中華民國第59屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080408

新的角度看 Qwirkle--形色九連塊的列舉

學校名稱：桃園市大溪區仁和國民小學

作者：	指導老師：
小五 陳政諺	林徹輝
小五 林莉潔	鄧達鈞
小五 王璟評	
小五 歐以諾	
小五 周愷若	

關鍵詞：背圖、外接長方形

摘要

在接觸了 Qwirkle 之後，我們開始研究如何列舉出形色九連塊。我們發現不管是科展歷屆作品或是網路上的論文資料，大部分都夠過圖文操作來窮舉所有多連塊組合，而且也沒有人將多連塊加上 Qwirkle 的規則限制，因此開始了這次的研究。研究過程中，我們發現形狀背圖和顏色背圖的列舉是找出形色九連塊所有組合的關鍵。透過背圖和外接長方形的利用，我們發展了 3 種方法來列舉所有的組合。最後，我們找出了所有形色九連塊並統整了可連接數字與不可連接數字的變化。

壹、研究動機

五年級的時候我們接觸到了 Qwirkl 形色棋的遊戲， 發現和之前玩的五連塊遊戲不一樣，除了正方形數量變多之外還要考慮到形狀與顏色。根據規則，左邊的第一塊決定了整列的顏色，上面的第一塊決定了整排的形狀。看著玩遊戲時排出來的多連塊，似乎有些說不清的規律，如果將全部的形狀列出來一定會很有趣，所以我們試著用不同的方法找出形色九連塊全部的組合。為了更加了解形色多連塊，我們上網搜尋了歷屆科展與多連塊相關的作品，後來發現雖然有人討論多連塊，但非常少部分著墨於多連塊的列舉，也完全沒有提到將多連塊加上形況與顏色和規則限制的結果。為了解加入形狀和顏色的關係後對多連塊列舉產生的影響，我們開始了這次的形色九連塊研究。

貳、研究目的

一、透過背圖與外接長方形找到形色九連塊的組合

二、探討形狀背圖和顏色背圖對九連塊組合的影響

(一)找到九連塊所有形狀背圖組合

(二)瞭解如何利用形狀背圖轉顏色背圖

三、利用列舉與刪除數字找到形色九連塊的組合

四、透過數字排列組合找到形色九連塊的組合

五、找到形狀背圖間的連貫性

參、研究工具

Qwirkle 形色棋、紀錄紙、Excel 巨集、電腦

肆、研究方法

一、 解說與文獻探討

(一)遊戲規則

1. 任選一塊 Qwirkle 棋開始放，每次放一顆，放到 9 塊正方形都放完為止

2. 所有放的 Qwirkle 棋都必須是和之前的 Qwirkle 棋同顏色但不同形狀或同形狀但不同顏色，也就是說同一列顏色皆相同，形狀皆不同，同一排顏色皆不同，形狀皆相同。

 	相同形狀不會接連 2 排
	相同顏色不會接連 2 列

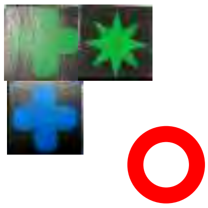
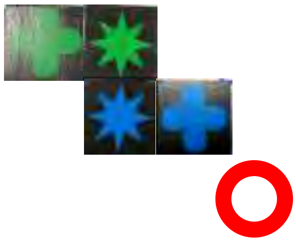
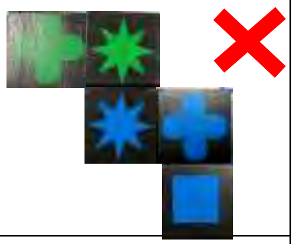
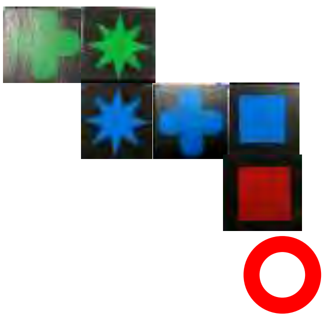
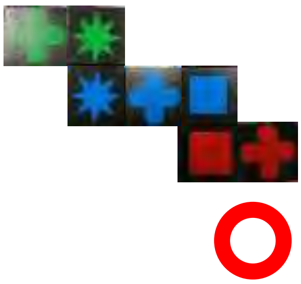
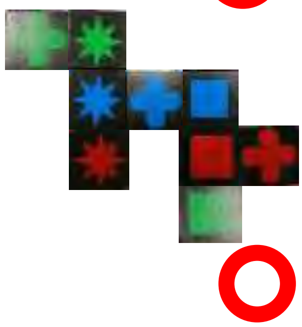
3. 共有 3 種顏色與 3 種形狀，所以全部有九塊。

4. 為了方便記錄，我們所有的多連塊都由右向左，由上而下發展，排列方式列舉如下

<table>
<tr><td>第 1 塊</td><td>第 2 塊</td><td>第 3 塊</td><td>第 4 塊</td></tr>
<tr>
<td></td>
<td>

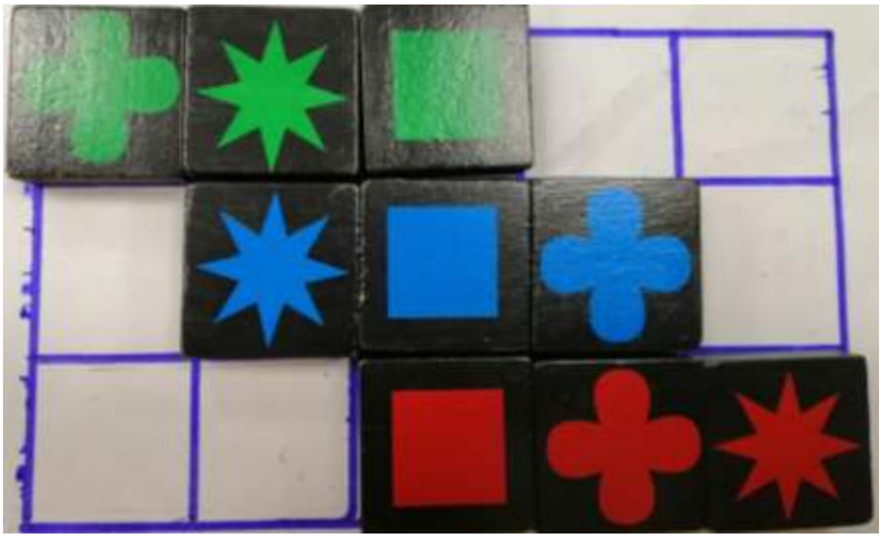
錯誤說明：
相同形狀不會接連 2 排

錯誤說明：
相同顏色不會接連 2 列

錯誤說明：
顏色與形狀皆不同</td>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr><td>第 5 塊</td><td>第 6 塊</td><td>第 7 塊</td><td>第 8、9 塊</td></tr>
<tr>
<td>
錯誤說明：
相同顏色不會接連
2 列
</td>
<td></td>
<td></td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

(二)名詞解說

1.外接長方形：每個多連塊都一個外接長方形，以下圖為例，我們可以看到此多連塊最外面的邊可以形成 3x5 的外接長方形。



2.背圖：根據最重要的規則 1，可以知道最左邊的正方形決定了整列的顏色，最上面的正方形決定了整排的形狀。所以只要找出形狀和顏色的排列，我們就可以找到外接正方形中的多連塊數量與形狀。

(三)文獻探討

1.科展中提到的多連塊：

在歷屆科展中有許多作品提到多連塊，我們找了三個具代表性的例子與我們的作品進行比較，如下

作品名稱	屆次	多連塊相關性
五方連塊之乾坤大挪移武功祕笈	50 屆	1.探討五連塊的變化圖形 2.統整五連塊圖形的角、邊、頂點數
天羅地網尋芳蹤 只為盡訪六連塊	52 屆	透過窮舉法、圖形操作找到六連塊所有組合方式
多方塊的塗色問題	56 屆	給定一個多方塊，找出 n 的最小值使得在無限大的棋盤上，可以塗上 n 種顏色並且使多方塊沿格線 無論如何放置，都不會蓋到重複的顏色。
新的角度看 Qwirkle--形色九連塊的列舉	59 屆	1.幫連塊加上形狀和顏色的規則 1.透過數字與形狀排列找到所有外接長方形背圖 2.透過背圖列舉形色多連塊 3.透過 3 種方法找到所有的九連塊組合

2. 在比較過後我們發現：

(1)多數的多連塊列舉方式都要透過圖形操作，因此我們思考如果利用數字化的方式，是否可以更快速方便的找出多連塊組合。

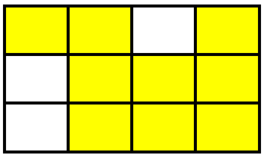
(2)在科展作品中幾乎沒有人試著列舉有條件、數目較大的多連塊，試著找出形色九連塊的全部組合會是很棒的挑戰。

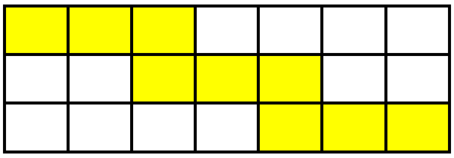
二、外接長方形：

(一)外接長方形的介紹與利用：

1. 外接長方形介紹：每個多連塊都有外接長方形，外接長方形的長為多連塊的最左邊到最右邊，外接長方形的寬為多連塊的最上面到最下面，舉例如下

(1)4*3 的外接長方形(2)7*3 的外接長方形





2. 外接長方形利用

(二)形狀背圖的討論：

在決定要尋找幾乘幾的外接長方形中的多連塊後，我們可以透過形狀背圖的的設定來決定外接長方形中多連塊的形狀排列。

1. 形狀背圖的定義：在九連塊中有三種形狀每種形狀都有三塊，我們以 a，b，c 來代表不同形狀。以三排為例，(Sa, Sb, Sc)為形狀背圖，Sa 表示第一排的形狀為 a，Sb 表示第二排形狀為 b…其他類推。

(1)形狀背圖舉例

形狀背圖(Sa, Sb, Sa, Sc)

a	b	a	c
a	b	a	c
a	b	a	c

形狀背圖(Sa, Sb, Sc, Sa, Sb, Sc, Sa)

a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a

(2)錯誤形狀背圖舉例

a	b	a	c
a	b	a	c
a	b	a	c

左圖 a 的形狀背圖有 4 個，c 的形狀背圖則有 2 個，並非 3 個。

a	a	c	a	b	c	b
a	a	c	a	b	c	b
a	a	c	a	b	c	b

根據規則 2 個形狀一樣的不會連 2 排，所以錯誤。

2. 形狀背圖的列舉：

(1)避免重複情況：以外接長方形長為 5 格，有 3 格形狀相同，另外 2 個形狀各異的形狀背圖為例，我們先列出全部的可能

形狀數量	產生排列									
3a1b1c	aaabc	aaacb	aabac	aabca	aacab	aacba	abaac	abaca	abcaa	acaab
	acaba	acbaa	baaac	baaca	bacaa	bcaaa	caaab	caaba	cabaa	cbaaa
1a3b1c	abbbc	abbcb	abcbb	acbbb	babbc	babcb	bacbb	bbabc	bbacb	bbbac
	bbbca	bbcab	bbcba	bcabb	bcbab	bcbba	cabbb	cbabb	cbbab	cbbba
1a1b3c	abccc	acbcc	accbc	acccb	baccc	bcacc	bccac	bccca	cabcc	cacbc
	caccb	cbacc	cbcac	cbcca	ccabc	ccacb	ccbac	ccbca	cccab	cccba

再刪掉不能的，就剩下表的形狀背圖

形狀數量	3a1b1c	1a3b1c	1a1b3c
產生背圖	abaca	babcb	cacbc
	acaba	bcbab	cbcac

從上表可以很明顯看到，雖然形狀數量不同，但經過 abc 的轉換後，會產生一樣的背圖。為了避免重複，規定 a 的數量>b 的數量>c 的數量，依此類推

(2)兩種形狀兩種顏色的形狀背圖

外接長方形的長	2	3	4
	ab	2ab→aba	2a2b→abab

(3) 三種形狀三種顏色的形狀背圖背圖

外接長方形的長	3	4	5	6	7
形狀背圖各排數目	1a1b1c	2a1b1c	3a1b1c 2a2b1c	3a2b1c 2a2b2c	3a3b1c 3a2b2c

我們先列出全部可能的狀況：

各排數目	1a1b1c	2a1b1c	3a1b1c	2a2b1c	3a2b1c	2a2b2c	3a3b1c
形狀	abc	abac	abaca	ababc	ababac	aabbcc	aaabbbc
排列		abca	acaba	abacb	ababca	aabcbc	aaabbcb
		acab		abcab	abacab	aabccb	aaabcbb
		acba		abcba	abacba	aacbbc	aaacbbb
		baca		acbab	abcaba	aacbcb	aababbc
		caba		babac	acabab	aaccbb	aababcb

→刪掉不可能的情況

各排數目	1a1b1c	2a1b1c	3a1b1c	2a2b1c	3a2b1c	2a2b2c	3a3b1c
形狀	abc	abaca	ababc	ababac	abacbc	abababc	ababcac
排列		acaba	abacb	ababca	abcabc	abababcb	abacabc
			abcab	abacab	abcacb	ababcab	abacacb
			abcba	abacba	abcbac	ababcba	abacbac
			acbab	abcaba	abcbca	abacbab	abacbca
			babac	acabab	acabcb	abcabab	abcabac
			babca	acbaba	acbabc	abcbaba	abcabca
			bacab	babaca	acbacb	acbabab	abcacab
			bacba	bacaba	acbcab	bababac	abcacba

→刪掉左右重複(在特例中發現封閉性)，以 3a2b1c 為例

原本						
a	b	a	b	c	a	c
a	b	a	c	a	b	c
a	b	a	c	a	c	b
a	b	a	c	b	a	c
a	b	a	c	b	c	a
a	b	c	a	b	a	c
a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	c	a	b
a	b	c	a	c	b	a
a	b	c	b	a	c	a
a	c	a	b	a	b	c
a	c	a	b	a	c	b

左右顛倒							結果
c	a	c	b	a	b	a	cacbaba
c	b	a	c	a	b	a	cbacaba
b	c	a	c	a	b	a	bcacaba
c	a	b	c	a	b	a	cabcaba
a	c	b	c	a	b	a	acbcaba
c	a	b	a	c	b	a	cabacba
a	c	b	a	c	b	a	acbacba
b	a	c	a	c	b	a	bacacba
a	b	c	a	c	b	a	abcacba
a	c	a	b	c	b	a	acabcba
c	b	a	b	a	c	a	cbabaca
b	c	a	b	a	c	a	bcabaca

原本	左右顛倒
ababcac	cacbaba
abacabc	cbacaba
abacacb	bcacaba
abacbac	cabcaba
abacbca	acbcaba
abcabac	cabacba
abcabca	acbacba
abcacab	bacacba
abcacba	abcacba
abcbaca	acabcba
acababc	cbabaca
acabacb	bcabaca

→刪掉 abc 重複，以 3a2b2c 為例

原本	ababcac	abacabc	abacacb	abacbac	abacbca	abcabac	abcabca	abcacab	abcacba	abcbaca	babacac	bacabac	bacacab
b、c交換	acacbab	acabacb	acababc	acabcab	acabcba	acbacab	acbacba	acbabac	acbabca	acbcaba	cacabab	cabacab	cababac

根據上面的步驟我們可以得到所有的形狀背圖組合

1a1b1c	2a1b1c	3a1b1c	2a2b1c	3a2b1c	2a2b2c	3a3b1c	3a2b2c
abc	abca abac	abaca	ababc abacb abcab abcba	ababac ababca abacab abacba acabab	abacbc abcabc abcacb abcbca	abcabab acbabab	ababcac abacabc abacacb abacbac abacbca abcabac abcabca abcacab abcacba abcbaca babacac bacabac bacacab

(三)顏色背圖的討論：

1. 顏色背圖的定義：我們以甲，乙，丙來代表不同顏色。以三列為例，(M 甲，M 乙，M 丙)^{T}為顏色背圖，M 甲表示第一列的形狀為甲，M 乙表示第二列形狀為乙…其他類推。

（1） 顏色背圖舉例

顏色背圖(M 甲，M 乙，M 丙)^T

甲	甲	甲	甲	甲
乙	乙	乙	乙	乙
丙	丙	丙	丙	丙

顏色背圖(M 甲，M 乙，M 丙，M 甲)^T

甲	甲	甲	甲
乙	乙	乙	乙
丙	丙	丙	丙
甲	甲	甲	甲

(2)經過列舉後，我們發現形狀背圖的排列和顏色背圖的排列相似，可互相轉換。

轉換方式為 Sa→M 甲，Sb→M 乙，Sc→M 丙，轉換結果以下面為例

(Sa, Sb, Sc)→(M 甲，M 乙，M 丙)^T

(Sa, Sb, Sa, Sc)→(M 甲，M 乙，M 甲，M 丙)^T

(3) 為了方便記錄，我們將整排的方塊以二進位做紀錄。數字 2^0、2^1、2^2…代表顏色。

2^i 代表第 i+1 列的顏色，例如 *M 甲=2^0 或 2^3 代表第 1 列和第 4 的顏色為甲。*

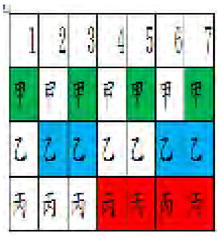
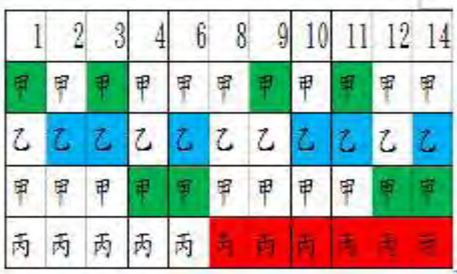
以 3 格產生的數字 1~7 為例

顏色→數字	數字	方塊顏色		
	2^0	甲	甲	甲
	2^1	乙	乙	乙
	2^2	丙	丙	丙

經過二進位組合產生數字所代表顏色圖案

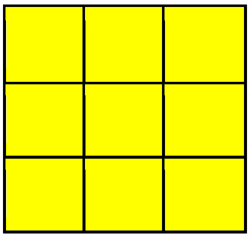
數字	1	2	3	4	5	6	7
方塊形狀	甲	甲	甲	甲	甲	甲	甲
	乙	乙	乙	乙	乙	乙	乙
	丙	丙	丙	丙	丙	丙	丙

(4)不同的顏色背圖可以產生不同的數字，以下表為例

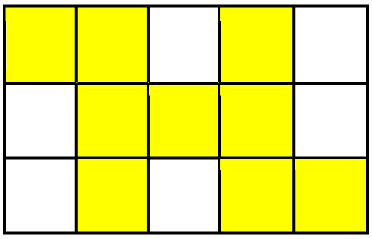
<table>
<tr><td>外接長方形的寬</td><td>3 格</td><td>4 格</td><td>4 格</td></tr>
<tr><td>顏色轉數字</td><td>M 甲=2^0,
M 乙=2^1,
M 丙=2^2</td><td>M 甲=2^0 或 2^3,
M 乙=2^1,
M 丙=2^2</td><td>M 甲=2^0 或 2^2,
M 乙=2^1，
M 丙=2^3</td></tr>
<tr><td>顏色背圖</td><td>(M 甲，M 乙，M 丙)^T</td><td>(M 甲，M 乙，M 丙，M 甲)^T</td><td>(M 甲，M 乙，M 甲，M 丙)^T</td></tr>
<tr><td>轉換過程</td><td>
<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td></tr><tr><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td></tr><tr><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td></tr></table></td><td>
<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>10</td><td>12</td><td>14</td></tr><tr><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td></tr><tr><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td></tr><tr><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td></tr><tr><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td></tr></table></td><td>
<table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>14</td></tr><tr><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td></tr><tr><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td><td>乙</td></tr><tr><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td><td>甲</td></tr><tr><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td><td>丙</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>可產生數字背圖</td><td>(1，2，3，4，5，6，7)共 7 排</td><td>(1，2，3，4、5，6，7，8，10，12，14) 共 11</td><td>(1，2，3，4，6，8，9，10，11，12，14) 共 11 排</td></tr>
</table>

(5)根據上面的二進位紀錄法，我們可以用數字紀錄***整個塊的形狀***，以下舉 2 個例子

(1)(7，7，7)(外接正方形為 3x3)



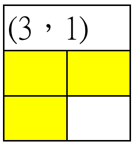
(2)(1，7，2，7，4)(外接正方形為 3x5)

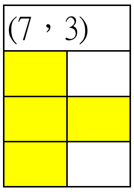


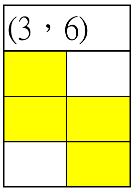
（四)二進位相接數字的分類

1. 可相接數字舉例

(1)可連接圖形：可連接的圖形每塊正方形一定有一邊和其他正方形相連，且相鄰正方形間不會有間隔，如下舉例 3 圖





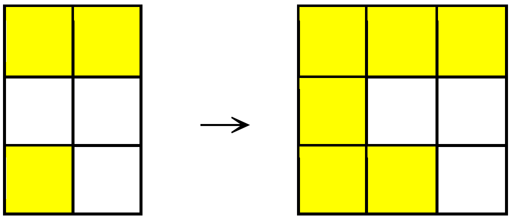


(2)可相接數字表格：我們將 1~7 可相接數字表格整理如下

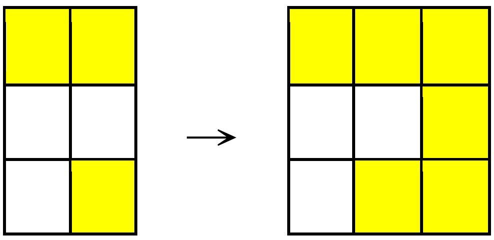
數字	1	2	3	4	5	6	7
可相接數字	1, 3, 7	2, 3, 6, 7	1, 3, 6, 7	4, 6, 7	7	2, 3, 4, 7	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

2. 可能可以相接數字舉例：

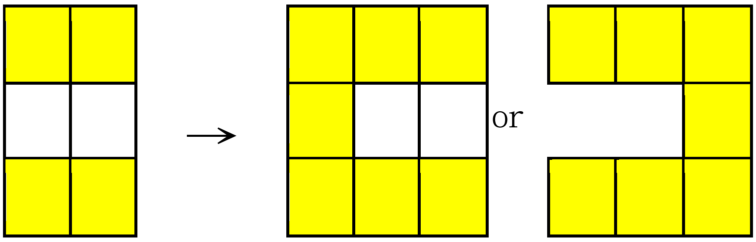
(1)左邊收縮：以數字(5，1)為例，若左邊加數字 7 成為(7，5，1)則可以成為多連塊



(2)右邊收縮：以數字(1，5)為例，若右邊加數字 7 成為(1，5，7)則可以成為多連塊

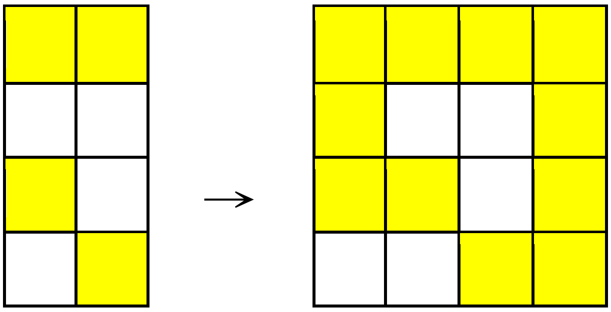


(3)兩邊皆可收縮：以數字(5，5)為例，左、右邊加上數字 7 皆可以成為多連塊



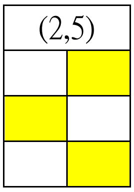
(4)兩邊必須收縮：以數字(5，9)為例，若左邊加上數字 7，右邊加上數字 15，

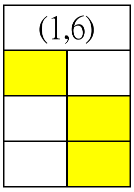
成為 7，5，9，14)則可以成為多連塊。

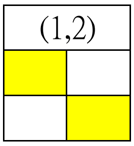


3. 不能使用

(1)絕對不行：完全沒有任何邊相接的圖形，就是絕對不行，如下 3 圖



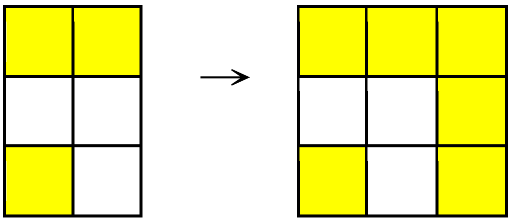




(2)可能可以的另一半：可能可以相接數字收縮方向不對就會變成不行。

以數字(5，1)為例，若左邊加數字 7 成為(7，5，1)則可以成為多連塊，右邊加數字 7 成為

(5，1，7)則不可以成為多連塊。



不只是(5，1，7)則不可以成為多連塊，(5，1，1) ~(5，1，7)則不可以成為多連塊。

4. 在不同格數中，可行、不可行、可能可行各有幾種，以 3 格為例，連接情況定義如下：

情況 F：要有一方完全連接才有

情況 G：沒有任何連接則

情況 H：若有部分連接則

情況 I：數字大到小有條件可接

情況 J：數字小到大有條件可接

(1)連接數字情況表

數字	連接數字	情況	數字	連接數字	情況	數字	連接數字	情況	數字	連接數字	情況	數字	連接數字	情況	數字	連接數字	情況	數字	連接數字	情況
1	1	F	2	1	G	3	1	F	4	1	G	5	1	I	6	1	G	7	1	F
1	2	G	2	2	F	3	2	F	4	2	G	5	2	G	6	2	F	7	2	F
1	3	F	2	3	F	3	3	F	4	3	G	5	3	I	6	3	F	7	3	F
1	4	G	2	4	G	3	4	G	4	4	F	5	4	I	6	4	F	7	4	I
1	5	J	2	5	G	3	5	J	4	5	J	5	5	F	6	5	I	7	5	F
1	6	G	2	6	F	3	6	F	4	6	F	5	6	J	6	6	F	7	6	F
1	7	F	2	7	F	3	7	F	4	7	F	5	7	F	6	7	F	7	7	F

(2)去掉數字，我們可以從顏色看到有明顯規律

F	G	F	G	I	G	F
G	F	F	G	G	F	F
F	F	F	G	I	F	F
G	G	G	F	I	F	F
J	G	J	J	F	I	F
G	F	F	F	J	F	F
F	F	F	F	F	F	F

F	G	F	G	I	G	F
G	F	F	G	G	F	F
F	F	F	G	I	F	F
G	G	G	F	I	F	F
J	G	J	J	e	I	F
G	F	F	F	J	F	F
F	F	F	F	F	F	F

(3)發現：根據上面的表格，有以下幾點發現

1. 對角線都是 F

2. 有 7 都是 F

3. 數字*2 時遇到的狀況相同

4. 對稱狀況大致相同

三、透過外接長方形背圖尋找多連塊(方法一)：以形色四連塊(2*2 連塊)為例

找到形狀倍圖和顏色背圖後，就可以透過形狀倍圖和顏色背圖來描繪外接長方形的背圖。

(一)外接長方形背圖

	a	b
甲	a 甲	b 甲
乙	a 乙	b 乙

左圖為形狀背圖(Sa, Sb)顏色背圖(M 甲，M 乙)的外接長方形

	a	b	a
甲	a 甲	b 甲	a 甲
乙	a 乙	b 乙	a 乙

左圖為形狀背圖(Sa, Sb, Sa)顏色背圖(M 甲，M 乙)的外接長方形

(二)形成多連塊

甲. 乙 x 乙形色四連塊中(2, 2)多連塊

	a	b
甲	a 甲	b 甲
乙	a 乙	b 乙

乙. 左圖為形狀背圖(Sa, Sb, Sa)，顏色背圖(M 甲，M 乙)的外接長方形，可形成多連塊如下

	a	b	a
甲	a 甲	b 甲	a 甲
乙	a 乙	b 乙	a 乙

→

	a	b	a
甲	a 甲	b 甲	a 甲
乙	a 乙	b 乙	a 乙

or

	a	b	a
甲	a 甲	b 甲	a 甲
乙	a 乙	b 乙	a 乙

(三)列舉結果：

形色四連塊(2*2 連塊)總共有 2 種不重複的組合：(3，3)和(1，3，2)

(四)將方法一運用於形色九連塊的列舉中：以形色九連塊(1，1，7，12，24)為例

形狀背圖

	a	b	c	a	b
甲	a 甲	b 甲	c 甲	a 甲	b 甲
乙	a 乙	b 乙	c 乙	a 乙	b 乙
丙	a 丙	b 丙	c 丙	a 丙	b 丙
乙	a 乙	b 乙	c 乙	a 乙	b 乙
丙	a 丙	b 丙	c 丙	a 丙	b 丙

顏色背圖

四、透過數字列舉予刪除尋找形色九連塊(方法二)：以形狀背圖(Sa，Sb，Sa，Sc)顏色背圖(M甲，M乙，M丙，M甲)^{T}為例

(一)列舉所有數字

1	7	6	7
2	7	5	7
2	7	12	7
3	7	4	7
4	7	3	7
4	7	10	7
5	7	2	7
6	7	1	7
6	7	8	7
8	7	6	7
10	7	4	7
12	7	2	7

1	14	6	7
2	14	5	7
2	14	12	7
3	14	4	7
4	14	3	7
4	14	10	7
5	14	2	7
6	14	1	7
6	14	8	7
8	14	6	7
10	14	4	7
12	14	2	7

1	7	6	14
2	7	5	14
2	7	12	14
3	7	4	14
4	7	3	14
4	7	10	14
5	7	2	14
6	7	1	14
6	7	8	14
8	7	6	14
10	7	4	14
12	7	2	14

1	14	6	14
2	14	5	14
2	14	12	14
3	14	4	14
4	14	3	14
4	14	10	14
5	14	2	14
6	14	1	14
6	14	8	14
8	14	6	14
10	14	4	14
12	14	2	14

(二)刪除不可能數字

2	7	12	7
12	7	2	7

2	14	5	7
2	14	12	7
3	14	4	7
4	14	3	7
4	14	10	7
8	14	6	7
10	14	4	7
12	14	2	7

1	7	6	14
2	7	5	14
2	7	12	14
3	7	4	14
4	7	3	14
4	7	10	14
5	7	2	14
12	7	2	14

3	14	4	14
4	14	3	14

(三)刪除重複數字

2	7	12	7
12	7	2	7
3	14	4	14
4	14	3	14

2	14	5	7
2	14	12	7
3	14	4	7
4	14	3	7
4	14	10	7
8	14	6	7
10	14	4	7
12	14	2	7

1	7	6	14
2	7	5	14
2	7	12	14
3	7	4	14
4	7	3	14
4	7	10	14
5	7	2	14
12	7	2	14

五、用數字排列方式找出多連塊的組合(方法三)：以 4X6 外接長方形為例

(一)形狀背圖分類：透過篩選形狀背圖可以更快找到我們需要的組合

種類	2a2b2c	3a2b1c	
可能性	可能	可能	不可能
形狀背圖	abacbc abcabc abcacb abcbac abcbca	abacab abacba	ababac ababca acabab

(二)找出多連塊的方法

1. 同一形狀分兩行，中間只有一個數字時，可行數字如下：以顏色背圖(M 甲，M 乙，M 丙，M 甲)^{T}為例

行一	中間可行數字	行二
1	3, 7	6
2	7	5
2	6, 14	12
3	6, 7, 14	4
4	6, 7, 14	3
4	14	10
5	7	2
6	3, 7	1
6	12, 14	8
8	12, 14	6
10	14	4
12	6, 14	2

2.尋找多連塊：以形狀背圖(Sa，Sb，Sc，Sa，Sc，Sb)和顏色背圖(M 甲，M 乙，M 丙，M 甲)^{T}形成的多連塊為例

(1)先固定形狀背圖(Sa，Sb，Sc，Sa，Sc，Sb)從中間開始填寫

形狀背圖	a	b	c	a	c	b
可能出現的數字			1	3	6	
			6	3	1	
			3	6	4	
			4	6	3	
			2	6	12	
			12	6	2	
			6	12	8	
			8	12	6	

(2)填好對應的 a

形狀背圖	a	b	c	a	c	b
可能出現的數字	4		1	3	6	
	4		6	3	1	
	1,8		3	6	4	
	1,8		4	6	3	
	1,8		2	6	12	
	1,8		12	6	2	
	2		6	12	8	
	2		8	12	6	

(3)根據 a 找出可能的 b

形狀背圖	a	b	c	a	c	b
可能出現的數字	4	7	1	3	6	
	4	4, 6, 12	6	3	1	3, 1, 2
	1, 8	1, 3, 14	3	6	4	6
	1, 8	7, 12	4	6	3	0, 2
	1, 8	3	2	6	12	4
	1, 8	7, 8, 12	12	6	2	0, 6, 2
	2	2, 3, 6	6	12	8	12, 4, 8
	2	14	8	12	6	0

(4)根據數字判斷是否成為 4x6 的多連塊

形狀背圖	a	b	c	a	c	b	是否成為多連塊
可能出現的數字	4	7	1	3	6		x
	4	4, 6, 12	6	3	1	3, 1, 2	x
	1, 8	1, 3, 14	3	6	4	6	x
	1, 8	7, 12	4	6	3	0, 2	xv
	1	3	2	6	12	4	v
	1, 8	7, 8, 12	12	6	2	0, 6, 2	因為皆是偶數所以不行
	2	2, 3, 6	6	12	8	12, 4, 8	xxx
	2	14	8	12	6	0	x

根據表格結果找到(8，12，4，6，3，2)(1，3，2，6，12，4)，此 2 結果經過水平翻轉後會相同。

六、透過 excel 確認找到圖形的翻轉重複

我們找到許多形色九連塊組合，但明顯其中有翻轉重複的圖形，我們透過 Excel 編輯，讓我們可以輕鬆找出並刪除重複的部分。

(一)透過交換位置找到水平翻圖形

原本						水平翻					
1	7	2	7	4	17274	4	7	2	7	1	47271
1	7	4	7	2	17472	2	7	4	7	1	27471
2	7	1	7	4	27174	4	7	1	7	2	47172
2	7	4	7	1	27471	1	7	4	7	2	17472
4	7	1	7	2	47172	2	7	1	7	4	27174
4	7	2	7	1	47271	1	7	2	7	4	17274
1	3	6	7	4	13674	4	7	6	3	1	47631
6	3	1	7	4	63174	4	7	1	3	6	47136
2	6	5	7	1	26571	1	7	5	6	2	17562
3	6	4	7	1	36471	1	7	4	6	3	17463
4	6	3	7	1	46371	1	7	3	6	4	17364

(二)透過替代完成垂直翻

1. 替代過程表

原本	1	2	3	4	5	6
替代	a	b	c	d	e	f
垂直翻	4	2	6	1	5	3

2. 垂直翻結果

原本						垂直翻					
1	7	2	7	4	17274	4	7	2	7	1	47271
1	7	4	7	2	17472	4	7	1	7	2	47172
2	7	1	7	4	27174	2	7	4	7	1	27471
2	7	4	7	1	27471	2	7	1	7	4	27174
4	7	1	7	2	47172	1	7	4	7	2	17472
4	7	2	7	1	47271	1	7	2	7	4	17274
1	3	6	7	4	13674	4	6	3	7	1	46371
6	3	1	7	4	63174	3	6	4	7	1	36471
2	6	5	7	1	26571	2	3	5	7	4	23574
3	6	4	7	1	36471	6	3	1	7	4	63174
4	6	3	7	1	46371	1	3	6	7	4	13674

(三)垂直翻後交換位置

原本						垂直水平翻					
1	7	2	7	4	17274	1	7	2	7	4	17274
1	7	4	7	2	17472	2	7	1	7	4	27174
2	7	1	7	4	27174	1	7	4	7	2	17472
2	7	4	7	1	27471	4	7	1	7	2	47172
4	7	1	7	2	47172	2	7	4	7	1	27471
4	7	2	7	1	47271	4	7	2	7	1	47271
1	3	6	7	4	13674	1	7	3	6	4	17364
6	3	1	7	4	63174	1	7	4	6	3	17463
2	6	5	7	1	26571	4	7	5	3	2	47532
3	6	4	7	1	36471	4	7	1	3	6	47136
4	6	3	7	1	46371	4	7	6	3	1	47631

4. 全部的翻轉：只要將翻轉的結果全部集合在一起，我們就可以找出全部的重複圖形。

原本						水平翻						垂直翻						垂直水平翻					
1	7	2	7	4	17274	4	7	2	7	1	47271	4	7	2	7	1	47271	1	7	2	7	4	17274
1	7	4	7	2	17472	2	7	4	7	1	27471	4	7	1	7	2	47172	2	7	1	7	4	27174
2	7	1	7	4	27174	4	7	1	7	2	47172	2	7	4	7	1	27471	1	7	4	7	2	17472
2	7	4	7	1	27471	1	7	4	7	2	17472	2	7	1	7	4	27174	4	7	1	7	2	47172
4	7	1	7	2	47172	2	7	1	7	4	27174	1	7	4	7	2	17472	2	7	4	7	1	27471
4	7	2	7	1	47271	1	7	2	7	4	17274	1	7	2	7	4	17274	4	7	2	7	1	47271
1	3	6	7	4	13674	4	7	6	3	1	47631	4	6	3	7	1	46371	1	7	3	6	4	17364
6	3	1	7	4	63174	4	7	1	3	6	47136	3	6	4	7	1	36471	1	7	4	6	3	17463
2	6	5	7	1	26571	1	7	5	6	2	17562	2	3	5	7	4	23574	4	7	5	3	2	47532
3	6	4	7	1	36471	1	7	4	6	3	17463	6	3	1	7	4	63174	4	7	1	3	6	47136
4	6	3	7	1	46371	1	7	3	6	4	17364	1	3	6	7	4	13674	4	7	6	3	1	47631

伍、研究結果

一、全部的形色九連塊如下

3x3	3x4	3x5	3x6	3x7	4x4	4x5	4x6	5x5
777	1776	17274	132744	1132644	27d5	1364e	2274c8	274s8
	2775	17472	231744		27ec	1176c	2364c8	32e8o
	3774	13674	113664		277c	32e8c		174co
	1767	63174	313644		17e6	32e4c		1364s
	2757	11766			37e4	274e8		136s4
	3747	31746			3e74	63e88		227co
		13764			57e2	157c8		
		23754			8ee3	276c8		
		13647			1bea	627c8		
		62751			6be8	2275c		
					8be3	23e4c		
					9be2	1726c		
					cbe2	117cc		
					2bec	227cc		
					8be6	237c8		
					abe4	175c8		
					3e4e	23e8c		
					4e3e			
					176e			
					275e			
					27ce			
					374e			
					473e			
					47ae			
					572e			
					c72e			
					8e3e			
					4eab			
					1bae			

二、根據數字分類，我們可以發現 2 個數字連接時有以下幾種情況

(一)表格比較：黃色代表不可連接，藍色代表可連接，白色表示可能可以連接

1. 在 2 格時

數字	1	2	3
配對的數字	1	1	1
	2	2	2
	3	3	3

2. 在 3 格時

數字	1	2	3	4	5	6	7
配對的數字	1	1	1	1	1	1	1
	2	2	2	2	2	2	2
	3	3	3	3	3	3	3
	4	4	4	4	4	4	4
	5	5	5	5	5	5	5
	6	6	6	6	6	6	6
	7	7	7	7	7	7	7

3. 在 4 格時

數字	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
配對的數字	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15

(二)發現

1. 不能連接數字為相似結構，每增加 1 格寬度時，不能增加數字結構會複製前面的結構。

2. 在 n 格的時候，數字 $Z=2^0+2^1+\cdots+2^{(n-1)}$一定是可以連接的。

三、數字變化：我們歸納了 3、4 格的數字變化

1. 3 格時

(1)同一形狀在同一行則只有數字 7

(2)同一形狀分兩行，產生數字(X，7-X)，X 為小於 7 的自然數

(3)同一形狀分三行會產生數字(1，2，4)，位置變化如下

行一	行二	行三
1	2	4
1	4	2
2	1	4
2	4	1
4	1	2
4	2	1

2. 4 格時，顏色背圖(M 甲，M 乙，M 丙，M 甲)

(1)同一形狀在同一行則可以是數字 7 或 14

(2)同一形狀分兩行：以 X，Y 表示

行一	行二
X∈(1~6)	7-X
X∈(2, 4, 6, 8, 10, 12)	14-Y

顏色背圖(M 甲，M 乙，M 丙，M 甲)列出全部數字如下表

行一	行二
1	6
2	5
2	12
3	4
4	3
4	10
5	2
6	1
6	8
8	6
10	4
12	2

3. 顏色背圖(M 甲，M 乙，M 甲，M 丙)，4 格時

(1)同一形狀在同一行則可以是數字 11 或 14

(2)同一形狀分兩行：以 X，Y 表示

行一	行二
X∈(1, 2, 3, 8, 9, 10)	11-X
Y∈(2, 4, 6, 8, 10, 12)	14-X

列出全部數字如下表

行一	行二
1	10
2	9
4	10
6	8
8	3
9	2
10	1
12	2
2	12
8	6
10	4

陸、討論

一、形狀背圖重新分配法：我們發現透過「間隔式」排列配合交集的概念可以更快的找出有用的形狀背圖。以 2a2b1c 為例。

(一)水平翻轉重複問題

21	321	4321	54321
12	231	3421	45321
	213	3241	43521
	312	3214	43251
	132	4231	43215
	123	2431	53421
		2341	35421
		2314	34521
		4213	34251
		2413	34215
		2143	53241
		2134	35241
		4312	32541
		3412	32451
		3142	32415
		3124	53214
		4132	35214
		1432	32514
		1342	32154
		1324	32145
		4123	54231
		1423	45231
		1243	42531
		1234	42351
			42315
			52431
			25431
			24531
			24351
			24315

(二)符號重複問題

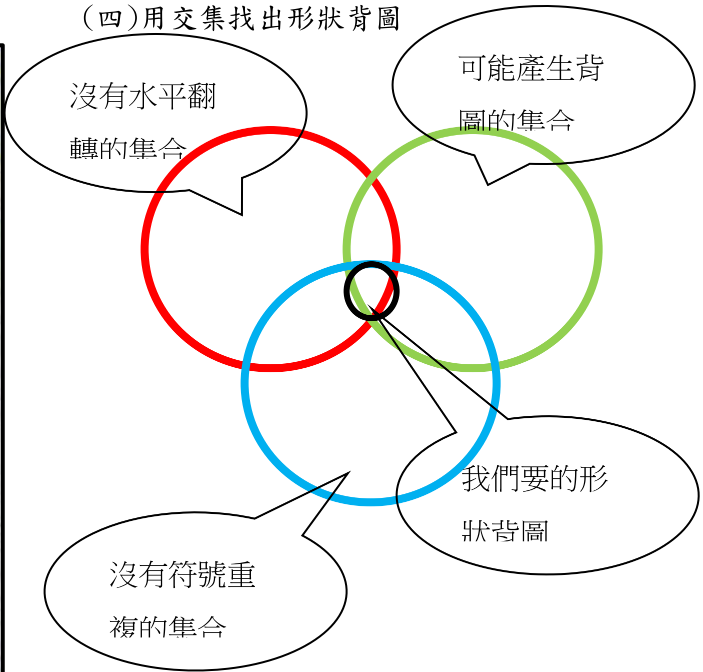
21	321	4321	54321
12	231	3421	45321
	213	3241	43521
	312	3214	43251
	132	4231	43215
	123	2431	53421
		2341	35421
		2314	34521
		4213	34251
		2413	34215
		2143	53241
		2134	35241
		4312	32541
		3412	32451
		3142	32415
		3124	53214
		4132	35214
		1432	32514
		1342	32154
		1324	32145
		4123	54231
		1423	45231
		1243	42531
		1234	42351
			42315
			52431
			25431
			24531
			24351
			24315
			52341
			25341
			23541

(三)不可能情況問題

21	321	4321	54321
12	231	3421	45321
	213	3241	43521
	312	3214	43251
	132	4231	43215
	123	2431	53421
		2341	35421
		2314	34521
		4213	34251
		2413	34215
		2143	53241
		2134	35241
		4312	32541
		3412	32451
		3142	32415
		3124	53214
		4132	35214
		1432	32514
		1342	32154
		1324	32145
		4123	54231
		1423	45231
		1243	42531
		1234	42351
			42315
			52431
			25431
			24531
			24351
			24315

21	321	4321	54321
12	231	3421	45321
	213	3241	43521
	312	3214	43251
	132	4231	43215
	123	2431	53421
		2341	35421
		2314	34521
		4213	34251
		2413	34215
		2143	53241
		2134	35241
		4312	32541
		3412	32451
		3142	32415
		3124	53214
		4132	35214
		1432	32514
		1342	32154
		1324	32145
		4123	54231
		1423	45231
		1243	42531
		1234	42351
			42315
			52431
			25431
			24531
			24351
			24315

(四)用交集找出形狀背圖



二、連串數字成為多連塊情況探討

(一)當 $X+Y=2^a+2^b+2^c$ 時，X 和 Y 之間的數字可以是多少？

1. $X=2^a$，$Y=2^b+2^c$，a, b, c 互不相同且 a+b+c=3

(1)如果 X 和 Y 中間的數字是 7，一定可以。

(2)當 a=0，b=1, c=2 時，中間的數字是可以 3。

垂直翻轉後，a=2，b=1, c=0 時，中間的數字是 6。

(3)當 a=1，b=0, c=2 時，除了 7 之外，如果中間的數字是 3 或 6，收縮在 Y 之後，則可以成為多連塊。

2. $X=2^a$，$Y=2^b+2^c$，a, b, c 互不相同且 a+b+c=4

(1)如果 X 和 Y 中間的數字是 14，一定可以。

(2)當 a=1，b=2, c=3 時，中間的數字是可以 6。

垂直翻轉後，a=3，b=2, c=1 時，中間的數字是 12。

(3)當 a=2，b=1, c=3 時，除了 7 之外，如果中間的數字是 6 或 12，收縮在 Y 之後，則可以成為多連塊。

三、在寬為 3 格時，外接長方形最大是多少？

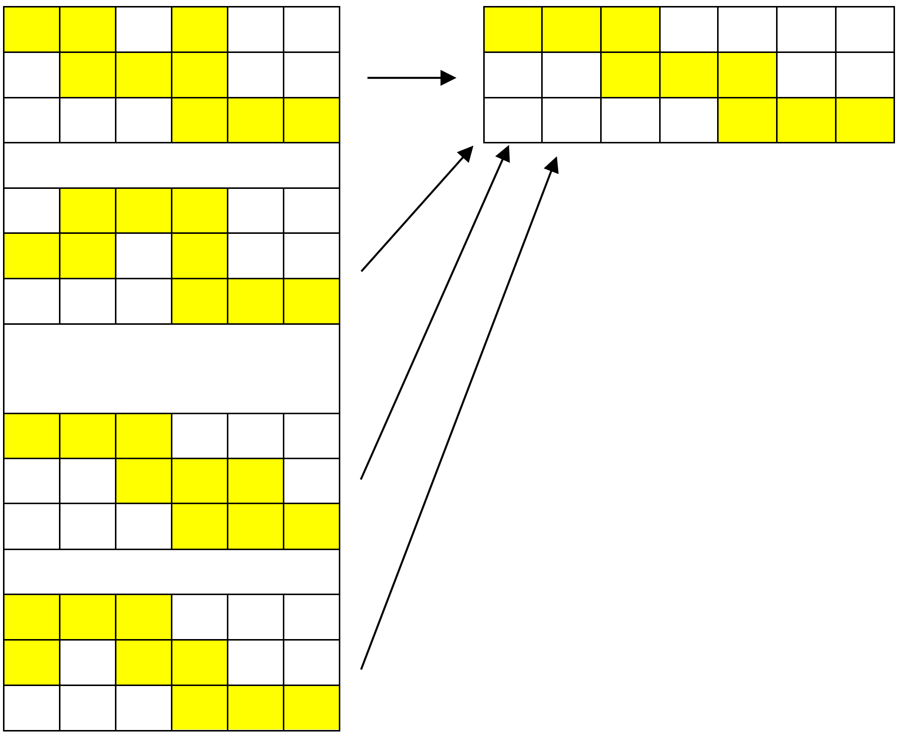
(一)在形色九連塊中, 寬為 3 的最大外接長方形為 3x7，根據研究結果，我們發現以下幾點

1. 所有的大面積多連塊都是有小面積多連塊變成

2. 因為 3x7 外接長方形的多連塊結構最為簡單，只有兩個轉角， 所以不可能有 3 乘 8 的外接長方形多連塊

3. 當多連塊沒有辦法再移動任何一個正方形變成外接長方形面積更大的多連塊時，此多連塊外接長方形， 就是最大的外接長方形。舉例如下：

很明顯在寬為 3 格時，3x7 是外接長方形中面積更大的長方形。



(二)n*n 的形色 n^2 連塊在寬為 n 格時，外接長方形最大為 $n\times(n\times n-n+1)$

四、形狀背圖的演變

(一)背圖增加元素：

從實驗中知道背圖都是根據上一層演變而來。為了看清楚變化，制定了背圖增加元素如下：

①表左邊數來第一個符號增加到右邊，②表左邊數來第二個符號增加到右邊，其他類推

1 表示左邊第一個符號增加到右邊， 2 表示將左邊第二個符號增加到右邊，其他類推

形狀背圖演變過程：

1. abc

2. abc①→abca，abc②→abcb

abc 1 →cbac，abc 2 →babc

產生 4 個背圖重複，擇 abca，abcb 進入下一層

3. abca①→~~abcaa~~，abca②→abcab，abca③→abcac

abca 1 →~~aabca~~，abca 2 →cabca，abca 3 →babca

abcb①→abcba，abcb②→~~abcbb~~，abcb③→abcbc

abcb 1 →babcb，abcb 2 →cabcb，abcb 3 →babcb

(二)整理表格如下

第一層	第二層	第三層
abc	abca abcb	ababc abacb abcab abcba abaca

五、形狀背圖轉顏色背圖產生組合：

(一)外接長方形寬為 3 格時

顏色背圖	產生數字
(M 甲,M 乙,M 丙)	(1,2,3,4,5,6,7)

(二)外接長方形寬為 4 格時

顏色背圖	a=(?),b=(?),c=(?)	產生數字
(M 甲,M 乙,M 丙,M 甲)	a=(1),b=(2),c=(4)	(1,2,3,4,5,6,7)
	a=(8),b=(2),c=(4)	(2,4,6,8,10,12,14)
(M 甲,M 乙,M 甲,M 丙)	a=(1),b=(2),c=(8)	(1,2,8,3,10,9,11)
	a=(4),b=(2),c=(8)	(2,4,6,8,10,12,14)

(三)外接長方形寬為 5 格時

顏色背圖	a=(?),b=(?),c=(?)	產生數字
(M 甲,M 乙,M 甲,M 丙,M 甲)	a=(1) ,b=(2),c=(8)	(1,2,8,3,10,9,11)
	a=(4) ,b=(2),c=(8)	(2,4,6,8,10,12,14)
	a=(16),b=(2),c=(8)	(2,8,16,10,18,24,26)
(M 甲,M 乙,M 甲,M 乙,M 丙)	a=(1),b=(2) ,c=(16)	(1,2,16,3,18,17,19)
	a=(1),b=(8) ,c=(16)	(1,8,16,9,24,17,25)
	a=(4),b=(2) ,c=(16)	(2,4,16,6,18,20,22)
	a=(4),b=(8) ,c=(16)	(4,8,16,12,20,24,28)
(M 甲,M 乙,M 甲,M 丙,M 乙)	a=(1),b=(2) ,c=(8)	(1,2,8,3,10,9,11)
	a=(1),b=(16),c=(8)	(1,8,16,9,17,24,25)
	a=(4),b=(2) ,c=(8)	(2,4,6,8,10,12,14)
	a=(4),b=(16),c=(8)	(4,8,16,12,20,24,28)
(M 甲,M 乙,M 丙,M 甲,M 乙)	a=(1),b=(2),c=(4)	(1,2,3,4,5,6,7)
	a=(1),b=(16),c=(4)	(1,4,16,5,20,17,21)
	a=(8),b=(2),c=(4)	(2,4,6,8,10,12,14)
	a=(8),b=(16),c=(4)	(4,8,16,12,20,24,28)
(M 甲,M 乙,M 丙,M 乙,M 甲)	a=(1),b=(2),c=(4)	(1,2,3,4,5,6,7)
	a=(1),b=(8),c=(4)	(1,4,8,5,12,9,13)
	a=(16),b=(2),c=(4)	(2,4,16,6,20,18,22)
	a=(16),b=(8),c=(4)	(4,8,16,12,20,24,28)

六、除了形色九連塊外，我們也試著尋找其他的形色多連塊組合。

我們發現形色十六連塊和形色二十五連塊光是形狀組合的數目就遠多於形色九連塊。

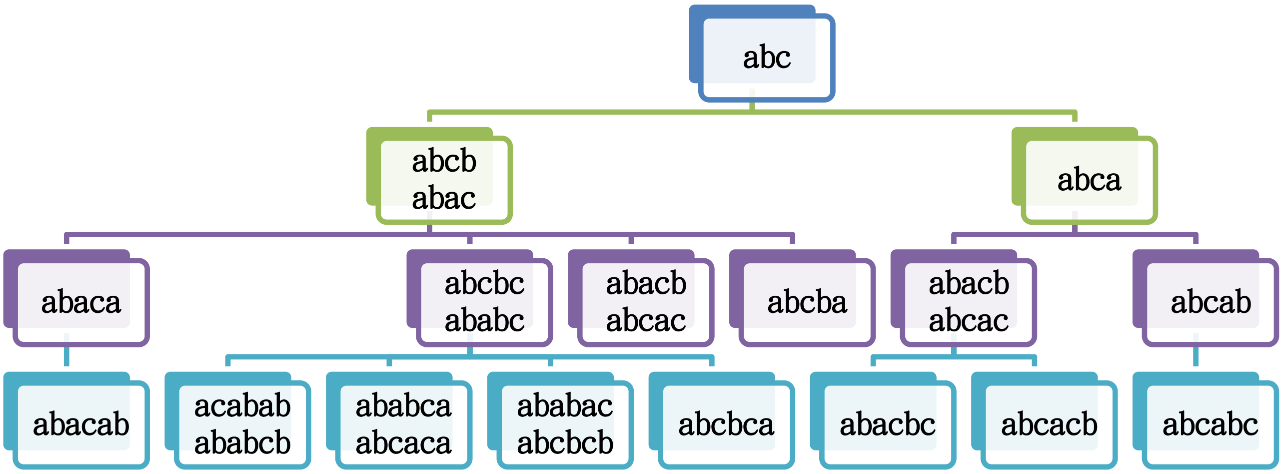
可以推知形色十六連塊和形色二十五連塊組合與形色九連塊組合差距許多。

形狀組合列舉結果如下表

多連塊	形色九連塊	形色十六連塊	形色二十五連塊	
最長外接長方形	3*7	4*13	5*21	
形狀組合	3 abc 4 aabc 5 aaabc aabbc 6 aaabbc aabbcc 7 aaabbbc aaabbcc	4 abcd 5 aabcd 6 aabbcd aaabcd 7 aabbccd aaabbcd aaaabcd 8 aabbccdd aaabbccd aaabbbcd aaaabbcd 9 aaaabbbcd aaaabbccd aaabbbccd aaabbccdd 10 aaaabbbbcd aaaabbbccd aaaabbccdd aaabbbcccd 11 aaaabbbbccd aaaabbbcccd aaaabbbccdd aaabbbcccdd 12 aaaabbbbcccd aaaabbbbccdd aaaabbbcccdd aaabbbcccddd 13 aaaabbbbccccd aaaabbbbcccdd aaaabbbcccddd	5 abcde 6 aabcde 7 aaabcde aabbcde 8 aaaabcde aaabbcde aabbccde 9 aaaaabcde aaaabbcde aaabbbcde aaabbccde aabbccdde 10 aaaaabbcde aaaabbbcde aaaabbccde aaabbbccde aaabbccdde aabbccddee 11 aaaaabbbcde aaaaabbccde aaaabbbbcde aaaabbbccde aaaabbccdde aaabbbcccde aaabbbccdde aaabbccddee 12 aaaaabbbbcde aaaaabbbccde aaaaabbccdde aaaabbbbccde aaaabbbcccde aaaabbbccdde aaaabbccddee aaabbbcccdde 13 aaaaabbbbbcde aaaaabbbbccde aaaaabbbcccde aaaaabbbccdde aaaaabbccddee aaaabbbbcccde aaaabbbbccdde aaaabbbcccdde aaaabbbccddee aaabbbcccddde 14 aaaaabbbbbccde aaaaabbbbcccde aaaaabbbbccdde aaaaabbbcccdde aaaaabbbccddee aaaabbbbccccde aaaabbbbcccdde aaaabbbbccddee aaaabbbcccddde aaaabbbcccddee aaabbbcccdddee	15 aaaaabbbbbcccde aaaaabbbbbccdde aaaaabbbbccccde aaaaabbbbcccdde aaaaabbbbccddee aaaaabbbcccddde aaaaabbbcccddee aaaabbbbccccdde aaaabbbbcccddde aaaabbbbcccddee aaaabbbcccdddee aaabbbcccdddeee 16 aaaaabbbbbccccde aaaaabbbbbcccdde aaaaabbbbbccddee aaaaabbbbccccdde aaaaabbbbcccddee aaaaabbbcccdddee aaaabbbbccccddde aaaabbbbccccddee aaaabbbbcccdddee aaaabbbcccdddeee 17 aaaaabbbbbcccccde aaaaabbbbbccccdde aaaaabbbbbcccddee aaaaabbbbccccddde aaaaabbbbcccdddee aaaaabbbcccdddeee aaaabbbbccccdddde aaaabbbbccccdddee aaaabbbbcccdddeee 18 aaaaabbbbbcccccdde aaaaabbbbbccccddee aaaaabbbbbcccdddee aaaaabbbbccccdddde aaaaabbbbccccdddee aaaaabbbbcccdddeee 19 aaaaabbbbbcccccddde aaaaabbbbbcccccddee aaaaabbbbbccccdddde aaaaabbbbbccccdddee aaaaabbbbbcccdddeee aaaaabbbbccccddddee aaaaabbbbccccdddeee 20 aaaaabbbbbcccccdddde aaaaabbbbbcccccdddee aaaaabbbbbccccddddee aaaaabbbbbccccdddeee aaaaabbbbccccddddeee aaaabbbbccccddddeeee 21 aaaaabbbbbcccccddddde aaaaabbbbbcccccddddee aaaaabbbbbcccccdddeee aaaaabbbbbccccddddeee aaaaabbbbccccddddeeee
形狀組合數	8	30	131	

柒、結論

一、背圖各層分類：根據討論結果，整理如下



二、數字變化的通式

外接長方形寬	顏色背圖	背圖數字	產生數字通式
3 格	abc	a_1, b_1, c_1	$(a_1, b_1, c_1\ \ a_1+b_1, a_1+c_1, b_1+c_1,\ \ a_1+b_1+c_1)$
4 格	abca abac	a_1, a_2, b_1, c_1	$(a_1, b_1, c_1\ \ a_1+b_1, a_1+c_1, b_1+c_1,\ \ a_1+b_1+c_1)$& $(a_2, b_1, c_1\ \ a_2+b_1, a_2+c_1, b_1+c_1,\ \ a_2+b_1+c_1)$
5 格	ababc abacb abcab abcba	a_1, a_2, b_1, b_2, c_1	$(a_1, b_1, c_1\ \ a_1+b_1, a_1+c_1, b_1+c_1,\ \ a_1+b_1+c_1)$& $(a_2, b_1, c_1\ \ a_2+b_1, a_2+c_1, b_1+c_1,\ \ a_2+b_1+c_1)$& $(a_1, b_2, c_1\ \ a_1+b_2, a_1+c_1, b_2+c_1,\ \ a_1+b_2+c_1)$& $(a_2, b_2, c_1\ \ a_2+b_2, a_2+c_1, b_2+c_1,\ \ a_2+b_2+c_1)$&
	abaca	a_1, a_2, a_3, b_1, c_1	$(a_1, b_1, c_1\ \ a_1+b_1, a_1+c_1, b_1+c_1,\ \ a_1+b_1+c_1)$& $(a_2, b_1, c_1\ \ a_2+b_1, a_2+c_1, b_1+c_1,\ \ a_2+b_1+c_1)$& $(a_3, b_1, c_1\ \ a_3+b_1, a_3+c_1, b_1+c_1,\ \ a_3+b_1+c_1)$

三、關於連接數字情況整理如下

(一)2 個數字可使用條件為；最少要有一個連接方塊。所以在 3 格中，以下數字不能連接。

(1，4)(1，2)(1，6)	(3，4)	(5，2)
(2，1)(2，4)(2，5)	(4，1)(4，2)(4，3)	(6，1)

(二)我們還發現以下規律

1.若(a，b)和(a，c)不行，則(a，b+c)也不行
2.若 $a+b=2^{n}+2^{(n-1)}+\cdots+2^{0}$，則(a，b)一定不行
(三)將所有數字連接情況整理如下
若有 2 自然數 i、j 以 2 進位表示如下：
$i=2^{i1}+2^{i2}+2^{i3}+...$
$j=2^{j1}+2^{j2}+2^{j3}+...$
其中
{i1, i2, i3, . . . }=Si
{j1, j2, j3, . . . }=Sj
若
1.Si 和 Sj 都是連續數列
(1)當 Si∩Sj=Ø時，為不可連接狀態
(2)當 Si∩Sj≠Ø時，為可連接狀態
2.Si 為連續數列，Sj 為不連續數列
(1)Sj⊂Si，為可連接狀態
(2)當 Sj⊄Si 時
 a.若 Si∩Sj=Ø，則不可連接
 b.若 Si∩Sj≠Ø，則需收縮於 Sj 處
3.Si 和 Sj 皆是不連續數列，則
(1)當 Si⊂Sj，則需收縮於 Sj 處，反之亦然
(2)當 Si=Sj，則兩邊皆可收縮
(3)當 Si={Sk, Sa}
 Sj={Sk, Sb}
其中 Sa∩Sb=Ø
則 Si 和 Sj 需收縮於兩邊

四、形色九連塊組合
(一)從低階到高階
1.從實驗結果，我們發現從 3X4 外接長方形到 4X4 外接長方形有 2 種方式
(1)數字 7→e
(2)全部數字*2 後再部分變回原本數字：在圖形中就是向下加幾塊方塊的意思
(3) 部分數字*2：在圖形中就是向上加幾塊方塊的意思
2.以(1776，2775，3774)三種連塊為例

	1776	2775	3774
7→e 或個別數字*2	17e6 177c 17ec	2e75	3e74 37e4 3ee4 ~~3e78~~ 37e8 3ee8
全部數字*2	2eec	4eea	6ee8
e→7	2e7c 27ec 277c	a7ea	67e8 ~~6ee4~~ 6e74

(二)形色九連塊的連貫性

1. 從上面的結論可知：形色九連塊的組合是由低階到高階演變，就像形狀背圖一樣。

2. 形色九連塊同一形狀背圖表格整理

形狀背圖	abc	abca	abac	abaca	ababc	abacb	abcab	abcba
顏色背圖 3格	777	1776 2775 3774	1767 2757 3747	17274 17472	13647	63174 13674 26571	11766 31746 23754 13764	62751 11766 22755
顏色背圖 4格	與 3x4 相同	27d5 277c 17e6 37e4 3e74 2e75 8ee3 1bea 6be8 1d76 9be2 cbe2 2bec 8be6 abe4	3e4e 4e3e 176e 275e 27ce 374e 473e 47ae 572e c72e 8e3e 4eab 1bae	274e8 472e8	1364e	136e4	32e8c 32e4c 63e88 157c8 2275c 1726c 117cc 227cc 237c8 175c8	1176c 274e8 63e88 627c8 2275c 23e4c 117cc 227cc 23e8c
顏色背圖 5格	與 3x5 相同	與 4x5 相同	與 4x5 相同	274s8	1364s	136s4	32e8o	227co
形狀背圖	abacab	abacba	abcabc	abcacb	abcbca			
顏色背圖 3格	132744 231744	132744 231744	133644	113646 133644	113646			
顏色背圖 4格	132e44	132e44	13264c	1326c4				

五、三種方法的比較：

	找出九連塊方式	優點	缺點
方法一	透過外接長方形背圖尋找多連塊	簡單易上手	容易有缺漏
方法二	透過數字列舉予刪除尋找形色九連	列出全部的組合後刪除，不會有缺漏	花費時間較久
方法三	用數字排列方式找出多連塊的組合	僅列出可能組合後互相配對	要十分熟悉規律方可使用

六、感想與未來方向：

(一)列舉多連塊最大的挑戰就是要刪除重複的形狀背圖或多連塊組合。

(二)形色九連塊所有組合已列出，我們使用的三個方法皆適合用來找九連塊組合。

(三)形狀背圖與顏色背圖的規律和通式已列出，接下來就是通過規律找到更高階多連塊組合的通式。

捌、參考資料

一、賴韻如、莊芳儀..等五人 。第 50 屆全國科展。五方連塊之乾坤大挪移武功祕笈

二、林翊欽李暐霆..等五人。第 52 屆全國科展。天羅地網尋芳蹤 只為盡訪六連塊。

三、余竑勳。第 52 屆全國科展。多方塊的塗色問題

【評語】080408

本作品從形色棋「Qwirkl」發想，探討給定三種形狀各三種顏色共九顆形色棋的九連塊排列。作者從九連塊所需的行列數討論可能的組合方法,再藉由電腦程式的輔助,計算出所有可能的組合數，是一件認真的作品。惟數學內容的深度可望再加深，將可更提升本研究的價值。

作品海報

壹、研究動機

五年級的時候我們接觸到了 Qwirkl 形色棋的遊戲， 發現和之前玩的五連塊遊戲不一樣， 除了正方形數量變多之外還要考慮到形狀與顏色。根據規則，左邊的第一塊決定了整列的顏色，上面的第一塊決定了整排的形狀。看著玩遊戲時排出來的多連塊，似乎有些說不清的規律，如果將全部的形狀列出來一定會很有趣，所以我們試著用不同的方法找出形色九連塊全部的組合。為了更加了解形色多連塊，我們上網搜尋了歷屆科展與多連塊相關的作品，後來發現雖然有人討論多連塊，但非常少部分著墨於多連塊的列舉，也完全沒有提到將多連塊加上形況與顏色和規則限制的結果。為了解加入形狀和顏色的關係後對多連塊列舉產生的影響，我們開始了這次的形色九連塊研究。

貳、研究目的

一、透過背圖與外接長方形找到形色九連塊的組合
二、探討形狀背圖和顏色背圖對九連塊組合的影響
(一)找到九連塊所有形狀背圖組合
(二)瞭解如何利用形狀背圖轉顏色背圖
三、利用列舉與刪除數字找到形色九連塊的組合
四、透過數字排列組合找到形色九連塊的組合
五、找到形狀背圖間的連貫性

參、研究工具

Qwirkle 形色棋、紀錄紙、Excel 巨集、電腦

肆、研究方法

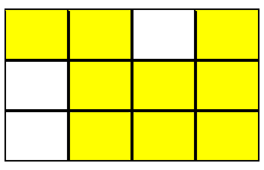
一、 解說與文獻探討
(一)遊戲規則
1. 任選一塊 Qwirkle 棋開始放，每次放一顆，放到 9 塊正方形都放完為止
2. ***所有放的 Qwirkle 棋都必須是和之前的 Qwirkle 棋同顏色但不同形狀或同形狀但不同顏色***，也就是說同一列顏色皆相同，形狀皆不同，同一排顏色皆不同，形狀皆相同。
3. 共有 3 種顏色與 3 種形狀，所以全部有九塊。
(二)名詞解說
1. 外接長方形：每個多連塊都一個外接長方形，以下圖為例，我們可以看到此多連塊最外面的邊可以形成 3x5 的外接長方形。

2. 背圖：根據最重要的規則 1，可以知道最左邊的正方形決定了整列的顏色，最上面的正方形決定了整排的形狀。所以只要找出形狀和顏色的排列，我們就可以找到外接正方形中的多連塊數量與形狀。
(三)文獻探討
1. 科展中提到的多連塊：

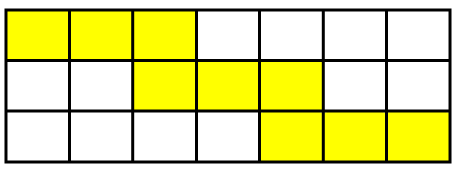
作品名稱	屆次	多連塊相關性
五方連塊之乾坤大挪移武功祕笈	49 屆	1. 探討五連塊的變化圖形 2. 統整五連塊圖形角、邊、頂點數
天羅地網尋芳蹤只為盡訪六連塊	52 屆	透過窮舉法、圖形操作找到六連塊所有組合方式
新的角度看 Qwirkle--形色九連塊的列舉	59 屆	1. 幫連塊加上形狀和顏色的規則 2. 透過數字與形狀排列找到所有外接長方形背圖 3. 透過背圖列舉形色多連塊 4. 透過 3 種方法找到所有的九連塊組合

2. 在比較過後我們發現：
(1)多數的多連塊列舉方式都要透過圖形操作，因此我們思考如果利用數字化的方式，是否可以更快速方便的找出多連塊組合。
(2)在科展作品中幾乎沒有人試著列舉有條件、數目較大的多連塊，試著找出形色九連塊的全部組合會是很棒的挑戰。
二、外接長方形：
(一)外接長方形的介紹與利用：
1. 外接長方形介紹：每個多連塊都有外接長方形，外接長方形的長為多連塊的最左邊到最右邊，外接長方形的寬為多連塊的最上面到最下面，舉例如下

(1)4*3 的外接長方形



(2)7*3 的外接長方形



2. 外接長方形利用
(二)形狀背圖的討論：
在決定要尋找幾乘幾的外接長方形中的多連塊後，我們可以透過形狀背圖的設定來決定外接長方形中多連塊的形狀排列。
1. 形狀背圖的定義：在九連塊中有三種形狀每種形狀都有三塊，我們***以 a，b，c 來代表不同形狀***。以三排為例，(Sa, Sb, Sc)為形狀背圖，Sa 表示第一排的形狀為 a，Sb 表示第二排形狀為 b…其他類推。
(1)形狀背圖舉例

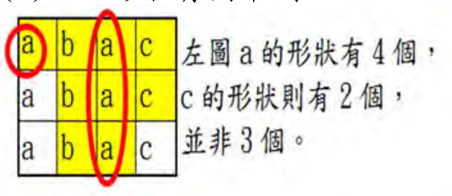
形狀背圖(Sa, Sb, Sa, Sc)

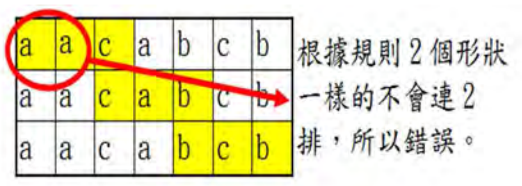
a	b	a	c
a	b	a	c
a	b	a	c

形狀背圖(Sa, Sb, Sc, Sa, Sb, Sc, Sa)

a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a
a	b	c	a	b	c	a

(2)錯誤形狀背圖舉例





2. 形狀背圖的列舉：
(1)避免重複情況：以外接長方形長為 5 格，有 3 格形狀相同，另外 2 個形狀各異的形狀背圖為例，先列出全部的可能再刪掉不能的，就剩下表的形狀背圖

形狀數量	3a1b1c	1a3b1c	1a1b3c
產生背圖	abaca	babcb	cacbc
	acaba	bcbab	cbcac

從上表可以很明顯看到，雖然形狀數量不同，但經過 abc 的轉換後，會產生一樣背圖。為避免重複，規定 a 數量≥b 數量≥c 數量，依此類推
（2）三種形狀三種顏色的形狀背圖背圖

外接長方形的長	3	4	5	6	7
各形狀數目	1a1b1c	2a1b1c	3a1b1c 2a2b1c	3a2b1c 2a2b2c	3a3b1c 3a2b2c

列出全部可能的狀況→刪掉不可能的情況→刪掉左右重複、刪掉 abc 重複
(三)顏色背圖的討論：
1. 顏色背圖的定義：我們以甲，乙，丙來代表不同顏色。以三列為例，$(M甲，M乙，M丙)^T$為顏色背圖，M 甲表示第一列的顏色為甲，M 乙表示第二列顏色為乙…其他類推。
(1)顏色背圖舉例

顏色背圖$(M甲，M乙，M丙)^T$

甲	甲	甲	甲	甲
乙	乙	乙	乙	乙
丙	丙	丙	丙	丙

顏色背圖$(M甲，M乙，M丙，M甲)^T$

甲	甲	甲	甲
乙	乙	乙	乙
丙	丙	丙	丙
甲	甲	甲	甲

(2)經過列舉，發現形狀背圖的排列和顏色背圖的排列相同，可互相轉換。轉換方式為 Sa→M 甲，Sb→M 乙，Sc→M 丙，轉換結果以下面為例
(Sa, Sb, Sc)→$(M甲，M乙，M丙)^T$
(Sa, Sb, Sa, Sc)→$(M甲，M乙，M甲，M丙)^T$
(3)為了方便記錄，我們將整排的方塊以二進位做紀錄。數字 2^0、2^1、2^2…代表顏色。

2^i 代表第 i+1 列的顏色，例如 ***M 甲=2^0 或 2^3 代表第 1 列和第 4 的顏色為甲。***

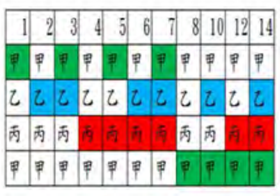
以 3 格產生的數字 1~7 為例

	數字	方塊顏色		
顏色轉數字	2^0	甲	甲	甲
	2^1	乙	乙	乙
	2^2	丙	丙	丙

經過二進位組合產生數字所代表顏色圖案

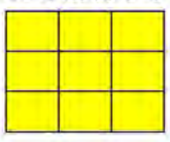
數字	1	2	3	4	5	6	7
方塊形狀	甲	甲	甲	甲	甲	甲	甲
	乙	乙	乙	乙	乙	乙	乙
	丙	丙	丙	丙	丙	丙	丙

(4)不同的顏色背圖可以產生不同的數字，以下表為例

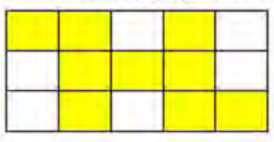
外接長方形的寬	3 格	4 格	4 格
顏色轉數字	M 甲=2^0, M 乙=2^1, M 丙=2^2	M 甲=2^0 或 2^3, M 乙=2^1, M 丙=2^2	M 甲=2^0 或 2^2, M 乙=2^1， M 丙=2^3
顏色背圖	$(M甲，M乙，M丙)^T$	$(M甲，M乙，M丙，M甲)^T$	$(M甲，M乙，M甲，M丙)^T$
轉換過程			
可產生數字背圖	(1，2，3，4，5，6，7)共 7 排	(1，2，3，4、5，6，7，8，10，12，14) 共 11	(1，2，3，4，6，8，9，10，11，12，14) 共 11 排

(5)根據上面的二進位紀錄法，我們可以用數字紀錄***整個連塊的形狀***，以下舉 2 個例子

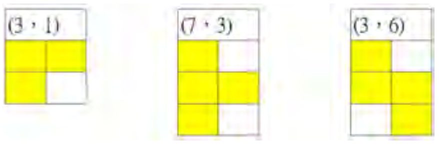
(1)(7，7，7)(外接長方形為 3x3)



(2)(1，7，2，7，4)(外接長方形為 3x5)



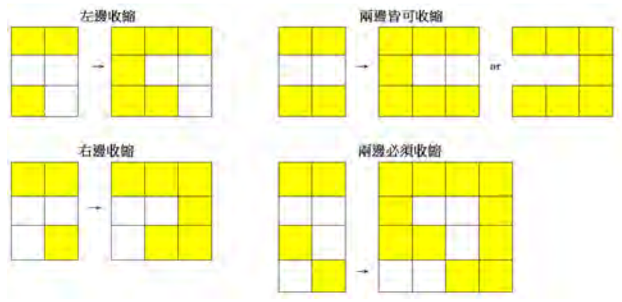
(四)二進位相接數字的分類
1. 可相接數字舉例
(1)可連接圖形：可連接的圖形每塊正方形一定有一邊和其他正方形相連，且相鄰正方形間不會有間隔，如下舉例 3 圖



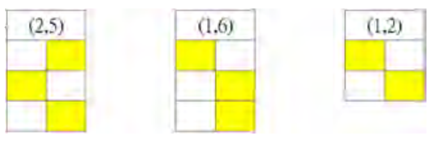
(2)可相接數字表格：我們將 1~7 可相接數字表格整理如下

數字	1	2	3	4	5	6	7
可接數字	1, 3, 7	2, 3, 6, 7	1, 3, 6, 7	4, 6, 7	7	2, 3, 4, 7	1~7

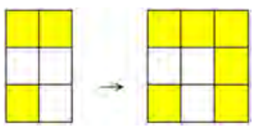
2. 可能可以相接數字舉例：



3. 不能使用
(1)絕對不行：完全沒有任何邊相接的圖形就是絕對不行，如右 3 圖



(2)可能可以的另一半： 以數字(5，1)為例，若左邊加數字 7 成為(7，5，1)則可以成為多連塊，右邊加數字 7 成為(5，1，7)則不可以成為多連塊。



4. 在不同格數中，可行、不可行、可能可行各有幾種，以 3 格為例，連接情況定義如下：
情況 F：要有一方完全連接才有　　情況 G：沒有任何連接則
情況 H：若有部分連接　　情況 I：數字大到小有條件可接
情況 J：數字小到大有條件可接

(1)連接數字情況表

數字	連接數字	情況	數字	連接數字	情況	數字	連接數字	情況	數字	連接數字	情況	數字	連接數字	情況	數字	連接數字	情況	數字	連接數字	情況
1	1	F	2	1	G	3	1	F	4	1	G	5	1	I	6	1	G	7	1	F
1	2	G	2	2	F	3	2	F	4	2	G	5	2	G	6	2	F	7	2	F
1	3	F	2	3	F	3	3	F	4	3	G	5	3	I	6	3	F	7	3	F
1	4	G	2	4	G	3	4	G	4	4	F	5	4	I	6	4	F	7	4	I
1	5	J	2	5	G	3	5	J	4	5	J	5	5	F	6	5	I	7	5	F
1	6	G	2	6	F	3	6	F	4	6	F	5	6	J	6	6	F	7	6	F
1	7	F	2	7	F	3	7	F	4	7	F	5	7	F	6	7	F	7	7	F

(2)去掉數字，我們可以從顏色看到有明顯規律

F	G	F	G	I	G	F
G	F	F	G	G	F	F
F	F	F	G	I	F	F
G	G	G	F	I	F	F
J	G	J	J	F	I	F
G	F	F	F	J	F	F
F	F	F	F	F	F	F

F	G	F	G	I	G	F
G	F	F	G	G	F	F
F	F	F	G	I	F	F
G	G	G	F	I	F	F
J	G	J	J	e	I	F
G	F	F	F	J	F	F
F	F	F	F	F	F	F

(3)發現：根據上面的表格，有以下幾點發現
1. 對角線都是 F
2. 有 7 都是 F
3. 數字*2 時遇到的狀況相同
4. 對稱狀況大致相同

(五)找到形色九連塊的工具

找到形色九連塊的工具

形狀背圖　顏色背圖　二進位

決定一排有幾個方塊　決定會產生那些數字　紀錄九連塊組合

三、(方法一)透過外接長方形背圖尋找多連塊：
找到形狀背圖和顏色背圖後，就可以透過形狀背圖和顏色背圖來描繪外接長方形的背圖。
將方法一運用於形色九連塊的列舉中：以形色九連塊(1，1，7，12，24)為例

顏色背圖　形狀背圖

	a	b	c	a	b
甲	a 甲	b 甲	c 甲	a 甲	b 甲
乙	a 乙	b 乙	c 乙	a 乙	b 乙
丙	a 丙	b 丙	c 丙	a 丙	b 丙
乙	a 乙	b 乙	c 乙	a 乙	b 乙
丙	a 丙	b 丙	c 丙	a 丙	b 丙

四、(方法二)透過數字列舉、刪除
(一)列舉所有數字

1	7	6	7
2	7	5	7
2	7	12	7
3	7	4	7
4	7	3	7
4	7	10	7
5	7	2	7
6	7	1	7
6	7	8	7
8	7	6	7
10	7	4	7
12	7	2	7

1	14	6	7
2	14	5	7
2	14	12	7
3	14	4	7
4	14	3	7
4	14	10	7
5	14	2	7
6	14	1	7
6	14	8	7
8	14	6	7
10	14	4	7
12	14	2	7

1	7	6	14
2	7	5	14
2	7	12	14
3	7	4	14
4	7	3	14
4	7	10	14
5	7	2	14
6	7	1	14
6	7	8	14
8	7	6	14
10	7	4	14
12	7	2	14

1	14	6	14
2	14	5	14
2	14	12	14
3	14	4	14
4	14	3	14
4	14	10	14
5	14	2	14
6	14	1	14
6	14	8	14
8	14	6	14
10	14	4	14
12	14	2	14

(二)刪除不可能數字

2	7	12	7
12	7	2	7

2	14	5	7
2	14	12	7
3	14	4	7
4	14	3	7
4	14	10	7
8	14	6	7
10	14	4	7
12	14	2	7

1	7	6	14
2	7	5	14
2	7	12	14
3	7	4	14
4	7	3	14
4	7	10	14
5	7	2	14
12	7	2	14

3	14	4	14
4	14	3	14

(三)刪除重複數字

2	7	12	7
12	7	2	7
3	14	4	14
4	14	3	14

2	14	5	7
2	14	12	7
3	14	4	7
4	14	3	7
4	14	10	7
8	14	6	7
10	14	4	7
12	14	2	7

1	7	6	14
2	7	5	14
2	7	12	14
3	7	4	14
4	7	3	14
4	7	10	14
5	7	2	14
12	7	2	14

五、(方法三)用數字排列方式找出多連塊的組合：以 4X6 外接長方形為例
(一)形狀背圖分類：透過篩選形狀背圖可以更快找到我們需要的組合

種類	2a2b2c	3a2b1c	
可能性	可能	可能	不可能
形狀背圖	abacbc abcabc abcacb abcbac abcbca	abacab abacba	ababac ababca acabab

(二)找出多連塊的方法
1. 同一形狀分兩行，中間只有一個數字時，可行數字如下：以顏色背圖 abca 為例。

行一	可行數	行二
1	3, 7	6
2	7	5
2	6, 14	12
3	6, 7, 14	4
4	6, 7, 14	3
4	14	10

行一	可行數	行二
5	7	2
6	3, 7	1
6	12, 14	8
8	12, 14	6
10	14	4
12	6, 14	2

2. 尋找多連塊：以形狀背圖(Sa，Sb，Sc，Sa，Sc，Sb)和顏色背圖(M 甲，M 乙，M 丙，M 甲)^{T}形成的多連塊為例
(1)先固定形狀背圖(Sa，Sb，Sc，Sa，Sc，Sb)，從中間 Sc 開始填寫
(2)填好對應 Sa 的數字
(3)根據 Sa 找出可能的 Sb
(4)根據數字判斷是否成為 4x6 的多連塊

形狀背圖	a	b	c	a	c	b
可能出現的數字			1	3	6	
			6	3	1	
			3	6	4	
			4	6	3	
			2	6	12	
			12	6	2	
			6	12	8	
			8	12	6	

→

形狀背圖	a	b	c	a	c	b
可能出現的數字	4		1	3	6	
	4		6	3	1	
	1, 8		3	6	4	
	1, 8		4	6	3	
	1, 8		2	6	12	
	1, 8		12	6	2	
	2		6	12	8	
	2		8	12	6	

形狀背圖	a	b	c	a	c	b
可能出現的數字	4	7	1	3	6	
	4	4, 6, 12	6	3	1	3, 1, 2
	1, 8	1, 3, 14	3	6	4	6
	1, 8	7, 12	4	6	3	0, 2
	1, 8	3	2	6	12	4
	1, 8	7, 8, 12	12	6	2	0, 6, 2
	2	2, 3, 6	6	12	8	12, 4, 8
	2	14	8	12	6	0

根據表格結果找到(8，12，4，6，3，2)(1，3，2，6，12，4)，此 2 結果經過水平翻轉後會相同。

伍、研究結果

一、全部的形狀背圖

1a1b1c	2a1b1c	3a1b1c	2a1b1c	3a2b1c	2a2b2c	3a3b1c	3a2b2c
abc	abca abac	abaca	ababc abacb abcab abcba	ababac ababca abacab abacba acabab	abacbc abcabc abcacb abcbca	abcabab acbabab	ababcac abacabc abacacb abacbac abacbca abcabac abcabca abcacab abcacba abcbaca babacac bacabac bacacab

二、形狀背圖轉顏色背圖產生數字

(一)外接長方形寬為 3 格時

顏色背圖	產生數字
(M 甲, M 乙, M 丙)	(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)

(二)外接長方形寬為 4 格時

顏色背圖	M 甲=(?), M 乙=(?), M 丙=(?)	產生數字
(M 甲, M 乙, M 丙, M 甲)	M 甲=(1), M 乙=(2), M 丙=(4)	(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
	M 甲=(8), M 乙=(2), M 丙=(4)	(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)
(M 甲, M 乙, M 甲, M 丙)	M 甲=(1), M 乙=(2), M 丙=(8)	(1, 2, 8, 3, 10, 9, 11)
	M 甲=(4), M 乙=(2), M 丙=(8)	(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)

(三)外接長方形寬為 5 格時

顏色背圖	M 甲=(?), M 乙=(?), M 丙=(?)	產生數字
(M 甲, M 乙, M 甲, M 丙, M 甲)	M 甲=(1), M 乙=(2), M 丙=(8)	(1, 2, 8, 3, 10, 9, 11)
	M 甲=(4), M 乙=(2), M 丙=(8)	(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)
	M 甲=(16), M 乙=(2), M 丙=(8)	(2, 8, 16, 10, 18, 24, 26)
(M 甲, M 乙, M 甲, M 乙, M 丙)	M 甲=(1), M 乙=(2), M 丙=(16)	(1, 2, 16, 3, 18, 17, 19)
	M 甲=(1), M 乙=(8), M 丙=(16)	(1, 8, 16, 9, 24, 17, 25)
	M 甲=(4), M 乙=(2), M 丙=(16)	(2, 4, 16, 6, 18, 20, 22)
	M 甲=(4), M 乙=(8), M 丙=(16)	(4, 8, 16, 12, 20, 24, 28)
(M 甲, M 乙, M 甲, M 丙, M 乙)	M 甲=(1), M 乙=(2), M 丙=(8)	(1, 2, 8, 3, 10, 9, 11)
	M 甲=(1), M 乙=(16), M 丙=(8)	(1, 8, 16, 9, 17, 24, 25)
	M 甲=(4), M 乙=(2), M 丙=(8)	(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)
	M 甲=(4), M 乙=(16), M 丙=(8)	(4, 8, 16, 12, 20, 24, 28)
(M 甲, M 乙, M 丙, M 甲, M 乙)	M 甲=(1), M 乙=(2), M 丙=(4)	(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
	M 甲=(1), M 乙=(16), M 丙=(4)	(1, 4, 16, 5, 20, 17, 21)
	M 甲=(8), M 乙=(2), M 丙=(4)	(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)
	M 甲=(8), M 乙=(16), M 丙=(4)	(4, 8, 16, 12, 20, 24, 28)
(M 甲, M 乙, M 丙, M 乙, M 甲)	M 甲=(1), M 乙=(2), M 丙=(4)	(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
	M 甲=(1), M 乙=(8), M 丙=(4)	(1, 4, 8, 5, 12, 9, 13)
	M 甲=(16), M 乙=(2), M 丙=(4)	(2, 4, 16, 6, 20, 18, 22)
	M 甲=(16), M 乙=(8), M 丙=(4)	(4, 8, 16, 12, 20, 24, 28)

三、背圖數量統計：形色九連塊的背圖共 120 個，如下表統計

(長，數量) / (寬，數量)	(3，1)	(4，2)	(5，5)	(6，7)
(3，1)	1	2	5	7
(4，2)	2	4	10	14
(5，5)	5	10	25	35

四、數字變化：我們歸納了 3、4 格的數字變化
1. 3 格時
(1)同一形狀在同一行則只有數字 7
(2)同一形狀分兩行，產生數字(X，7-X)，X 為小於 7 的自然數
(3)同一形狀分三行會產生數字(1，2，4)
2. 4 格時，顏色背圖(M 甲，M 乙，M 丙，M 甲)^T
(1)同一形狀在同一行則可以是數字 7 或 14
(2)同一形狀分兩行：以 X，Y 表示

行一	行二
X∈(1~6)	7-X
Y∈(2, 4, 6, 8, 10, 12)	14-Y

顏色背圖(M 甲，M 乙，M 丙，M 甲)^{T}列出全部數字如右

行一	行二
1	6
2	5
2	12
3	4
4	3
4	10
5	2
6	1
6	8
8	6
10	4
12	2

3. 顏色背圖(M 甲，M 乙，M 甲，M 丙)^T，4 格時
(1)同一形狀在同一行則可以是數字 11 或 14
(2)同一形狀分兩行：以 X，Y 表示

行一	行二
X∈(1, 2, 3, 8, 9, 10)	11-X
Y∈(2, 4, 6, 8, 10, 12)	14-Y

列出全部數字如右

行一	行二
1	10
2	9
4	10
6	8
8	3
9	2
10	1
12	2
2	12
8	6
10	4

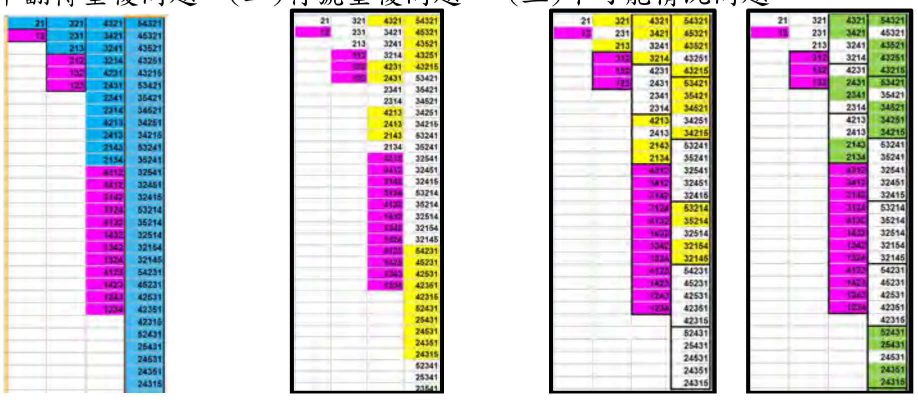
五、全部的形色九連塊如下

外接長方形	3x3	3x4	3x5	3x6	3x7	4x4	4x5	4x6	5x5
九連塊組合	777	1776 2775 3774 1767 2757 3747	17274 17472 13674 63174 11766 31746 13764 23754 13647 62751	132744 231744 113664 313644	1132644	27d5 27ec 277c 17e6 37e4 3e74 57e2 8ee3 1bea 6be8 8be3 9be2 cbe2 2bec 8be6 abe4 3e4e 4e3e 176e 275e 27ce 374e 473e 47ae 572e c72e 8e3e 4eab 1bae	1364e 1176c 32e8c 32e4c 274e8 63e88 157c8 276c8 627c8 2275c 23e4c 1726c 117cc 227cc 237c8 175c8 23e8c	2274c8 2364c8	274s8 32e8o 174co 1364s 136s4 227co

陸、討論

一、形狀背圖重新分配法：我們發現透過「間隔式」排列配合交集的概念可以更快的找出有用的形狀背圖。以 2a2b1c 為例。

(一)水平翻轉重複問題　(二)符號重複問題　(三)不可能情況問題



二、形狀背圖的演變

(一) 背圖增加元素：

從實驗中知道背圖都是根據上一層演變而來。為了看清楚變化，制定了背圖增加元素如下：

①表左邊數來第一個符號增加到右邊，②表左邊數來第二個符號增加到右邊，其他類推

△1 表示右邊第一個符號增加到左邊，△2 表示將右邊第二個符號增加到左邊，其他類推

形狀背圖演變過程：

1. abc

2. abc①→abca，abc②→abcb

abc△1→cbac，abc△2→babc

產生 4 個背圖重複，擇 abca，abcb 進入下一步

3. abca①→~~abcaa~~，abca②→abcab，abca③→abcac

abca△1→~~aabca~~，abca△2→cabca，abca△3→babca

abcb①→abcba，abcb②→~~abcbb~~，abcb③→abcbc

abcb△1→babcb，abcb△2→cabcb，abcb△3→babcb

(二)整理表格如下

第一步	第二步	第三步
abc	abca abcb	ababc　abacb　abaca abcab　abcba

三、連串數字成為多連塊情況探討

當 X+Y=$2^{甲}+2^{乙}+2^{丙}$時，X 和 Y 之間的數字可以是多少？

(一)X=$2^{甲}$，Y=$2^{乙}+2^{丙}$，甲, 乙, 丙互不相同且甲+乙+丙=3

1. 如果 X 和 Y 中間的數字是 7，一定可以。
2. 當甲=0，乙=1, 丙=2 時，中間的數字是可以 3。

垂直翻轉後，甲=2，乙=1, 丙=0 時，中間的數字是 6。

3. 當甲=1，乙=0, 丙=2 時，除了 7 之外，如果中間的數字是 3 或 6，收縮在 Y 之後，則可以成為多連塊。

(二)X=$2^{甲}$，Y=$2^{乙}+2^{丙}$，甲, 乙, 丙互不相同且甲+乙+丙=6

1. 如果 X 和 Y 中間的數字是 14，一定可以。
2. 當甲=1，乙=2, 丙=3 時，中間的數字是可以 6。

垂直翻轉後，甲=3，乙=2, 丙=1 時，中間的數字是 12。

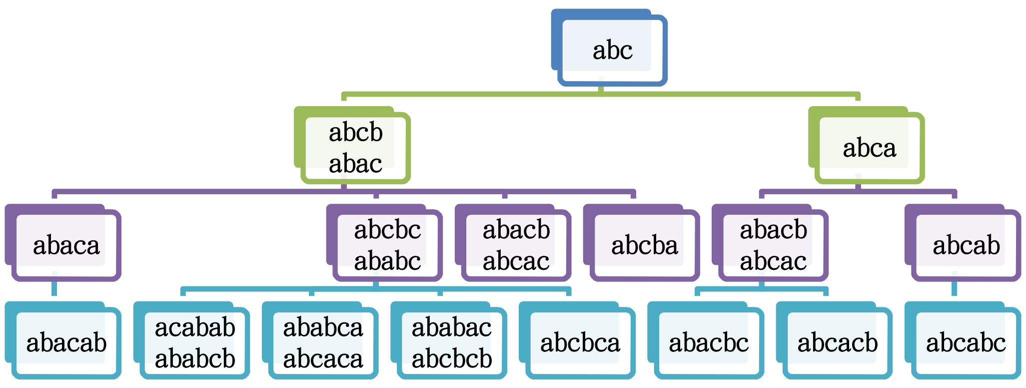
3. 當甲=2，乙=1, 丙=3 時，除了 7 之外，如果中間的數字是 6 或 12，收縮在 Y 之後，則可以成為多連塊。

四、除了形色九連塊，其他形色多連塊組合形狀組合數

多連塊	形色九連塊	形色十六連塊	形色二十五連塊
最長外接長方形	3*7	4*13	5*21
形狀組合數	8	30	131

柒、結論

一、背圖各層分類：根據討論結果，整理如下



二、形色九連塊組合

(一)從低階到高階

1. 從實驗結果，我們發現從 3X4 外接長方形到 4X4 外接長方形有 2 種方式

(1)數字 7→e

(2)全部數字*2 後再部分變回原本數字：在圖形中就是向下加方塊

(3) 部分數字*2：在圖形中就是向上加幾塊方塊的意思

2. 以(1776，2775，3774)三種連塊為例

數字改變	1776	2775	3774
7→e 或 個別數字*2	17e6 177c 17ec	2e75	3e74 37e4 3ee4 ~~3e78~~ 37e8 3ee8
全部 數字*2	2eec	4eea	6ee8
e→7	2e7c 27ec 277c	a7ea	67e8 ~~6ee4~~ 6e74

(二)形色九連塊的連貫性

1. 從上面的結論可知：形色九連塊的組合是由低階到高階演變，就像形狀背圖一樣。

2. 形色九連塊同一形狀背圖表格整理

形狀背圖	abc	abca	abac	abaca	ababc	abacb	abcab	abcba
數字背圖 3 格	777	1776 2775 3774	1767 2757 3747	17274 17472	13647	63174 13674 26571	11766 31746 23754 13764	62751 11766 22755
數字背圖 4 格	與 3x4 相同	27d5 277c 17e6 37e4 3e74 2e75 8ee3 1bea 6be8 1d76 9be2 cbe2 2bec 8be6 abe4	3e4e 4e3e 176e 275e 27ce 374e 473e 47ae 572e c72e 8e3e 4eab 1bae	274e8 472e8	1364e	136e4	32e8c 32e4c 63e88 157c8 2275c 1726c 117cc 227cc 237c8 175c8	1176c 274e8 63e88 627c8 2275c 23e4c 117cc 227cc 23e8c
數字背圖 5 格	與 3x5 相同	與 4x5 相同	與 4x5 相同	274s8	1364s	136s4	32e8o	227co
形狀背圖	abacab	abacba	abcabc	abcacb	abcbca			
數字背圖 3 格	132744 231744	132744 231744	133644	113646 133644	113646			
數字背圖 4 格	132e44	132e44	13264c	1326c4				

三、數字變化的通式

	顏色背圖	背圖數字	產生數字通式
3 格	甲乙丙	$甲_1, 乙_1, 丙_1$	$(甲_1, 乙_1, 丙_1, 甲_1+乙_1, 甲_1+丙_1, 乙_1+丙_1, 甲_1+乙_1+丙_1)$
4 格	甲乙丙甲 甲乙甲丙	$甲_1, 甲_2, 乙_1, 丙_1$	$(甲_1, 乙_1, 丙_1\ 甲_1+乙_1, 甲_1+丙_1, 乙_1+丙_1, 甲_1+乙_1+丙_1)$& $(甲_2, 乙_1, 丙_1\ 甲_2+乙_1, 甲_2+丙_1, 乙_1+丙_1, 甲_2+乙_1+丙)$
5 格	甲乙甲乙丙 甲乙甲丙乙 甲乙丙甲乙 甲乙丙乙甲	$甲_1, 甲_2, 乙_1, 乙_2, 丙_1$	$(甲_1, 乙_1, 丙_1\ 甲_1+乙_1, 甲_1+丙_1, 乙_1+丙_1, 甲_1+乙_1+丙_1)$& $(甲_2, 乙_1, 丙_1\ 甲_2+乙_1, 甲_2+丙_1, 乙_1+丙_1, 甲_2+乙_1+丙_1)$& $(甲_1, 乙_2, 丙_1\ 甲_1+乙_2, 甲_1+丙_1, 乙_2+丙_1, 甲_1+乙_2+丙_1)$& $(甲_2, 乙_2, 丙_1\ 甲_2+乙_2, 甲_2+丙_1, 乙_2+丙_1, 甲_2+乙_2+丙_1)$&
	甲乙甲丙甲	$甲_1, 甲_2, 甲_3, 乙_1, 丙_1$	$(甲_1, 乙_1, 丙_1\ 甲_1+乙_1, 甲_1+丙_1, 乙_1+丙_1, 甲_1+乙_1+丙_1)$& $(甲_2, 乙_1, 丙_1\ 甲_2+乙_1, 甲_2+丙_1, 乙_1+丙_1, 甲_2+乙_1+丙_1)$& $(甲_3, 乙_1, 丙_1\ 甲_3+乙_1, 甲_3+丙_1, 乙_1+丙_1, 甲_3+乙_1+丙_1)$

四、關於不能連接數字結論整理如下

(一)2 個數字可使用條件為；最少要有一個連接方塊。所以在 3 格中，以下數字不能連接。

(1，4)(1，2)(1，6)	(3，4)	(5，2)
(2，1)(2，4)(2，5)	(4，1)(4，2)(4，3)	(6，1)

(二)我們還發現以下規律

1. 若(a，b)和(a，c)不行，則(a，b+c)也不行

2. 若 $a+b=2^n+2^{(n-1)}+\cdots+2^0$，則(a，b)一定不行

(三)將所有數字連接情況整理如下

若有 2 自然數 i、j 以 2 進位表示如下：

$i=2^{i1}+2^{i2}+2^{i3}+...$　，　$j=2^{j1}+2^{j2}+2^{j3}+...$

其中

$\{i1, i2, i3, ...\}=Si$　，　$\{j1, j2, j3, ...\}=Sj$

1. Si 和 Sj 都是連續數列

(1)當 $Si\cap Sj=\emptyset$時，為不可連接狀態

(2)當 $Si\cap Sj\neq\emptyset$時，為可連接狀態

2. Si 為連續數列，Sj 為不連續數列

(1)$Sj\subset Si$，為可連接狀態

(2)當 $Sj\not\subset Si$ 時

a. 若 $Si\cap Sj=\emptyset$，則不可連接

b. 若 $Si\cap Sj\neq\emptyset$，則需收縮於 Sj 處

3. Si 和 Sj 皆是不連續數列，則

(1)當 $Si\subset Sj$，則需收縮於 Sj 處，反之亦然

(2)當 Si=Sj，則兩邊皆可收縮

(3)當 Si={Sk, Sa}，　Sj={Sk, Sb}

其中 $Sa\cap Sb=\emptyset$，則 Si 和 Sj 需收縮於兩邊

五、三種方法的比較：

	找出九連塊方式	優點	缺點
方法一	透過外接長方形背圖尋找多連塊	簡單易上手	容易有缺漏
方法二	透過數字列舉予刪除尋找形色九連	列出全部的組合後刪除，不會有缺漏	花費時間較久
方法三	用數字排列方式找出多連塊的組合	僅列出可能組合後互相配對	要十分熟悉規律方可使用

六、感想與未來方向：

(一)列舉多連塊最大的挑戰就是要刪除重複的形狀背圖或多連塊組合。

(二)形色九連塊所有組合已列出，我們使用的三個方法皆適合用來找九連塊組合。

(三)形狀背圖與顏色背圖的規律和通式已列出，接下來就是通過規律找到更高階多連塊組合的通式。

捌、參考資料

一、賴韻如、莊芳儀..等五人 。第 50 屆全國科展。五方連塊之乾坤大挪移武功秘笈

二、林翊欽李暐霆..等五人。第 52 屆全國科展。天羅地網尋芳蹤 只為盡訪六連塊。

三、余竑勳。第 52 屆全國科展。多方塊的塗色問題