中華民國第59屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

團隊合作獎

080411

延伸正多邊形的一邊一筆畫出各種圖形

學校名稱：嘉義縣朴子市祥和國民小學

作者：	指導老師：
小六 陳家珮 小六 彭譯禾 小六 吳和潤 小六 林芷筠 小六 侯姵廷	林志豪

關鍵詞：向量、環狀排列

摘要

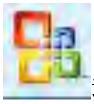
從 word2003 的圖示中，我們看做畫圖時每次將四邊形其中一邊延長，其他邊的長度不變，然後畫出四個邊。按照這樣的方法可以畫出許多圖形。我們將每一邊編號後，發現各種圖形的延伸方向和代號有關。因為有一些結論可以從圖形的延伸方向來看。

接著，我們將研究重點放在起點和終點都在同一個位置的封閉圖形。因為這些封閉圖形的代號組合會形成環狀排列。

從環狀排列發現到一些結論：一組環狀排列只有一種圖形，圖形不同，代號不同。畫圖次數有幾組環狀排列，用不盡相異物環狀排列來算。哪些畫圖次數會有環狀排列組合，可用邊數的最小及次小質因數來算。鏡像圖形代號可以算出來。

最後，我們利用發現到的結論來做應用，畫出更複雜的圖形。

動機

有一次上課時老師說到以前的 word2003 的圖示可以一筆畫出來。我們看了一陣子之後發現這個圖可以看做每次延伸四邊形的其中一個邊，四次延伸的邊都不同，然後畫四次四邊形。後來我們畫了幾個延伸的邊不同的圖形發現有一些規則，所以我們決定一個一個畫出來看看有什麼規則。

研究目的

壹、研究延伸正多邊形的邊一筆畫出圖形時的結果

貳、研究圖形的規則和代號的關係

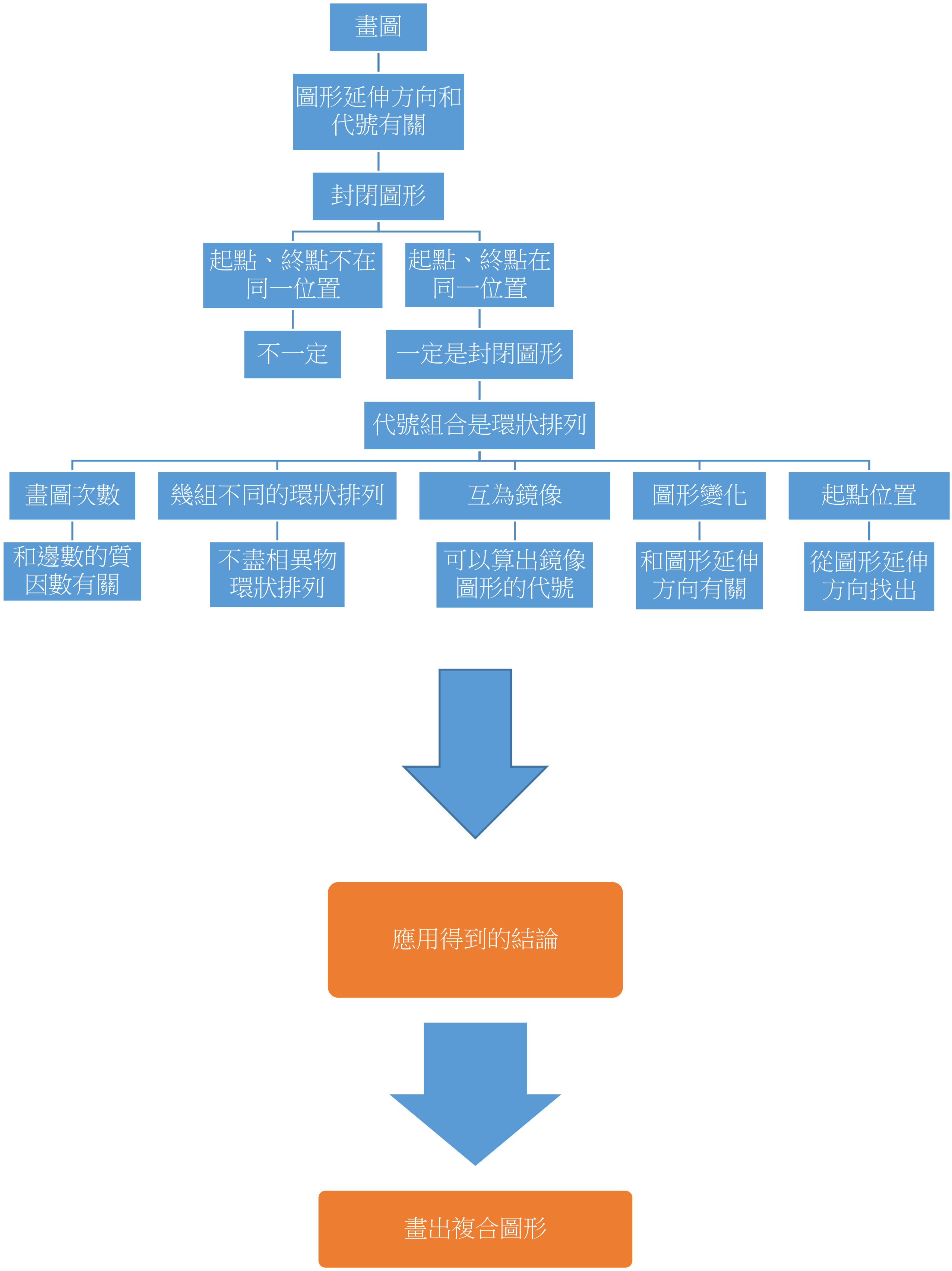
叁、利用所得到的結論應用在將各種不同的正多邊形複合成各種圖形

研究設備及器材

紙、筆、方格紙、電腦、scratch2.0 離線軟體

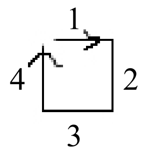
研究步驟

壹、我們把將近兩年來的研究過程及得到的結論用流程圖畫出來。



貳、說明一下圖形是如何畫出來的

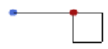
一、從 Word2003 的圖示發現到它是每次順時針畫一個四邊形，其中的一邊長度比較長，然後用相同的方法一筆畫下去，總共畫了 4 次。我們的作法是其中一邊的長度延長某個倍數，其他邊還是原來 1 倍的長度。所以，這會和 word2003 圖示的畫法不太一樣。



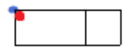
二、因為每次畫的時候要延長畫的邊不一定同一個，所以把四邊形的 4 個邊按照畫的順序編號。

三、為了方便紀錄，用代號來代表每一次要延長的邊是哪一個。代號：xxxx-n，x 代表每次畫圖時要延長的邊的代號，n 代表每一次延長的邊都延長幾倍。例如，1344-3 代表每次要延長的邊都延長 3 倍；第一次延長的邊是第 1 邊，第二次延長第 3 邊，第三次延長第 4 邊，第四次延長第 4 邊。

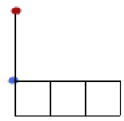
第一次：第 1 邊延長 3 倍，藍色是起點，紅點是終點，如右圖



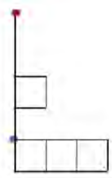
第二次：接著從紅點延長第 3 邊 3 倍畫圖



第三次：再從第二次畫完後的終點延長第 4 邊 3 倍畫圖



第四次：延長第 4 邊 3 倍，最後的結果如右圖

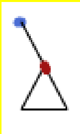
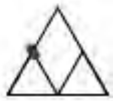
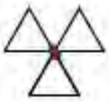
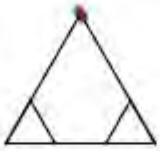
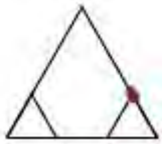
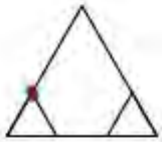
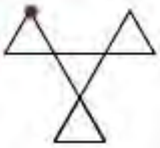
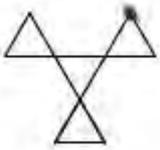
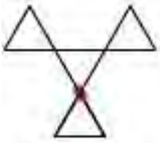
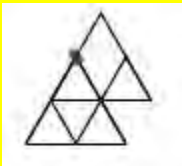
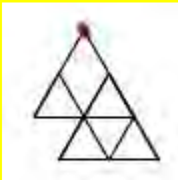
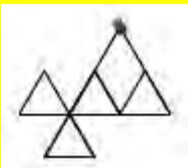
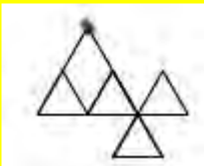
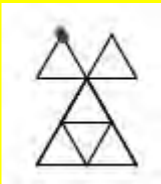
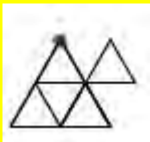
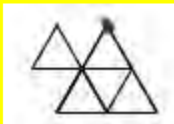
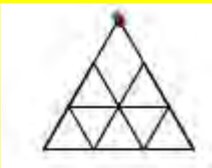
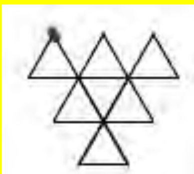
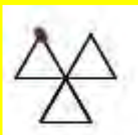
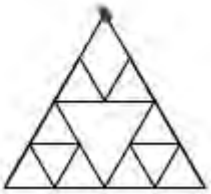
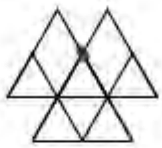


四、為了更有效率畫出許多圖形，老師指導我們利用「Scratch」寫出四邊形的程式來畫。但是愈多邊，程式就會愈長，只好請老師改寫程式成任何正多邊形都可以。

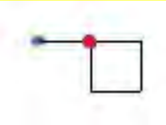
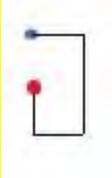
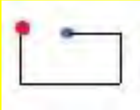
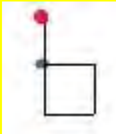
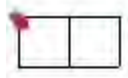
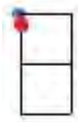
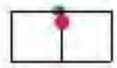
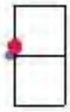
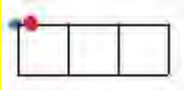
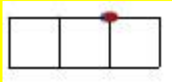
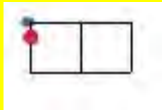
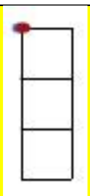
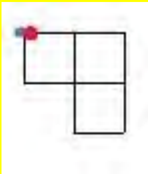
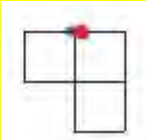
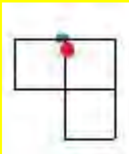
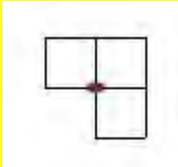
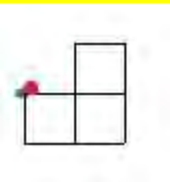
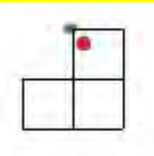
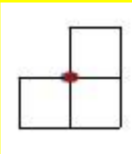
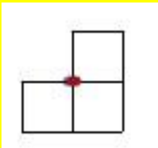
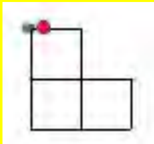
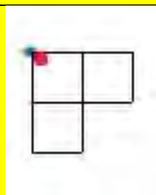
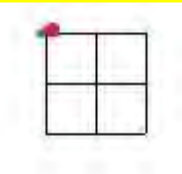
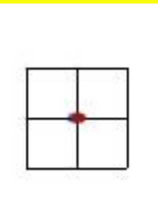
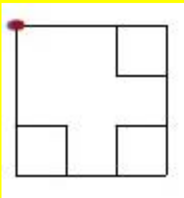
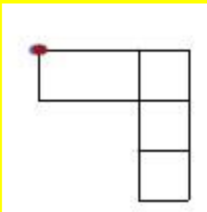
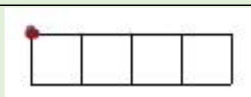
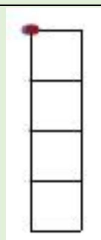
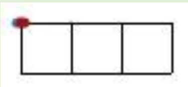
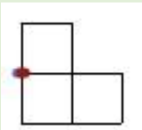
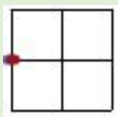
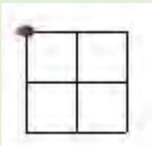
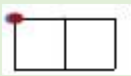
研究結果

壹、以四邊形舉例，在一個圖案中要延長畫的邊有 4 種，如果畫 4 次的話就會有 4x4x4x4=256 種代號組合。再加上不同的延長倍數就會有更多的圖要畫。如果要把所有不同的圖都列出來的話實在是太多了。我們只把接下來研究會用到的圖列出來，詳細的圖要看我們的原始紀錄。

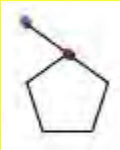
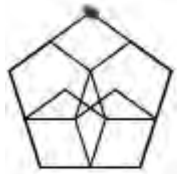
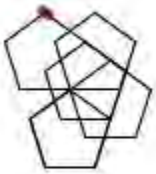
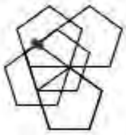
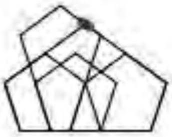
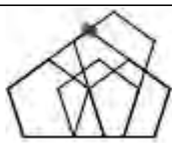
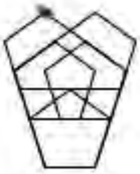
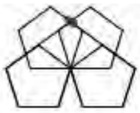
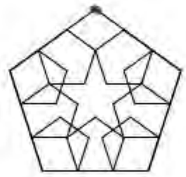
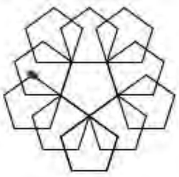
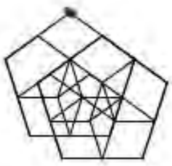
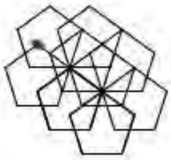
三角形

畫一次			畫三次		
 1-2	 2-2	 3-2	 123-2	 231-2	 312-2
畫三次					
 132-2	 213-2	 321-2	 123-3	 231-3	 312-3
畫三次			畫六次		
 132-3	 213-3	 321-3	 123312-2	 112323-2	 121233-2
 122133-2	 113223-2	 112332-2	 123132-2	 123213-2	 121323-2
畫六次				畫九次	
 112233-2	 113322-2	 123123-2	 132132-2	 111222333-2	 123231312-2

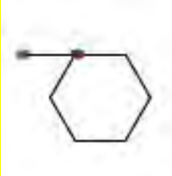
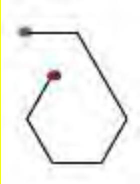
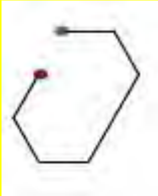
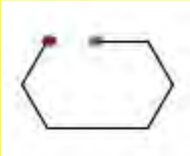
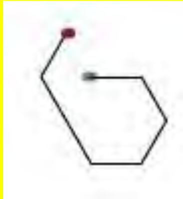
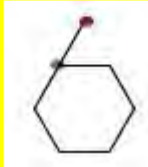
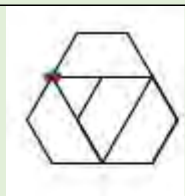
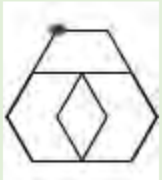
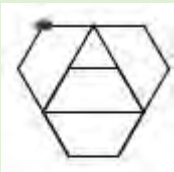
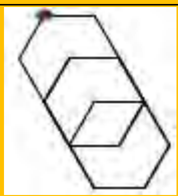
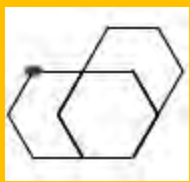
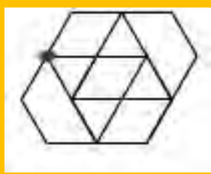
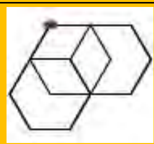
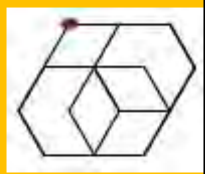
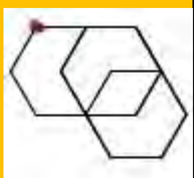
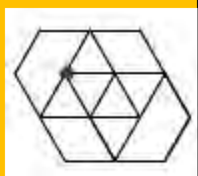
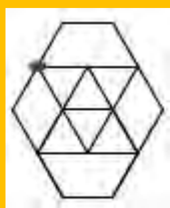
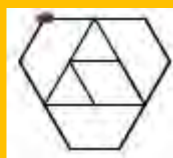
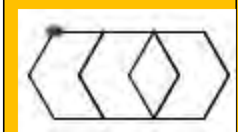
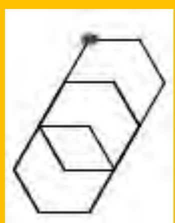
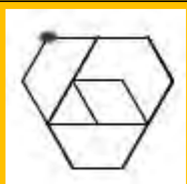
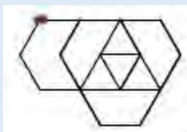
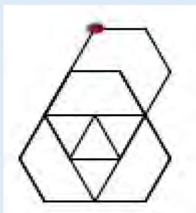
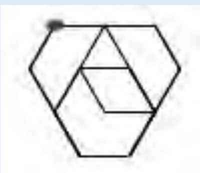
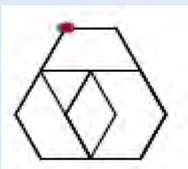
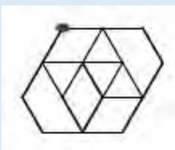
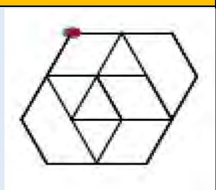
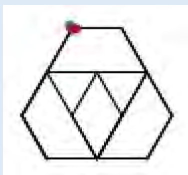
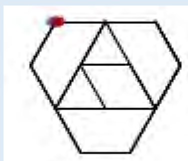
四邊形

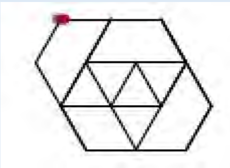
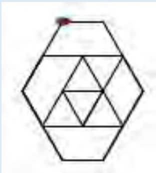
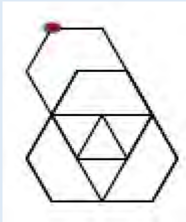
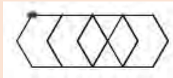
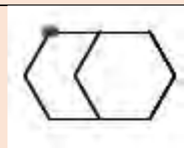
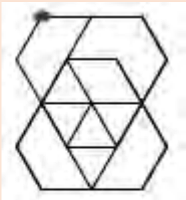
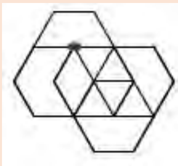
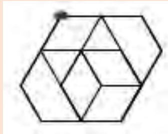
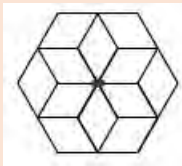
畫一次				畫二次	
 1-2	 2-2	 3-2	 4-2	 13-2	 24-2
畫二次		畫四次			
 31-2	 42-2	 1133-2	 1331-2	 3311-2	 1313-2
 2244-2	 2424-2	 1243-2	 2431-2	 3124-2	 4312-2
 1423-2	 2314-2	 3142-2	 4231-2	 2134-2	 1324-2
畫四次				畫六次	
 1234-2	 4321-2	 1234-3	 1243-3	 111333-2	 222444-2
 131133-2	 131342-2	 131432-2	 123143-2	 131313-2	 131331-2

五邊形

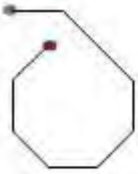
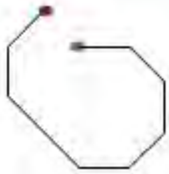
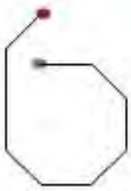
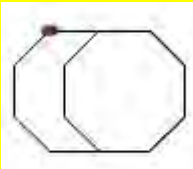
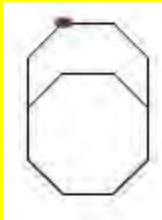
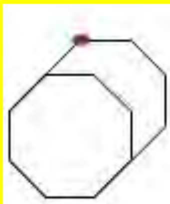
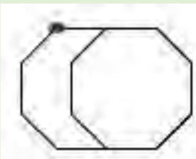
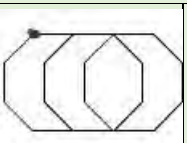
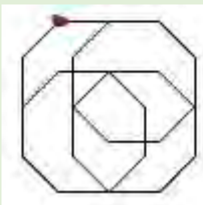
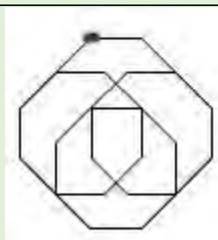
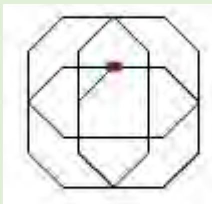
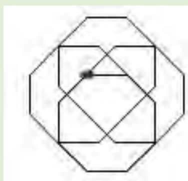
畫一次					畫五次
 1-2	 2-2	 3-2	 4-2	 5-2	 12345-2
 12354-2	 13452-2	 12534-2	 14523-2	 12543-2	 14532-2
 13254-2	 14352-2	 13425-2	 14235-2	 15243-2	 15324-2
畫五次					畫十次
 12453-2	 14325-2	 13542-2	 15234-2	 15432-2	 1122334455-2
 1155443322-2	 1123452345	 1154325432-2			

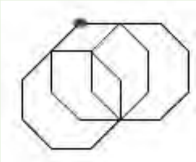
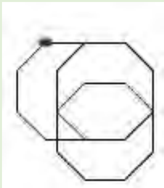
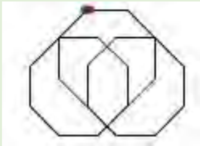
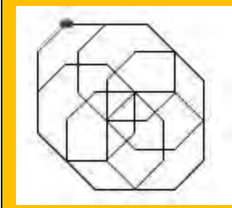
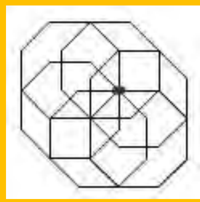
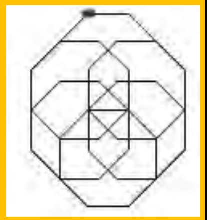
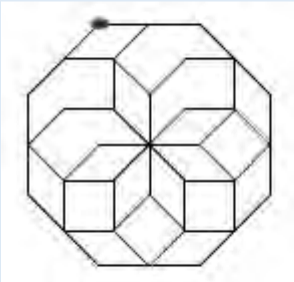
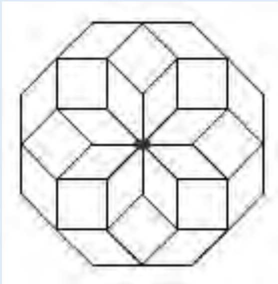
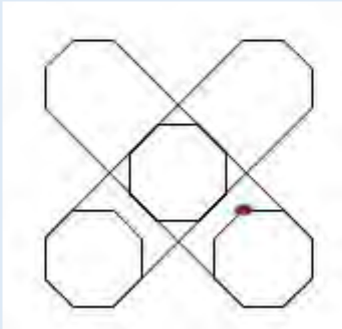
六邊形

畫一次					
 1-2	 2-2	 3-2	 4-2	 5-2	 6-2
畫二次			畫三次		
 14-2	 25-2	 36-2	 135-2	 153-2	 246-2
畫三次	畫四次				
 264-2	 2255-2	 1634-2	 1643-2	 1436-2	 1346-2
 2563-2	 1254-2	 1542-2	 2653-2	 1425-2	 2536-2
畫四次				畫五次	
 1144-2	 3366-2	 1463-2	 1364-2	 11354-2	 32466-2
 25135-2	 25246-2	 36135-2	 14246-2	 31536-2	 14264-2

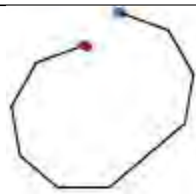
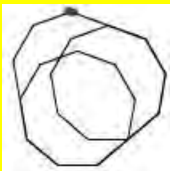
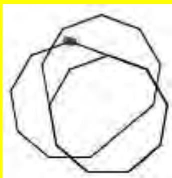
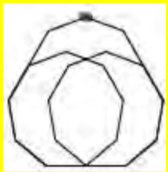
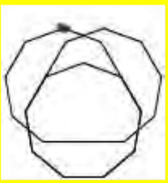
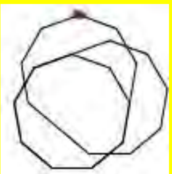
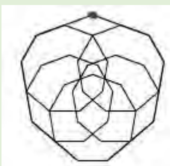
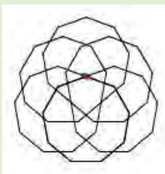
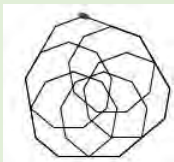
畫五次				畫六次	
 12464-2	 31356-2	 22465-2	 21355-2	 111444-2	 141414-2
 132465-2	 135462-2	 135246-2	 123456-2	 654321-2	 523614-2

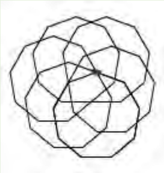
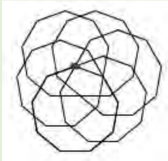
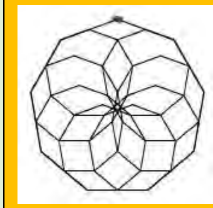
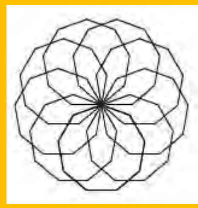
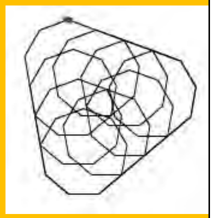
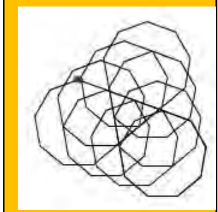
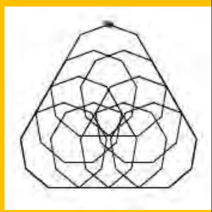
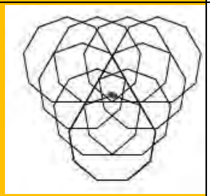
八邊形

畫一次					
 1-2	 2-2	 3-2	 4-2	 5-2	 6-2
畫一次		畫二次			
 7-2	 8-2	 15-2	 26-2	 37-2	 48-2
畫四次					
 1515-2	 1155-2	 1357-2	 2468-2	 7531-2	 8642-2

畫四次			畫六次		
 1548-2	 1375-2	 2648-2	 123567-2	 765321-2	 234678-2
畫八次					
 12345678-2	 87654321-2	 62482684-4			

九邊形

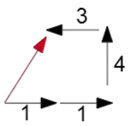
畫一次					
 1-2	 2-2	 3-2	 4-2	 5-2	 6-2
畫一次			畫三次		
 7-2	 8-2	 9-2	 147-2	 174-2	 258-2
畫三次			畫六次		
 285-2	 369-2	 396-2	 134679-2	 976431-2	 124578-2

畫六次			畫九次		
 875421-2	 235689-2	 986532-2	 123456789-2	 987654321-2	 111444777-2
畫九次					
 111777444-2	 222555888-2	 888555222-2			

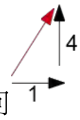
討論

壹、圖形延伸方向和代號有關

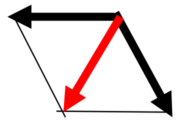
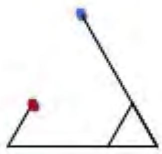
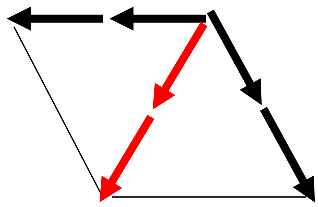
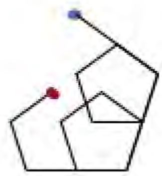
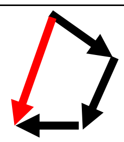
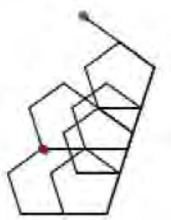
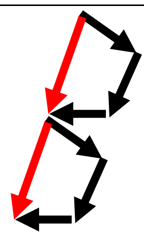
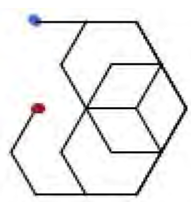
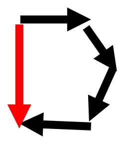
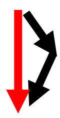
一、從起點開始，按照代號的順序將延伸的方向及長度畫出來。然後將起點和終點連起來，這條線就是圖形的延伸方向。例如：四邊形的 1143，紅線就是 1143 圖形的

延伸方向。

二、有些代號數字組合會使得延伸方向回到原點，不影響最後結果。所以可以先把這兩個數字去掉，然後再利用剩下的數字來畫出圖形的延伸方向。

例如：1143，其中有 1 組 1 和 3，所以把它們去掉，剩下 14。然後將起點和終點連起來，這條線就是圖形的延伸方向。

三、其他形狀也是：

三角形	 12-2		 12-3	 延伸長度變為原來的 2 倍
五邊形	 123-2		 123123-2	
六邊形	 1234-2		 1 和 4 互相抵消，只要看 2、3 就好	

貳、封閉圖形的代號組合和起點、終點位置的關係：

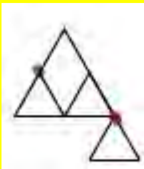
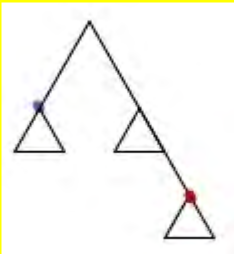
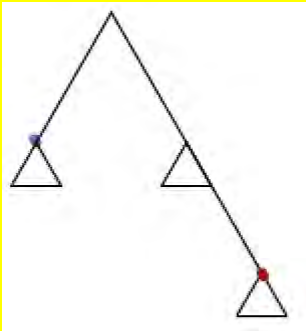
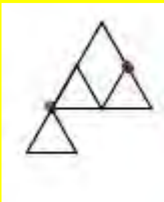
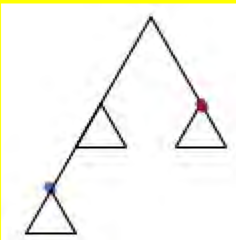
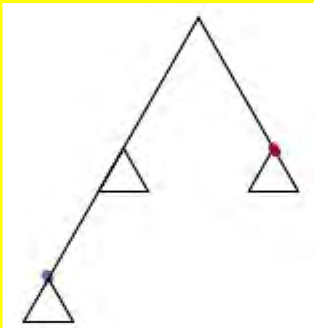
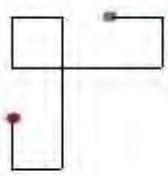
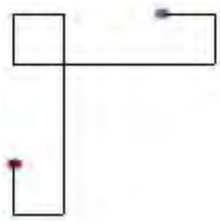
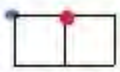
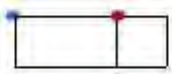
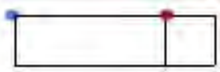
一、**如果起點和終點都在同一個位置的話，那麼無論延長幾倍還是封閉圖形。**

二、如果圖形的起點和終點不在同一個位置上：

(一) 有些圖形延長 2 倍時是封閉圖形，延長 3 倍時變成不是封閉圖形。因為圖形延伸方向的長度也會跟著延長倍數增加，反而變成不是封閉的圖形。

(二) 四邊形中畫三次的代號如果是 131-n 的話，也是封閉圖形，而且無論延長幾倍都是封閉圖形。那是因為第兩次畫的時候已經回到起點，第三次畫只是沿著已經畫過的線條畫而已，所以還是封閉圖形，所以我們只把這種情形當作是「13-n」的重疊。各種正多邊形也是一樣的情形。

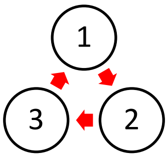
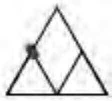
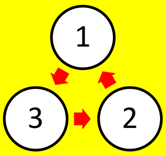
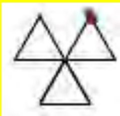
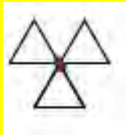
三、圖形說明：

		倍數		
	代號	2 倍	3 倍	4 倍
三角形	311			
	331			
四邊形	32			
	131			

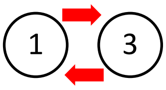
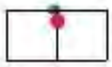
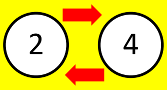
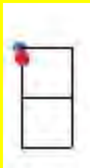
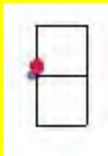
叁、接下來，我們討論<u>**起點和終點在同一個位置的封閉圖形和代號的關係**</u>

一、相同圖形的代號數字組合剛好形成環狀排列，而且順時針排列和逆時針排列的圖形不相同，所以我們只以順時針排列來討論：

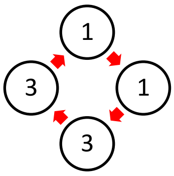
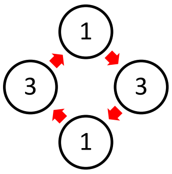
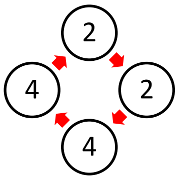
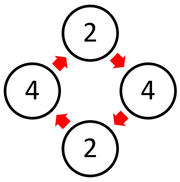
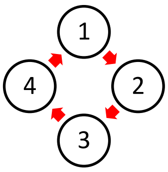
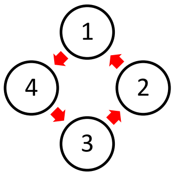
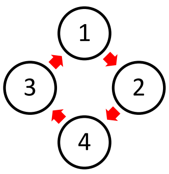
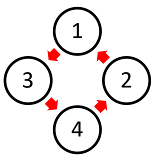
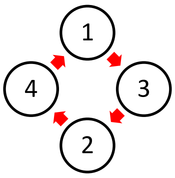
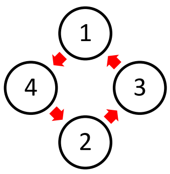
三角形：畫三次，共有 2 種排法

		123-2	231-2	312-2
123				
		132-2	213-2	321-2
321				

四邊形：畫二次，共有 2 種排法

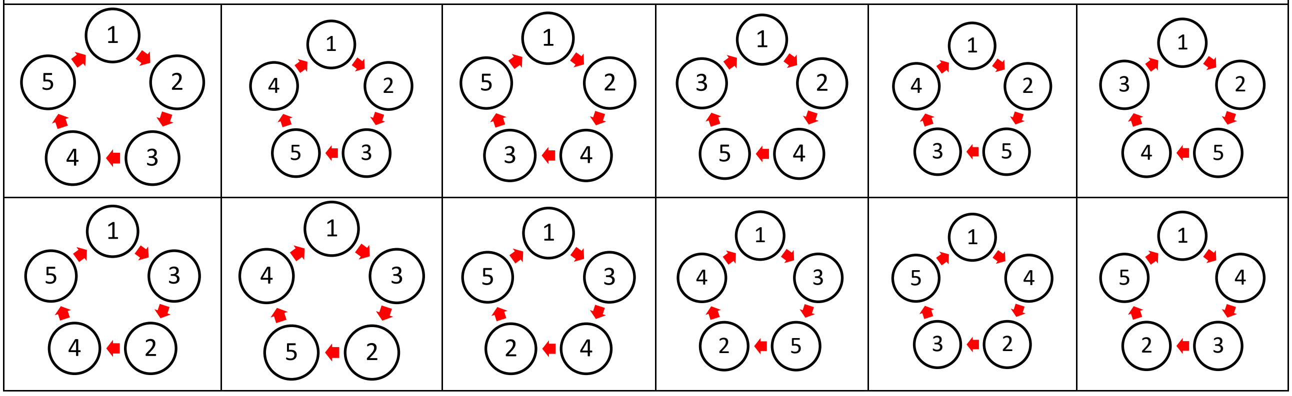
		13-2	31-2			24-2	42-2
13				24			

四邊形：畫四次

畫四次，共有 10 種排法					
					
					

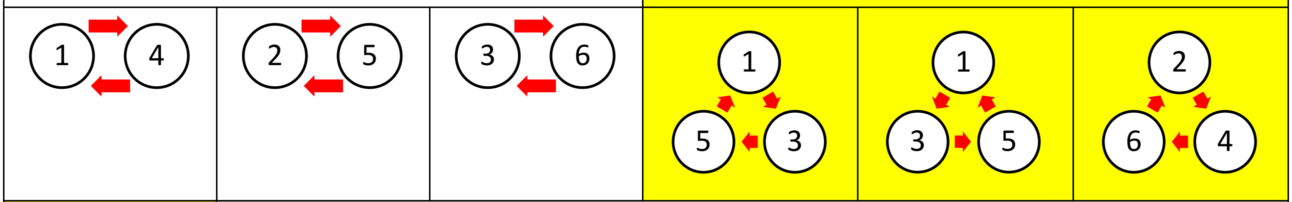
五邊形

畫五次，共有 12 種排法

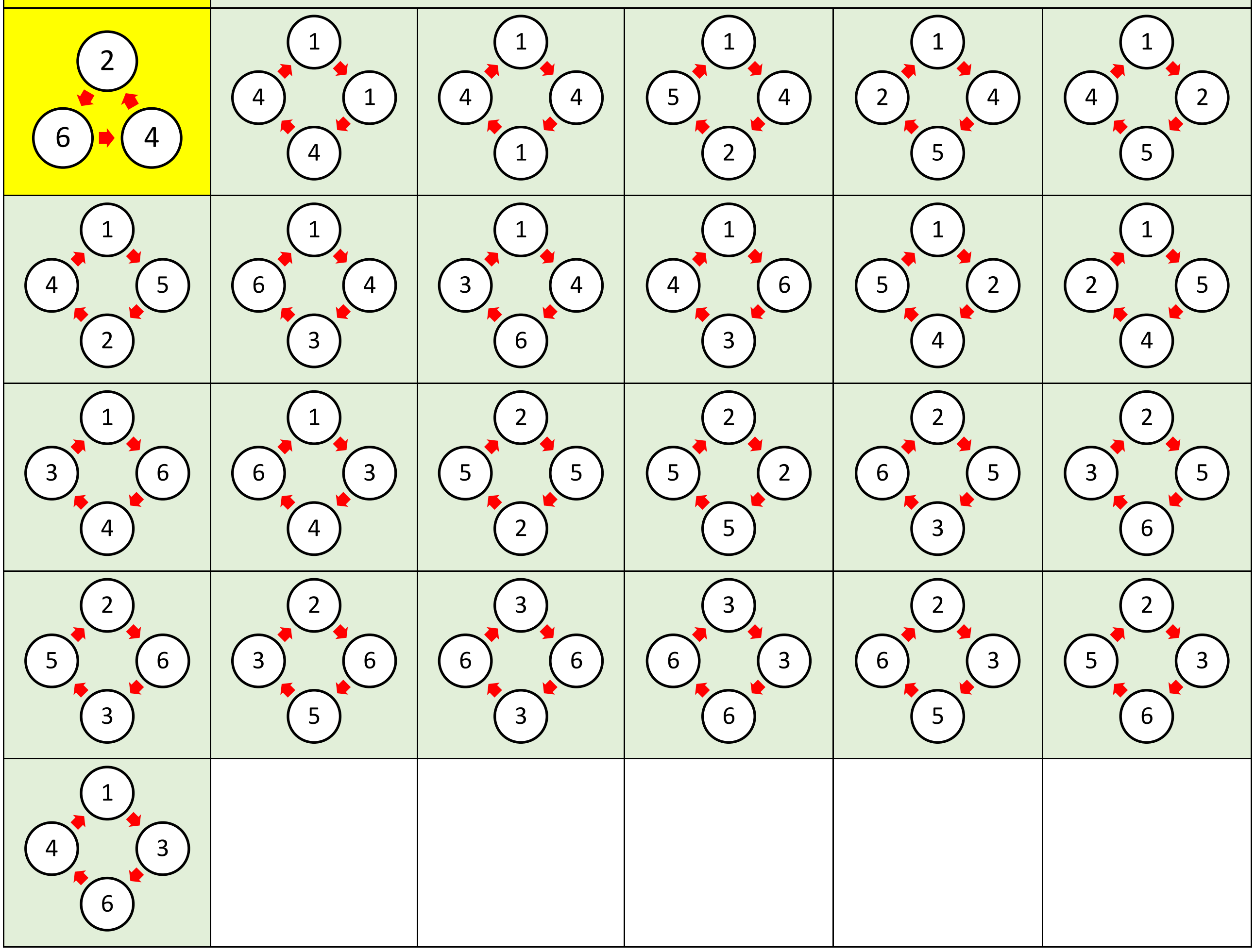


六邊形

畫二次，共有 3 種排法　　畫三次，共有 4 種排法



畫三次　　畫四次，共有 24 種排法



八邊形

畫二次，共有 4 種排法			
1 5	2 6	3 7	4 8

九邊形

畫三次，共有 6 種排法					
1 7 4	2 8 5	3 9 6	2 5 8	3 2 1	3 6 9

十邊形

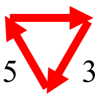
畫二次，共有 5 種排法				
1 6	2 7	3 8	4 9	5 10

十二邊形

畫二次，共有 6 種排法					
1 7	2 8	3 9	4 10	5 11	6 12
畫三次，共有 8 種排法					
1 9 5	2 10 6	3 11 7	4 12 8	1 5 9	2 6 10
3 7 11	4 8 12				

二、會出現封閉圖形的畫圖次數和邊數的質因數有關，說明如下：

(一) 我們發現**「畫的次數」×「相鄰代號的數字差」＝邊數**，用這個方法去計算外角角度就可以找到規則。

六邊形	135-2	1  5 3	$(3-1)\times 60^\circ = 120^\circ$ $(5-3)\times 60^\circ = 120^\circ$ 把 1 看做 7 $(7-5)\times 60^\circ = 120^\circ$ $(120^\circ + 120^\circ + 120^\circ) = 360^\circ$

(二) 畫圖次數有沒有封閉圖形也可以用類似的方法來判斷。如果畫圖次數等於邊數的質因數，而且 **360° ÷ *畫圖次數＝外角的整數倍數***就會有封閉圖形。

形狀	畫圖次數	結果	數字組合
三角形	畫二次	沒有封閉圖形	
三角形	畫三次	有封閉圖形	123
四邊形	畫二次	有封閉圖形	13、24
四邊形	畫三次	沒有封閉圖形	
四邊形	畫四次	有封閉圖形	1234

(三) 還可以把**邊數的質因數用加法來組合**。例如：6 的質因數有 2、3，但是畫四次，我們看做「畫二次的代號組合＋畫二次的代號組合」，所以也有起點和終點都在同一位置的封閉圖形。

形狀	畫圖次數	數字組合
六邊形	畫二次	14、25、36
	畫三次	135、246
	畫四次	1414、1425、1436、2536
	畫五次	14135、25135、36135、14246、25246、36246
	畫六次	123456

(四) 歸納前面的結果發現：如果質因數有兩個以上，將這些質因數用加法組合，大於一個數之後的任何數都可以用加法組合出來。而且有算式可以算出最小多少以上就全部都有：**無論有幾個質因數，由小到大排列，前兩個質因數各減 1 再相乘的數。**也就是說，畫圖次數大於「邊數的質因數，由小到大排列，前兩個質因數各減 1 再相乘的數」一定會有封閉圖形。

	質因數	有封閉圖形的次數	規則
三角形	3	3、6、9、12、15、18、21、24、27、30	3 的倍數
四邊形	2	2、4、6、8、10、12、14、16、18、20	2 的倍數
五邊形	5	5、10、15、20、25、30、35、40、45	5 的倍數
六邊形	2、3	2、3、4、5、6、7、8、9、10、11	大於 2 的任何數
八邊形	2	2、4、6、8、10、12、14、16、18、20	2 的倍數
九邊形	3	3、6、9、12、15、18、21、24、27、30	3 的倍數
十邊形	2、5	2、4、5、6、7、8、9、10、11、12	2，大於 4 的任何數
十二邊形	2、3	2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12	大於 2 的任何數
十五邊形	3、5	3、5、6、8、9、10、11、12、13	3、5、6，大於 8 的任何數
十六邊形	2	2、4、6、8、10、12、14、16、18、20	2 的倍數
十八邊形	2、3	2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18	大於 2 的任何數
二十邊形	2、5	2、4、5、6、7、8、9、10、11、12	2，大於 4 的任何數
二十四邊形	2、3	2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20、21、22、23、24	大於 2 的任何數
二十五邊形	5	5、10、15、20、25、30、35、40、45	5 的倍數
三十邊形	2、3、5	2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12	大於 2 的任何數

三、某一個畫圖次數裡面全部有幾種不同的封閉圖形？

(一) 在老師的指導與提示下，我們到「碩博士論文」網站查到一篇論文「不盡相異物的環狀排列公式」，裡面的結論就提到如何算出全部幾種循環：

1. 因為直線排列中也有可能會出現自己內部循環，所以先算出每個相異數字數量的最大公因數。再算出最大公因數的所有因數，w_i

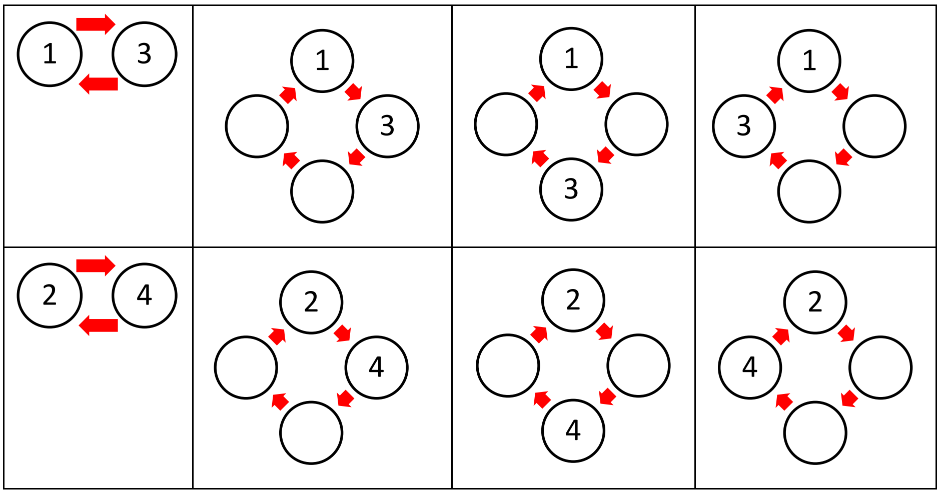
2. 全部所有封閉圖形可能的數字組合所形成的直線排列

$$\text{第}w_i\text{時，}k=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sum_{|Y|=j}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}{\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{x_i}{\prod_{y\in Y}y}\right)!}\text{。}$$

3. 再算出不盡相異物環狀排列

$$\frac{k\times w_i}{n}$$

(二) 一開始，我們是用循環圖的方式來找。例如：四邊形先從畫二次的代號 13 或 24 延伸到畫四次的代號時會有兩格空格，這兩格空格可以填入 13 或 24，最後只剩下 10 種不同的循環組合。依此類推，四邊形畫六次共有 68 種。



(三) 其實不盡相異物環狀排列的公式，我們不太懂。即使老師教過幾次還是不清楚，只有畫循環圖的方法來找比較容易，於是老師幫我們計算各個多邊形畫的次數會有的循環組合數量。

形狀	畫的次數	循環組合數量	形狀	畫的次數	循環組合數量
三角形	畫 3 次	2	六邊形	2	3
	6	16		3	4
	9	188		5	72
四邊形	2	2		6	374
	4	10	八邊形	2	4
	6	68		4	56
	8	2578		6	676
五邊形	5	24	九邊形	3	6
	10	11352		6	435

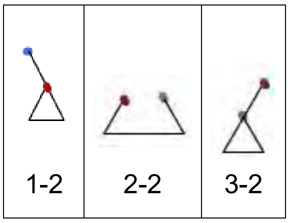
四、鏡像圖形和代號的關係：

(一) 封閉圖形裡面互為鏡像的代號組合可以這樣子來算：

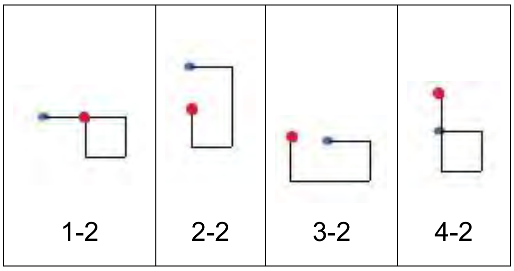
1. 假設 n 邊形畫 m 次，代號是 $A_1A_2A_3\ldots Am$
2. 鏡像圖形的代號是把代號倒過來排列再用「邊數＋1」減掉每個代號。
3. 所以**鏡像圖形的代號是$(n+1-An)\ldots(n+1-A_3)(n+1-A_2)(n+1-A_1)$**

(二) 鏡像圖形和代號有關，可以從畫一次的圖形來看

三角形畫一次



四邊形畫一次



五邊形畫一次

 1-2	 2-2	 3-2	 4-2	 5-2

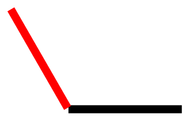
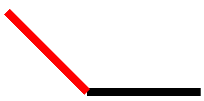
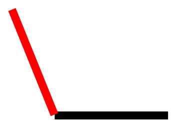
(三) 互為鏡像的兩個代號加起來剛好等於「邊數＋1」

	互為鏡像的代號				
三角形	1,3				
四邊形	1,4	2,3			
五邊形	1,5	2,4			
六邊形	1,6	2,5	3,4		
八邊形	1,8	2,7	3,6	4,5	
九邊形	1,9	2,8	3,7	4,6	

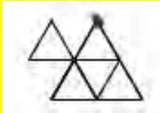
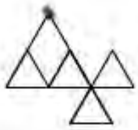
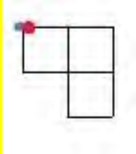
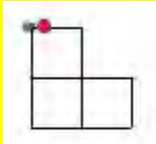
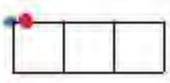
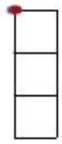
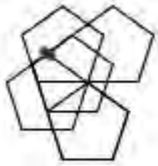
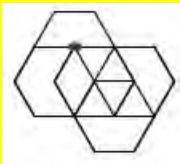
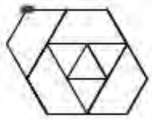
(四) 鏡像圖形的對稱軸，可以從代號的 1 和「邊數」的延伸方向去看：

邊數是奇數，對稱軸關於水平線垂直；

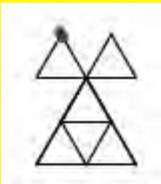
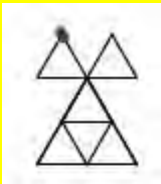
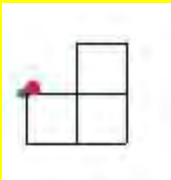
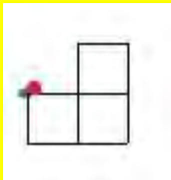
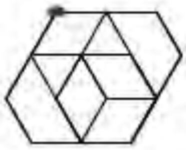
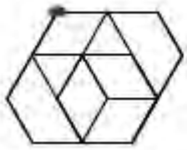
邊數是偶數，對稱軸與水平線夾角為「180° －內角÷2」

邊數	代號	紅線對稱軸和水平線的夾角	邊數	代號	紅線對稱軸和水平線的夾角
三角形	1,3	 90°	六邊形	1,6	 120°
四邊形	1,4	 135°	八邊形	1,8	 112.5°
五邊形	1,5	 90°	九邊形	1,9	 90°

(五) 鏡像圖形裡面互為鏡像的代號組合：

三角形	 123132-2	↔	 213123-2	 113223-2	↔	 122133-2
四邊形	 1243-2	↔	 2134-2	 1133-2	↔	 2244-2
五邊形	 12354-2	↔	 13452-2	 12543-2	↔	 14532-2
六邊形	 132465-2	↔	 135462-2	 124635-2	↔	 135624-2

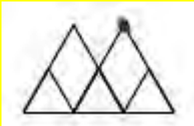
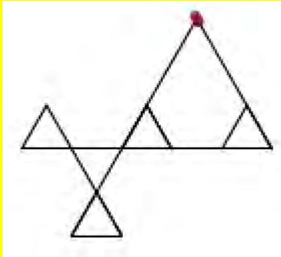
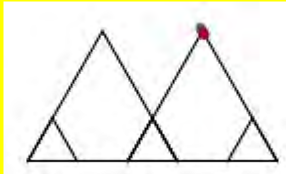
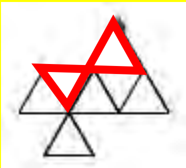
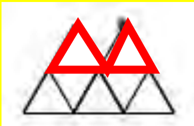
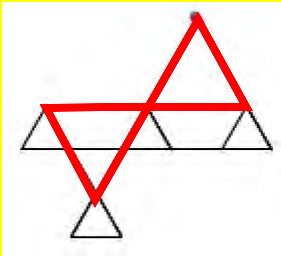
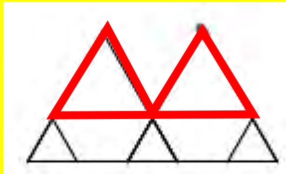
(六) 有些鏡像圖形的代號和原來的相同，這些圖形本身就關於對稱軸對稱。

三角形	 112332-2	↔	 211233-2	五邊形	 13542-2	↔	 13542-2
四邊形	 1423-2	↔	 1423-2	六邊形	 135246-2	↔	 135246-2

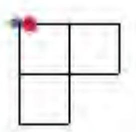
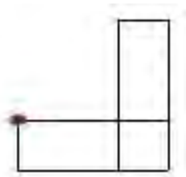
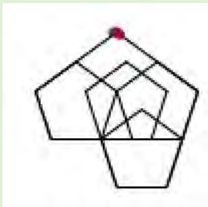
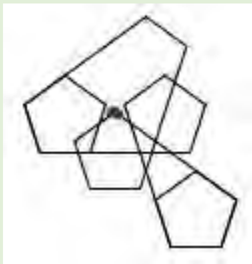
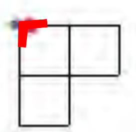
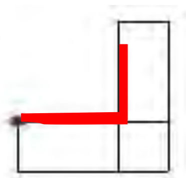
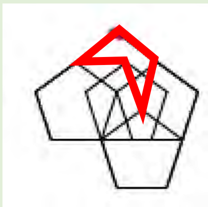
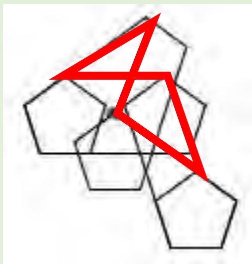
五、圖形的變化情形，也可以從代號也就是圖形延伸方向去判斷。

(一) 從圖形延伸方向去討論圖形的變化。例如底下我們用紅色線條把每次畫圖的圖形延伸方向連起來就會和原本的圖形類似。

例如：三角形的圖形就是在圖形延伸方向的某些頂點畫邊長 1 倍的三角形

三角形		三倍以上更明顯	
			
 122133-2	 122313-2	 122133-3	 122313-3

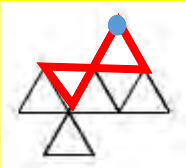
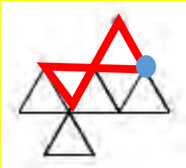
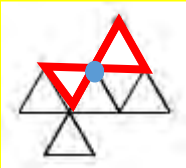
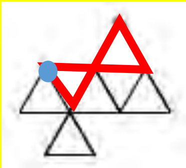
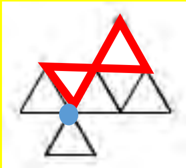
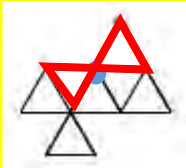
(二) 其他的形狀也可以從圖形延伸方向去討論圖形的變化，在圖形延伸方向的某些頂點畫邊長 1 倍的正多邊形。

四邊形		五邊形	
			
 1324-2	 1423-3	 12435-2	 14352-2

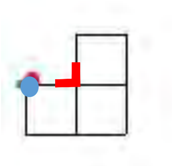
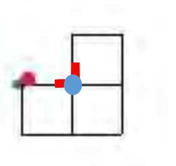
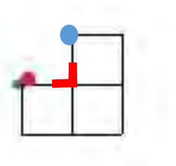
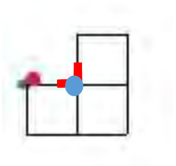
六、同一組環狀排列代號雖然圖形都相同，但是起點的位置不一定相同，起點的位置也可以從代號排列來看。

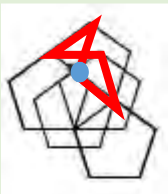
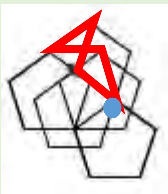
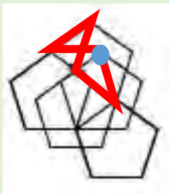
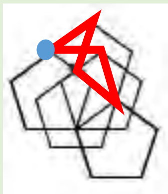
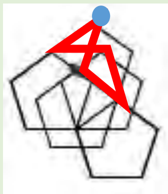
(一) 先找出其中一組代號的起點。因為相同的封閉圖形代號會形成環狀排列，所以可以從第一個圖形開始移動起點位置。

(二) 例如：三角形 122133-2 起點在圖形的右上角；221331-2 的起點可以看做 122133-2 往代號 1 移動；213312-2 的起點看做 122133-2 往代號 12 移動；依此類推。

三角形					
					
122133-2	221331-2	213312-2	133122-2	331221-2	312213-2

(三) 其他正多邊形也一樣。

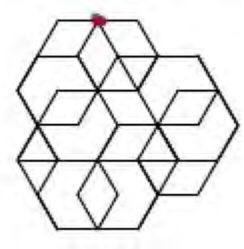
四邊形			
			
1423-2	4231-2	2314-2	3142-2

五邊形				
				
14352-2	43521-2	35214-2	52143-2	21435-2

(四) 如此一來，我們只要畫一次圖形，然後利用代號的排列順序找出不同代號開頭排列的起點位置。

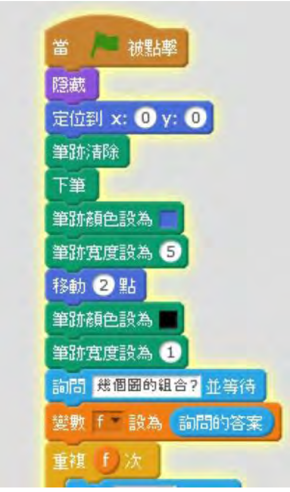
七、利用各種不同的正多邊形複合成各種圖形

(一) 我們試著將三角形和六邊形複合成其他的圖形，底下的圖是這樣畫的。

	形狀	代號	圖形
第一次	三角形	1-2	
第二次	六邊形	123-2	
第三次	三角形	2-2	
第四次	六邊形	345-2	
第五次	三角形	3-2	
第六次	六邊形	561-2	

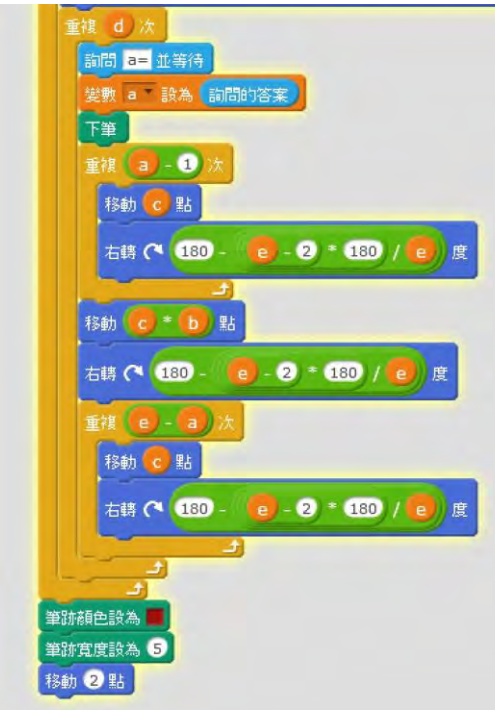
(二) 為了記錄方便，把代號改成：(代號-倍數 x 每邊長度)$_{\text{邊數}}$……，所以上面的圖形代號寫做：(1-2x20)$_3$(123-2x20)$_6$(2-2x20)$_3$(345-2x20)$_6$(3-2x20)$_3$(561-2x20)$_6$。

(三) 請老師改寫程式為可以複合各種圖形

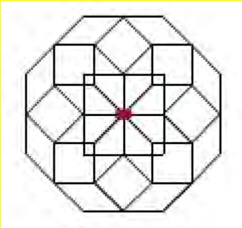
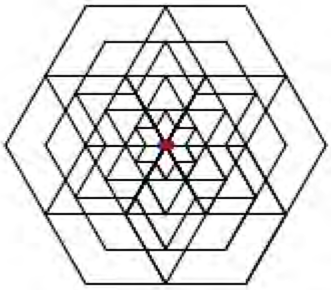
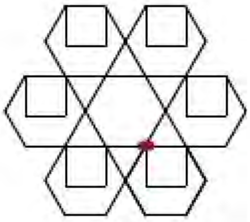
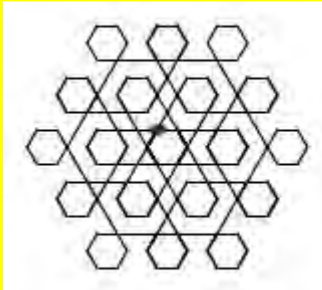
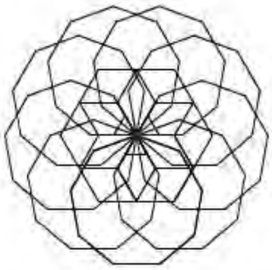
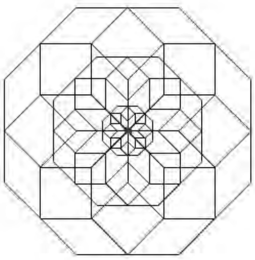
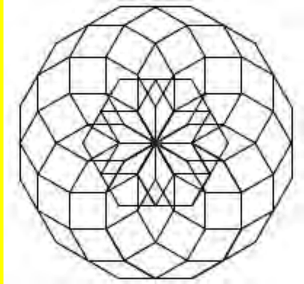
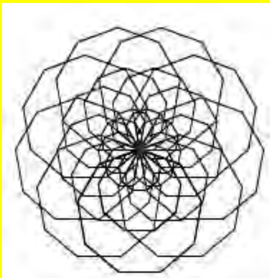
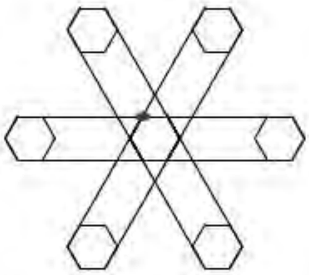


→

→



(四) 幾個複合圖形

代號	圖形	代號	圖形
$(87654321\text{-}2x20)_8$ $(4321\text{-}2x20)_4$		$(654321\text{-}2x10)_6$ $(654321\text{-}2x20)_6$ $(654321\text{-}2x30)_6$ $(654321\text{-}2x40)_6$	
$(6\text{-}3x20)_6(1\text{-}1x20)_4$ $(5\text{-}3x20)_6(1\text{-}1x20)_4$ $(4\text{-}3x20)_6(1\text{-}1x20)_4$ $(3\text{-}3x20)_6(1\text{-}1x20)_4$ $(2\text{-}3x20)_6(1\text{-}1x20)_4$ $(1\text{-}3x20)_6(1\text{-}1x20)_4$		$(654321\text{-}4x10)_6$ $(543216\text{-}4x10)_6$ $(432165\text{-}4x10)_6$ $(321654\text{-}4x10)_6$ $(216543\text{-}4x10)_6$ $(165432\text{-}4x10)_6$	
$(54321\text{-}2x25)_5$ $(54321\text{-}2x30)_5$ $(54321\text{-}2x35)_5$		$(321\text{-}2x15)_3$ $(654321\text{-}2x25)_6$ $(987654321\text{-}2X30)_9$	
$(87654321\text{-}2x10)_8$ $(87654321\text{-}2x30)_8$ $(87654321\text{-}2x50)_8$		$(12,11,10,9,8,7,6,$ $5,4,3,2,1\text{-}2x25)_{12}$ $(654321\text{-}2x25)_6$	
$(987654321\text{-}2x10)_9$ $(987654321\text{-}2x30)_9$ $(987654321\text{-}2x20)_9$		$(14\text{-}6x15)_6(6\text{-}6x15)_6$ $(1\text{-}1x15)_6(3\text{-}6x15)_6$ $(5\text{-}6x15)_6(1\text{-}1x15)_6$ $(2\text{-}6x15)_6(4\text{-}6x15)_6$ $(1\text{-}1x15)_6(1\text{-}6x15)_6$ $(36\text{-}6x15)_6(25\text{-}6x15)_6$	

結論

所有的結論都可以從代號排列去討論，其實就是從圖形的延伸方向來討論。因為每次畫圖時正多邊形其中一邊的長度會延長，其他邊長度不變，所以代號的排列會和圖形延伸方向一致。

最有趣的是起點和終點在同一位置的封閉圖形，因為代號會形成環狀排列。而且不同的環狀排列不會有相同的圖形產生；相反的，不同的圖形也不會有相同的代號。

我們發現許多規則：畫幾次會有封閉圖形、某個畫圖次數會有幾組不同的環狀排列、互為鏡像的代號關係、圖形變化、起點位置的判斷，最後利用發現的結論應用在更複雜的圖形。

我們從 106 年 10 月開始研究，一直到 108 年 1 月才做完，確定進入全國賽後，我們把一些之前沒有深入研究的問題繼續討論。還是有一些規則是我們現在沒辦法完全了解，也許以後學得更多時，我們可以找到更好的方法。

參考資料

壹、不盡相異物的環狀排列公式。http://140.119.115.26/bitstream/140.119/49451/1/100404.pdf
貳、向量。https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%90%91%E9%87%8F

【評語】080411

1. 從 word 2003 的圖示，啟發了「延伸正多邊形的邊一筆畫出各式圖形」的探究，是一個有趣的研究主題。
2. 作者運用代號記錄生成圖形的條件繼而應用發現的性質，獲得一些美麗的結果與有趣的結論。
3. 一年多的探究歷程，團隊協力合作、循序漸進地完成目前成果，值得鼓勵。

作品海報

壹、動機

老師說到以前的word2003的圖示  可以一筆畫出來。 我們看了一陣子之後發現這個圖可以看做每次延伸四邊形的其中一個邊，四次延伸的邊都不同，然後畫四次四邊形。後來我們畫了幾個延伸的邊不同的圖形發現有一些規則，所以我們決定一個一個畫出來看看有什麼規則。

研究目的

壹、研究延伸正多邊形的邊一筆畫出圖形時的結果
貳、研究圖形的規則和代號的關係
叁、利用所得到的結論應用在將各種不同的正多邊形複合成各種圖形

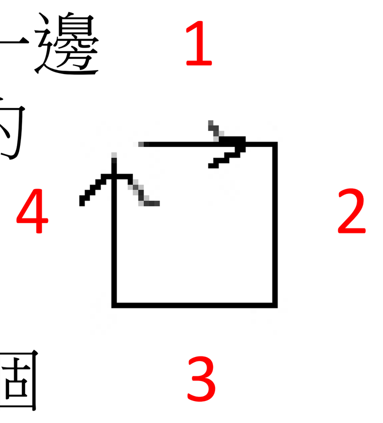
研究設備及器材

紙、筆、方格紙、電腦、scratch2.0離線軟體

研究步驟

壹、說明一下圖形是如何畫出來的

一、從Word2003的圖示發現到它是每次順時針畫一個四邊形，其中的一邊長度比較長，然後用相同的方法一筆畫下去，總共畫了4次。我們的是其中一邊的長度延長某個倍數，其他邊還是原來1倍的長度。所以，這會和word2003 圖示的畫法不太一樣。



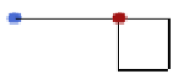
二、因為每次畫的時候要延長畫的邊不一定同一個，所以把四邊形的4個邊按照畫的順序編號。

三、為了方便紀錄，用代號來代表每一次要延長的邊是哪一個。

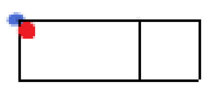
代號：xxxx-n，x代表每次畫圖時要延長的邊的代號，n代表每一次延長的邊都延長幾倍。

例如，1344-3代表每次要延長的邊都延長3倍；第一次延長的邊是第1邊，第二次延長第3邊，第三次延長第4邊，第四次延長第4邊。

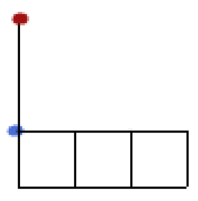
第一次：第1邊延長3倍，藍色是起點，紅點是終點，如右圖 ....



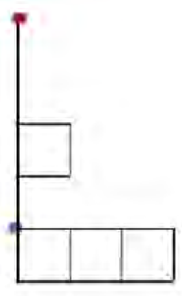
第二次：接著從紅點延長第3邊3倍畫圖 ....



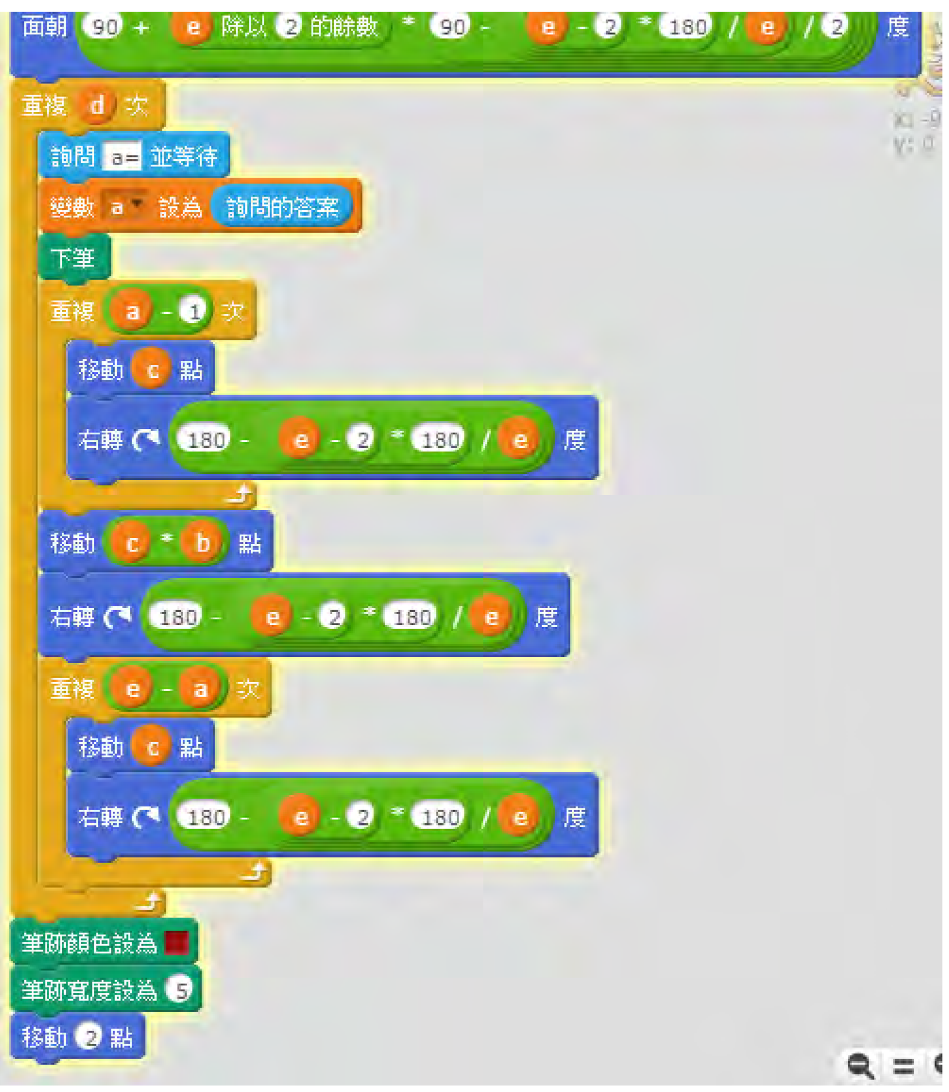
第三次：再從第二次畫完後的終點延長第4邊3倍畫圖 ....



第四次：延長第4邊3倍，最後的結果如右圖...



四、為了更有效率畫出許多圖形，老師指導我們利用「Scratch」寫出四邊形的程式來畫。但愈多邊，程式就會愈長，只好請老師改寫程式成任何正多邊形都可以。



研究結果

三角形

1-2	2-2	3-2	123-2	231-2	312-2	132-2	213-2	321-2	123-3	231-3	312-3
132-3	213-3	321-3	123312-2	112323-2	121233-2	122133-2	113223-2	112332-2	123132-2	111222333-2	123231312-2

四邊形

1-2	2-2	3-2	4-2	13-2	24-2	31-2	42-2	1133-2	1331-2	3311-2	1313-2
2244-2	2424-2	1243-2	2431-2	3124-2	4312-2	1423-2	2314-2	3142-2	4231-2	2134-2	1324-2
1234-2	4321-2	1234-3	1243-3	111333-2	222444-2	131133-2	131342-2	131432-2	123143-2	131313-2	131331-2

五邊形

1-2	2-2	3-2	4-2	5-2	12345-2	12354-2	13452-2	12534-2	14523-2	12543-2	14532-2
13254-2	14352-2	13425-2	14235-2	14325-2	13542-2	15234-2	15432-2	1122334455-2	1155443322-2	1123452345-2	1154325432-2

六邊形

1-2	2-2	3-2	4-2	5-2	6-2	14-2	25-2	36-2	135-2	153-2	246-2
264-2	2255-2	1634-2	1643-2	1436-2	1346-2	2563-2	1254-2	1542-2	2653-2	1425-2	2536-2
1144-2	3366-2	1463-2	1364-2	11354-2	32466-2	25135-2	25246-2	36135-2	14246-2	31536-2	14264-2
12464-2	31356-2	22465-2	21355-2	111444-2	141414-2	132465-2	135462-2	135246-2	123456-2	654321-2	523614-2

八邊形

1-2	2-2	3-2	4-2	5-2	6-2	7-2	8-2	15-2	26-2	37-2	48-2
1357-2	2468-2	7531-2	8642-2	1548-2	1375-2	2648-2	123567-2	234678-2	12345678-2	87654321-2	62482684-4

九邊形

1-2	2-2	3-2	4-2	5-2	6-2	7-2	8-2	9-2	147-2	174-2	258-2
285-2	369-2	396-2	134679-2	976431-2	124578-2	875421-2	235689-2	986532-2	123456789-2	987654321-2	111444777-2

討論

壹、圖形延伸方向和代號有關

一、從起點開始，按照代號的順序將延伸的方向及長度畫出來。然後**將起點和終點連起來，這條線就是圖形的延伸方向**。

二、有些代號數字組合會使得延伸方向回到原點，不影響最後結果。所以可以先把這兩個數字去掉，然後再利用剩下的數字來畫出圖形的延伸方向。

三、其他形狀也是

六邊形	1234-2		1和4互相抵消，只要看2、3就好

貳、封閉圖形的代號組合和起點、終點位置的關係：

一、如果起點和終點都在同一個位置的話，那麼無論延長幾倍還是封閉圖形。

二、如果圖形的起點和終點不在同一個位置上：

(一) 有些圖形延長2倍時是封閉圖形，延長3倍時變成不是封閉圖形。因為圖形延伸方向的長度也會跟著延長倍數增加，反而變成不是封閉的圖形。

(二) 四邊形中畫三次的代號如果是131-n的話，也是封閉圖形，而且無論延長幾倍都是封閉圖形。那是因為第兩次畫的時候已經回到起點，第三次畫只是沿著已經畫過的線條畫而已，所以還是封閉圖形，所以我們只把這種情形當作是「13-n」的重疊。各種正多邊形也是一樣的情形。

叁、接下來討論起點和終點在同一個位置的封閉圖形和代號的關係

一、相同圖形的代號數字組合剛好形成環狀排列，而且順時針排列和逆時針排列的圖形不相同，所以我們只以順時針排列來討論

二、會出現封閉圖形的畫圖次數和邊數的質因數有關：

(一)「畫的次數」x「相鄰代號的數字差」＝邊數

(二) 可把邊數的質因數用加法來組合。

(三) 畫圖次數大於「邊數的質因數，由小到大排列，前兩個質因數各減1再相乘的數」一定會有封閉圖形。

三、某一個畫圖次數裡面全部有幾種不同的封閉圖形？ 在老師的指導與提示下，我們到「碩博士論文」網站查到一篇論文「**不盡相異物的環狀排列公式**」，裡面的結論就提到如何算出全部幾種循環。

四、鏡像圖形和代號的關係：

(一) **封閉圖形裡面互為鏡像的代號組合**可以這樣子來算：

1. 假設n邊形畫m次，代號是A1A2A3…Am
2. 鏡像圖形的代號是把代號倒過來排列再用「邊數＋1」減掉每個代號。
3. 所以**鏡像圖形的代號是(n＋1—An)…(n＋1—A3)(n＋1—A2)(n＋1—A1)**

(二) **鏡像圖形的對稱軸，可以從代號的1和「邊數」的延伸方向去看**：

邊數是奇數，對稱軸關於水平線垂直；

邊數是偶數，對稱軸與水平線夾角為「180∘－內角÷2」

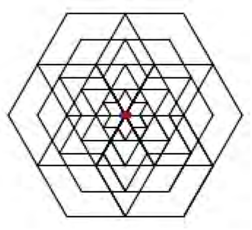
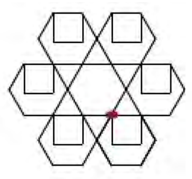
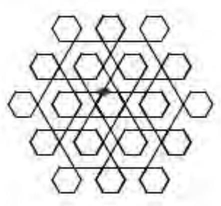
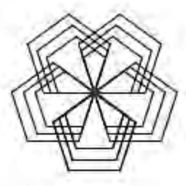
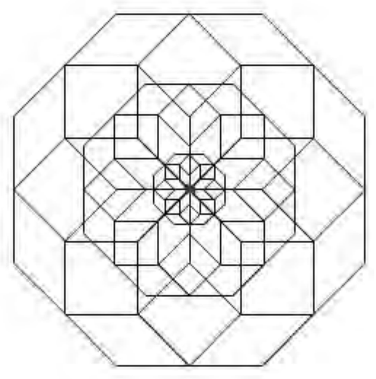
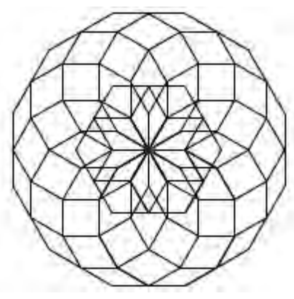
五、圖形的變化情形，也可以從代號也就是圖形延伸方向去判斷。

六、同一組環狀排列代號雖然圖形都相同，但是起點的位置不一定相同，起點位置也可從代號排列來看。

肆、利用各種不同的正多邊形複合成各種圖形

(一)為了記錄方便，把代號改成：**(代號-倍數x每邊長度)邊數……**。

(二) 幾個複合圖形

					
$(654321-2x10)_{6}$ $(654321-2x20)_{6}$ $(654321-2x30)_{6}$ $(654321-2x40)_{6}$	$(6-3x20)_{6}(1-1x20)_{4}$ $(5-3x20)_{6}(1-1x20)_{4}$ $(4-3x20)_{6}(1-1x20)_{4}$ $(3-3x20)_{6}(1-1x20)_{4}$ $(2-3x20)_{6}(1-1x20)_{4}$ $(1-3x20)_{6}(1-1x20)_{4}$	$(654321-4x10)_{6}$ $(543216-4x10)_{6}$ $(432165-4x10)_{6}$ $(321654-4x10)_{6}$ $(216543-4x10)_{6}$ $(165432-4x10)_{6}$	$(54321-2x25)_{5}$ $(54321-2x30)_{5}$ $(54321-2x35)_{5}$	$(87654321-2x10)_{8}$ $(87654321-2x30)_{8}$ $(87654321-2x50)_{8}$	$(321-2x15)_{3}$ $(654321-2x25)_{6}$ $(987654321-2X30)_{9}$

結論

所有的結論都可以從代號排列去討論，其實就是從圖形的延伸方向來討論。因為每次畫圖時正多邊形其中一邊的長度會延長，其他邊長度不變，所以代號的排列會和圖形延伸方向一致。

最有趣的是起點和終點在同一位置的封閉圖形，因為代號會形成環狀排列。而且不同的環狀排列不會有相同的圖形產生；相反的，不同的圖形也不會有相同的代號。

我們發現許多規則：畫幾次會有封閉圖形、某個畫圖次數會有幾組不同的環狀排列、互為鏡像的代號關係、圖形變化、起點位置的判斷，最後利用發現的結論應用在更複雜的圖形。

我們從106年10月開始研究，一直到108年1月才做完，確定進入全國賽後，我們把一些之前沒有深入研究的問題繼續討論。還是有一些規則是我們現在沒辦法完全了解，也許以後學得更多時，我們可以找到更好的方法。

參考資料

壹、不盡相異物的環狀排列公式。http://140.119.115.26/bitstream/140.119/49451/1/100404.pdf

貳、向量。https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%90%91%E9%87%8F