0 1				
4 5 9	→	1 4 5	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0						
4 6 9	→	2 3 5	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1								
4 7 9	→	3 2 5	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1								
4 8 9	→	4 1 5	→	3 4 1	→	1 3 2	→	2 1 1	→	1 0 1						
5 6 9	→	1 3 4	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0								
5 7 9	→	2 2 4	→	0 2 2												
5 8 9	→	3 1 4	→	2 3 1	→	1 2 1	→	1 1 0								
6 7 9	→	1 2 3	→	1 1 2	→	0 1 1										
6 8 9	→	2 1 3	→	1 2 1	→	1 1 0										
7 8 9	→	1 1 2	→	0 1 1												

【發現1-6】：

1. 從數字1~9的組合有2種（1， 2 ，9）與（1，8，9）可以產生內層有6個的三角形。

【問題1-7】：1~10區間中，找出三角形數字方塊最多內層為何？

【做法1-7】：

1. 每個角的大數減去小數，算出兩個角數字的差，寫在邊線的中點，再以三個中點畫一個新的三角形，依此類推所產生的新三角形三個角，每次都可得到新的數字，直到最後三個數字都循環就停止。
2. 數字1~10排列組合有120種。

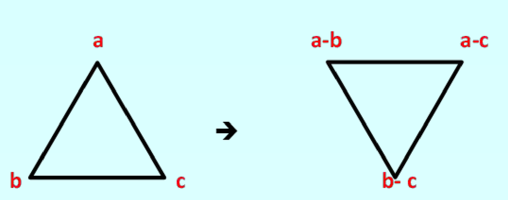
1 2 10	→ 1 8 9	→ 7 1 8	→ 6 7 1	→ 1 6 5	→ 5 1 4	→ 4 3 1	→ 1 2 3	→ 1 1 2	→ 0 1 1
1 3 10	→ 2 7 9	→ 5 2 7	→ 3 5 2	→ 2 3 1	→ 1 2 1	→ 1 1 0			
1 4 10	→ 3 6 9	→ 3 3 6	→ 0 3 3						
1 5 10	→ 4 5 9	→ 1 4 5	→ 3 1 4	→ 2 3 1	→ 1 2 1	→ 1 1 0			
1 6 10	→ 5 4 9	→ 1 5 4	→ 4 1 3	→ 3 2 1	→ 1 1 2	→ 0 1 1			
1 7 10	→ 6 3 9	→ 3 6 3	→ 3 3 0						
1 8 10	→ 7 2 9	→ 5 7 2	→ 2 5 3	→ 3 2 1	→ 1 1 2	→ 0 1 1			
1 9 10	→ 8 1 9	→ 7 8 1	→ 1 7 6	→ 6 1 5	→ 5 4 1	→ 1 3 4	→ 2 1 3	→ 1 2 1	→ 1 1 0
2 3 10	→ 1 7 8	→ 6 1 7	→ 5 6 1	→ 1 5 4	→ 4 1 3	→ 3 2 1	→ 1 1 2	→ 0 1 1	
2 4 10	→ 2 6 8	→ 4 2 6	→ 2 4 2	→ 2 2 0					
2 5 10	→ 3 5 8	→ 2 3 5	→ 1 2 3	→ 1 1 2	→ 0 1 1				
2 6 10	→ 4 4 8	→ 0 4 4							
2 7 10	→ 5 3 8	→ 2 5 3	→ 3 2 1	→ 1 1 2	→ 0 1 1				
2 8 10	→ 6 2 8	→ 4 6 2	→ 2 4 2	→ 2 2 0					
2 9 10	→ 7 1 8	→ 6 7 1	→ 1 6 5	→ 5 1 4	→ 4 3 1	→ 1 2 3	→ 1 1 2	→ 0 1 1	
3 4 10	→ 1 6 7	→ 5 1 6	→ 4 5 1	→ 1 4 3	→ 3 1 2	→ 2 1 1	→ 1 0 1		
3 5 10	→ 2 5 7	→ 3 2 5	→ 1 3 2	→ 2 1 1	→ 1 0 1				
3 6 10	→ 3 4 7	→ 1 3 4	→ 2 1 3	→ 1 2 1	→ 1 1 0				
3 7 10	→ 4 3 7	→ 1 4 3	→ 3 1 2	→ 2 1 1	→ 1 0 1				
3 8 10	→ 5 2 7	→ 3 5 2	→ 2 3 1	→ 1 2 1	→ 1 1 0				
3 9 10	→ 6 1 7	→ 5 6 1	→ 1 5 4	→ 4 1 3	→ 3 2 1	→ 1 1 2	→ 0 1 1		
4 5 10	→ 1 5 6	→ 4 1 5	→ 3 4 1	→ 1 3 2	→ 2 1 1	→ 1 0 1			
4 6 10	→ 2 4 6	→ 2 2 4	→ 0 2 2						
4 7 10	→ 3 3 6	→ 0 3 3							
4 8 10	→ 4 2 6	→ 2 4 2	→ 2 2 0						
4 9 10	→ 5 1 6	→ 4 5 1	→ 1 4 3	→ 3 1 2	→ 2 1 1	→ 1 0 1			
5 6 10	→ 1 4 5	→ 3 1 4	→ 2 3 1	→ 1 2 1	→ 1 1 0				
5 7 10	→ 2 3 5	→ 1 2 3	→ 1 1 2	→ 0 1 1					
5 8 10	→ 3 2 5	→ 1 3 2	→ 2 1 1	→ 1 0 1					
5 9 10	→ 4 1 5	→ 3 4 1	→ 1 3 2	→ 2 1 1	→ 1 0 1				
6 7 10	→ 1 3 4	→ 2 1 3	→ 1 2 1	→ 1 1 0					
6 8 10	→ 2 2 4	→ 0 2 2							
6 9 10	→ 3 1 4	→ 2 3 1	→ 1 2 1	→ 1 1 0					
7 8 10	→ 1 2 3	→ 1 1 2	→ 0 1 1						
7 9 10	→ 2 1 3	→ 1 2 1	→ 1 1 0						
8 9 10	→ 1 1 2	→ 0 1 1							

【發現1-7】：

1. 從數字1~10的組合有2種（1， 2 ，10）與（1，9，10）可以產生內層有9個的三角形。

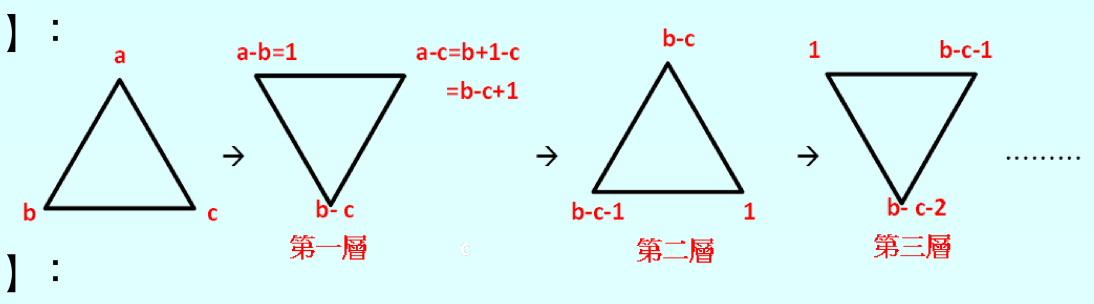
【問題二】：利用問題一在特定區間內，用未知數去探討三角形數字方塊最多內層為何？

假設特定區間內取a、b、c三正整數，且a>b>c



【問題2-1】：假設a-b=1時，a=b+1。

【做法2-1】：



【發現2-1】：

1. 假設數字a-b=1時，且a>b>c，所以b-c不會等於0，當b-c=1時，也就是三個數字是連續三個數字，可以產生內層有2個的三角形。
2. 假設數字a-b=1時，且a>b>c，當b-c越大時，可以產生越多內層的三角形。

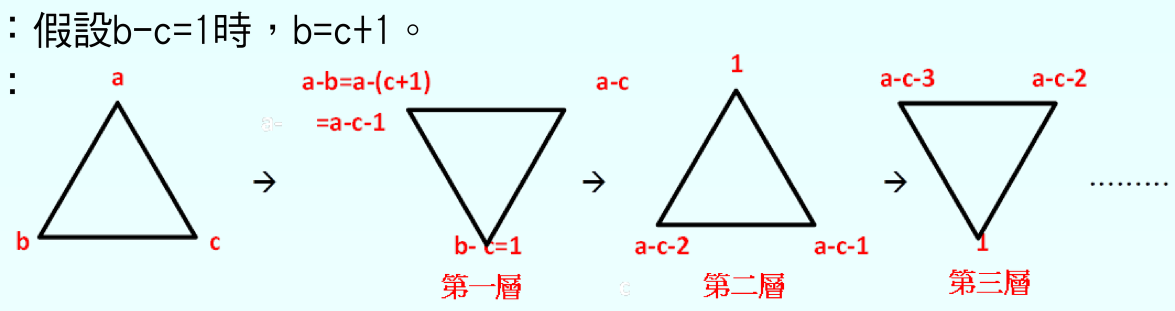
【問題2-2】：假設a-c=1時，a=c+1。

【發現2-2】：

1. 假設數字a-c=1時，且a>b>c，因a、b、c為正整數，所以a-c=1的假設並不會成立。

【問題2-3】：假設b-c=1時，b=c+1。

【做法2-3】：

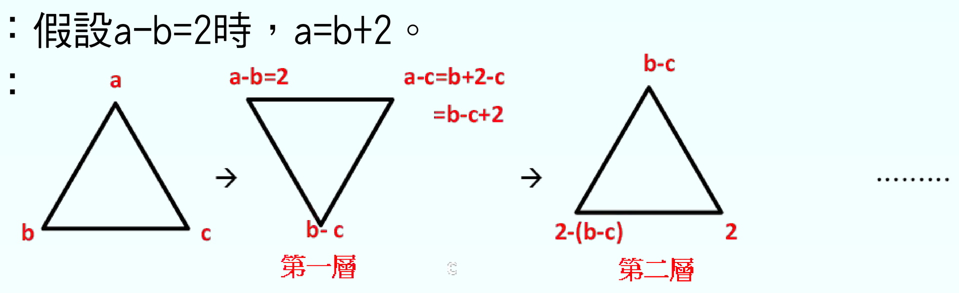


【發現2-3】：

1. 假設數字a-b=1時，且a>b>c，所以b-c不會等於0，當b-c=1時，也就是三個數字是連續三個數字，可以產生內層有2個的三角形。
2. 假設數字a-b=1時，且a>b>c，當b-c越大時，可以產生越多內層的三角形。

【問題2-4】：假設a-b=2時，a=b+2。

【做法2-4】：

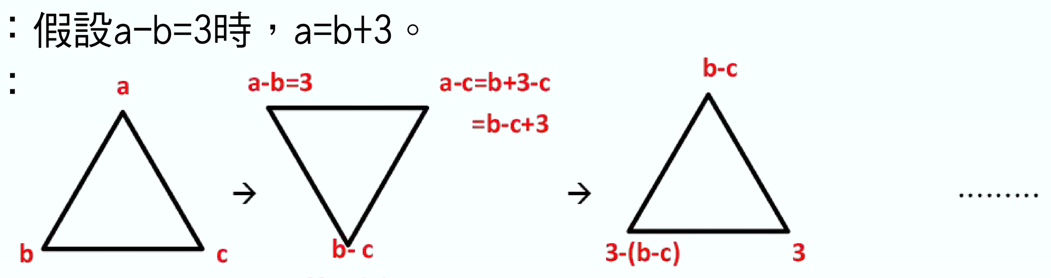


【發現2-4】：

1. 假設a-b=2時，且a>b>c，所以a-c=b-c+2 >= a-b=2 >= b-c > 0，得知2 >= b-c > 0，所以b-c =2 或 b-c =1。
2. 當a-b=2與b-c =2，可以產生內層有2個的三角形。
3. 當a-b=2與b-c =1，可以產生內層有3個的三角形。

【問題2-5】：假設a-b=3時，a=b+3。

【做法2-5】：

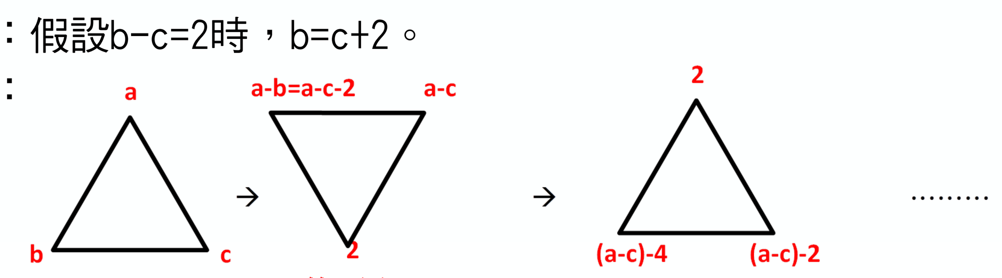


【發現2-5】：

1. 假設a-b=3時，且a>b>c，所以a-c=b-c+3 >= a-b=3 >= b-c > 0，得知3 >= b-c > 0，所以b-c =3、b-c =2 或 b-c =1。
2. 當a-b=3與b-c =3，可以產生內層有2個的三角形。
3. 當a-b=3與b-c =2，可以產生內層有4個的三角形。
4. 當a-b=3與b-c =1，可以產生內層有4個的三角形。

【問題2-6】：假設b-c=2時，b=c+2。

【做法2-6】：

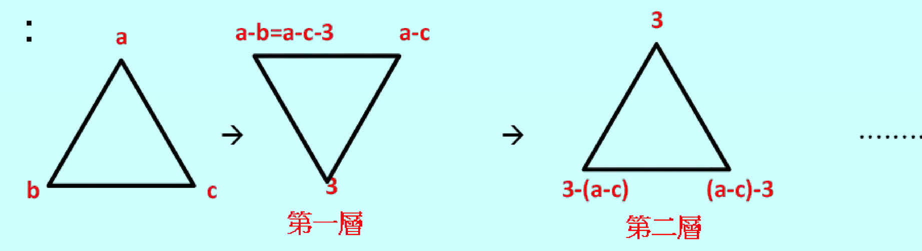


【發現2-6】：

1. 假設a-b=3時，且a>b>c，所以a-c=b-c+3 >= a-b=3 >= b-c > 0，得知3 >= b-c > 0，所以b-c =3、b-c =2 或 b-c =1。
2. 當a-b=3與b-c =3，可以產生內層有2個的三角形。
3. 當a-b=3與b-c =2，可以產生內層有4個的三角形。
4. 當a-b=3與b-c =1，可以產生內層有4個的三角形。

【問題2-7】：假設b-c=3時，b=c+3。

【做法2-7】：



【發現2-7】：

1. 假設b-c=3時，且a>b>c，所以a-c >= a-b=a-c-3 >= b-c=3 > 0，得知a-c-3 >= 3。
2. 當b-c =3與a-c =6，可以產生內層有2個的三角形。
3. 當b-c =3與a-c =7，可以產生內層有5個的三角形。
4. 當b-c =3與a-c =8，可以產生內層有5個的三角形。
5. 當b-c =3與a-c =9，可以產生內層有3個的三角形。

【結論二】：

1. 由上列的推論得知有二種情況下，在特定區間１～N中有最多的內層產生。

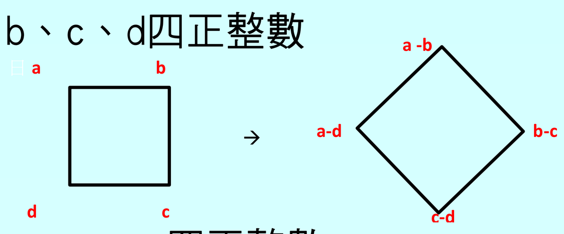
在特定區間１～N中　a>b>c， 當a-b=1時，，當b- c＝N-2時，可以產生N-1內層的三角形，所以a必等於N，b必等於N-1，c必等於1。
在特定區間１～N中　a>b>c， 當b- c=1時，，當a-b＝N-2時，可以產生N-1內層的三角形，所以a必等於N，b必等於2，c必等於1。

2. 由上列的推論得知有二種情況下，在特定區間H～N中有最多的內層產生。

在特定區間H～N中　a>b>c， 當a-b=1時，，當b- c＝N-2時，可以產生N-H內層的三角形，所以a必等於N，b必等於N-1，c必等於H。
在特定區間H～N中　a>b>c， 當b- c=1時，，當a-b＝N-2時，可以產生N-H內層的三角形，所以a必等於N，b必等於H+1，c必等於H。

【問題三】：在特定區間內，使用未知數去探討在正方形數字方塊能找到最多層數為何？

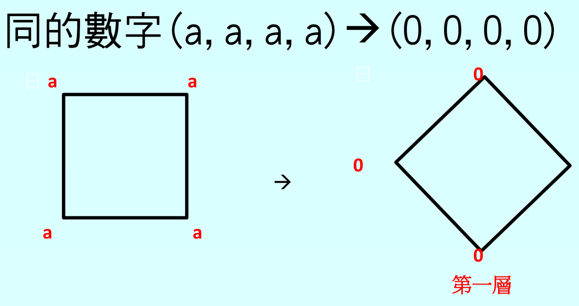
假設特定區間內取a、b、c、d四正整數



【問題3-1】：假設特定區間內取a、a、a、a四正整數。

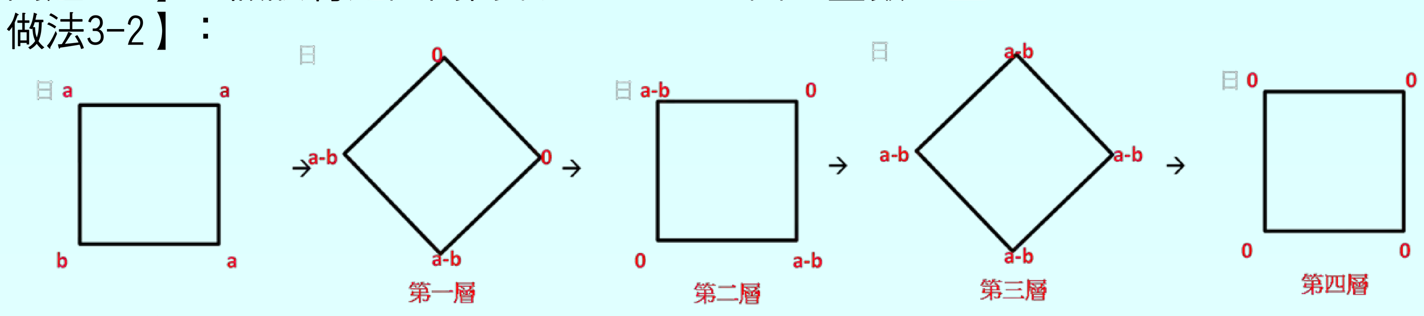
【發現3-1】：

1. 假設特定區間內取四個相同的數字(a, a, a, a)→(0, 0, 0, 0)，可以產生內層有1個的正方形。



【問題3-2】：假設特定區間內取a、a、a、b四正整數，且a>b

【做法3-2】：

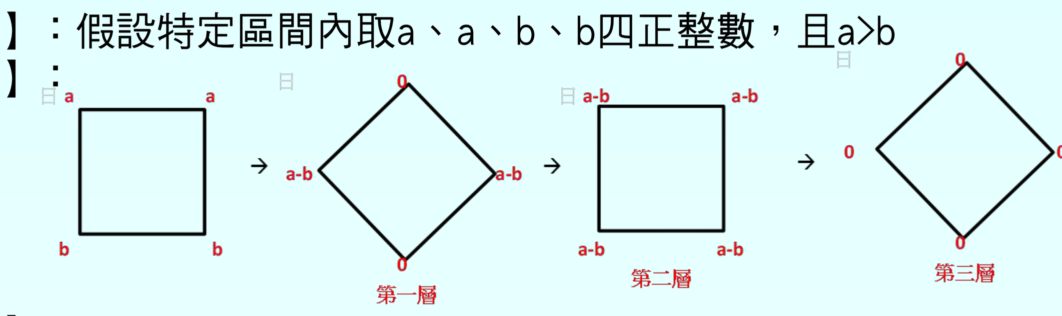


【發現3-2】：

1. 假設特定區間內取四個相同的數字(a, a, a, b)，可以產生內層有4個的正方形。

【問題3-3】：假設特定區間內取a、a、b、b四正整數，且a>b

【做法3-3】：

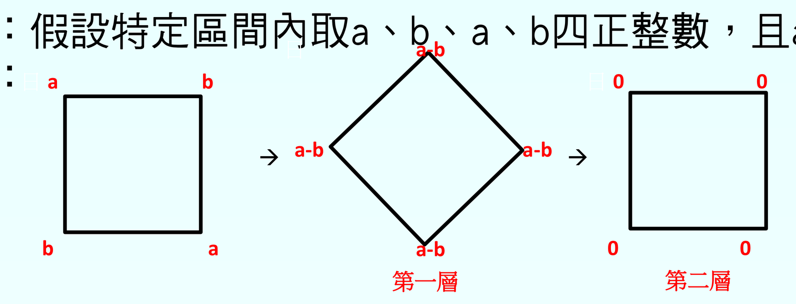


【發現3-3】：

1. 假設特定區間內取四個相同的數字(a, a, b, b)，可以產生內層有3個的正方形。

【問題3-4】：假設特定區間內取a、b、a、b四正整數，且a>b

【做法3-4】：

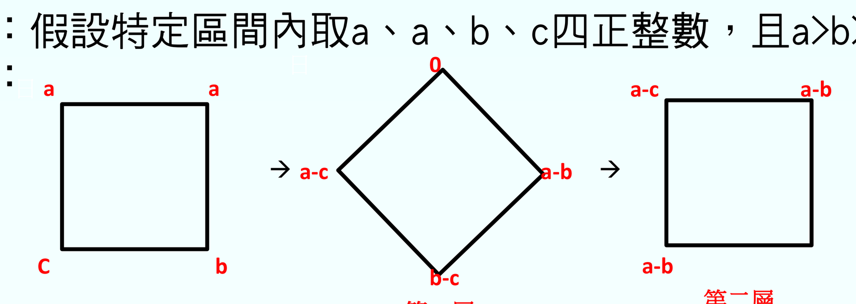


【發現3-4】：

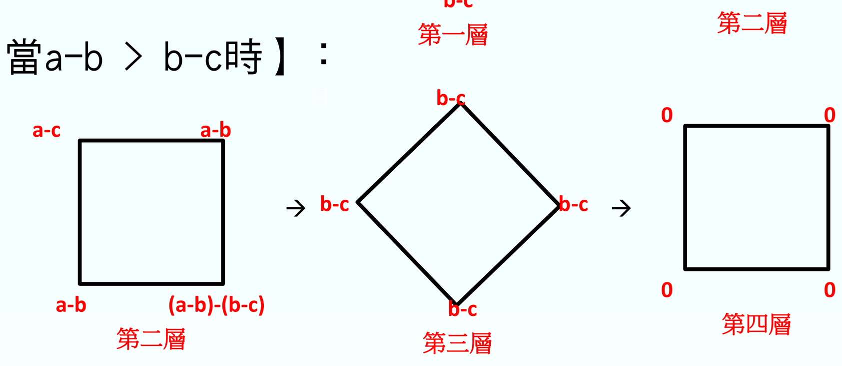
1. 假設特定區間內取四個相同的數字(a, b, a, b)，可以產生內層有2個的正方形。

【問題3-5】：假設特定區間內取a、a、b、c四正整數，且a>b>c

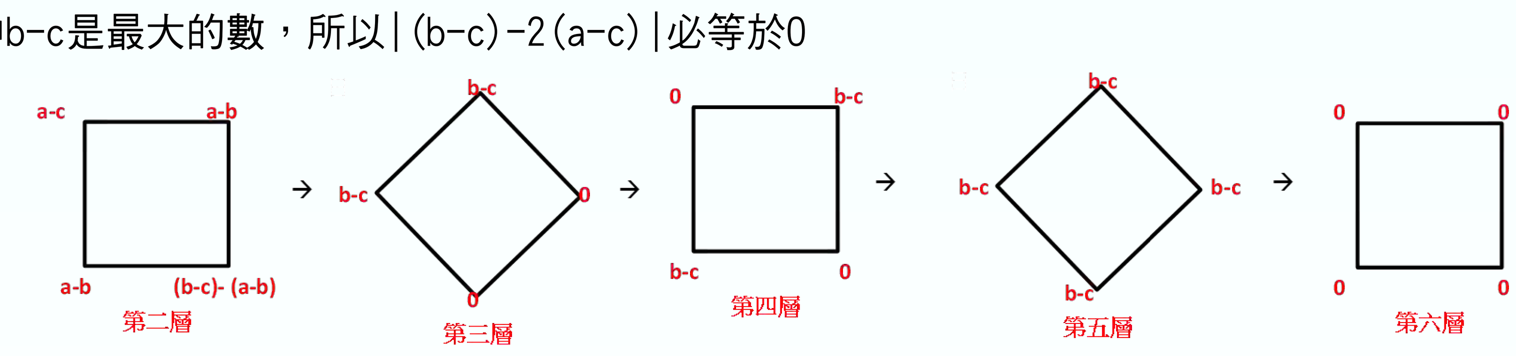
【做法3-5】：



【做法3-5-1當a-b ＞ b-c時】：



【做法3-5-2當a-b =＜ b-c時】：因為每產生的內層皆有最大的數等於其三數總和，在第三層中b-c是最大的數，所以|(b-c)-2(a-c)|必等於0

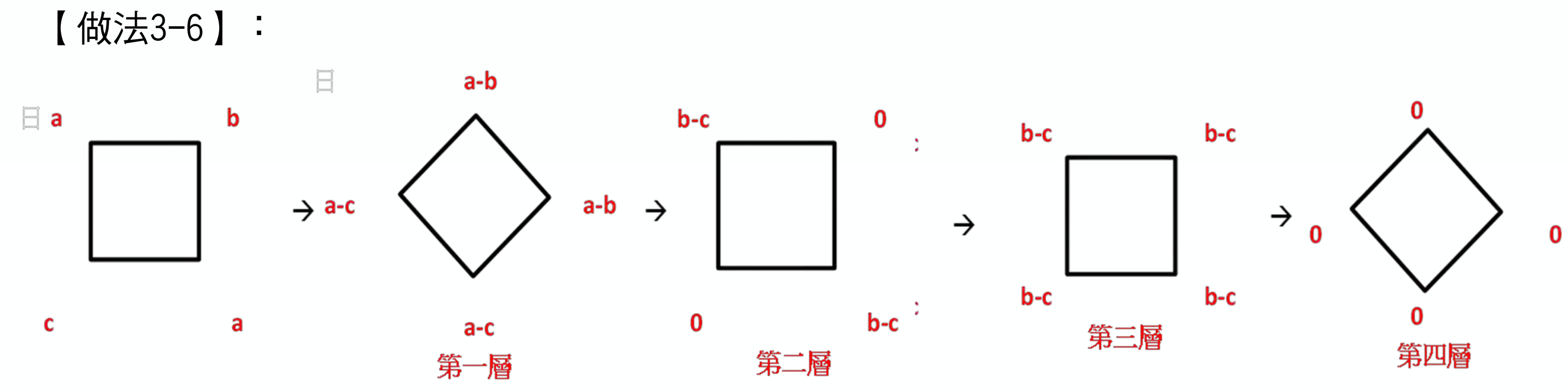


【發現3-5】：

1. 假設特定區間內取四個相同的數字(a, a, b, c)，當a-b ＞ b-c時，可以產生內層有4個的正方形。
2. 假設特定區間內取四個相同的數字(a, a, b, c)，當a-b =＜ b-c時，可以產生內層有6個的正方形。

【問題3-6】：假設特定區間內取a、b、a、c四正整數，且a>b>c

【做法3-6】：

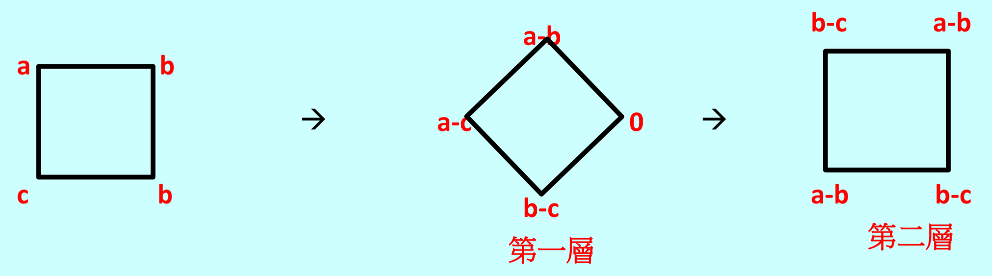


【發現3-6】：

1. 假設特定區間內取四個相同的數字(a, b, a, c)，可以產生內層有4個的正方形。

【問題3-7】:假設特定區間內取a、b、b、c四正整數，且a>b>c

【做法3-7】:

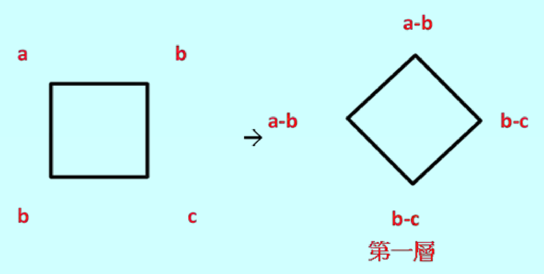


【發現3-7】:

1. 從問題3-4中得知數字(a, b, a, b)，可以產生內層有2個的正方形，假設特定區間內取四個相同的數字(a, b, b, c)，可以產生內層有4個的正方形。

【問題3-8】:假設特定區間內取a、b、c、b四正整數，且a>b>c

【做法3-8】:

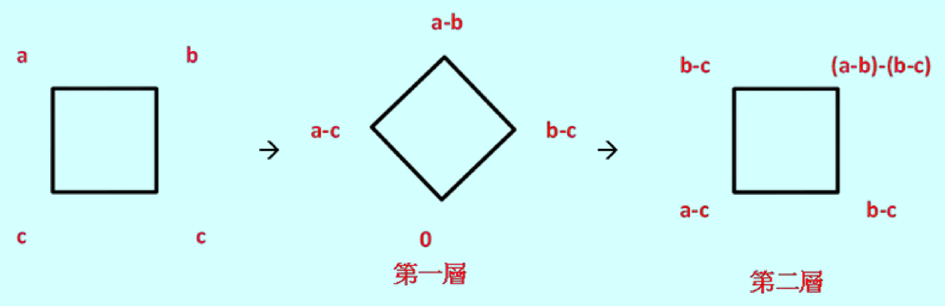


【發現3-8】:

1. 從問題3-3中得知數字(a, b, c, b)，可以產生內層有3個的正方形，假設特定區間內取四個數字(a, b, c, b)，可以產生內層有4個的正方形。

【問題3-9】：假設特定區間內取a、b、c、c四正整數，且a>b>c

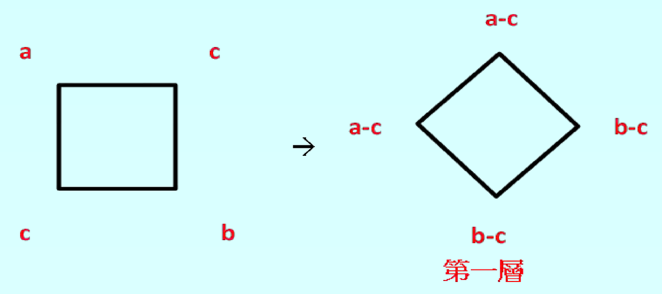
【做法3-9】：



【發現3-9】：

1. 從問題3-8中得知數字(a, b, c, b)，可以產生內層有4個的正方形，假設特定區間內取四個數字(a, b, c, c)，可以產生內層有6個的正方形。

【做法3-10】：



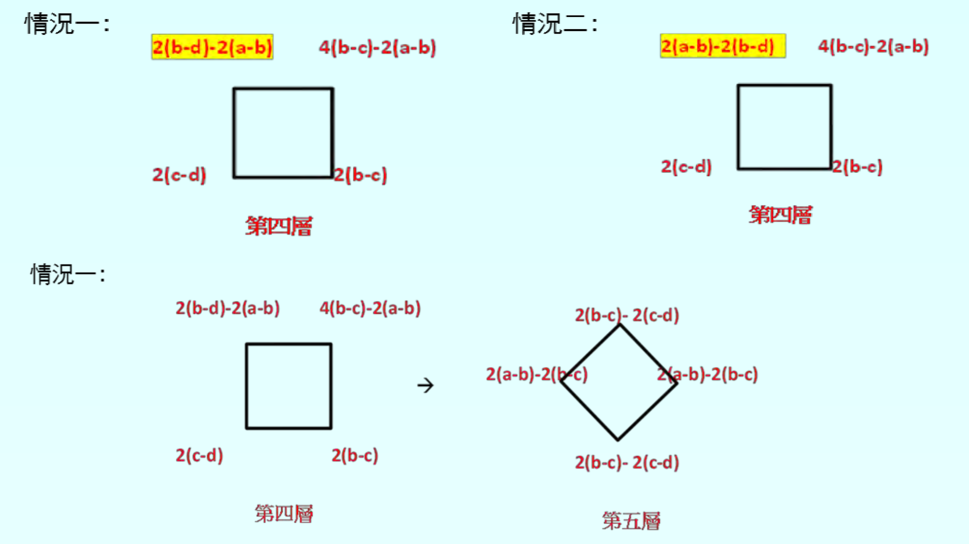
【發現3-10】：

1. 從問題3-3中得知數字(a, a, b, b)，可以產生內層有3個的正方形，假設特定區間內取四個數字(a, c, b, c)，可以產生內層有4個的正方形。

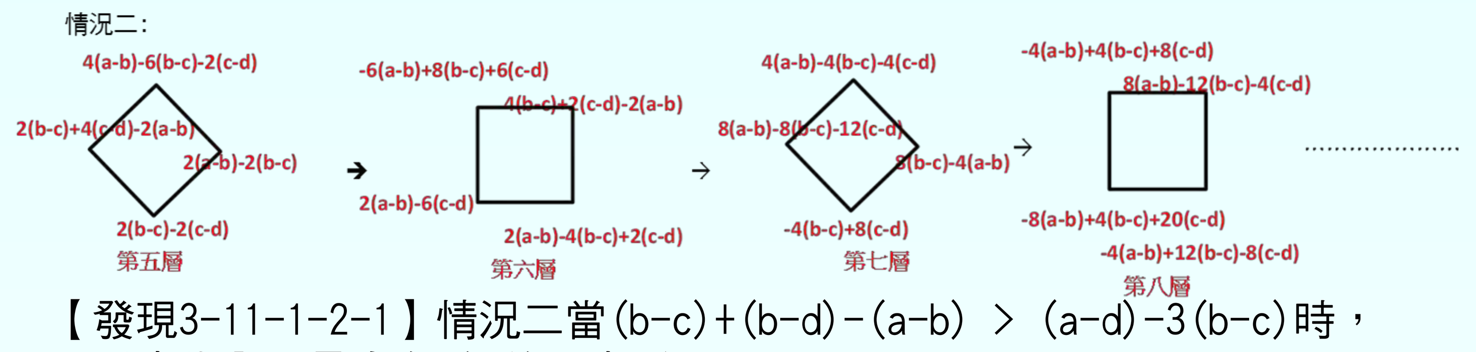
【問題3-11】：假設特定區間內取a、b、c、d四正整數，且a>b>c>d

【做法3-11】：

【3-11-1-2-1當(b-c)+(b-d)-(a-b) > (a-d)-3(b-c)時】可以分成二種情況：

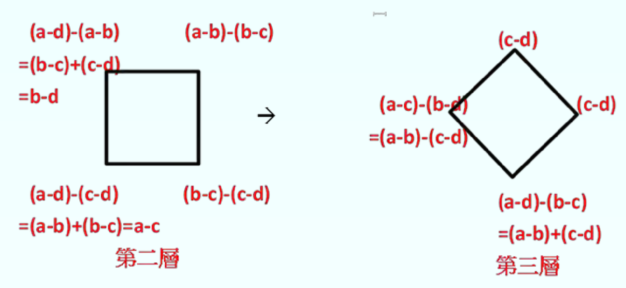


【發現3-11-1-2-1】情況一由問題3-4得知第五層後還可以有二層的正方形，所以當(b-c)+(b-d)-(a-b) > (a-d)-3(b-c)時，只能產生七層的正方形。



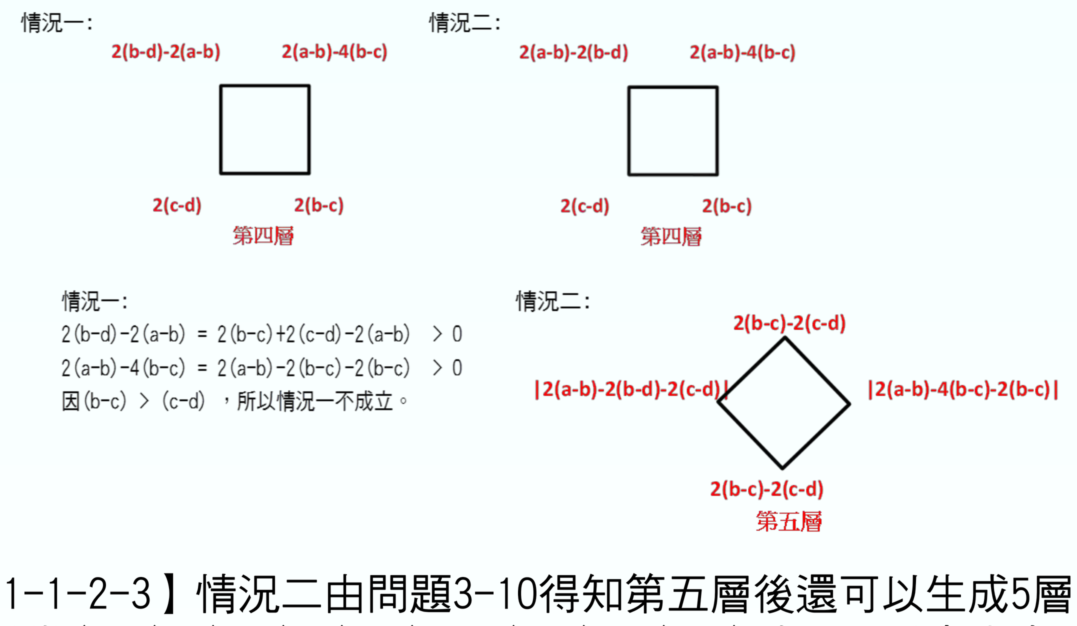
【發現3-11-1-2-1】情況二當(b-c)+(b-d)-(a-b) > (a-d)-3(b-c)時，可以產生內層最少有8個的正方形。

【3-11-1-2-2當(b-c)+(b-d)-(a-b) = (a-d)-3(b-c)時】



【發現3-11-1-2-2】由問題3-5 得知情況一當(a-b)-(c-d)< (c-d)時，可以產生內層有4個的正方形，只能產生七層的正方形。情況二當(a-b)-(c-d)>(c-d)時，可以產生內層有6個的正方形，只能產生九層的正方形。

【3-11-1-2-3當(b-c)+(b-d)-(a-b) < (a-d)-3(b-c)時】



【發現3-11-1-2-3】情況二由問題3-10得知第五層後還可以生成5層的正方形，所以當(b-c)+(b-d)-(a-b) < (a-d)-3(b-c)時，可以產生十層的正方形。

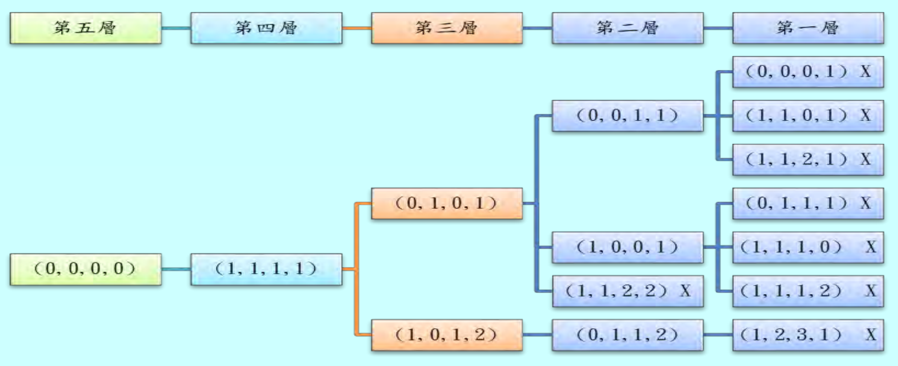
【結論三】：

1. 【a-b > b-c與b-c > c-d】、【(a-b)-(b-c) < (b-d) 與 (a-b)-(b-c) > (b-c)-(c-d)】與【(b-c)+(b-d)-(a-b) > (a-d)-3(b-c)】符合以上條件，可以特定的區間中可以往下推論到內層有7層以上的正方形。
2. 假設特定區間內取四個數字為(a, b, c, d)時，第2層為(a-b, b-c, c-d, a-d)，發現(a-d)=(a-b)+(b-c)+(c-d)，a=d-b-c的關係，為最小的三個數加總等於最大數。
3. 假設特定區間內取四個數字為(a, b, c, d)時，最內層一定為(0，0，0，0)，最內第二層一定為四個數字相同。
4. 假設特定區間內取四個數字為(a, b, c, d)，不管是乘2倍、3倍、4倍….最得到內層的正方形數是相同的。

【問題四】：利用問題三發現相關聯性，倒數第二層為相同的四個數字且最小的三個數加總等於最大數的關係，從最內層去反推並尋找出(a, b, c, d)的數列為何?

【問題4-1】：假設第四層為(0, 0, 0, 0)，第三層為相同的(1, 1, 1, 1)是否可找出(a, b, c, d)的答案。

【發現4-1】：

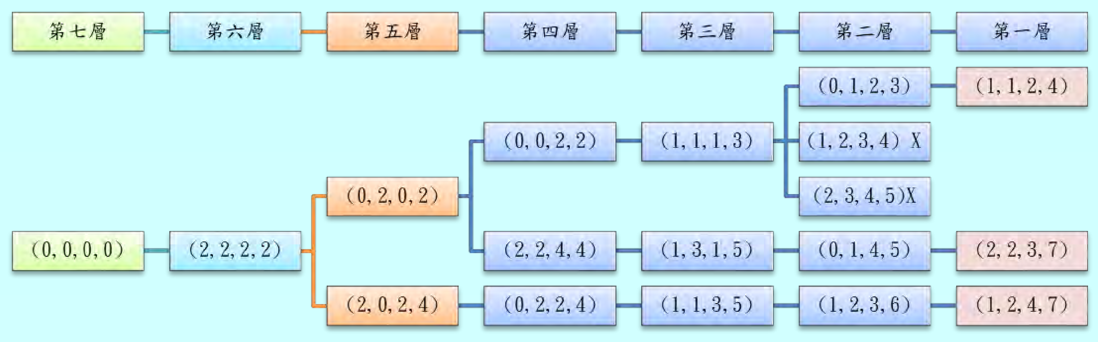


【結論4-1】：

1. 第四層為相同的(1, 1, 1, 1)到向上推3層，就沒有辦法滿足問題三的結論最小的三個數加總等於最大數。
2. 倒數第二層為(1, 1, 1, 1)時無法找到特定區間(a, b, c, d)四個不同數字的解。

【問題4-2】：假設第四層為(0, 0, 0, 0)，第三層為相同的(2, 2, 2, 2)是否可找出(a, b, c, d)的答案。

【發現4-2】：

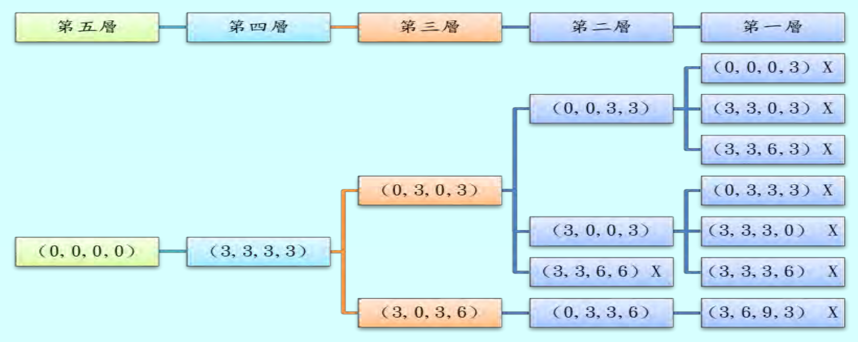


【結論4-2】：

1. 第六層為相同的(2, 2, 2, 2) 滿足最小的三個數加總等於最大數可以向上推5層。
2. 倒數第二層為(2, 2, 2, 2)時可以找到特定區間(a, b, c, d)四個不同數字的解。
3. 在特定區間1～5為例，可以找到最多七層的數列(5，3，2，1)。

【問題4-3】：假設第四層為(0, 0, 0, 0)，第三層為相同的(3, 3, 3, 3)是否可找出(a, b, c, d)的答案。

【發現4-3】：

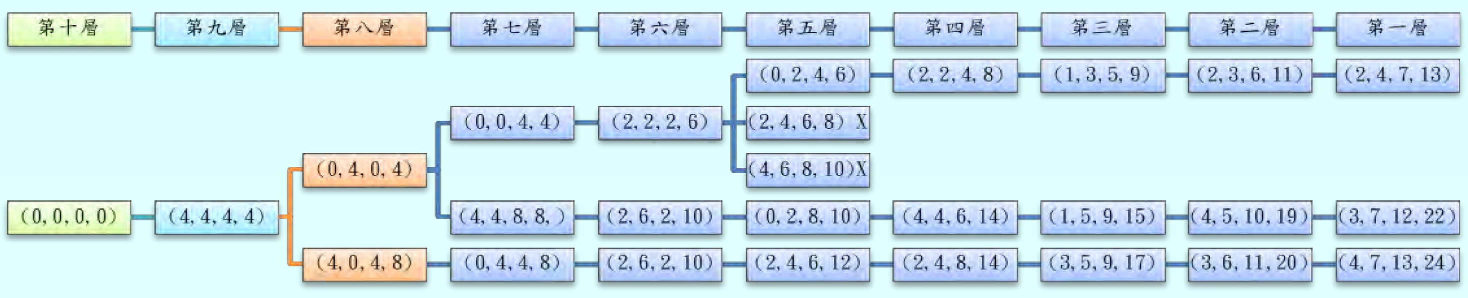


【結論4-3】：

1. 第四層為相同的(3, 3, 3, 3)到向上推3層，就沒有辦法滿足問題三的結論最小的三個數加總等於最大數。
2. 倒數第二層為(3, 3, 3, 3)時在特定區間(a, b, c, d)四個不同數字的解，皆無法找出最多層的正方形。

【問題4-4】：假設第四層為(0, 0, 0, 0)，第三層為相同的(4, 4, 4, 4)是否可找出(a, b, c, d)的答案。

【發現4-4】：



【結論4-4】：

1. 第九層為相同的(4, 4, 4, 4) 滿足最小的三個數加總等於最大數可以向上推8層。
2. 倒數第二層為(4, 4, 4, 4)時可以找到特定區間(a, b, c, d)四個不同數字的解。

【問題4-5】：假設第四層為(0, 0, 0, 0)，第三層為相同的(8, 8, 8, 8)是否可找出(a, b, c, d)的答案。

【結論4-6】：

1. 第九層為相同的(8, 8, 8, 8) 滿足最小的三個數加總等於最大數可以向上推10層。
2. 倒數第二層為(8, 8, 8, 8)時可以找到特定區間(a, b, c, d)四個不同數字的解。

【結論四】：

1. 倒數第二層為相同偶數的數列，可以利用反推的方式找到特定區間(a, b, c, d)有最多的內層正方形。
2. 利用問題4-3的(2, 2, 2, 2) 乘2倍、4倍、8倍、16倍….，就可以反推出特定區間的答案。

陸、研究結論

一. 三角形數字方塊在特定區間內，都只能找到二組數多層的數列。

二. 三角形數字方塊推論得知有二種情況下，在特定區間１～N中有最多的內層產生。

a. 在特定區間１～N中 a>b>c， 當a-b=1時，，當b-c＝N-２時，可以產生N-１內層的三角形，所以a必等於N，b必等於N-1，c必等於1。

b. 在特定區間１～N中 a>b>c， 當b-c=1時，，當a-b＝N-２時，可以產生N-１內層的三角形，所以a必等於N，b必等於2，c必等於1。

三. 三角形數字方塊推論得知有二種情況下，在特定區間H～N中有最多的內層產生。

a. 在特定區間H～N中 a>b>c， 當a-b=1時，，當b-c＝N-２時，可以產生N-H內層的三角形，所以a必等於N，b必等於N-1，c必等於H。

b. 在特定區間H～N中 a>b>c， 當b-c=1時，，當a-b＝N-２時，可以產生N-H內層的三角形，所以a必等於N，b必等於H+1，c必等於H。

四. 正方形數字方塊推論得知數字(a, b, c, d)，【a-b > b-c與b-c > c-d時】、

五.【(a-b)-(b-c) < (b-d)、與 (a-b)-(b-c) > (b-c)-(c-d)】與【(b-c)+(b-d)-(a-b) > (a-d)-3(b-c)】符合以上條件，可以特定的區間中可以往下推論到內層有8層以上的正方形。

六. 假設特定區間內取四個數字為(a, b, c, d)時，第2層為(a-b, b-c, c-d, a-d)，發現(a-d)=(a-b)+(b-c)+(c-d)的關係，為最小的三個數加總等於最大數。

七. 假設特定區間內取四個數字為(a, b, c, d)時，最內層一定為(0，0，0，0)，最內第二層一定為四個數字相同。

八. 假設特定區間內取四個數字為(a, b, c, d)，不管是乘2倍、3倍、4倍….最得到內層的正方形數是相同的。

九. 倒數第二層為相同偶數的數列，且利用倒數第二層為(2, 2, 2, 2) 乘2倍、4倍、8倍、16倍…可以利用反推的方式找到特定區間(a, b, c, d)有最多的內層正方形。

柒、研究建議

我們從三角形與正方形的方塊找到規律，發現了三角形與正方形方塊的規律，我們在找三角形方塊中可以很容易推出規律，但進入到正方形方塊時，數列的組合就變得更多，增加了許多困難度，我們希望未來繼續找出其他五邊形、六邊形，來進行推論奇數邊方塊與偶數邊方塊是否有數列規律。

捌、參考資料

一、中華民國中34 屆小學科學展覽優勝作品『數字方塊』。

二、中華民國中45 屆中科學展覽優勝作品『層出不窮』。

三、中華民國中第50 屆中小學科學展覽優勝作品『數字方塊尋極限』

四、昌爸工作坊『等比數字方塊』

五、葛老爹的推理遊戲２。

六、最ㄅㄧㄤˋ的數學公式。