

中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

國小組 數學科

080410

到底有幾分

學校名稱：澎湖縣馬公市石泉國民小學

作者：	指導老師：
小六 黃昱銘	洪進益
小六 楊文慈	王婉妮
小六 黃詠鈴	
小六 歐芯彤	
小六 陳玉書	

關鍵詞：得分倒扣、數字規律

摘要

我們透過一個有趣的「答錯倒扣」題目，深入去分析所有可能的得分，找到其中的規律性，並改變其中的得分和扣分。接著，我們透過「基準分」和「關鍵分」，找到題目的一般性，並整理為公式，透過這個公式，我們只要輸入題數 N 、得分 a 和扣分 b ，就可以馬上知道總共有幾種不同的總分。最後，透過這樣的研究結果，我們還可以與猜題策略做結合。

$$\text{不同總分個數} = \sum_{k=1}^n (N + 2 - k)$$

壹、研究動機

我們在《科學研習月刊》2018年1月2日，第57卷，第1期，第60頁，看到一個有趣的題目：

班上考試，一共有 20 題。

每一題答對得到 5 分，答錯要倒扣 3 分。

所以總分最高分是 100 分，但是最低分是 -60 分

(這位老師相當嚴格，分數可以有負數)。

請問這次考試可能出現多少個不同的總分？

在國小的學校考試，並沒有出現答錯要倒扣分的情況，而且因為有倒扣分的關係，所以可以選擇部份題目不作答，這樣子分數就會有非常多不同的情況，因此引起了我們的興趣，希望能深入探究，找出這個題目的答案。

貳、研究目的

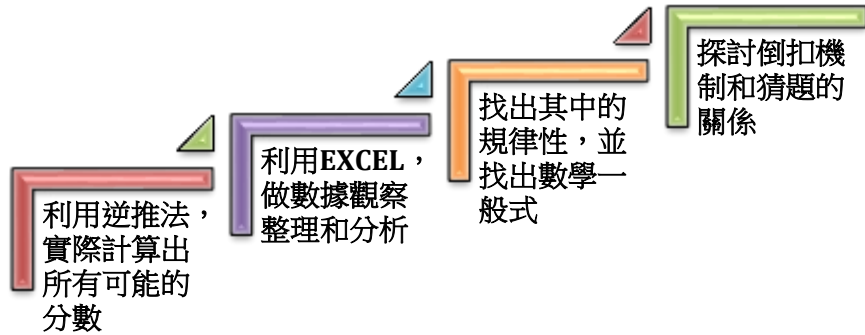
- 一、破解到底有幾種不同的總分。
- 二、找出其中的規律性和一般化。
- 三、改變得分和扣分，並探討其中的結果。
- 四、探討倒扣機制和猜題策略的關係。

參、研究設備及器材

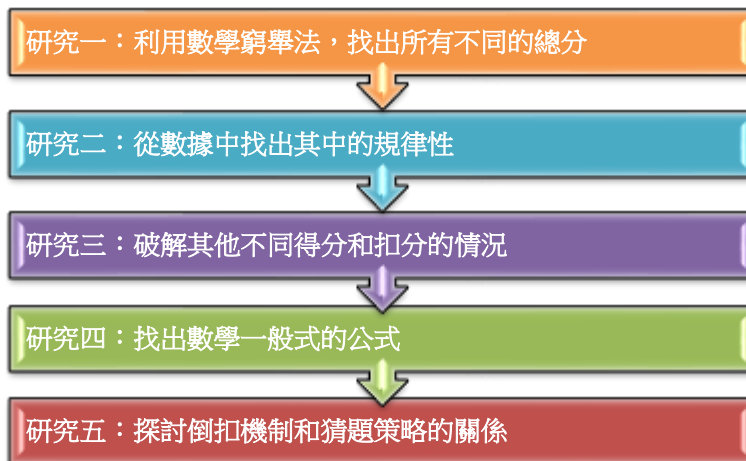
電腦、筆、記錄本。

肆、研究過程或方法

一、研究過程：



二、研究方法：



三、名詞定義：

符號	定義	備註
N	題目數	
x	答對的題數	
y	答錯的題數	
z	不答的題數	
k	總得分	
n	區塊數	
$x+y+z=N$	以原本的題目來說， $x+y+z=20$	
(a,b)	本研究 (a,b) 代表 (答對得分, 答錯倒扣分)， (5,-3) 代表答對可以得 5 分，答錯則倒扣 3 分	
w	即求出 [a, a-b] 最小公倍數	
基準分	即全部題目都答對的分數，	
m	本研究原本題目的基準分為 100 分	
關鍵分	即到了這個分數之後，後來的分數都重複出現了	
v		

伍、研究結果

一、 研究一：利用數學窮舉法，找出所有不同的總分，整理為表 5-1-1。

◆ **說明**：根據原本的題目，共 20 題，答對得 5 分，答錯倒扣 3 分，我們列出所有的情況。

表 5-1-1

不做題數	對的題數	錯	得分	備註
0	20	0	100	
0	19	1	92	
0	18	2	84	
0	17	3	76	
0	16	4	68	
0	15	5	60	
0	14	6	52	
0	13	7	44	
0	12	8	36	
0	11	9	28	
0	10	10	20	
0	9	11	12	
0	8	12	4	
0	7	13	-4	
0	6	14	-12	
0	5	15	-20	
0	4	16	-28	
0	3	17	-36	
0	2	18	-44	
0	1	19	-52	
0	0	20	-60	21 種
1	19	0	95	
1	18	1	87	
1	17	2	79	
1	16	3	71	
1	15	4	63	
1	14	5	55	
1	13	6	47	
1	12	7	39	
1	11	8	31	
1	10	9	23	
1	9	10	15	
1	8	11	7	
1	7	12	-1	
1	6	13	-9	
1	5	14	-17	
1	4	15	-25	
1	3	16	-33	
1	2	17	-41	

1	1	18	-49	
1	0	19	-57	20種
2	18	0	90	
2	17	1	82	
2	16	2	74	
2	15	3	66	
2	14	4	58	
2	13	5	50	
2	12	6	42	
2	11	7	34	
2	10	8	26	
2	9	9	18	
2	8	10	10	
2	7	11	2	
2	6	12	-6	
2	5	13	-14	
2	4	14	-22	
2	3	15	-30	
2	2	16	-38	
2	1	17	-46	
2	0	18	-54	19種
3	17	0	85	
3	16	1	77	
3	15	2	69	
3	14	3	61	
3	13	4	53	
3	12	5	45	
3	11	6	37	
3	10	7	29	
3	9	8	21	
3	8	9	13	
3	7	10	5	
3	6	11	-3	
3	5	12	-11	
3	4	13	-19	
3	3	14	-27	
3	2	15	-35	
3	1	16	-43	
3	0	17	-51	18種
4	16	0	80	
4	15	1	72	
4	14	2	64	
4	13	3	56	
4	12	4	48	
4	11	5	40	
4	10	6	32	
4	9	7	24	
4	8	8	16	

4	7	9	8	
4	6	10	0	
4	5	11	-8	
4	4	12	-16	
4	3	13	-24	
4	2	14	-32	
4	1	15	-40	
4	0	16	-48	17種
5	15	0	75	
5	14	1	67	
5	13	2	59	
5	12	3	51	
5	11	4	43	
5	10	5	35	
5	9	6	27	
5	8	7	19	
5	7	8	11	
5	6	9	3	
5	5	10	-5	
5	4	11	-13	
5	3	12	-21	
5	2	13	-29	
5	1	14	-37	
5	0	15	-45	16種
6	14	0	70	
6	13	1	62	
6	12	2	54	
6	11	3	46	
6	10	4	38	
6	9	5	30	
6	8	6	22	
6	7	7	14	
6	6	8	6	
6	5	9	-2	
6	4	10	-10	
6	3	11	-18	
6	2	12	-26	
6	1	13	-34	
6	0	14	-42	15種
7	13	0	65	
7	12	1	57	
7	11	2	49	
7	10	3	41	
7	9	4	33	
7	8	5	25	
7	7	6	17	
7	6	7	9	
7	5	8	1	

7	4	9	-7	
7	3	10	-15	
7	2	11	-23	
7	1	12	-31	
7	0	13	-39	14種
8	12	0	60	
8	11	1	52	
8	10	2	44	
8	9	3	36	
8	8	4	28	
8	7	5	20	
8	6	6	12	
8	5	7	4	
8	4	8	-4	
8	3	9	-12	
8	2	10	-20	
8	1	11	-28	
8	0	12	-36	13種
9	11	0	55	
9	10	1	47	
9	9	2	39	
9	8	3	31	
9	7	4	23	
9	6	5	15	
9	5	6	7	
9	4	7	-1	
9	3	8	-9	
9	2	9	-17	
9	1	10	-25	
9	0	11	-33	12種
10	10	0	50	
10	9	1	42	
10	8	2	34	
10	7	3	26	
10	6	4	18	
10	5	5	10	
10	4	6	2	
10	3	7	-6	
10	2	8	-14	
10	1	9	-22	
10	0	10	-30	11種
11	9	0	45	
11	8	1	37	
11	7	2	29	
11	6	3	21	
11	5	4	13	
11	4	5	5	
11	3	6	-3	

11	2	7	-11	
11	1	8	-19	
11	0	9	-27	10種
12	8	0	40	
12	7	1	32	
12	6	2	24	
12	5	3	16	
12	4	4	8	
12	3	5	0	
12	2	6	-8	
12	1	7	-16	
12	0	8	-24	9種
13	7	0	35	
13	6	1	27	
13	5	2	19	
13	4	3	11	
13	3	4	3	
13	2	5	-5	
13	1	6	-13	
13	0	7	-21	8種
14	6	0	30	
14	5	1	22	
14	4	2	14	
14	3	3	6	
14	2	4	-2	
14	1	5	-10	
14	0	6	-18	7種
15	5	0	25	
15	4	1	17	
15	3	2	9	
15	2	3	1	
15	1	4	-7	
15	0	5	-15	6種
16	4	0	20	
16	3	1	12	
16	2	2	4	
16	1	3	-4	
16	0	4	-12	5種
17	3	0	15	
17	2	1	7	
17	1	2	-1	
17	0	3	-9	4種
18	2	0	10	
18	1	1	2	
18	0	2	-6	3種
19	1	0	5	
19	0	1	-3	2種
20	0	0	0	1種

◆ 討論

1. 如果 20 題全做的話，總分會有 21 種，如果只做 19 題，總分就有 20 種，以此類推，到最後 20 題全部都沒作答，就只會有 0 分這種情況。
2. 如果先不扣除掉同樣的分數，全部可能的情况總共有 231 種。

$$\frac{(21 + 1) \times 21}{2} = 231$$

3. 總分都是以 8 分遞減。舉例來說，作答 20 題，全對是 100 分，錯一題就是 92 分，以此遞減，如圖 5-1-1。

不做題數	對的題數	錯	得分	備註
0	20	0	100	
0	19	1	92	
0	18	2	84	
0	17	3	76	
0	16	4	68	
0	15	5	60	
0	14	6	52	
0	13	7	44	
0	12	8	36	
0	11	9	28	
0	10	10	20	
0	9	11	12	-8
0	8	12	4	
0	7	13	-4	
0	6	14	-12	
0	5	15	-20	
0	4	16	-28	
0	3	17	-36	
0	2	18	-44	
0	1	19	-52	
0	0	20	-60	21 種

圖 5-1-1

◆ 討論

1. 橫軸的分數都是以 5 分遞減，縱軸的分數都是以 8 分遞減，斜線的分數都是以 13 分遞減，如圖 5-2-1。
2. 在作答 20 題到 13 題之間，裡面的分數都沒有重複，但是在作答 12 題之後的分數都重複了，所以我們找到了關鍵分 60 分。
3. 相同分數的區塊，我們標上相同的顏色。在 60 分以前的區塊，裡面的分數都沒有重複，但在 60 分之後的區塊，都是之前出現過的。所以我們思考，如果可以找到這個「關鍵分」，我們就可以知道有幾種不同的總分。
4. 所以我們發現到當 $N=20$ 時， $(5,-3)$ 的時候，總共會有 140 種不同的總分。
($21 + 20 + 19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 = 140$)
5. 我們把每個區段的總分加總起來，發現有一個規律，它們之間的差距是 (40、38、36、34、32……)

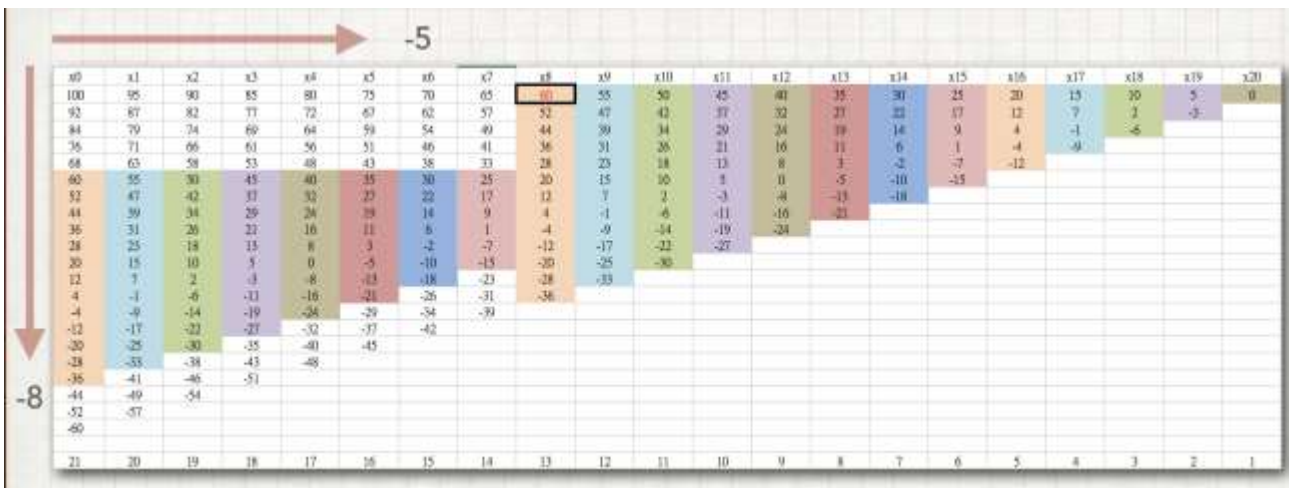


圖 5-2-1

◆ 延伸：接著我們嘗試分析其他的得分扣分，看看是否可以適用我們找出來的方法。

1. 題目： $(5,-1)$ 圖 5-2-2
基準分；100 分

關鍵分：70分

不同總分：21+20+19+18+17+16=111種

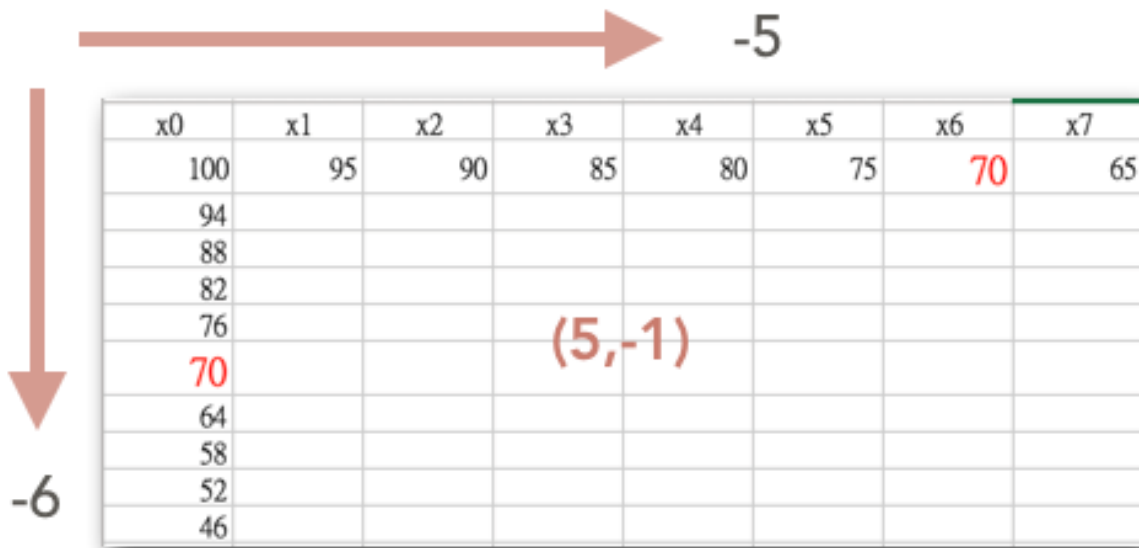


圖 5-2-2

2. 題目：(5,-2) 圖 5-2-3

基準分：100分

關鍵分：65分

不同總分：21+20+19+18+17+16+15=126種

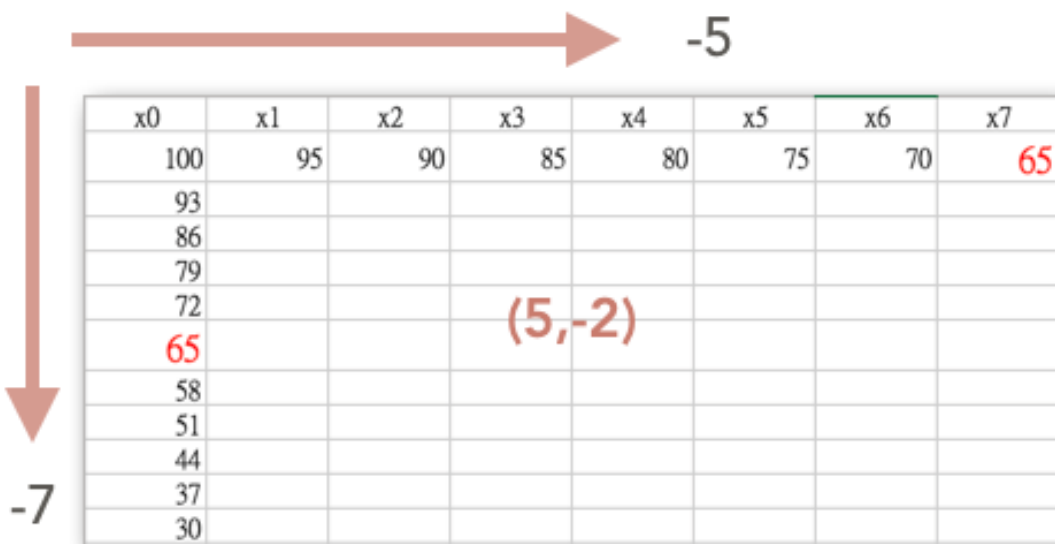


圖 5-2-3

3. 題目：(5,-4) 圖 5-2-4

基準分：100分

關鍵分：55分

不同總分：21+20+19+18+17+16+15+14+13=153 種

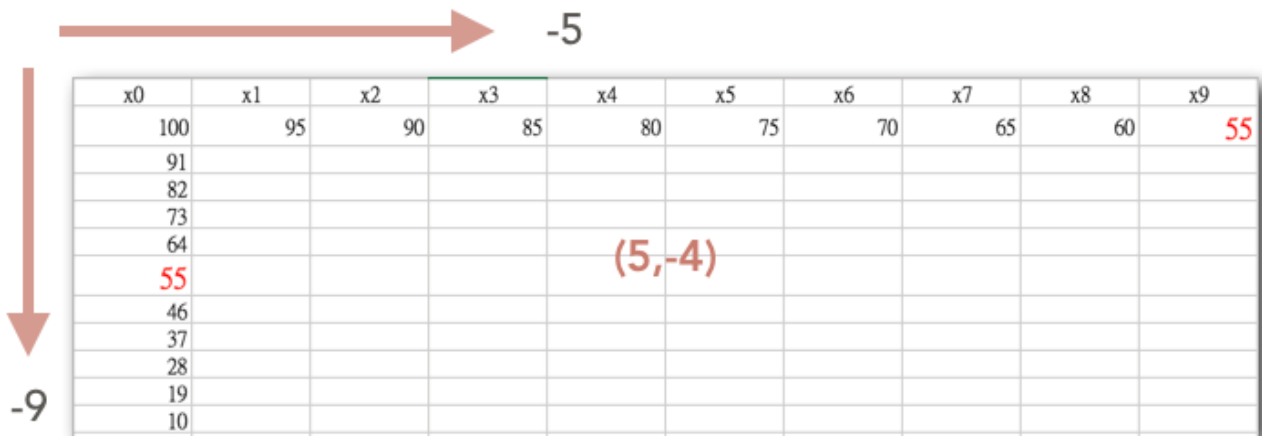


圖 5-2-4

4. 題目：(5,-5) 圖 5-2-5
 基準分：100 分
 關鍵分：90 分
 不同總分：21+20=41 種

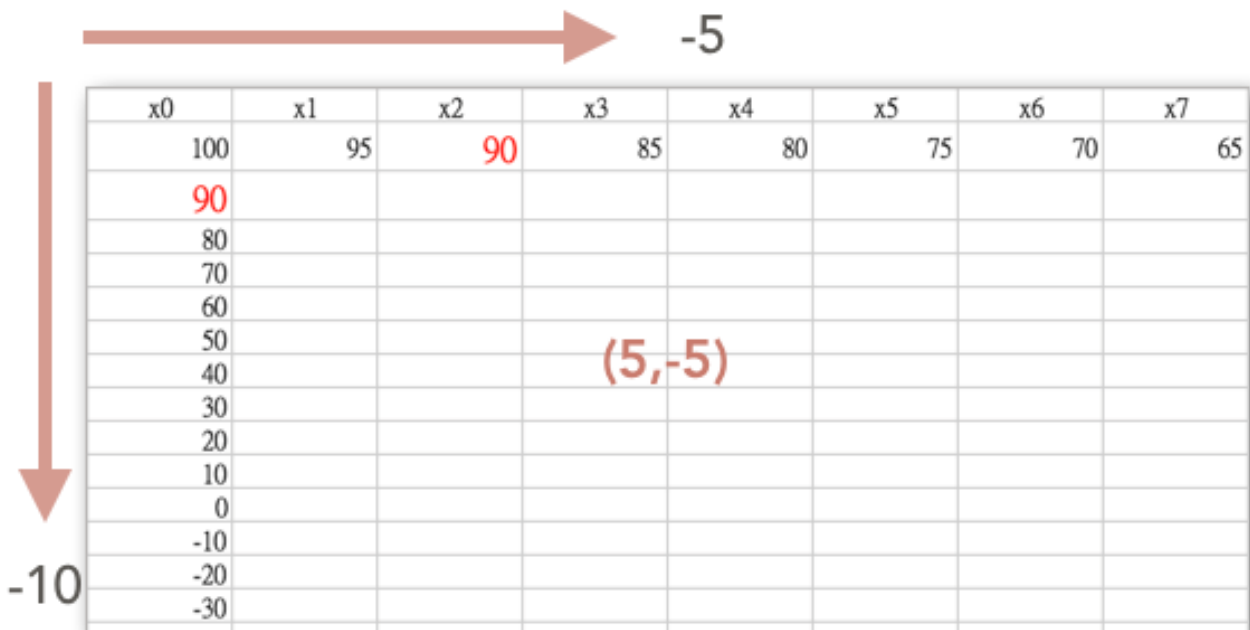


圖 5-2-5

◆ 討論：

- 我們發現到「關鍵分」可以利用最小公倍數來找，以原本 $N=20$ 、(5,-3) 的題目來看，基準分為 100 分，分數在橫軸的部份，不斷以 5 分遞減，在縱軸的部份，則不斷以 8 分遞減，為了找出共同的分數，所以我們計算 5 和 8 的最小公倍數， $[5,8]=40$ 。

2. 接著我們再用基準分 100 分，減掉 40 分，就可以找到關鍵分 60 分。
3. $40 \div 5 = 8$ ，代表有 8 個區塊。(21+20+19+18+17+16+15+14 =140)
4. 首項 21，公差 -1，n=8，末項等於 21-7=14
5. 我們也可以利用等差級數的公式，求得總和為

$$\frac{(21 + 14) \times 8}{2} = 140$$

備註：等差級數公式

$$a_n = a_1 + (n - 1)d,$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2},$$

- ◆ **延伸**：接著我們改變題目數，在 (5,-3) 的情況下，去觀察題目數和分數之間的關係。如下表 5-2-2。

表 5-2-2

題目數	得分	扣分	幾種不同總分	增加的總分								備註	
1	5	-3	3	5	0	-3							3
2	5	-3	6	10	2	-6							+3
3	5	-3	10	15	7	-1	-9						+4
4	5	-3	15	20	12	4	-4	-12					+5
5	5	-3	21	25	17	9	1	-7	-15				+6
6	5	-3	28	30	22	14	6	-2	-10	-18			+7
7	5	-3	36	35	27	19	11	3	-5	-13	-21		+8
8	5	-3	44	40	32	24	16	8	-8	-16	-24		+8
9	5	-3	52	45	37	29	21	13	-11	-19	-27		+8
10	5	-3	60	50	42	34	26	18	-14	-22	-30		+8
11	5	-3	68	55	47	39	31	23	-17	-25	-33		+8
12	5	-3	76	60	52	44	36	28	-20	-28	-36		+8
13	5	-3	84	65	57	49	41	33	-23	-31	-39		+8
14	5	-3	92	70	62	54	46	38	-26	-34	-42		+8
15	5	-3	100	75	67	59	51	43	-29	-37	-45		+8
16	5	-3	108	80	72	64	56	48	-32	-40	-48		+8
17	5	-3	116	85	77	69	61	53	-35	-43	-51		+8
18	5	-3	124	90	82	74	66	58	-38	-46	-54		+8
19	5	-3	132	95	87	79	71	63	-41	-49	-57		+8
20	5	-3	140	100	92	84	76	68	-44	-52	-60		+8
													140 種

三、研究三：破解其他不同得分和扣分的情況

◆ **說明：**我們接著改變得分 a 和扣分 b 的數字，試著去找出其中的規律性和關係。

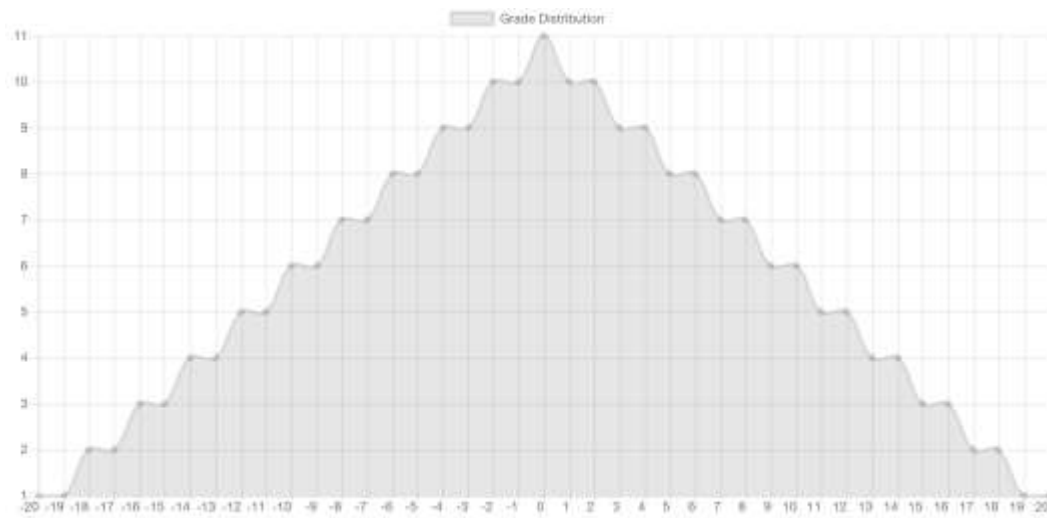
題目數	得分	扣分	最小公倍數	基準分	關鍵分	區塊	有幾種不同總分
20	1	-1	[1,2]=2	20	18	2	41
20	2	-1	[2,3]=6	40	36	3	60
20	3	-1	[3,4]=12	60	48	4	78
20	4	-1	[4,5]=20	80	60	5	95
20	5	-1	[5,6]=30	100	70	6	111
20	1	-2	[1,3]=3	20	17	3	60
20	2	-2	[2,4]=4	40	36	2	41
20	3	-2	[3,5]=15	60	45	5	95
20	4	-2	[4,6]=12	80	68	3	60
20	5	-2	[5,7]=35	100	65	7	126
20	1	-3	[1,4]=4	20	16	4	78
20	2	-3	[2,5]=10	40	30	5	95
20	3	-3	[3,6]=6	60	54	2	41
20	4	-3	[4,7]=28	80	52	7	126
20	5	-3	[5,8]=40	100	60	8	140
20	1	-4	[1,5]=5	20	15	5	95
20	2	-4	[2,6]=6	40	34	3	60
20	3	-4	[3,7]=21	60	39	7	126
20	4	-4	[4,8]=8	80	72	2	41
20	5	-4	[5,9]=45	100	55	9	153
20	1	-5	[1,6]=6	20	14	6	111
20	2	-5	[2,7]=14	40	26	7	126
20	3	-5	[3,8]=24	60	36	8	140
20	4	-5	[4,9]=36	80	44	9	153
20	5	-5	[5,10]=10	100	90	2	41

◆ 整理

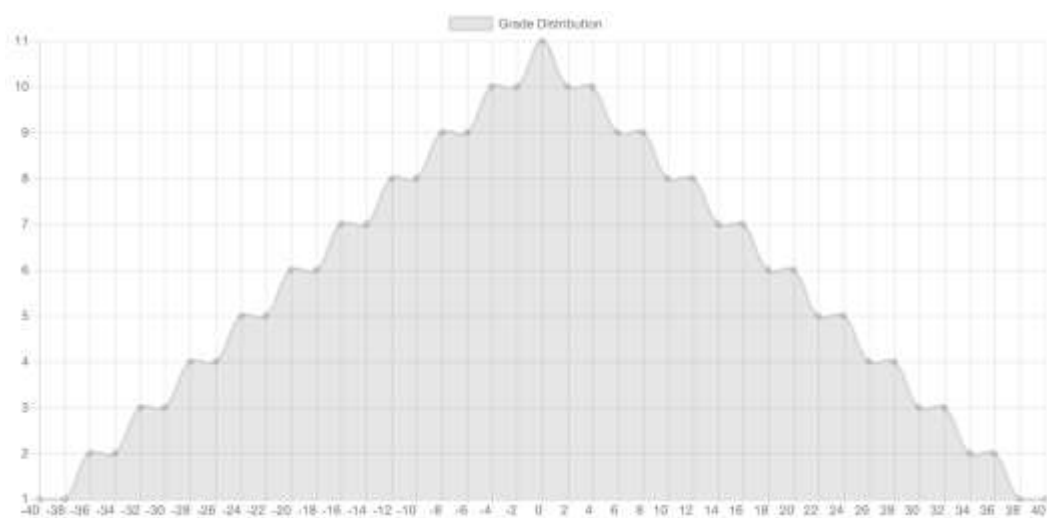
(a,b)	(a,b)	(a,b)	(a,b)	(a,b)	不同總分的個數
(1,-1)	(2,-2)	(3,-3)	(4,-4)	(5,-5)	41

(2,-1)	(1,-2)	(4,-2)	(2,-4)		60
(3,-1)	(1,-3)				78
(4,-1)	(1,-4)	(3,-2)	(2,-3)		95
(5,-1)	(1,-5)				111
(5,-2)	(2,-5)	(4,-3)	(3,-4)		126
(5,-3)	(3,-5)				140
(5,-4)	(4,-5)				153

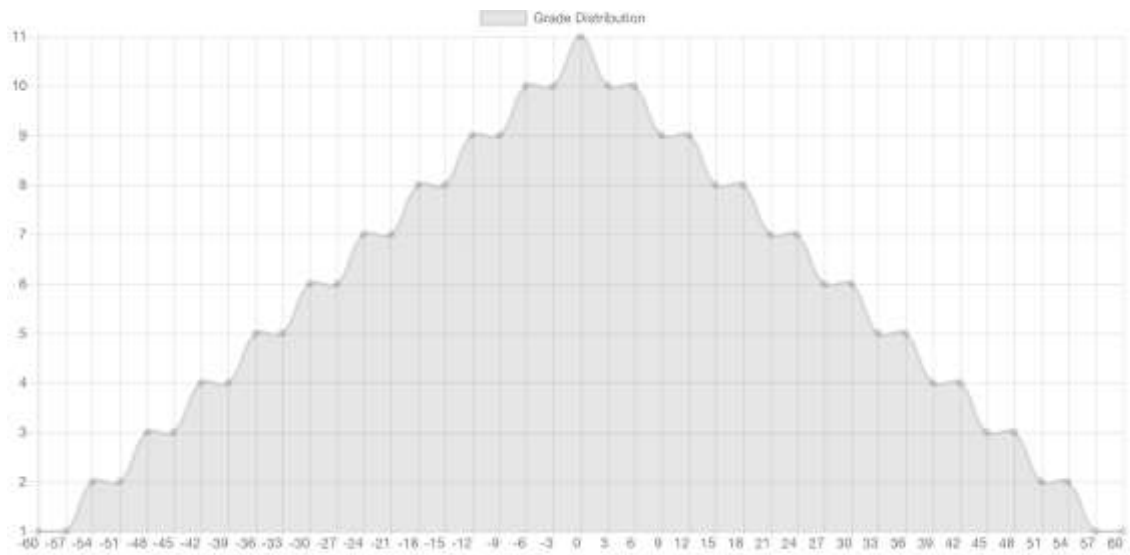
◆ (1,-1) : 41 種



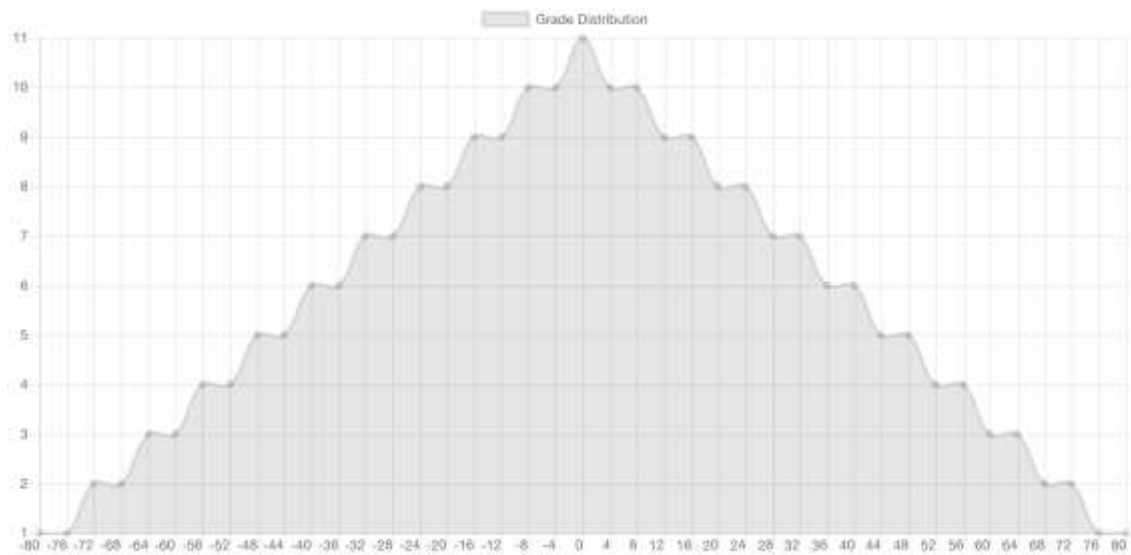
◆ (2,-2) : 41 種



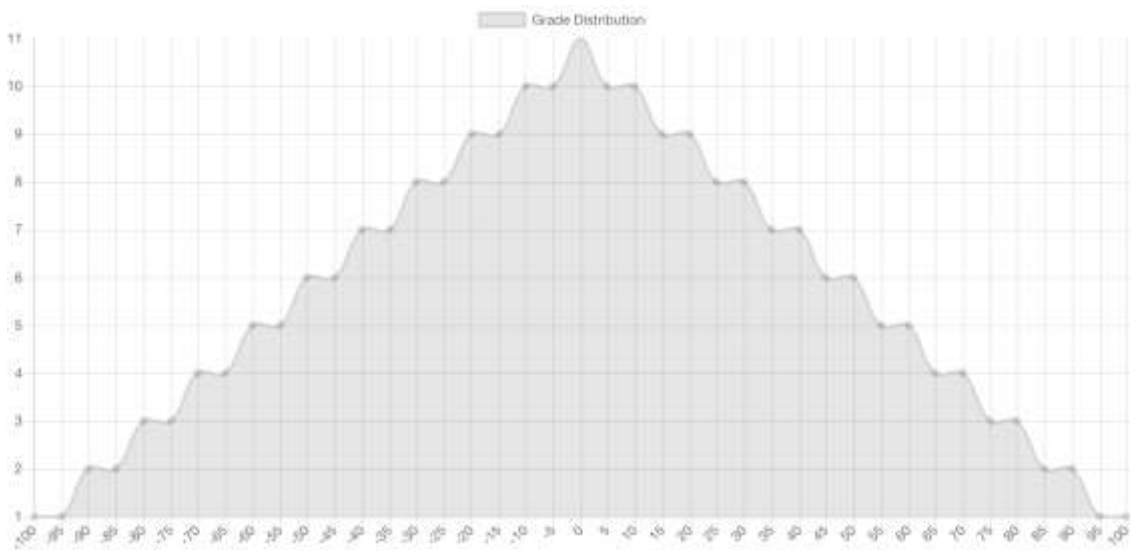
◆ (3,-3) : 41 種



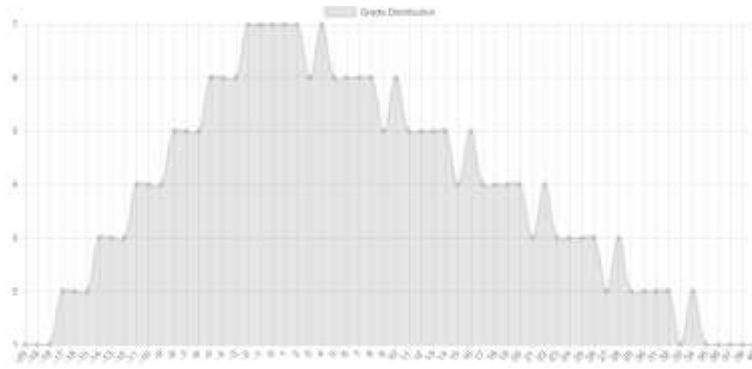
◆ (4,-4) : 41 種



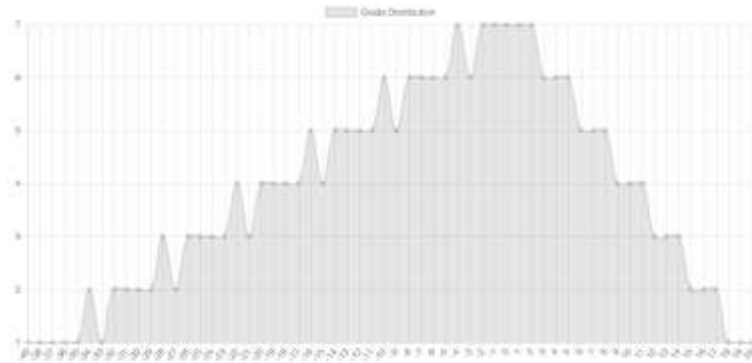
◆ (5,-5) : 41 種



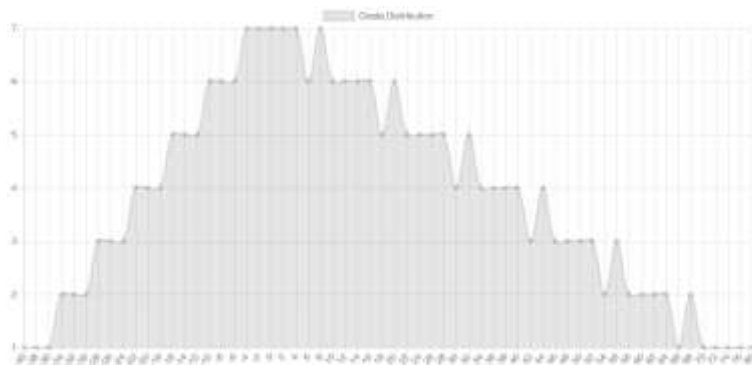
◆ (2,-1) : 60 種



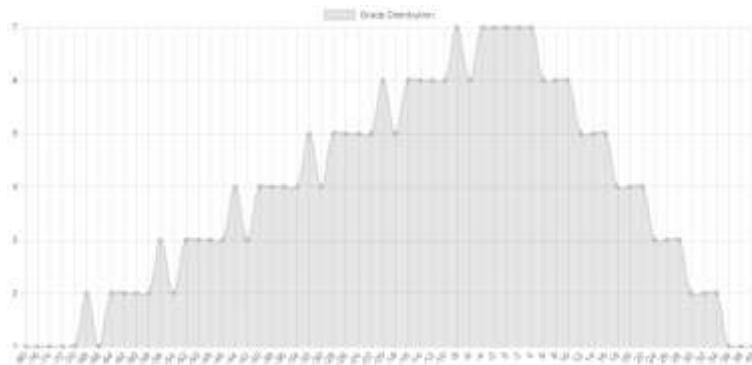
◆ (1,-2) : 60種



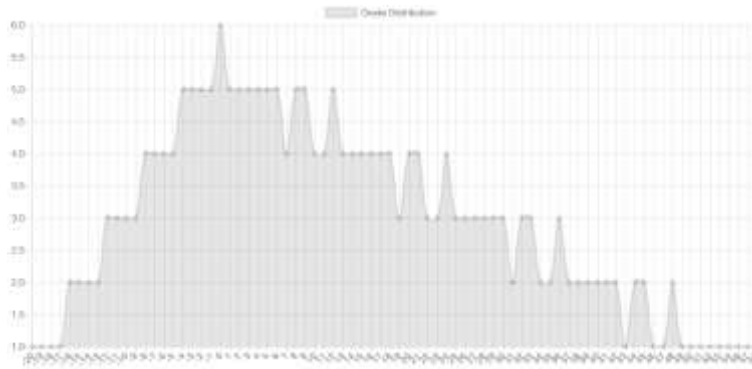
◆ (4,-2) : 60種



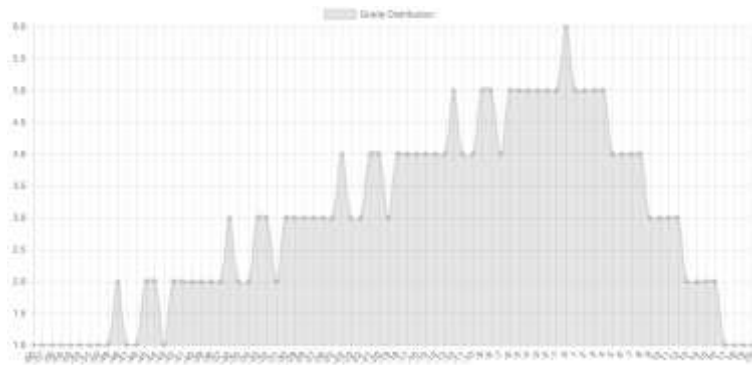
◆ (2,-4) : 60種



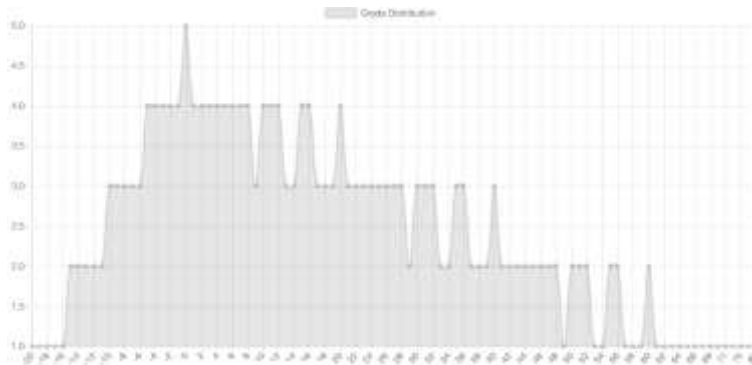
◆ (3,-1) : 78種



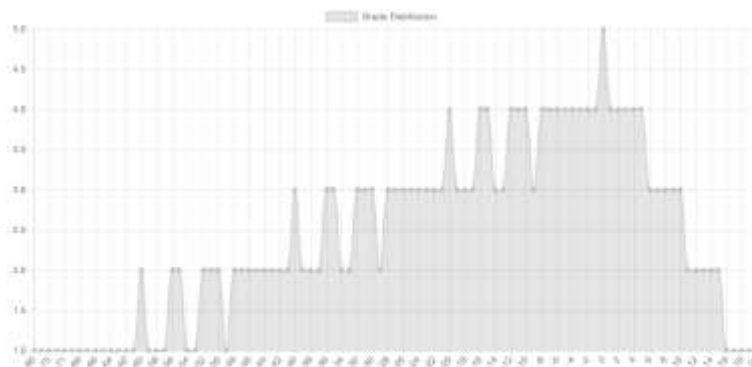
◆ (1,-3) : 78 種



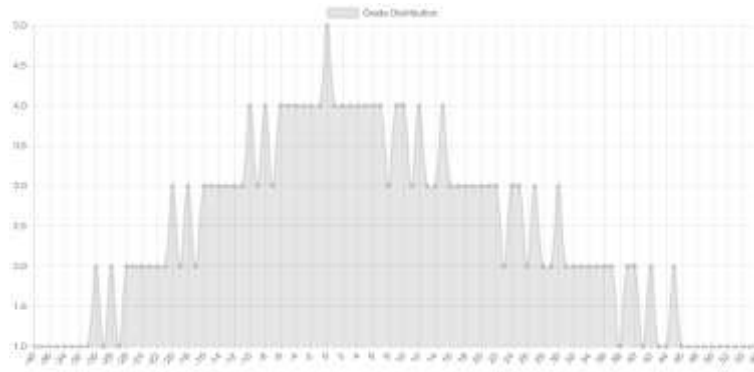
◆ (4,-1) : 95 種



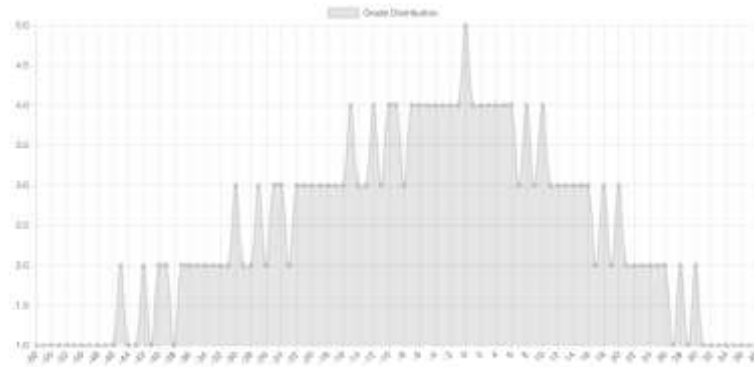
◆ (1,-4) : 95 種



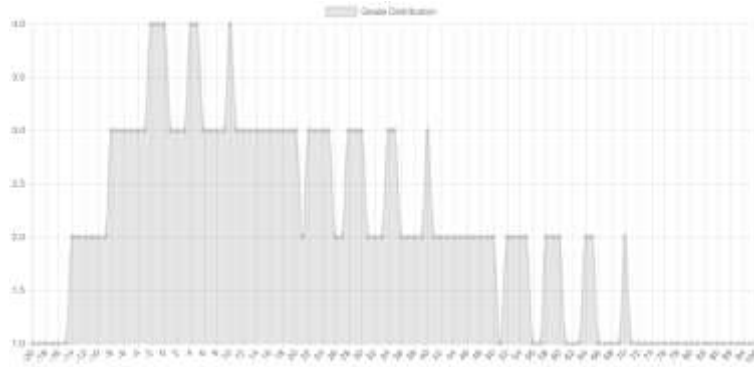
◆ (3,-2) : 95 種



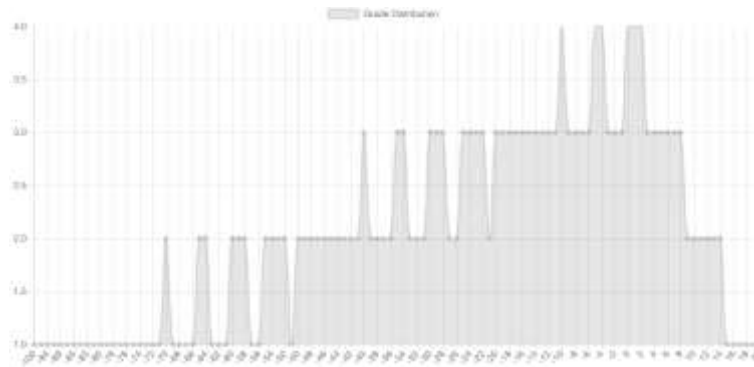
◆ (2,-3) : 95 種



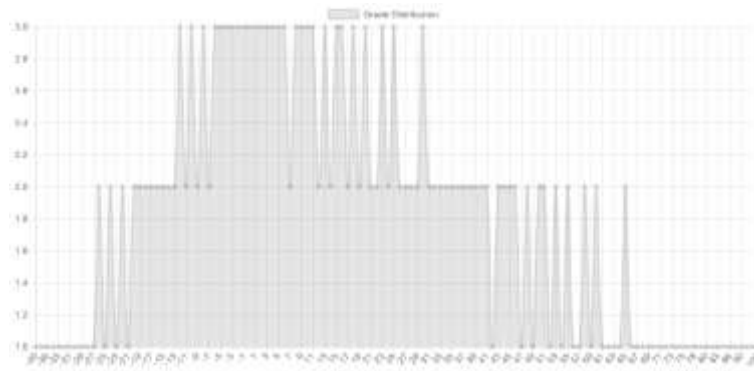
◆ (5,-1) : 111 種



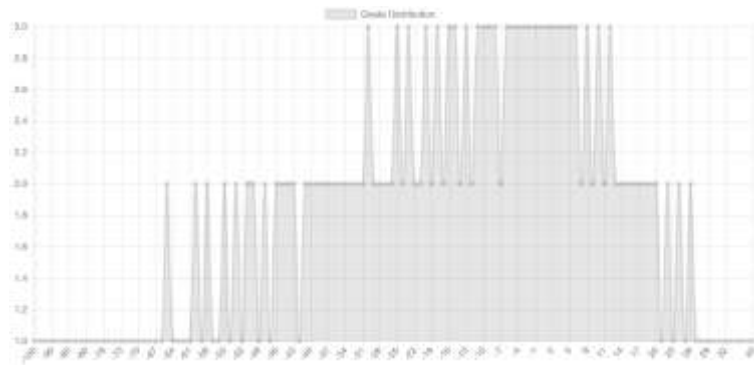
◆ (1,-5) : 111 種



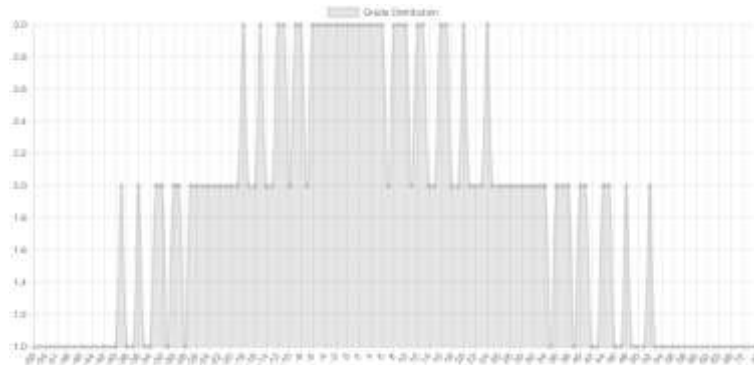
◆ (5,-2) : 126 種



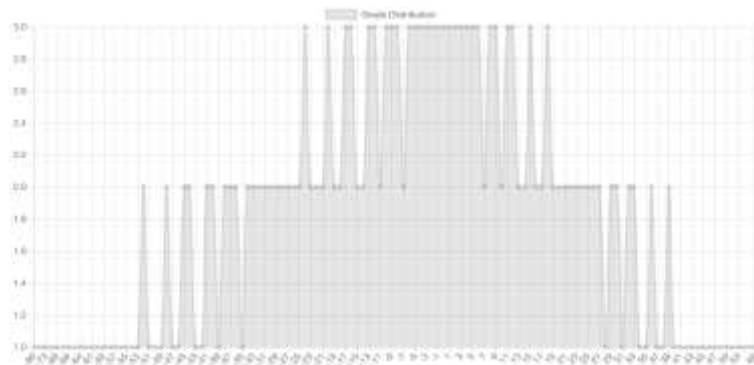
◆ (2,-5) : 126 種



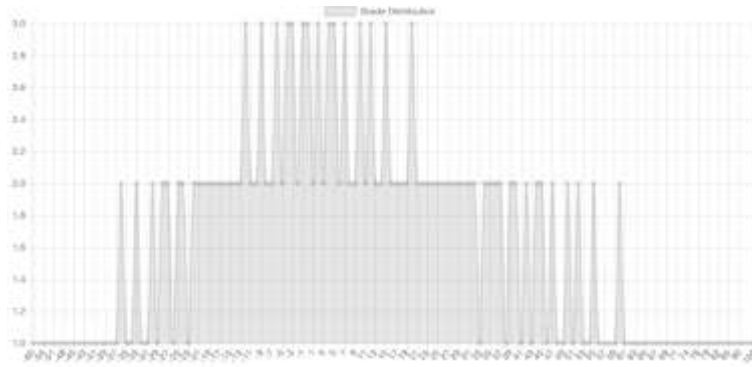
◆ (4,-3) : 126 種



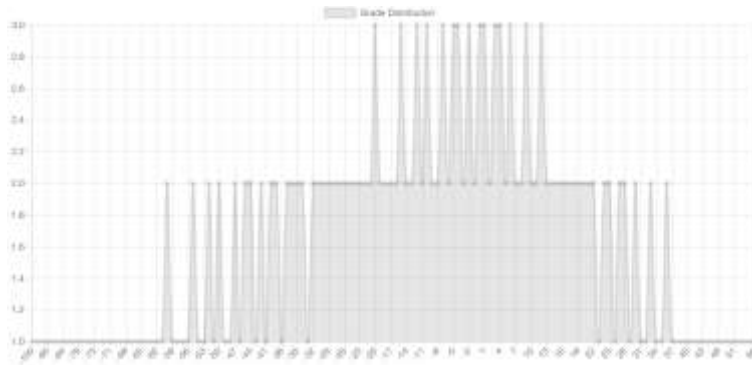
◆ (3,-4) : 126 種



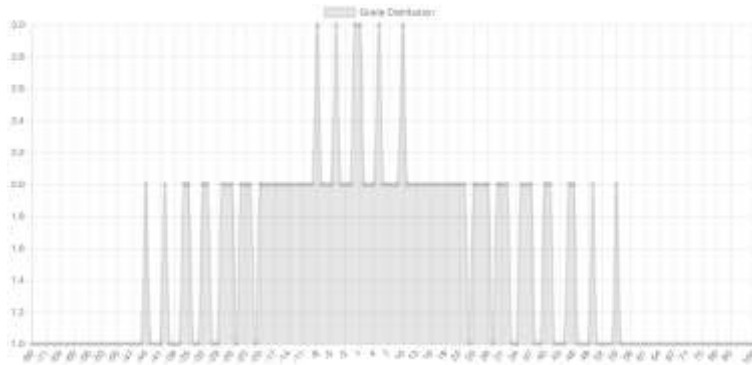
◆ (5,-3) : 140 種



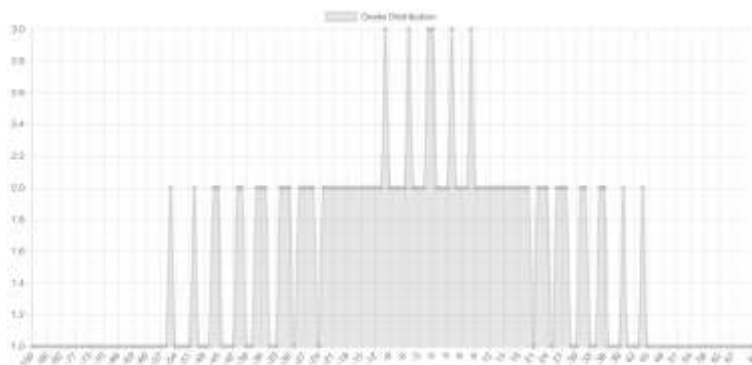
◆ (3,-5) : 140 種



◆ (5,-4) : 153 種



◆ (4,-5) : 153 種



四、研究四：找出數學一般式的公式

◆ **說明**：從前面研究所找出來的規律，我們試著找出算出不同總分的一般式。

題目數： N

得分： a

扣分： b

基準分 $m = a \times N$

$[a, a - b] = w$ (最小公倍數)

關鍵分 $v = m - w$

區塊數 $n = w \div a$

$$\text{不同總分個數} = \sum_{k=1}^n (N + 2 - k)$$

◆ **舉例**： $N=30$ 、 $a=6$ 、 $b=-2$

$w = [6, 8] = 24$ (最小公倍數)

$v = 180 - 24 = 156$

$n = 24 \div 6 = 4$

$$\text{不同總分個數} = \sum_{k=1}^4 (30 + 2 - k) = 118 \text{ (種)}$$

$$\frac{(31 + 28) \times 4}{2} = 118$$

◆ **舉例**： $N=40$ 、 $a=7$ 、 $b=-3$

$$w = [7, 10] = 70 \text{ (最小公倍數)}$$

$$v = 280 - 70 = 210$$

$$n = 70 \div 7 = 10$$

$$\text{不同總分個數} = \sum_{k=1}^{10} (40 + 2 - k) = 365 \text{ (種)}$$

$$\frac{(41 + 32) \times 10}{2} = 365$$

◆ 舉例： $N=50$ 、 $a=4$ 、 $b=-2$

$$w = [4, 6] = 12 \text{ (最小公倍數)}$$

$$v = 200 - 12 = 188$$

$$n = 12 \div 4 = 3$$

$$\text{不同總分個數} = \sum_{k=1}^3 (50 + 2 - k) = 150 \text{ (種)}$$

$$\frac{(51 + 49) \times 3}{2} = 150$$

五、研究五：探討倒扣機制和猜題策略的關係

- ◆ **說明：**我們認為倒扣機制的出現，會讓人一旦不確定答案的時候，會考慮是否要猜題。猜對了可以得到分數，但是猜錯了反而要倒扣分數。
- ◆ **情況一：**得分大於倒扣分-原本的題目： $N=20$ 、 $a=5$ 、 $b=-3$ 。

「目前肯定的題目有 14 題，還剩下 6 題不確定，是否要猜題？要猜幾題？」

60 ≤ 分數

猜題題數	答對 x	答錯 y	計分	總分
6	6	0	30	100
	5	1	22	92
	4	2	14	84
	3	3	6	76
	2	4	-2	68
	1	5	-10	60
	0	6	-18	52
5	5	0	25	95
	4	1	17	87
	3	2	9	79
	2	3	1	71
	1	4	-7	63
	0	5	-15	55
4	4	0	20	90
	3	1	12	82
	2	2	4	74
	1	3	-4	66
	0	4	-12	58
3	3	0	15	85
	2	1	7	77
	1	2	-1	69
	0	3	-9	61
2	2	0	10	80
	1	1	2	72
	0	2	-6	64
1	1	0	5	75
	0	1	-3	67
0	0	0	0	70

- ◆ **說明：**以這個例子來看，我們列出剩下六題，所有「是否要猜」的情況，如果自己預設是在 60 分以上，也只有三個情況（52、55、58 分）會低於 60 分。根據自己原本設定的目標，猜三題以下，都符合自己期待的分數。
- ◆ **情況二：**得分等於倒扣分-原本的題目： $N=20$ 、 $a=5$ 、 $b=-5$ 。

「目前肯定的題目有 14 題，還剩下 6 題不確定，是否要猜題？要猜幾題？」

60 ≤ 分數

猜題題數	答對 x	答錯 y	計分	總分
6	6	0	30	100
	5	1	20	90
	4	2	10	80
	3	3	0	70
	2	4	-10	60
	1	5	-20	50
	0	6	-30	40
5	5	0	25	95
	4	1	15	85
	3	2	5	75
	2	3	-5	65
	1	4	-15	55
	0	5	-25	45
4	4	0	20	90
	3	1	10	80
	2	2	0	70
	1	3	-10	60
	0	4	-20	50
3	3	0	15	85
	2	1	5	75
	1	2	-5	65
	0	3	-15	55
2	2	0	10	80
	1	1	0	70
	0	2	-10	60
1	1	0	5	75
	0	1	-5	65
0	0	0	0	70

◆ **說明：**在這個情況中，我們發現到猜 3~6 題，都有出現低於 60 分的情況，所以保險看來，可以選擇猜 2 題以下，分數會落在 60 分到 80 分之間，也符合原本設定的目標。

◆ **情況三：**得分小於倒扣分-原本的題目：N=20、a=5、b=-7。

「目前肯定的題目有 14 題，還剩下 6 題不確定，是否要猜題？要猜幾題？」

60 ≤ 分數

猜題題數	答對 x	答錯 y	計分	總分
6	6	0	30	100
	5	1	19	89
	4	2	8	78
	3	3	-3	67
	2	4	-14	56
	1	5	-25	45
	0	6	-36	34
5	5	0	25	95
	4	1	14	84
	3	2	3	73
	2	3	-8	62
	1	4	-19	51
	0	5	-30	40
	4	4	0	20
3		1	9	79
2		2	-2	68
1		3	-13	57
0		4	-24	46
3		3	0	15
	2	1	4	74
	1	2	-7	63
	0	3	-18	52
2	2	0	10	80
	1	1	-1	69
	0	2	-12	58
1	1	0	5	75
	0	1	-6	64
0	0	0	0	70

- ◆ **說明：**在這個情況中，因為倒扣一題的分數，比答對一題的分數還要高，所以我們認為如果想避免不及格的分數，可以選擇猜 1 題就好，甚至都不要猜，維持原本有把握的 70 分就好。

陸、討論

研究一：因為原本的題目是答對一題得 5 分，答錯要倒扣 3 分，分數會以 8 分遞減，即 $5 - (-3) = 8$ 。若是答對 6 分，答錯倒扣 2 分，分數一樣是以 8 分遞減。在不考慮重複分數的情況下，總共會有 231 種總分。

研究二：根據我們整理出來的數據資訊，我們發現到只要找到「關鍵分」，就可以知道總共會有幾種不同的總分，因為在關鍵分後出現的總分，都是前面出現過的分數。至於「關鍵分」的找法，則是找出 a 和 $a-b$ 的最小公倍數。在 $N=20$ 、 $a=5$ 、 $b=-3$ 的題目中，關鍵分是 60 分，不同總分的個數會有 140 種。

研究三：我們模擬不同得分和扣分，找到其中的規律和關係，另外，我們還製作出現次數的統計圖表，發現相同次數的得分扣分，其折線圖都會有「對稱」的情況。圖形的頂端都會有 0 分的情況，0 分的情況最多種。

研究四：利用研究的數據，我們找到計算有幾種不同總分的公式，只要知道題目的題數 N 、得分 a 和扣分 b ，我們就可以找出共有幾種不同的總分。

研究五：了解得分和扣分的關係後，我們試著探討倒扣機制和猜題機制之間的關係，可以根據有把握和沒把握的題目，以自己所設定的目標分數，來決定是否要猜題，如果要猜題，要猜幾題呢？

柒、結論

$$\text{基準分 } m = a \times N$$

$$[a, a - b] = w \text{ (最小公倍數)}$$

$$\text{關鍵分 } v = m - w$$

$$\text{區塊數 } n = w \div a$$

$$\text{不同總分個數} = \sum_{k=1}^n (N + 2 - k)$$

捌、參考資料及其他

- 一、翰林文教事業（2019）。國小數學第十一冊第一單元最大公因數和最小公倍數。
- 二、翰林文教事業（2018）。國小數學第十冊第五單元符號代表數。

【評語】 080410

從一個「答錯倒扣」的題目出發，一一分析各種不同的答題情形與得分結果，從中找出規律性進而得出一個公式以求所有總分的個數。最後將研究結果和猜題策略做了結合，使其有應用性。可惜的是研究結果略顯單薄，期望作者再接再厲。

壹 研究動機

我們在《科學研習月刊》2018年1月2日，第57卷，第1期，第60頁，看到一個有趣的題目：

班上考試，一共有20題。
每一題答對得到5分，答錯要倒扣3分。
所以總分最高分是100分，但是最低分是-60分
(這位老師相當嚴格，分數可以有負數)。
請問這次考試可能出現多少個不同的總分？

貳 研究目的

- 一、破解到底有幾種不同的總分。
- 二、找出其中的規律性和一般化。
- 三、改變得分和扣分，並探討其中的結果。
- 四、探討倒扣機制和猜題策略的關係。

參 研究設備及器材

電腦、筆、記錄本

肆 研究過程或方法

研究方法

利用逆推法，
實際計算出
所有可能的
分數

利用EXCEL，
做數據觀察
整理和分析

找出其中的
規律性，並
找出數學一
般式

探討倒扣機
制和猜題的
關係

研究過程

名詞定義

符號	定義	備註
N	題目數	
x	答對的題數	
y	答錯的題數	
z	不答的題數	
k	總得分	
n	區塊數	
$x+y+z=N$	以原本的題目來說， $x+y+z=20$	
(a,b)	本研究(a,b)代表(答對得分,答錯倒扣分)， (5,-3)代表答對可以得5分，答錯則倒扣3分	
w	即求出[a,a-b]最小公倍數	
基準分	即全部題目都答對的分數， 本研究原本題目的基準分為100分	
m		
關鍵分	即到了這個分數之後，後來的分數都重複出現了	
v		

研究一：利用數學窮舉法，找出所有不同的總分

研究二：從數據中找出其中的規律性

研究三：破解其他不同得分和扣分的情況

研究四：找出數學一般式的公式

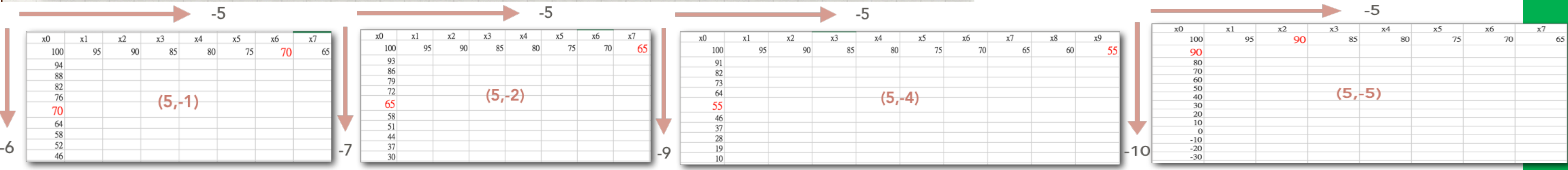
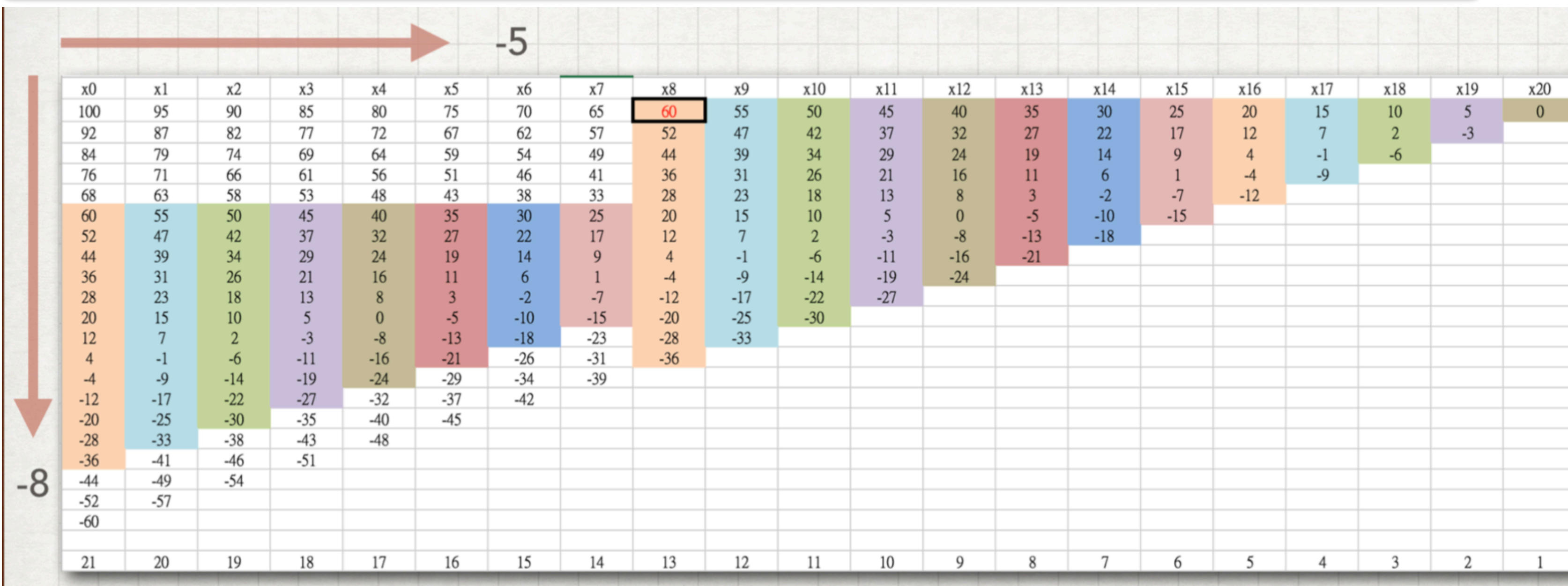
研究五：探討倒扣機制和猜題策略的關係

伍 研究結果

研究一：利用數學窮舉法，找出所有不同的總分

不做題數	對的題數	錯	得分	備註
0	20	0	100	
0	19	1	92	
0	18	2	84	
0	17	3	76	
0	16	4	68	
0	15	5	60	
0	14	6	52	
0	13	7	44	
0	12	8	36	
0	11	9	28	
0	10	10	20	
0	9	11	12	
0	8	12	4	
0	7	13	-4	
0	6	14	-12	
0	5	15	-20	
0	4	16	-28	
0	3	17	-36	
0	2	18	-44	
0	1	19	-52	
0	0	20	-60	21種
1	19	0	95	
1	18	1	87	
1	17	2	79	
1	16	3	71	
1	15	4	63	
1	14	5	55	
1	13	6	47	
1	12	7	39	
1	11	8	31	
1	10	9	23	
1	9	10	15	
1	8	11	7	
1	7	12	-1	
1	6	13	-9	
1	5	14	-17	
1	4	15	-25	
1	3	16	-33	
1	2	17	-41	
1	1	18	-49	
1	0	19	-57	20種
2	18	0	90	
2	17	1	82	
2	16	2	74	
2	15	3	66	
2	14	4	58	
2	13	5	50	
2	12	6	42	
2	11	7	34	
2	10	8	26	
2	9	9	18	
2	8	10	10	
2	7	11	2	
2	6	12	-6	
2	5	13	-14	
2	4	14	-22	
2	3	15	-30	
2	2	16	-38	
2	1	17	-46	
2	0	18	-54	19種
3	17	0	85	
3	16	1	77	
3	15	2	69	
3	14	3	61	
3	13	4	53	
3	12	5	45	
3	11	6	37	
3	10	7	29	
3	9	8	21	
3	8	9	13	
3	7	10	5	
3	6	11	-3	
3	5	12	-11	
3	4	13	-19	
3	3	14	-27	
3	2	15	-35	
3	1	16	-43	
3	0	17	-51	18種
4	16	0	80	
4	15	1	72	
4	14	2	64	
4	13	3	56	
4	12	4	48	
4	11	5	40	
4	10	6	32	
4	9	7	24	
4	8	8	16	
4	7	9	8	
4	6	10	0	
4	5	11	-8	
4	4	12	-16	
4	3	13	-24	
4	2	14	-32	
4	1	15	-40	
4	0	16	-48	17種
5	15	0	75	
5	14	1	67	
5	13	2	59	
5	12	3	51	
5	11	4	43	
5	10	5	35	
5	9	6	27	
5	8	7	19	
5	7	8	11	
5	6	9	3	
5	5	10	-5	
5	4	11	-13	
5	3	12	-21	
5	2	13	-29	
5	1	14	-37	
5	0	15	-45	16種
6	14	0	70	
6	13	1	62	
6	12	2	54	
6	11	3	46	
6	10	4	38	
6	9	5	30	
6	8	6	22	
6	7	7	14	
6	6	8	6	
6	5	9	-2	
6	4	10	-10	
6	3	11	-18	
6	2	12	-26	
6	1	13	-34	
6	0	14	-42	15種
7	13	0	65	
7	12	1	57	
7	11	2	49	
7	10	3	41	
7	9	4	33	
7	8	5	25	
7	7	6	17	
7	6	7	9	
7	5	8	1	
7	4	9	-7	
7	3	10	-15	
7	2	11	-23	
7	1	12	-31	
7	0	13	-39	14種
8	12	0	60	
8	11	1	52	
8	10	2	44	
8	9	3	36	
8	8	4	28	
8	7	5	20	
8	6	6	12	
8	5	7	4	
8	4	8	-4	
8	3	9	-12	
8	2	10	-20	
8	1	11	-28	
8	0	12	-36	13種
9	11	0	55	
9	10	1	47	
9	9	2	39	
9	8	3	31	
9	7	4	23	
9	6	5	15	
9	5	6	7	
9	4	7	-1	
9	3	8	-9	
9	2	9	-17	
9	1	10	-25	
9	0	11	-33	12種
10	10	0	50	
10	9	1	42	
10	8	2	34	
10	7	3	26	
10	6	4	18	
10	5	5	10	
10	4	6	2	
10	3	7	-6	
10	2	8	-14	
10	1	9	-22	
10	0	10	-30	11種
11	9	0	45	
11	8	1	37	
11	7	2	29	
11	6	3	21	
11	5	4	13	
11	4	5	5	
11	3	6	-3	
11	2	7	-11	
11	1	8	-19	
11	0	9	-27	10種
12	8	0	40	
12	7	1	32	
12	6	2	24	
12	5	3	16	
12	4	4	8	
12	3	5	0	
12	2	6	-8	
12	1	7	-16	
12	0	8	-24	9種
13	7	0	35	
13	6	1	27	
13	5	2	19	
13	4	3	11	
13	3	4	3	
13	2	5	-5	
13	1	6	-13	
13	0	7	-21	8種
14	6	0	30	
14	5	1	22	
14	4	2	14	
14	3	3	6	
14	2	4	-2	
14	1	5	-10	
14	0	6	-18	7種
15	5	0	25	
15	4	1	17	
15	3	2	9	
15	2	3	1	
15	1	4	-7	
15	0	5	-15	6種
16	4	0	20	
16	3	1	12	
16	2	2	4	
16	1	3	-4	
16	0	4	-12	5種
17	3	0	15	
17	2	1	7	
17	1	2	-1	
17	0	3	-9	4種
18	2	0	10	
18	1	1	2	
18	0	2	-6	3種
19	1	0	5	
19	0	1	-3	2種
20	0	0	0	1種

研究二：從數據中找出其中的規律性



題目數	得分	扣分	幾種不同總分	增加的總分						備註		
1	5	-3	3	5	0	-3					3	
2	5	-3	6	10	2	-6					+3	
3	5	-3	10	15	7	-9					+4	
4	5	-3	15	20	12	-4	-12				+5	
5	5	-3	21	25	17	9	1	-7	-15		+6	
6	5	-3	28	30	22	14	6	-2	-10	-18	+7	
7	5	-3	36	35	27	19	11	3	-5	-13	-21	+8
8	5	-3	44	40	32	24	16	8	-8	-16	-24	+8
9	5	-3	52	45	37	29	21	13	-11	-19	-27	+8
10	5	-3	60	50	42	34	26	18	-14	-22	-30	+8
11	5	-3	68	55	47	39	31	23	-17	-25	-33	+8
12	5	-3	76	60	52	44	36	28	-20	-28	-36	+8
13	5	-3	84	65	57	49	41	33	-23	-31	-39	+8
14	5	-3	92	70	62	54	46	38	-26	-34	-42	+8
15	5	-3	100	75	67	59	51	43	-29	-37	-45	+8
16	5	-3	108	80	72	64	56	48	-32	-40	-48	+8
17	5	-3	116	85	77	69	61	53	-35	-43	-51	+8
18	5	-3	124	90	82	74	66	58	-38	-46	-54	+8
19	5	-3	132	95	87	79	71	63	-41	-49	-57	+8
20	5	-3	140	100	92	84	76	68	-44	-52	-60	+8
												140種

研究三：破解其他不同得分和扣分的情況

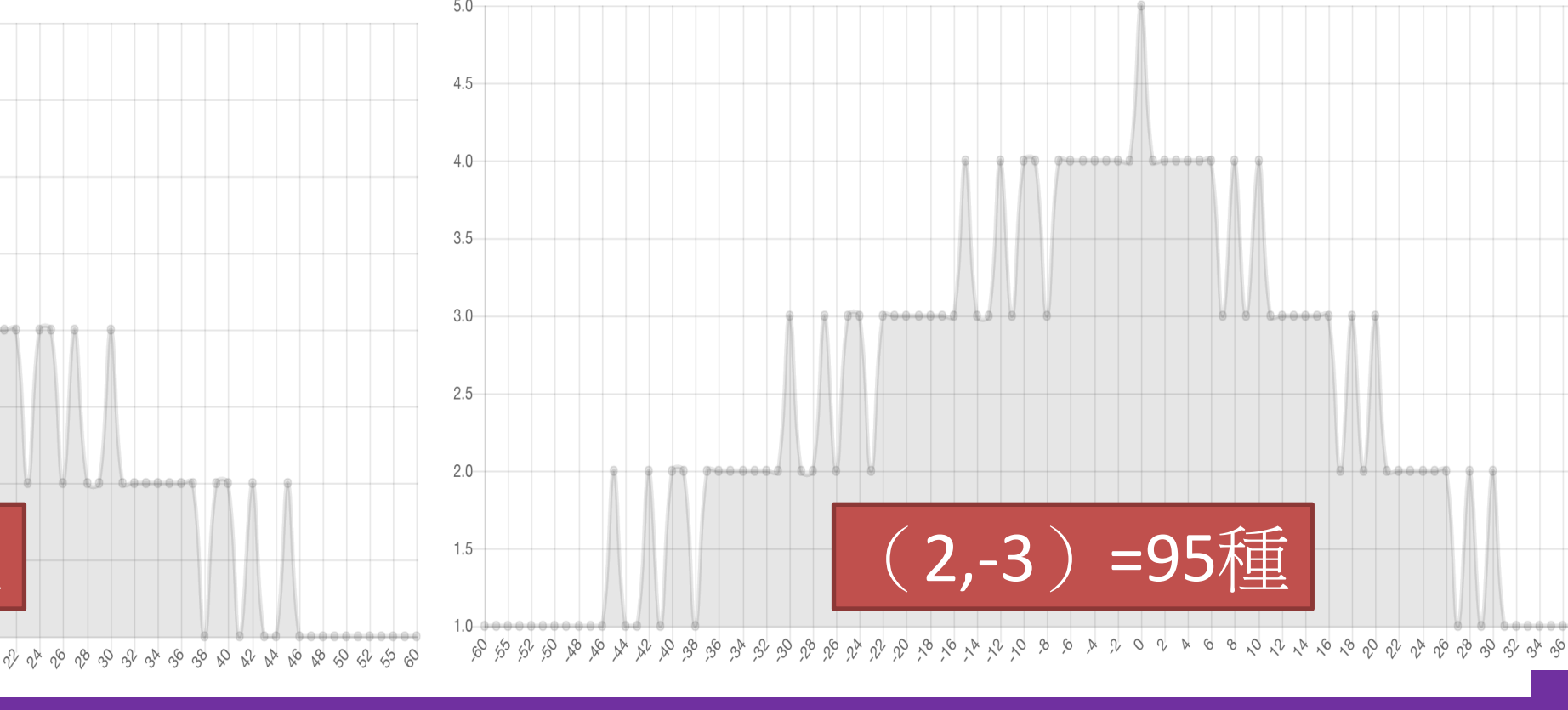
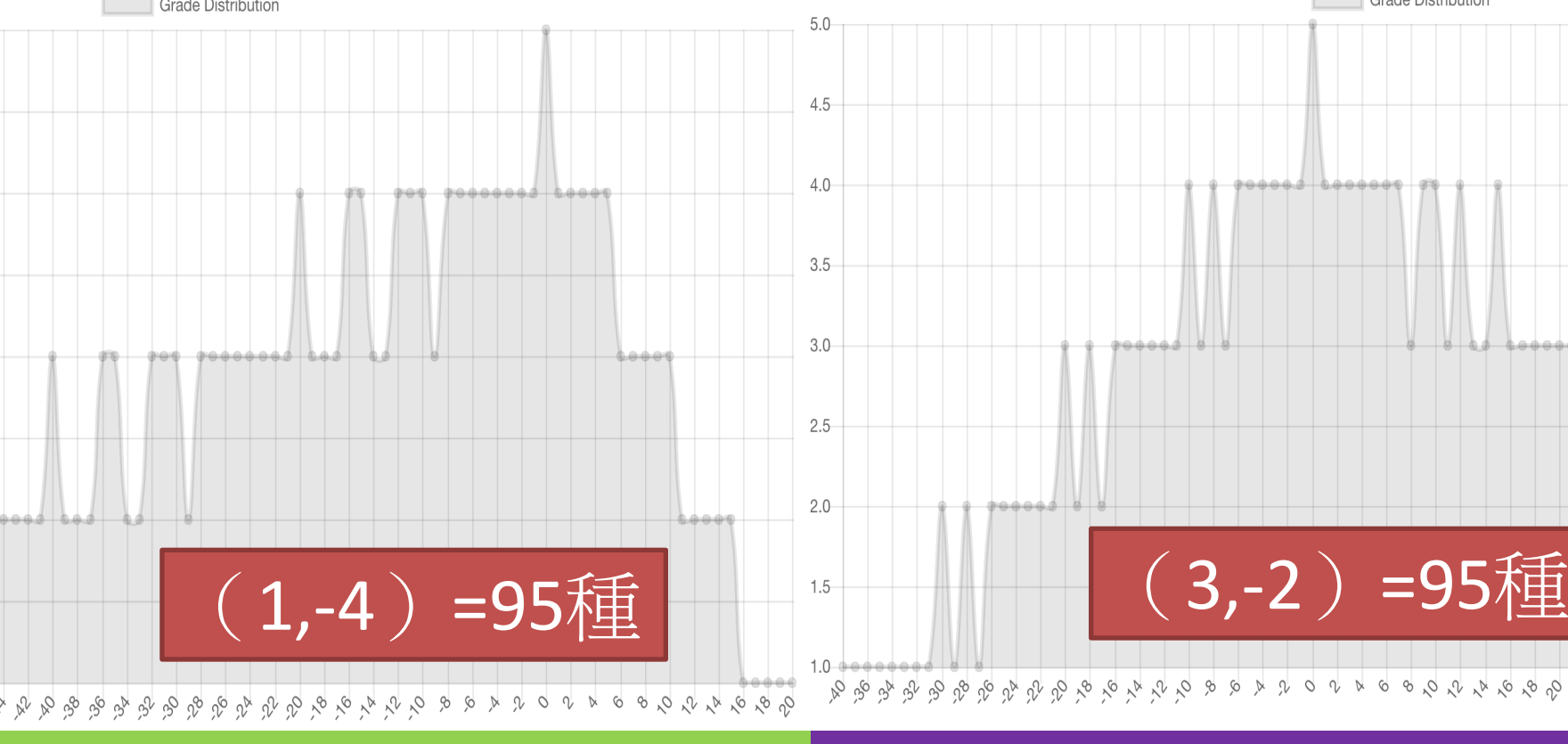
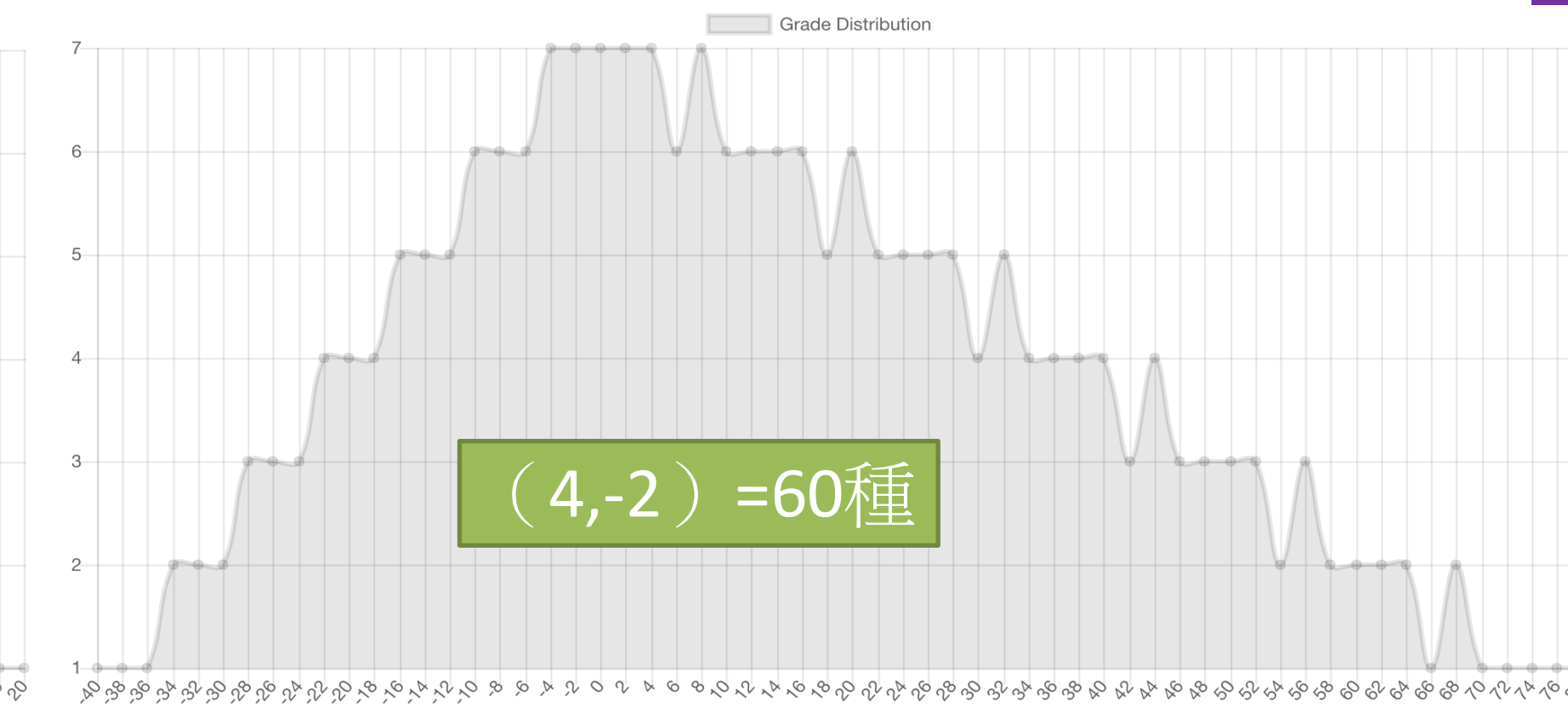
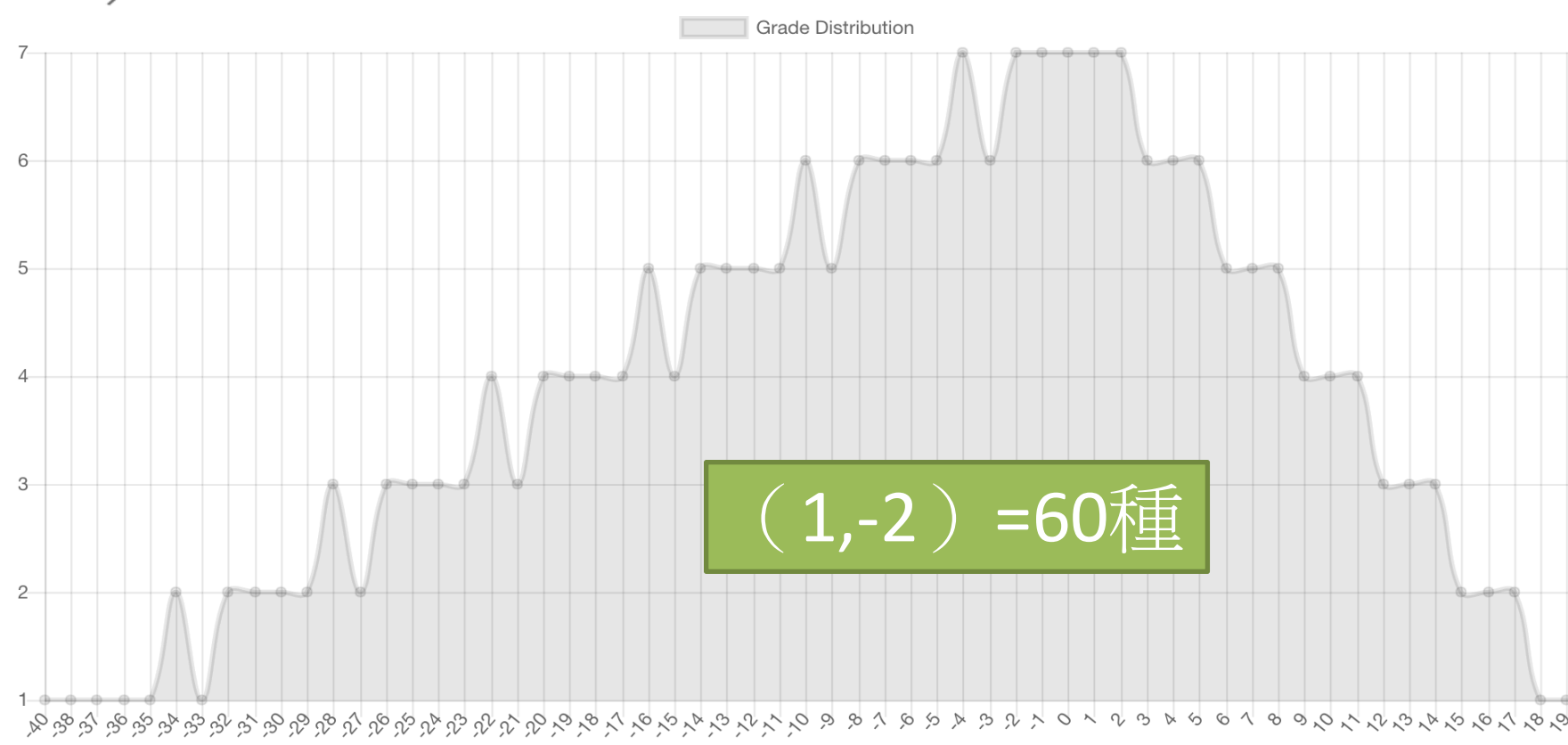
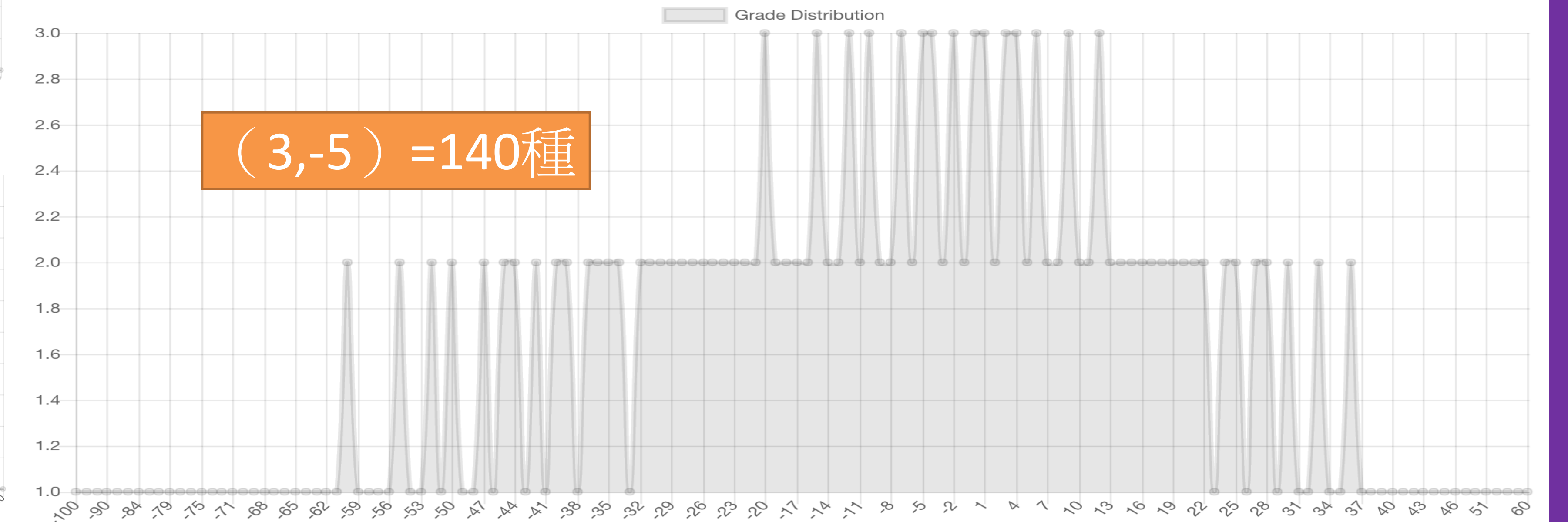
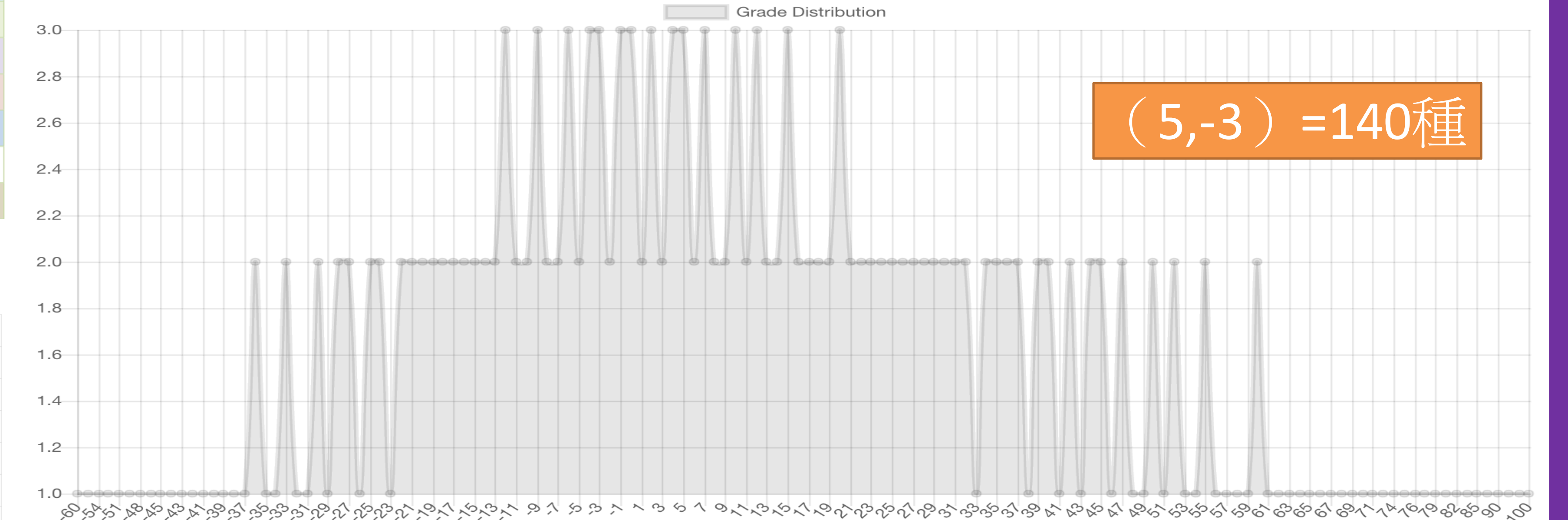
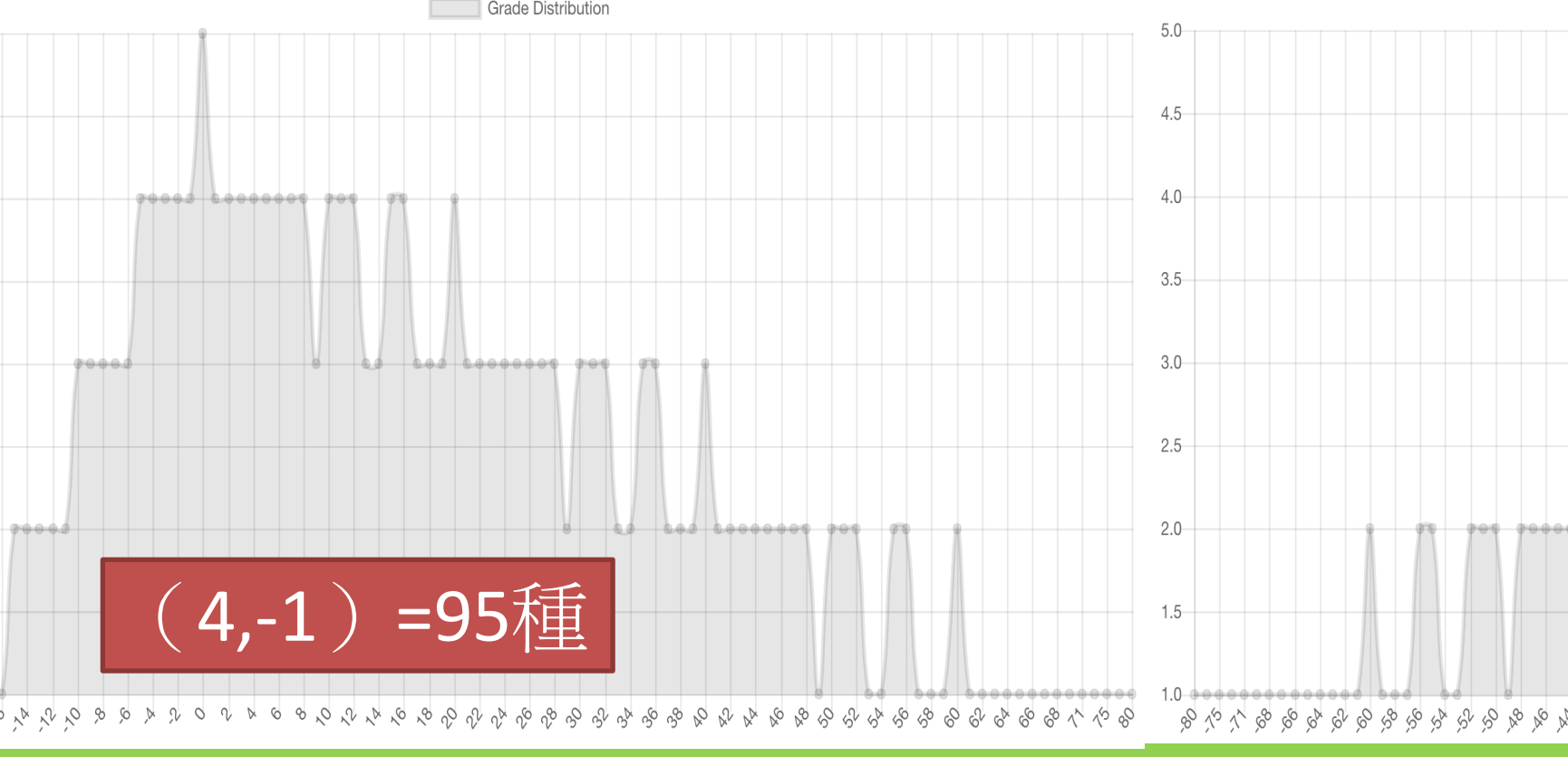
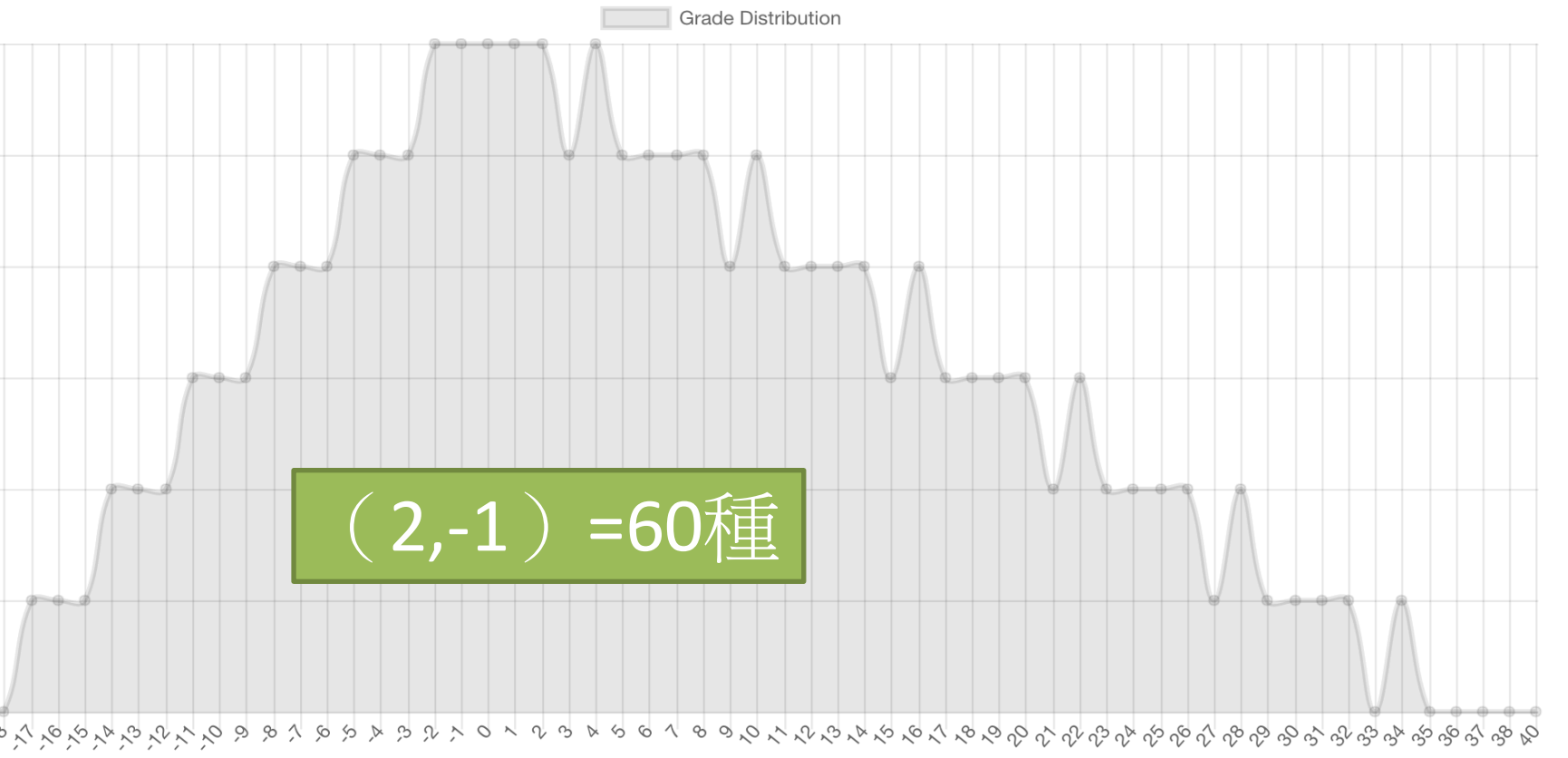
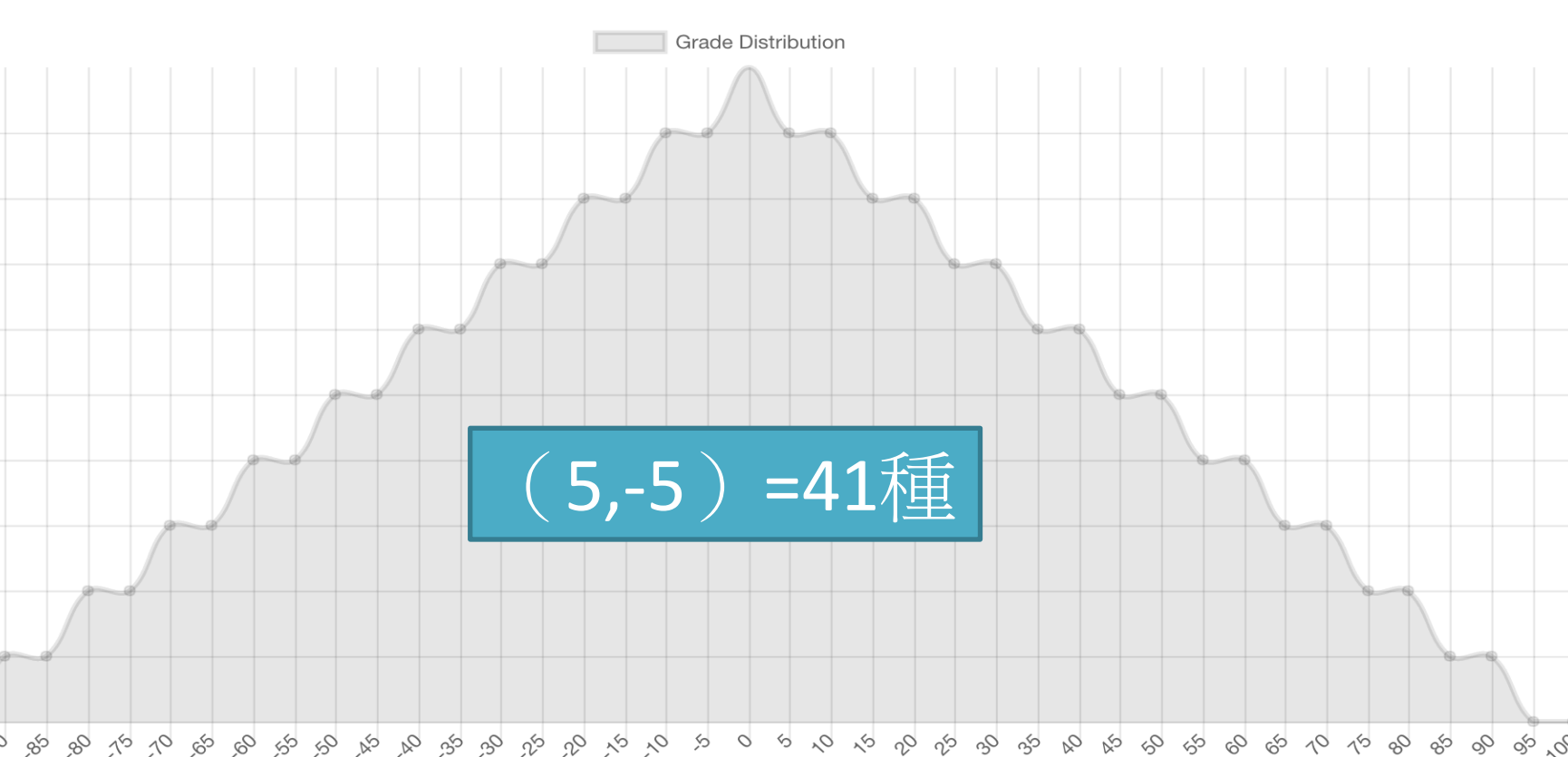
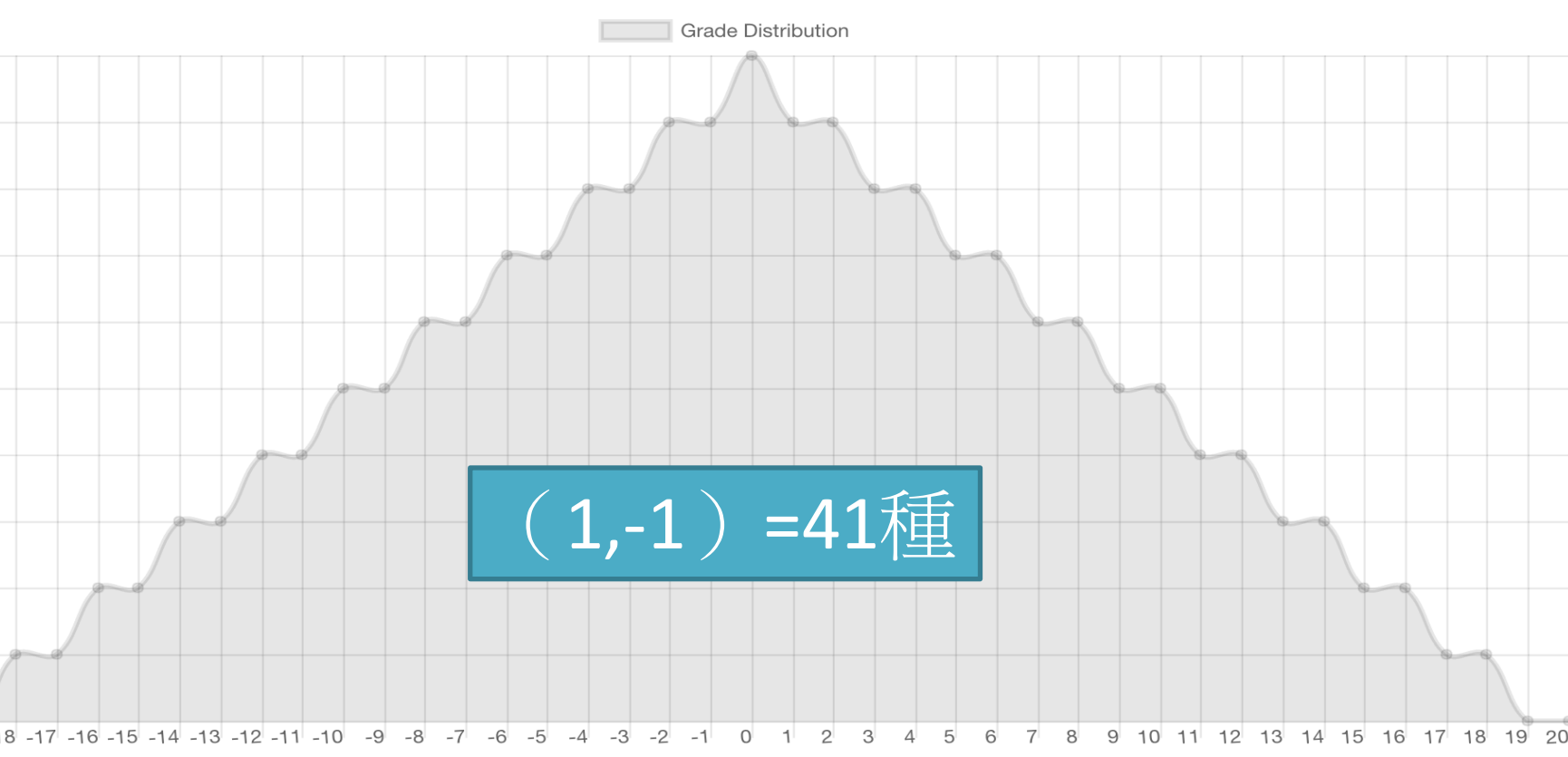
題目數	得分	扣分	最小公倍數	基準分	關鍵分	區塊	有幾種不同總分
20	1	-1	[1,2]=2	20	18	2	41
20	2	-1	[2,3]=6	40	36	3	60
20	3	-1	[3,4]=12	60	48	4	78
20	4	-1	[4,5]=20	80	60	5	95
20	5	-1	[5,6]=30	100	70	6	111
20	1	-2	[1,3]=3	20	17	3	60
20	2	-2	[2,4]=4	40	36	2	41
20	3	-2	[3,5]=15	60	45	5	95
20	4	-2	[4,6]=12	80	68	3	60
20	5	-2	[5,7]=35	100	65	7	126
20	1	-3	[1,4]=4	20	16	4	78
20	2	-3	[2,5]=10	40	30	5	95
20	3	-3	[3,6]=6	60	54	2	41
20	4	-3	[4,7]=28	80	52	7	126
20	5	-3	[5,8]=40	100	60	8	140
20	1	-4	[1,5]=5	20	15	5	95
20	2	-4	[2,6]=6	40	34	3	60
20	3	-4	[3,7]=21	60	39	7	126
20	4	-4	[4,8]=8	80	72	2	41
20	5	-4	[5,9]=45	100	55	9	153
20	1	-5	[1,6]=6	20	14	6	111
20	2	-5	[2,7]=14	40	26	7	126
20	3	-5	[3,8]=24	60	36	8	140
20	4	-5	[4,9]=36	80	44	9	153
20	5	-5	[5,10]=10	100	90	2	41

(a,b)	(a,b)	(a,b)	(a,b)	(a,b)	不同總分的個數
(1,-1)	(2,-2)	(3,-3)	(4,-4)	(5,-5)	41
(2,-1)	(1,-2)	(4,-2)	(2,-4)		60
(3,-1)	(1,-3)				78
(4,-1)	(1,-4)	(3,-2)	(2,-3)		95
(5,-1)	(1,-5)				111
(5,-2)	(2,-5)	(4,-3)	(3,-4)		126
(5,-3)	(3,-5)				140
(5,-4)	(4,-5)				153

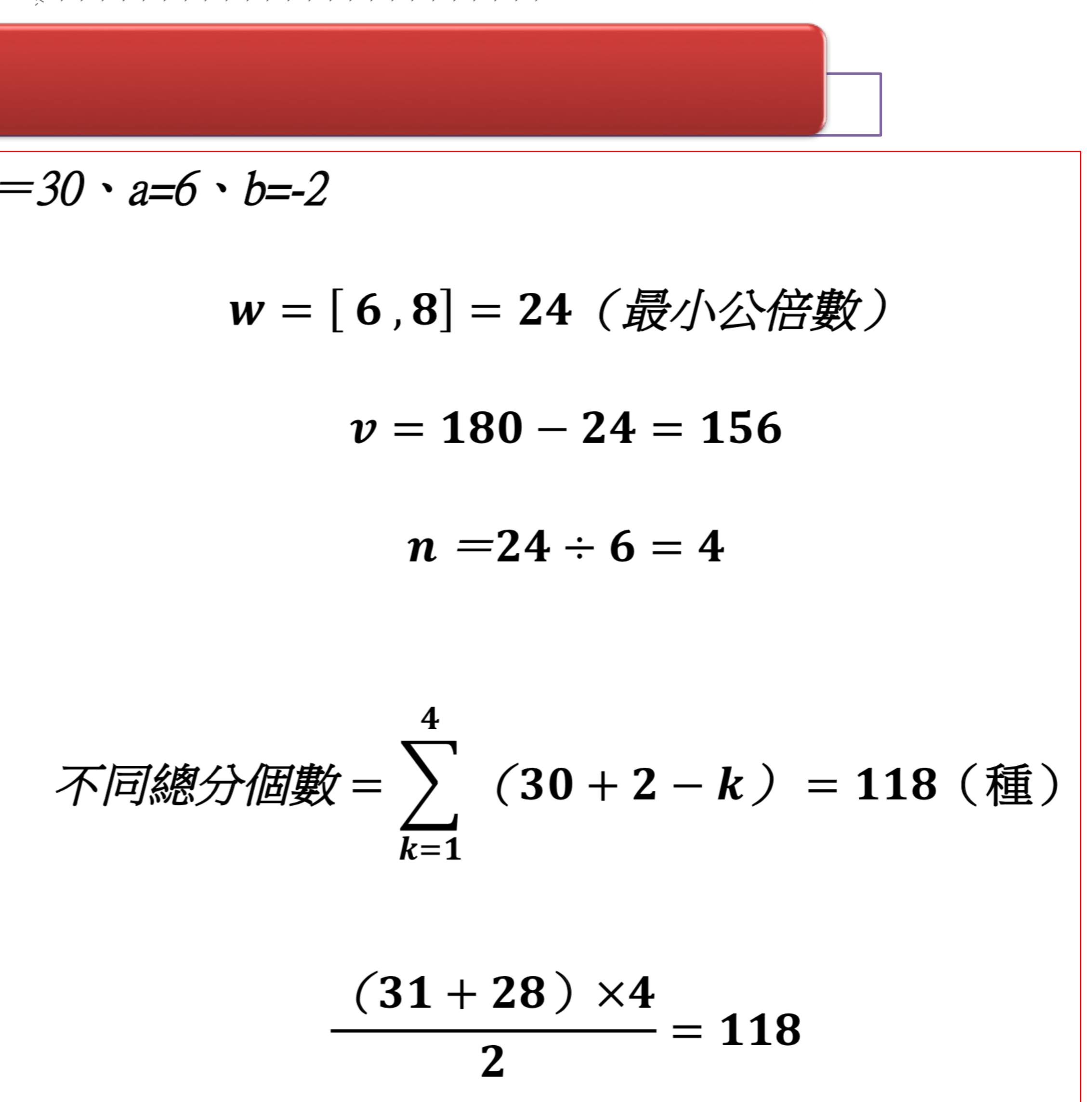
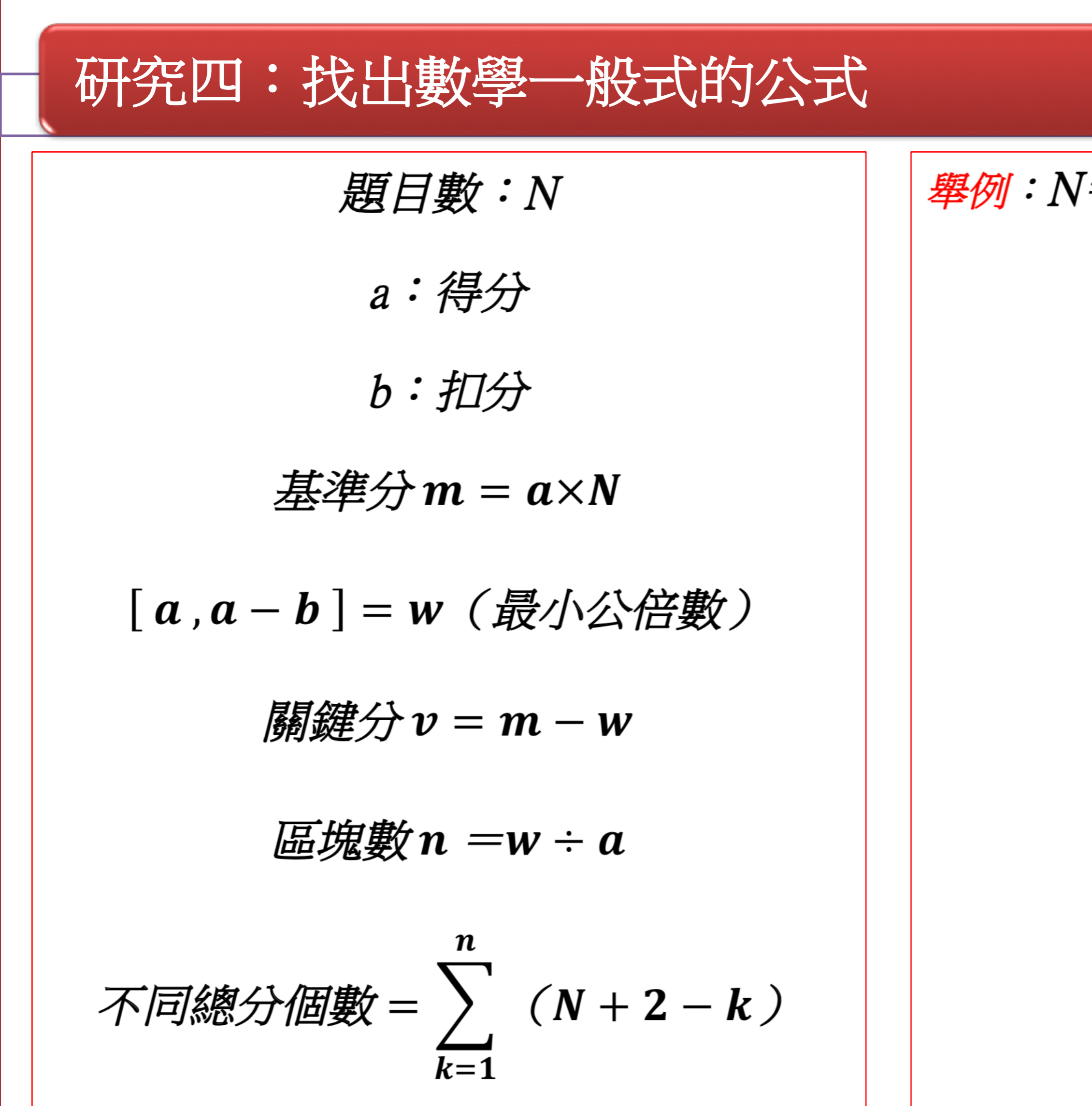
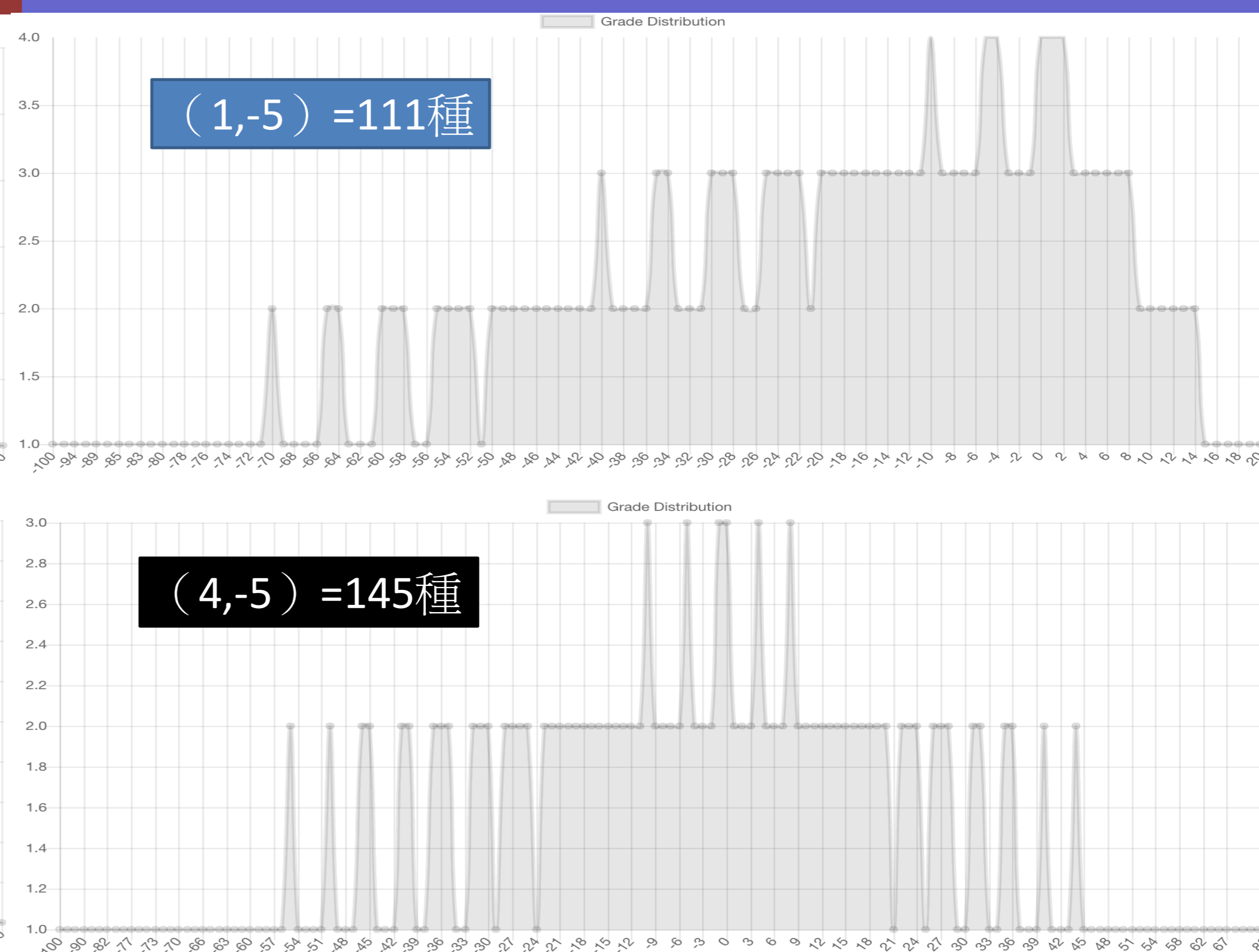
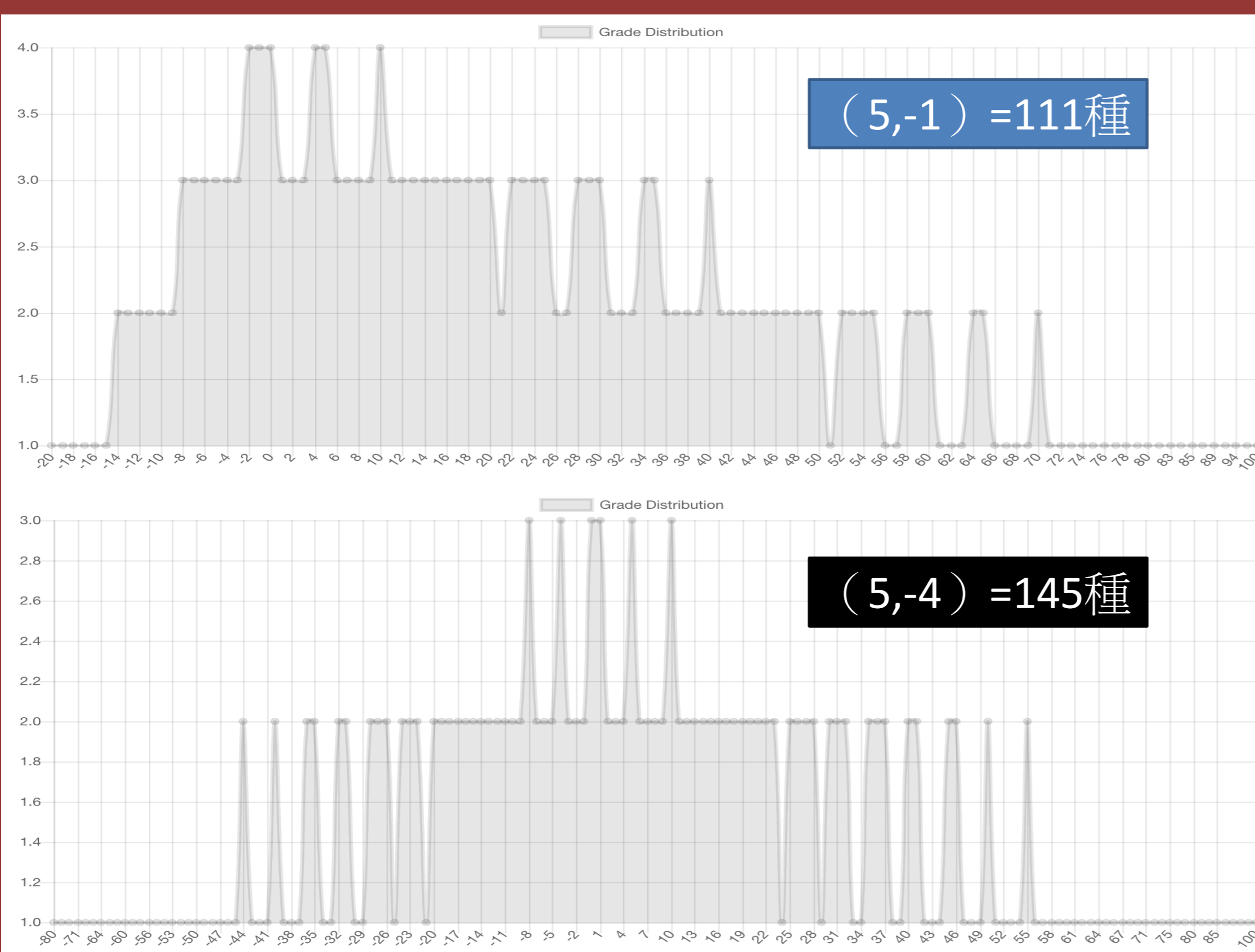
Grade	Occurrence	No Answer	Correct	Wrong
-60	1	0	0	20
-57	1	1	0	19
-54	1	2	0	18
-52	1	0	1	19
-51	1	3	0	17
-49	1	1	1	18
-48	1	4	0	16
-46	1	2	1	17
-45	1	5	0	15
-44	1	0	2	18
-43	1	3	1	16
-42	1	6	0	14
-41	1	1	2	17
-40	1	4	1	15
-39	1	7	0	13
-38	1	2	2	16
-37	1	5	1	14
-36	2	0,8	3,0	17,12
-35	1	3	2	15
-34	1	6	1	13
-33	2	1,9	3,0	16,11
-32	1	4	2	14
-31	1	7	1	12
-30	2	2,10	3,0	15,10
-29	1	5	2	13
-28	2	0,8	4,1	16,11
-27	2	3,11	3,0	14,9
-26	1	6	2	12
-25	2	1,9	4,1	15,10
-24	2	4,12	3,0	13,8
-23	1	7	2	11
-22	2	2,10	4,1	14,9
-21	2	5,13	3,0	12,7
-20	2	0,8	5,2	15,10
-19	2	3,11	4,1	13,8
-18	2	6,14	3,0	11,6
-17	2	1,9	5,2	14,9
-16	2	4,12	4,1	12,7
-15	2	7,15	3,0	10,5
-14	2	2,10	5,2	13,8
-13	2	5,13	4,1	11,6
-12	3	0,8,16	6,3,0	14,9,4
-11	2	3,11	5,2	12,7
-10	2	6,14	4,1	10,5
-9	3	1,9,17	6,3,0	13,8,3
-8	2	4,12	5,2	11,6
-7	2	7,15	4,1	9,4
-6	3	2,10,18	6,3,0	12,7,2

-6	3	2,10,18	6,3,0	12,7,2
-5	2	5,13	5,2	10,5
-4	3	0,8,16	7,4,1	13,8,3
-3	3	3,11,19	6,3,0	11,6,1
-2	2	6,14	5,2	9,4
-1	3	1,9,17	7,4,1	12,7,2
0	3	4,12,20	6,3,0	10,5,0
1	2	7,15	5,2	8,3
2	3	2,10,18	7,4,1	11,6,1
3	2	5,13	6,3	9,4
4	3	0,8,16	8,5,2	12,7,2
5	3	3,11,19	7,4,1	10,5,0
6	2	6,14	6,3	8,3
7	3	1,9,17	8,5,2	11,6,1
8	2	4,12	7,4	9,4
9	2	7,15	6,3	7,2
10	3	2,10,18	8,5,2	10,5,0
11	2	5,13	7,4	8,3
12	3	0,8,16	9,6,3	11,6,1
13	2	3,11	8,5	9,4
14	2	6,14	7,4	7,2
15	3	1,9,17	9,6,3	10,5,0
16	2	4,12	8,5	8,3
17	2	7,15	7,4	6,1
18	2	2,10	9,6	9,4
19	2	5,13	8,5	7,2
20	3	0,8,16	10,7,4	10,5,0
21	2	3,11	9,6	8,3
22	2	6,14	8,5	6,1
23	2	1,9	10,7	9,4
24	2	4,12	9,6	7,2
25	2	7,15	8,5	5,0
26	2	2,10	10,7	8,3
27	2	5,13	9,6	6,1
28	2	0,8	11,8	9,4
29	2	3,11	10,7	7,2
30	2	6,14	9,6	5,0
31	2	1,9	11,8	8,3
32	2	4,12	10,7	6,1
33	1	7	9	4
34	2	2,10	11,8	7,2
35	2	5,13	10,7	5,0
36	2	0,8	12,9	8,3
37	2	3,11	11,8	6,1
38	1	6	10	4
39	2	1,9	12,9	7,2
40	2	4,12	11,8	5,0
41	1	7	10	3

42	2	2,10	12,9	6,1
43	1	5	11	4
44	2	0,8	13,10	7,2
45	2	3,11	12,9	5,0
46	1	6	11	3
47	2	1,9	13,10	6,1
48	1	4	12	4
49	1	7	11	2
50	2	2,10	13,10	5,0
51	1	5	12	3
52	2	0,8	14,11	6,1
53	1	3	13	4
54	1	6	12	2
55	2	1,9	14,11	5,0
56	1	4	13	3
57	1	7	12	1
58	1	2	14	4
59	1	5	13	2
60	2	0,8	15,12	5,0
61	1	3	14	3
62	1	6	13	1
63	1	1	15	4
64	1	4	14	2
65	1	7	13	0
66	1	2	15	3
67	1	5	14	1
68	1	0	16	4
69	1	3	15	2
70	1	6	14	0
71	1	1	16	3
72	1	4	15	1
73	1	7	14	0
74	1	2	16	2
75	1	5	15	0
76	1	0	17	3
77	1	3	16	1
78	1	6	15	0
79	1	1	17	2
80	1	4	16	0
81	1	7	15	0
82	1	2	17	1
83	1	5	16	0
84	1	0	18	2
85	1	3	17	0
86	1	6	16	0
87	1	1	18	1
88	1	4	17	0
89	1	7	16	0
90	1	2	18	0
91	1	5	17	0
92	1	0	19	1
93	1	3	18	0
94	1	6	17	0
95	1	1	19	0
96	1	4	18	0
97	1	7	17	0
98	1	2	19	0
99	1	5	18	0
100	1	0	20	0



(2,-3) = 95種



研究四：找出數學一般式的公式

題目數： N

a ：得分

b ：扣分

基準分 $m = a \times N$

$[a, a - b] = w$ (最小公倍數)

關鍵分 $v = m - w$

區塊數 $n = w \div a$

不同總分個數 = $\sum_{k=1}^n (N + 2 - k)$

舉例： $N=30$ 、 $a=6$ 、 $b=-2$

$w = [6, 8] = 24$ (最小公倍數)

$v = 180 - 24 = 156$

$n = 24 \div 6 = 4$

不同總分個數 = $\sum_{k=1}^4 (30 + 2 - k) = 118$ (種)

$\frac{(31 + 28) \times 4}{2} = 118$

研究五：探討倒扣機制和猜題策略的關係

◆ 情況一：得分大於倒扣分-原本的題目： $N=20$ 、 $a=5$ 、 $b=-3$ 。

「目前肯定正確的題目有 14 題，還剩下 6 題不確定，是否要猜題？要猜幾題？」

60 ≤ 分數 ≤ 80

猜題題數	答對 x	答錯 y	計分	總分
6	6	0	30	100
	5	1	22	92
	4	2	14	84
	3	3	6	76
	2	4	-2	68
	1	5	-10	60
	0	6	-18	52
5	5	0	25	95
	4	1	17	87
	3	2	9	79
	2	3	1	71
	1	4	-7	63
	0	5	-15	55
4	4	0	20	90
	3	1	12	82
	2	2	4	74
	1	3	-4	66
	0	4	-12	58
3	3	0	15	85
	2	1	7	77
	1	2	-1	69
	0	3	-9	61
2	2	0	10	80
	1	1	2	72
	0	2	-6	64
1	1	0	5	75
	0	1	-3	67
0	0	0	0	70

◆ 情況二：正分等於倒扣分-原本的題目： $N=20$ 、 $a=5$ 、 $b=-5$ 。

「目前肯定正確的題目有 14 題，還剩下 6 題不確定，是否要猜題？要猜幾題？」

60 ≤ 分數 ≤ 80

猜題題數	答對 x	答錯 y	計分	總分
6	6	0	30	100
	5	1	20	90
	4	2	10	80
	3	3	0	70
	2	4	-10	60
	1	5	-20	50
	0	6	-30	40
5	5	0	25	95
	4	1	15	85
	3	2	5	75
	2	3	-5	65
	1	4	-15	55
	0	5	-25	45
4	4	0	20	90
	3	1	10	80
	2	2	0	70
	1	3	-10	60
	0	4	-20	50
3	3	0	15	85
	2	1	5	75
	1	2	-5	65
	0	3	-15	55
2	2	0	10	80
	1	1	0	70
	0	2	-10	60
1	1	0	5	75
	0	1	-5	65
0	0	0	0	70

◆ 情況三：正分小於倒扣分-原本的題目： $N=20$ 、 $a=5$ 、 $b=-7$ 。

「目前肯定正確的題目有 14 題，還剩下 6 題不確定，是否要猜題？要猜幾題？」

60 ≤ 分數 ≤ 80

猜題題數	答對 x	答錯 y	計分	總分
6	6	0	30	100
	5	1	19	89
	4	2	8	78
	3	3	-3	67
	2	4	-14	56
	1	5	-25	45
	0	6	-36	34
5	5	0	25	95
	4	1	14	84
	3	2	3	73
	2	3	-8	62
	1	4	-19	51
	0	5	-30	40
4	4	0	20	90
	3	1	9	79
	2	2	-2	68
	1	3	-13	57
	0	4	-24	46
3	3	0	15	85
	2	1	4	74
	1	2	-7	63
	0	3	-18	52
2	2	0	10	80
	1	1	-1	69
	0	2	-12	58
1	1	0	5	75
	0	1	-6	64
0	0	0	0	70

陸 討論

- 研究一**：因為原本的題目是答對一題得 5 分，答錯要倒扣 3 分，分數會以 8 分遞減，即 $5 - (-3) = 8$ 。若是答對 6 分，答錯倒扣 2 分，分數一樣是以 8 分遞減。在不考慮重複分數的情況下，總共會有 231 種總分。
- 研究二**：根據我們整理出來的數據資訊，我們發現到只要找到「關鍵分」，就可以知道總共會有幾種不同的總分，因為在關鍵分後出現的總分，都是前面出現過的分數。至於「關鍵分」的找法，則是找出 a 和 $a-b$ 的最小公倍數。在 $N=20$ 、 $a=5$ 、 $b=-3$ 的題目中，關鍵分是 60 分，不同總分的個數會有 140 種。
- 研究三**：我們模擬不同得分和扣分，找到其中的規律和關係，另外，我們還製作出現次數的統計圖表，發現相同次數的得分扣分，其折線圖都會有「對稱」的情況。圖形的頂端都會有 0 分的情況，0 分的情況最多種。
- 研究四**：利用研究的數據，我們找到計算有幾種不同總分的公式，只要知道題目的題數 N 、得分 a 和扣分 b ，我們就可以找出共有幾種不同的總分。
- 研究五**：了解得分和扣分的關係後，我們試著探討倒扣機制和猜題機制之間的關係，可以根據有把握和沒把握的題目，以自己所設定的目標分數，來決定是否要猜題，如果要猜題，要猜幾題呢？

柒 結論

基準分 $m = a \times N$

$[a, a - b] = w$ (最小公倍數)

關鍵分 $v = m - w$

區塊數 $n = w \div a$

不同總分個數 = $\sum_{k=1}^n (N + 2 - k)$

捌 參考資料

翰林文教事業 (2019)。
國小數學第十一冊第一單元最大公因數和最小公倍數。
翰林文教事業 (2018)。
國小數學第十冊第五單元符號代表數。