中華民國第59屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080407

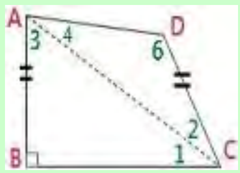
曲摺離奇的多邊形

學校名稱：臺北市私立靜心國民中小學(小學部）

作者：	指導老師：
小六 李家綈	陳慧娟
小六 劉怡婷	石光源
小六 呂學恆	
小六 鄭宥璿	

關鍵詞：基本圖形、正多邊形、摺疊

摘　　　要



基本圖形

我們想研究三宅一生服裝設計是怎麼做出來的，一開始我們先摺奇美博物館提供的摺紙範例做研究，發現此服裝設計是由數個相似圖形拼組、層疊做出來的，我們將此圖形稱為「基本圖形」，我們改變基本圖形的角度與邊長，繪製成平面圖，再將圖形剪下按照摺痕摺疊，結果發現當$\angle 2+\angle 3=\frac{360°}{n}$時，可以摺出美麗的正 n 邊形，控制∠1 與∠2、∠3 與∠4、$\overline{AD}$與$\overline{BC}$之間的關係，可以變化摺出飛鏢型、靠邊型、內部型、全等型四種不同的正 n 邊形，當$\angle 2+\angle 3\neq\frac{360°}{n}$時，若設定$\angle B=\angle 1=\angle 2=36°$時，可以摺出等分圓周的正五角星，而只要圖形摺疊後中間有洞或剛好沒洞，基本圖形都可以往上層疊，摺出螺旋狀的美麗圖形。

壹、研究動機

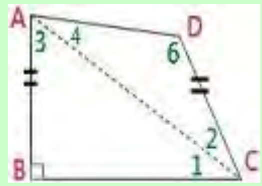
老師在課堂上分享她參觀奇美博物館「紙上奇蹟」特展的事，特別介紹有一件衣服，是利用拼組幾何圖形摺疊出來的，老師放此影片給我們看，我們都驚呼太神奇了！一個壓平的幾何圖形，拉起來居然可以形成一件衣服，這個服裝設計引起我們強烈的興趣，想知道這些壓平的幾何圖形是怎麼設計、做出來的，每個拼組出來的幾何圖形都能這樣壓平呈現完美圖案，且能立體的被拉起來嗎？於是我們利用所學（南一版四上「角度」、四下「四邊形」、五上「多邊形」、六下「縮圖和比例尺」)，探討這個服裝設計背後所藏的數學奧秘是什麼。

圖 1：三宅一生的服裝設計

貳、研究目的

研究一、探討三宅一生服裝設計的性質。

研究二、在∠B=正 n 邊形內角的基本圖形中，探討裙底(一層)摺疊後的樣貌。



基本圖形

研究三、正 n 邊形裙底摺疊後，探討在何種狀況下中間會形成空洞。

研究四、正 n 邊形裙底層疊後(多層)形成裙子，探討在何種狀況下能沿著摺痕壓平摺疊。

研究五、在基本圖形中，若改變∠B≠正 n 邊形內角時，探討裙底摺疊後的樣貌。

研究六、在基本圖形中，若∠1≠∠2，∠B 不一定是正 n 邊形內角，探討裙底摺疊後的樣貌。

參、文獻探討

本研究從三宅一生的服裝設計為出發點，想探討其中的數學原理，並分析整理出各種不同的類型與結構，從文獻中找到兩篇有關三宅一生的研究，整理如下：

表一：數學傳播 69~73 頁(常文武、王儷娟、呂安雲，2017)

文章名稱	研 究 摘 要	與本研究的差異
三宅一生的服裝設計與扭棱摺疊	將基本圖形設定成∠B=90°、∠1=∠2、$\overline{AB}$=$\overline{DC}$、$\overline{AB}$：$\overline{BC}$ = 1：$\sqrt{2}$，改變直角邊的兩股比，裙子因旋轉角度不同，造成裙子長度不同。	想從改變角度入手，探討當∠B、∠1、∠2 改變時，摺出的圖形有何不同，以此去擴展研究內容。

表二：第 58 屆全國科展國小組數學科(王晨諺等 4 人，2018)

作品名稱	研 究 摘 要	與本研究的差異
正多邊形的圓舞曲	探討正多邊形繞著外面一點旋轉，產生頂點相接的圖形，圖形內部結合三宅一生的服裝設計，讓此服裝多一層不同樣貌的底部。  圖 2：正三角形繞外面 1 點轉90° 中間結合三宅一生服裝設計	1.本研究將焦點放在探討三宅一生服裝設計中，多層裙子摺疊後，每層的旋轉角度，並設定層數與旋轉角度，讓最中間與最外面的正 n 邊形呈現0°或180°反轉的樣示。 2.該研究中圖形內部摺疊後，從內到外所有正 n 邊形彼此為內接關係，本研究想探討是否有其它的結構關係，並將其歸類做整理。

肆、研究設備及器材

筆、直尺、量角器、紙、綠黏土、電腦、相機、列表機。

伍、研究過程與方法

一、名詞解釋及定義

(一)**基本圖形**：四邊形 ABCD 中，滿足∠B＝正 n 邊形內角、∠1＝∠2、$\overline{AB}$=$\overline{DC}$，則此四邊形稱為基本圖形。(如圖 3)

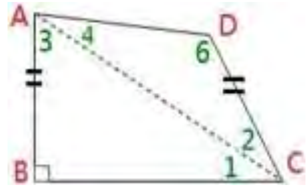


圖 3：∠B＝90°的基本圖形

(二)**單位圖形**：四邊形 ABCD 中，若不滿足基本圖形三條件之一，則此四邊形稱為單位圖形。

(三)**裙子**：由數個基本圖形或單位圖形橫向、縱向拼組而成，如圖 4 是由 16 個基本圖形拼組而成(橫向拼組 4 個、縱向拼組 4 個)，左右兩邊黏貼摺疊後，就形成裙子，

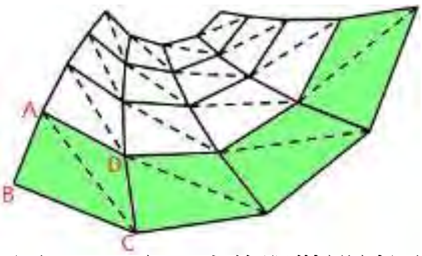


圖 4：三宅一生的服裝設計圖

(四)**裙底**：設計圖中(圖 4)塗綠色部分在裙子最底層，稱為裙底。

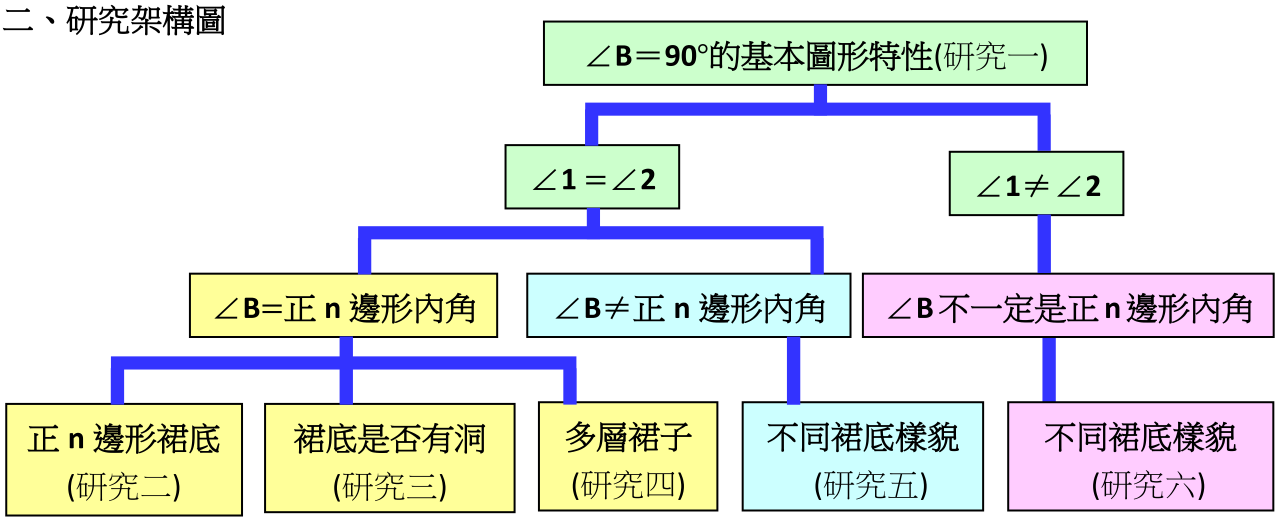
(五)**星形**：觀察 3 個單位圖形拼摺後的樣子，若第一個單位圖形的$\overline{BC}$與第三個單位圖形的$\overline{BC}$相交，且兩條$\overline{BC}$的夾角不是正 n 邊形內角度數，則摺出來的圖形為星形。(圖 5)

(六)**不平整多邊形**：觀察 3 個單位圖形拼摺後的樣子，若第一個單位圖形的$\overline{BC}$與第三個單位圖形的$\overline{BC}$不相交，且兩條$\overline{BC}$的夾角不是正 n 邊形內角度數，則摺出來的圖形為不平整多邊形。(圖 6)

圖 5：星形

圖 6：不平整多邊形

二、研究架構圖



陸、研究結果

研究一、探討三宅一生服裝設計的性質。

(一)製作過程

1.將三宅一生服裝設計(圖 7)外圍剪下。

2.實線為山線，虛線為谷線，按照摺痕摺好。

3.將左右兩側邊黏起來，按照摺痕摺疊。

(二)製作成果

如圖 8

(三)發現與歸納

1.四邊形 ABCD 為基本圖形(如圖 7，∠B＝90°、∠1＝∠2、$\overline{AB}=\overline{DC}$)。

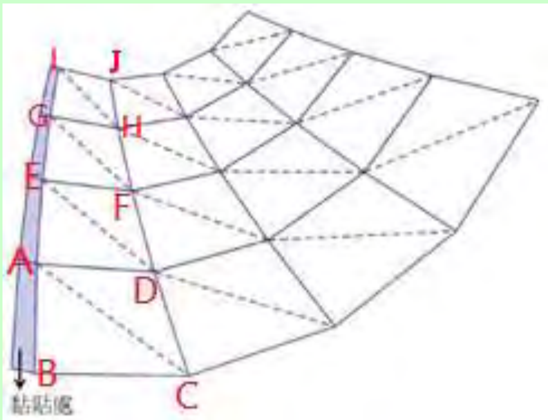


圖 7：三宅一生的服裝設計

2.此服裝設計共 4 層，每層皆由 4 個基本圖形拼組而成(裙底)，**同一層的基本圖形是全等的，不同層的基本圖形是相似的，$\overline{BC}:\overline{AD}=\overline{AD}:\overline{EF}=\overline{EF}:\overline{GH}=\overline{GH}:\overline{IJ}$。**

3.摺疊後呈現 5 個內接正方形(最內部的空心正方形除外)。

4.由外往內第 1 個最大的正方形邊長由$\overline{BC}$構成，第 2 個正方形邊長由$\overline{AD}$構成，第 3 個正方形邊長由$\overline{EF}$構成，依此類推。

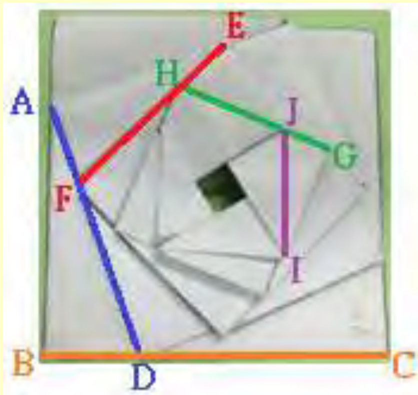


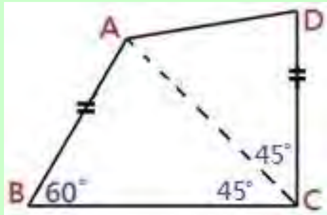
圖 8

研究二、在∠B=正 n 邊形內角的基本圖形中，探討裙底(一層)摺疊後的樣貌。

(一)猜想

觀察研究一服裝設計的裙底(一層)，發現基本圖形∠B=**90°**、對角線$\overline{AC}$將∠C 平分、$\overline{AB}$=$\overline{DC}$、拼接 4 個基本圖形，摺疊後呈現正方形的裙底，所以猜想若將∠B 改成正 n 邊形內角，拼接 n 個基本圖形，就能摺出正 n 邊形的裙底。

(二)製作過程



基本圖形

1.用直尺畫一線段 $\overline{BC}$ (自訂 $\overline{BC}$= 5 公分)。

2.用量角器畫出∠B=**60°**

3.用量角器畫∠C =**90°**，並平分∠C。(∠1 =**45°**)

4.∠C 的平分線與∠B 的延長線交於 A 點。

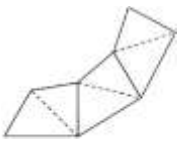
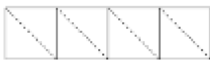
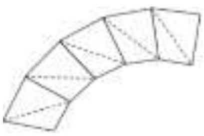
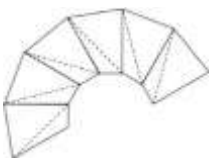
5.用直尺畫 $\overline{AB} = \overline{DC}$，最後連接$\overline{AD}$，畫出 1 個基本圖形。

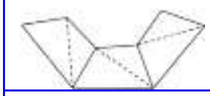
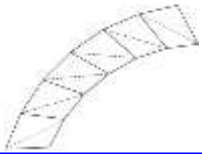
6.拼接 3 個基本圖形，完成裙底繪製圖，外圍剪下後，按照摺痕摺疊。

7.重複步驟 1.~5.，將∠B 分別改成**90°**、**108°**、**120°**，拼接 4 個、5 個、6 個基本圖形，外圍剪下後，按照摺痕摺疊。

8.重複步驟 1.~7.，將∠C 改成**70°**。(∠1 =**35°**)

(三)製作成果

∠1	繪 製 圖	摺疊後照片	發現	繪 製 圖	摺疊後照片	發現
45°	編號：2-1 ∠B=**60°** 		摺出 正三角形	編號：2-2 ∠B=**90°** 		摺出 正方形
	編號：2-3 ∠B=**108°** 		摺出 正五邊形	編號：2-4 ∠B=**120°** 		摺出 正六邊形

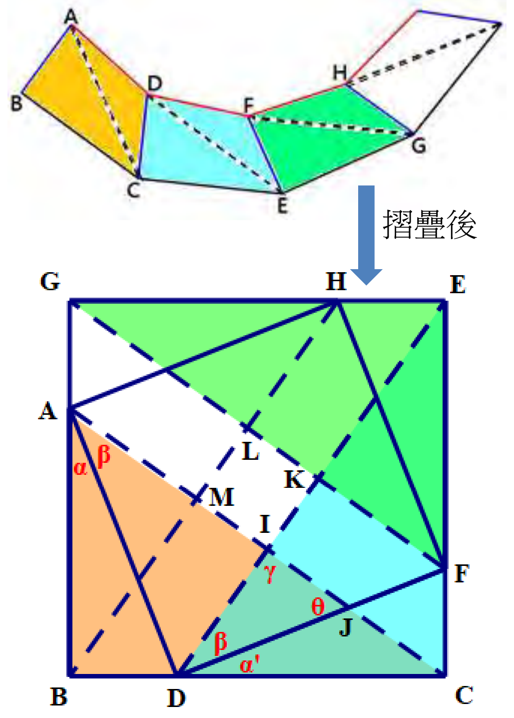
∠1	繪 製 圖	摺疊後照片	發現	繪 製 圖	摺疊後照片	發現
35°	編號：2-5 ∠B=**60°** 		摺出 正三角形	編號：2-6 ∠B=**90°** 		摺出 正方形
	編號：2-7 ∠B=**108°** 		摺出 正五邊形	編號：2-8 ∠B=**120°** 		摺出 正六邊形

(四)發現與歸納

1.在∠B=正 n 邊形內角、∠1=∠2、$\overline{AB}=\overline{DC}$的基本圖形中，若拼接 n 個基本圖形形成裙底，則摺疊後的裙底會形成正 n 邊形，圖形中間也是正 n 邊形。

理由：(以 n=4 做說明)

(先以兩個基本圖形拼摺後來說明角度均為**90°**)



(1)在四邊形 ABCD 與 DCEF 中：

$\angle BAC=\angle CDE$、$\angle CAD=\angle EDF$

$\Rightarrow \angle\alpha=\angle\alpha'$

又$\angle ADC=\angle\alpha+\angle ABC$

$\angle ADC=\angle\alpha'+\angle ADF$

$\Rightarrow \angle ABC=\angle ADF$

$\angle\gamma=\angle MIK$ (對頂角相等)

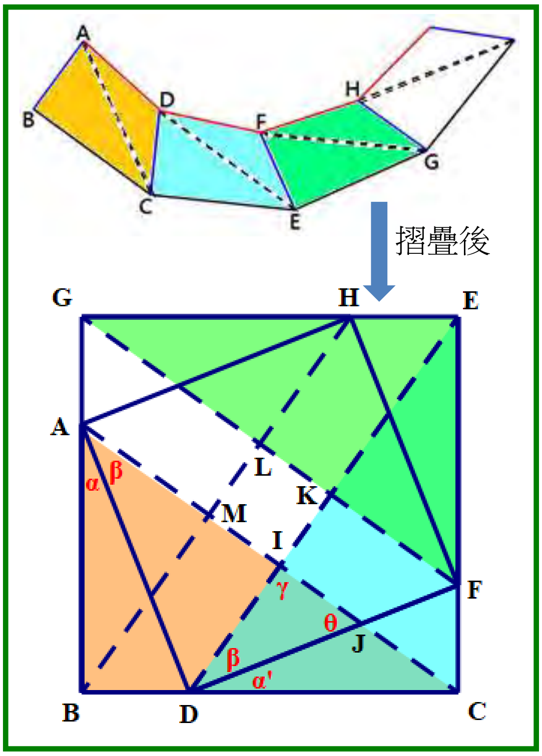
ΔDIJ 中 $\angle\beta+\angle\gamma+\angle\theta=180^\circ$

ΔADJ 中 $\angle\beta+\angle ADJ+\angle\theta=180^\circ$

$\Rightarrow \angle\gamma=\angle ADF$

即$\angle ABC=\angle ADF=\angle MIK=90^\circ$

(再以三個基本圖形拼摺後來說明$\overline{IK}>0$)



(2)在四邊形 ABCD、DCEF 與 FEGH 中：

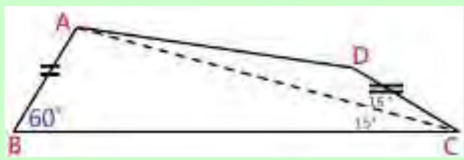
第一個基本圖形 ABCD 沿$\overline{AC}$對摺後，D 點落在$\overline{BC}$之間，第二個基本圖形 DCEF 沿$\overline{DE}$對摺後，F 點也必落在$\overline{CE}$之間，F 點不落在$\overline{AC}$上，而是落在$\overline{AC}$的上方，可見 F 點到$\overline{AC}$之間存在一段距離，$\overline{FG}$是第三個基本圖形的對角線，即兩對角線$\overline{AC}$、$\overline{FG}$之間存在一段距離，即$\overline{IK}>0$。

(3)因旋轉的對稱性，所以∠ABC=∠BCE=∠CEG=∠EGB=90°，∠ADF=∠DFH=∠FHA=∠HAD=90°，∠MIK=∠IKL=∠KLM=∠LMI=90°，$\overline{BC}=\overline{CE}=\overline{EG}=\overline{GB}$，$\overline{AD}=\overline{DF}=\overline{FH}=\overline{HA}$，$\overline{MI}=\overline{IK}=\overline{KL}=\overline{LM}$，即四邊形 GBCE、ADFH、MIKL 都是正方形，同理當 n≥3 情況相同。

2.由研究一發現摺出的正方形中間有洞，洞的邊是由每個基本圖形的摺痕($\overline{AC}$)形成，在研究二的製作成果中發現編號 2-1 圖形中間沒洞，編號 2-2、2-5 圖形中間剛好沒洞(即兩條$\overline{AC}$交於一點)，所以我們想在研究三中，繼續探討在何種狀況下正 n 邊形中間會有空洞。

研究三、正 n 邊形裙底摺疊後，探討在何種狀況下中間會形成空洞。

(一)製作過程



基本圖形

1.用直尺畫一線段 $\overline{BC}$ (自訂 $\overline{BC}$= 5 公分)。

2.用量角器畫出∠B=**60°**，∠1=∠2=**15°** 。

3.延長∠B 與∠1 的邊，交點為 A。

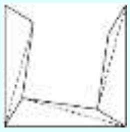
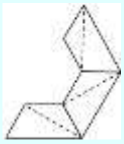
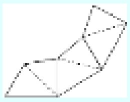
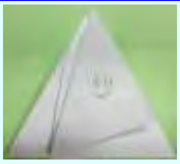
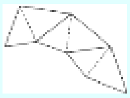
4.用直尺畫 $\overline{AB}=\overline{DC}$，最後連接$\overline{AD}$，完成 1 個基本圖形。

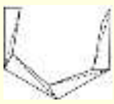
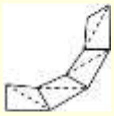
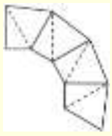
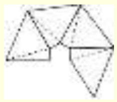
5.拼接 3 個基本圖形，完成裙底繪製圖，外圍剪下後，按照摺痕摺疊。

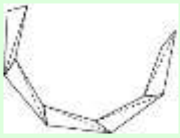
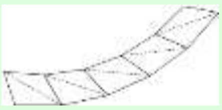
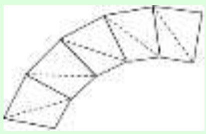
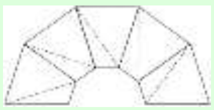
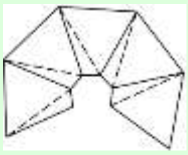
6.重複步驟 1.~5.，分別更改∠1=∠2 的度數為**30°、45°、60°、75°**。

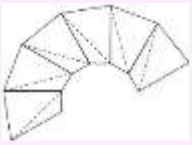
7.重複步驟 1.~6.，將∠B 分別改成 **90°、108°、120°**，分別拼接 4 個、5 個、6 個基本圖形，外圍剪下後，按照摺痕摺疊。

(二)製作成果

正三角形裙底			
∠1	繪製圖	摺疊後照片	發 現
15°			中間有洞
30°			中間 剛好沒洞
45°			中間沒洞
60°			
75°			

正方形裙底			
∠1	繪製圖	摺疊後照片	發 現
15°			1.中間有洞 2.∠1 愈大空洞愈小
30°			
45°			中間 剛好沒洞
60°			中間沒洞
75°			

	∠1	繪 製 圖	摺疊後照片	發 現
正五邊形裙底	15°			1.中間有洞 2.$\overline{BC}$是最外面正五邊形的邊 3.∠1 愈大空洞愈小
	30°			
	45°			
	54°			1.中間剛好沒洞 2.$\overline{BC}$是最外面正五邊形的邊
	60°			1.中間沒洞 2.$\overline{BC}$是最裡面正五邊形的邊 3.$\overline{AD}$是最外面正五邊形的邊
	75°	畫不出來	$\overline{AB}$與$\overline{AC}$無法相交於一點	做不出來

	$\angle 1$	繪 製 圖	摺疊後照片	發　現
正六邊形裙底	**15°**			1.中間有空洞 2.$\overline{BC}$是最外圍六邊形的邊 3.$\angle 1$ 愈大，空洞愈小。
	30°			
	45°			
	60°	畫不出來	$\overline{AB}$與$\overline{AC}$平行無法相交於一點	做不出來
	75°	畫不出來	$\overline{AB}$與$\overline{AC}$無法相交於一點	做不出來

(三)發現與歸納

我們的**條件是$\angle B$=正 n 邊形內角，$\angle 1=\angle 2$，$\overline{AB}=\overline{DC}$，拼接 n 個基本圖形**，從製作成果中發現：

1.當$\angle B=108°$、$\angle 1=75°$時，基本圖形畫不出來；$\angle B=120°$、$\angle 1=60°$或$75°$時，基本圖形也畫不出來。

理由：因$\angle B$與$\angle 1$在同一個ΔABC中，若$\angle 1+\angle B\geq 180°$時，$\Delta ABC$無法構成，所以基本圖形畫不出來。

2.(1)若$\angle 1=\frac{\angle B}{2}$時，摺疊後**中間剛好沒洞**，且$\overline{BC}$是最外圍正 n 邊形的邊。

(2)若$\angle 1<\frac{\angle B}{2}$時，摺疊後**中間有洞，$\angle 1$ 愈大，洞愈小**，$\overline{BC}$是最外圍正 n 邊形的邊。

(3)若$\angle 1>\frac{\angle B}{2}$時，摺疊後**中間沒洞**，$\overline{BC}$變成最裡面正 n 邊形的邊，$\overline{AD}$變成最外面正 n 邊形的邊。

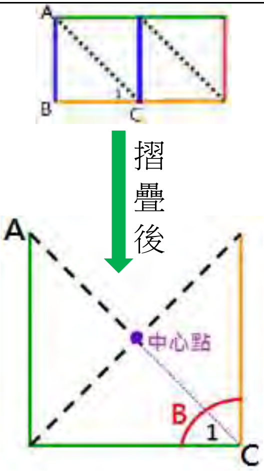
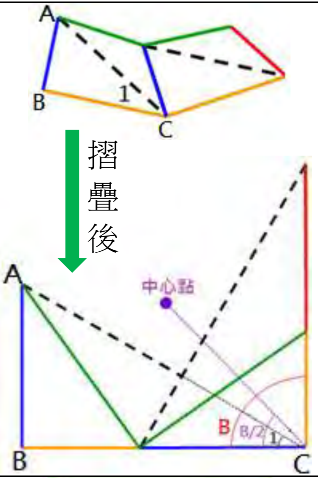
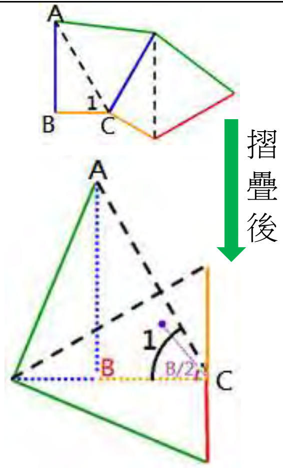
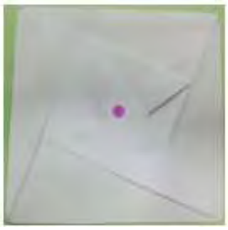
理由：(以 n=4、拼接 2 個基本圖形來做說明，同理 $n\geq 3$情況相同。)

摺疊後的圖形是否有洞，主要是各基本圖形的$\overline{AC}$(即虛線)所圍出來的，又摺疊後圖形的中心點與正 n 邊形各內角連線會平分正 n 邊形各內角，因此

(1)當$\angle 1=\frac{\angle B}{2}$時，因$\overline{AC}$也平分$\angle C$，所以中心點在$\overline{AC}$上，經圖形旋轉對稱，中心點落在各基本圖形的$\overline{AC}$上，圖形中間剛好沒洞。(圖 9)

(2)當$\angle 1<\frac{\angle B}{2}$時，因中心點落在ΔABC(摺疊後的基本圖形)之外，經圖形旋轉對稱後，圖形中間形成有洞。(圖 10)

(3)當$\angle 1>\frac{\angle B}{2}$時，因中心點落在ΔABC(摺疊後的基本圖形)之內，經圖形旋轉對稱後，中心點被覆蓋，圖形中間沒洞。(圖 11)

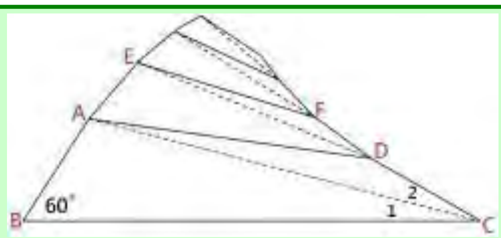
情　形	$\angle 1=\frac{\angle B}{2}$	$\angle 1<\frac{\angle B}{2}$	$\angle 1>\frac{\angle B}{2}$
圖 示			
4 個 基本圖形 拼摺後照片	 圖 9	 圖 10	 圖 11

研究四、正 n 邊形裙底層疊後(多層)形成裙子，探討在何種狀況下能沿著摺痕壓平摺疊。

(一)製作過程

1.畫基本圖形 ABCD，使∠B=60°、∠1=∠2=15°。

2.將 1.的基本圖形等比例縮小畫出 EADF，使$\overline{BC}$：$\overline{AD}=\overline{AD}$：$\overline{EF}$，拼疊成 2 層基本圖形。



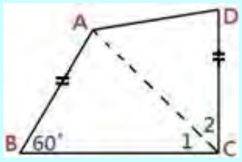
正三角形的一組圖形

3.同 2.作法，縱向拼疊 4 個基本圖形，此為一組圖形。

4.橫向拼接 3 組圖形，完成正三角形裙底層疊成裙子的繪製圖。

5.同 1.~3.，將∠B 改成90°，∠1=∠2 分別改成30°、45°、60°，橫向拼接 4 組圖形，完成正四邊形裙底層疊成裙子的繪製圖。

6.同 1.~3.，將∠B 改成108°，∠1=∠2 分別改成36°、45°、54°、60°，橫向拼接 5 組圖形，完成正五邊形裙底層疊成裙子的繪製圖。

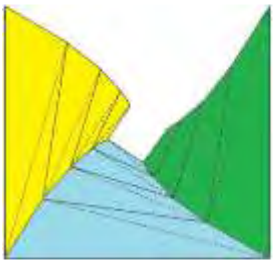
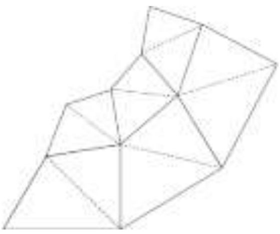


正三角形基本圖形

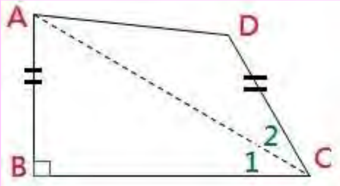
7.將全部繪製圖外框剪下，按照摺痕摺疊。

(二)製作成果

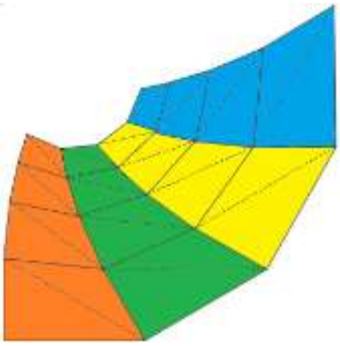
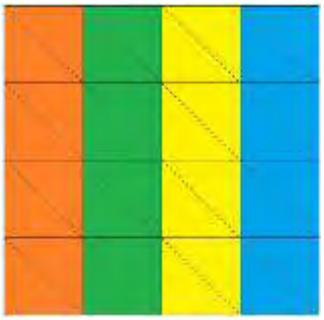
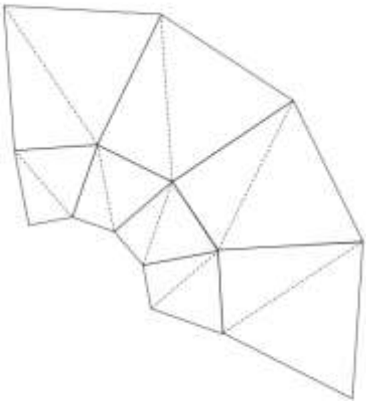
正三角形裙底層疊成裙子

編號	∠1=∠2	繪 製 圖	摺疊後照片(壓平)	摺疊後照片(拉起來)
3-1	**15°**			
3-2	**30°**			
3-3	**45°**			

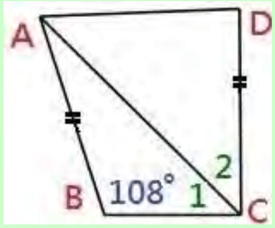
正方形裙底層疊成裙子



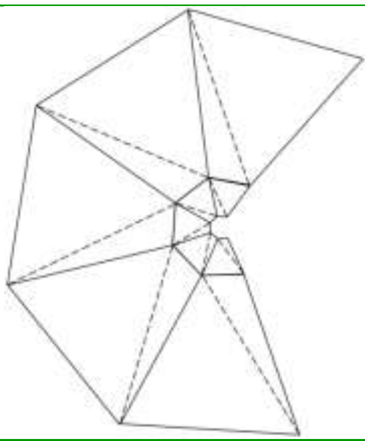
正方形基本圖形

編號	∠1=∠2	繪 製 圖	摺疊後照片(壓平)	摺疊後照片(拉起來)
4-1	**30°**			
4-2	**45°**			
4-3	**60°**			

正五邊形裙底層疊成裙子



正五邊形基本圖形

編號	∠1=∠2	繪 製 圖	摺疊後照片(壓平)	摺疊後照片(拉起來)
5-1	**36°**			
5-2	**45°**			
5-3	**54°**			
5-4	**60°**			

(三)發現與歸納

1.在是否能沿摺痕壓平摺疊中：

(1)**當$\angle 1=\angle 2>\frac{\angle B}{2}$時，不能全部沿摺痕摺疊壓平**，只能摺疊某一層，如編號 3-3、4-3、5-4。

(2)**當$\angle 1=\angle 2\leq\frac{\angle B}{2}$且繪製圖不是平行四邊形時，能全部沿著摺痕摺疊壓平，呈現每一層螺旋的轉動變化**，拉起來類似金字塔狀的角錐形體，如編號 3-1、3-2、4-1、5-2、5-3。

(3)**當$\angle 1=\angle 2=\frac{\angle B}{2}$ (即$\overline{AB}//\overline{CD}$)，繪製圖呈現平行四邊形**，如編號 4-2、5-1，**能全部沿著摺痕摺疊壓平，但不會呈現每一層轉動的變化**，拉起來像直筒狀的角柱形體。

2.在摺疊為數層的旋轉角度中：

(1)**當$\angle 1=\angle 2\leq\angle B/2$且$\overline{BC}>\overline{AD}$時，$\overline{AB}$每次往中心旋轉的角度均為x°**，因繪製圖是將基本圖形等比例縮小縱向拼疊為數層，所以摺疊後藍色的三角形都是相似三角形(如下圖 12)。

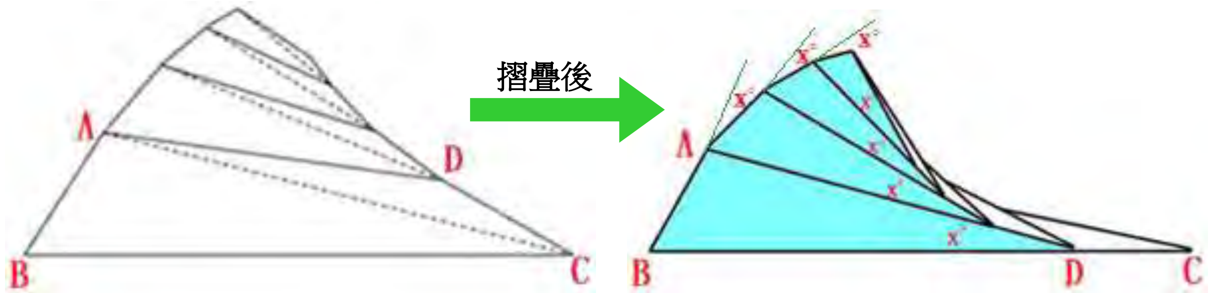


圖 12

若要讓最中間與最外面的圖形關係為旋轉0°或180°，則 x 最小的旋轉角為：

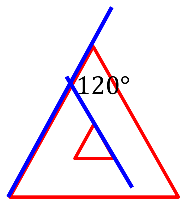
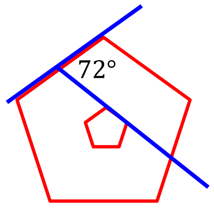
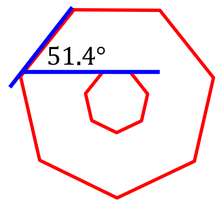
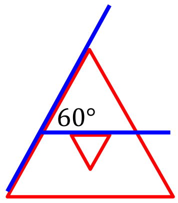
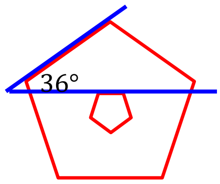
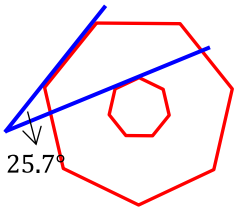
(n 是正 n 邊形、k 是摺疊後的層數)

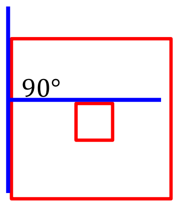
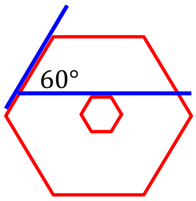
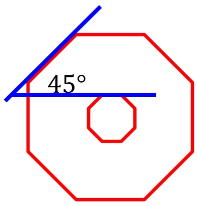
①當 n=奇數，最中間與最外面的圖形旋轉0°，$x=\frac{360°}{nk}$。

②當 n=奇數，最中間與最外面的圖形旋轉180°，$x=\frac{180°}{nk}$。

③當 n=偶數，不管最中間與最外面的圖形旋轉0°或180°，$x=\frac{360°}{nk}$。

理由：

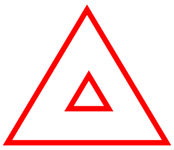
形狀 (內角度數)	正三角形 （ 60° ）	正五邊形 （ 108° ）	正七邊形 (≒128.6°)	邊旋轉的 最小角度
最中間與最外面的圖形為旋轉0°關係				$180° - \angle B$ $= 180° - \frac{(n-2)\times 180°}{n}$ $= \frac{360°}{n}$
最中間與最外面的圖形為旋轉180°關係				$(180° - \angle B) \div 2$ $= \frac{180°}{n}$

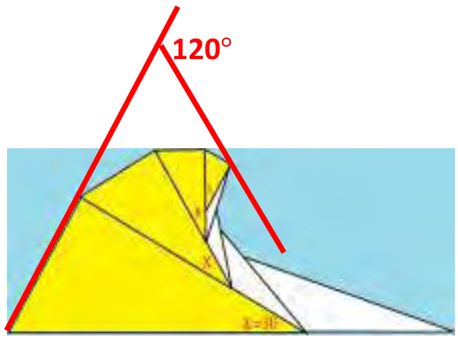
形狀 (內角度數)	正方形 （ 90° ）	正六邊形 （ 120° ）	正八邊形 （ 135° ）	邊旋轉的 最小角度
最中間與最外面的圖形為旋轉0°或180°關係				$180° - \angle B$ $= 180° - \frac{(n-2)\times 180°}{n}$ $= \frac{360°}{n}$

舉例：

a.若要讓最中間與最外面的正三角形旋轉 0°，

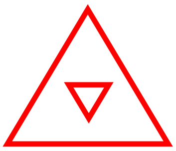
則 x 最小的旋轉角為360° ÷(3× 4)= 30° 。

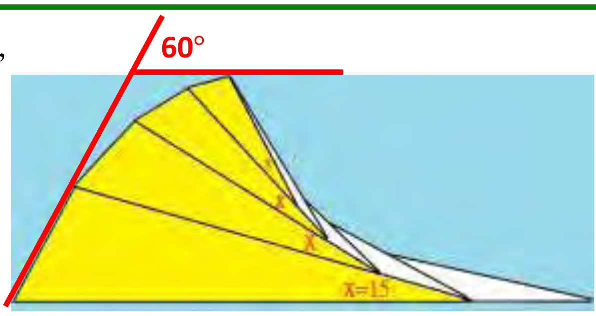




b.若要讓最中間與最外面的正三角形旋轉 180°，

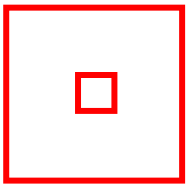
則 x 最小的旋轉角為180° ÷(3× 4)= 15° 。

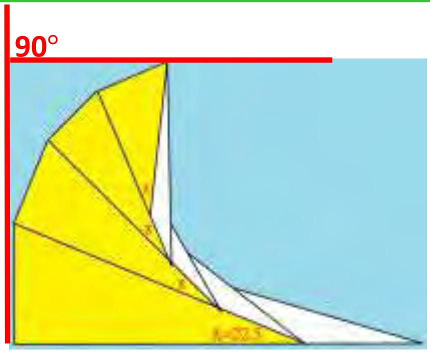




c.若要讓最中間與最外面的正方形旋轉 0°或180°，

則 x 最小的旋轉角為$360° \div (4 \times 4) = 22.5°$。

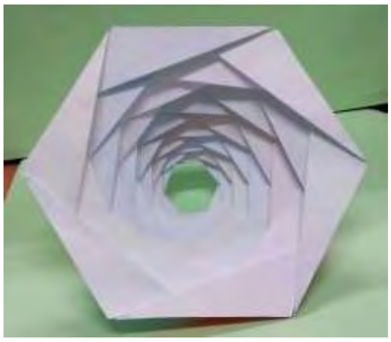




d.若增加層數，x 最小的旋轉角會變小，螺旋線會更接近圓弧線，圖形會更美麗。

壓平的俯視圖

拉起的側視圖

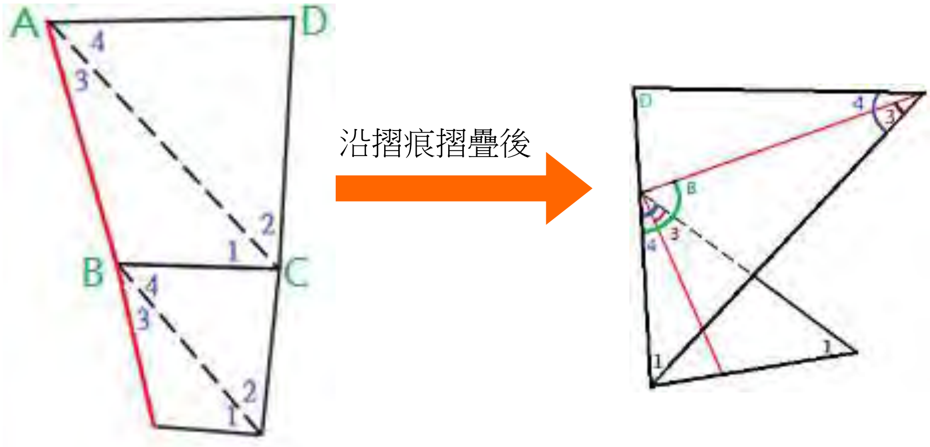


內部圖

圖 13：正六邊形裙底，共 10 層。

(2)當∠1=∠2≤∠B/2 且$\overline{BC} = \overline{AD}$時，$\overline{AB}$旋轉的角度為正 n 邊形任一外角(即$\frac{360°}{n}$)。

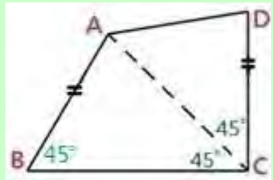
(3)當∠1=∠2≤∠B/2 且$\overline{BC} < \overline{AD}$時，$\overline{AB}$往外旋轉的角度＝180°—(∠B－∠4＋∠3)。



研究至此，我們已探討當∠B＝正 n 邊形內角、∠1＝∠2、$\overline{AB} = \overline{DC}$、拼接 n 個基本圖形，裙底摺疊後的樣貌，接下來我們將進一步探討當∠B≠正 n 邊形內角與∠1≠∠2時，拼接數個單位圖形後，裙底摺疊後的樣貌。

研究五、在基本圖形中，若改變∠B≠正 n 邊形內角時，探討裙底摺疊後的樣貌。

(一)製作過程



單位圖形

1.用直尺畫一線段 $\overline{BC}$（ 自訂 $\overline{BC}$= 5 公分)。

2.用量角器畫∠1=∠2 = **45°**。

3.畫∠B= **45°**，並延長∠B 與∠1 的邊，交點為 A。

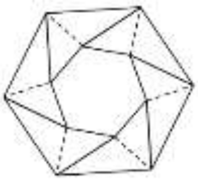
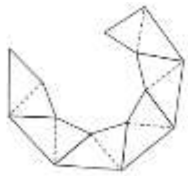
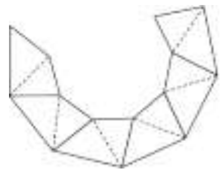
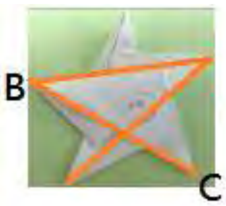
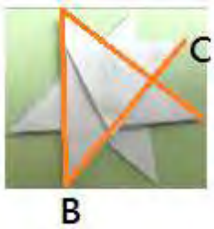
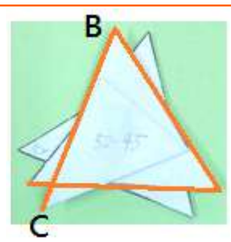
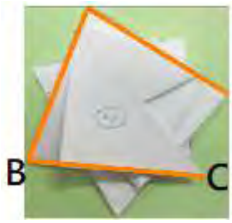
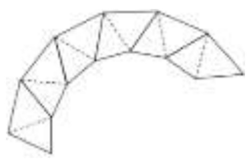
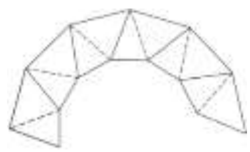
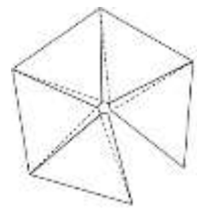
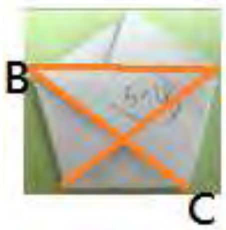
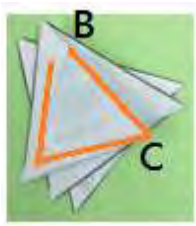
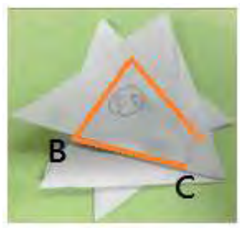
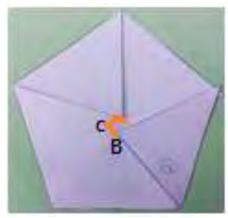
4.用直尺畫 $\overline{AB}=\overline{DC}$，最後連接$\overline{AD}$，完成 1 個單位圖形。

5.拼接 6 個單位圖形，按照摺痕摺疊。

6.重複步驟 1.~5.，分別更改∠B= **30°**、**52°**、**75°**。

7.重複步驟 1.~5.，定∠1=∠2 = **70°**，分別更改∠B= **35°**、**65°**、**70°**、**105°**。

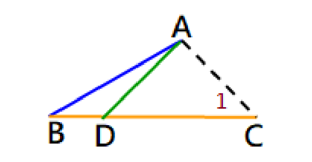
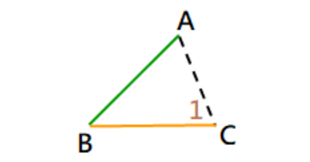
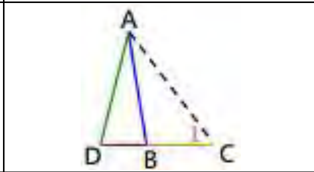
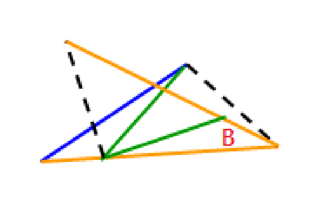
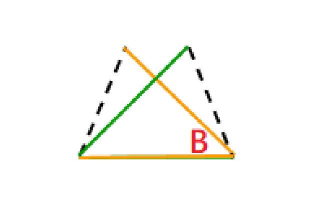
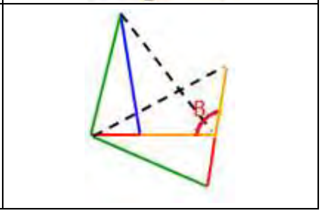
(二)製作成果

編號	5-1	5-2	5-3	5-4
∠B、∠1	**30°**、**45°**	**45°**、**45°**	**52°**、**45°**	**75°**、**45°**
繪製圖				
摺疊後照片				
編號	5-5	5-6	5-7	5-8
∠B、∠1	**35°**、**70°**	**65°**、**70°**	**70°**、**70°**	**105°**、**70°**
繪製圖				
摺疊後照片				

(三)發現與歸納

1.**若∠B≠正 n 邊形內角、∠1=∠2、$\overline{AB}=\overline{DC}$為一個單位圖形，則拼接 n 個單位圖形，摺不出正 n 邊形。**

理由：當∠1=∠2 時，1 個單位圖形沿$\overline{AC}$對摺後，呈現下列三種情形，不論是哪一種情形，2 個單位圖形拼摺後，兩條$\overline{BC}$(橘線)夾角都是∠B，若∠B≠正 n 邊形內角，則不會摺出正 n 邊形。

情形	(1) D 點在$\overline{BC}$之間	(2) D 點與 B 點重疊	(3) D 點在$\overline{BC}$外面
1 個單位圖形 沿$\overline{AC}$對摺			
2 個單位圖形 拼摺			

2.觀察拼摺 3 個單位圖形的$\overline{BC}$(橘線)：

(1)**當∠B≠正 n 邊形內角且∠B< 60°時，摺疊後會呈現星形**(編號 5-1、5-2、5-3、5-5)。

(2)**當∠B≠正 n 邊形內角且∠B> 60°時，摺疊後呈現不平整多邊形**(編號 5-4、5-6、5-7、5-8)。

理由：因兩條$\overline{BC}$(橘線)夾角都是∠B，每個單位圖形的$\overline{BC}$皆相等，當∠B= 60°時，三條$\overline{BC}$會形成封閉的正三角形，所以若∠B< 60°時，其中兩條$\overline{BC}$一定會相交，故呈現星形；若∠B≠正 n 邊形內角且∠B> 60°時，三條$\overline{BC}$無法組成封閉圖形，故呈現不平整多邊形。

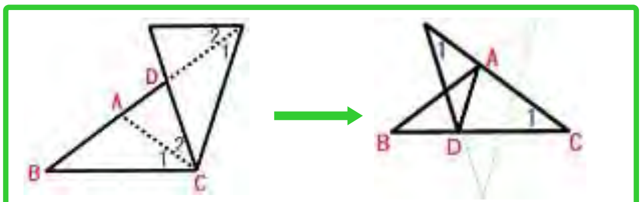


圖 14：正五角星兩個單位圖形拼摺後的樣子

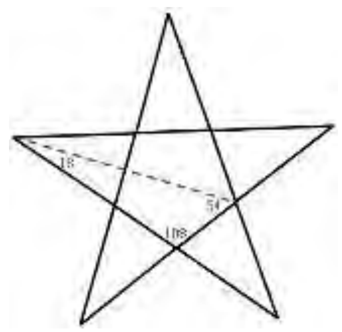
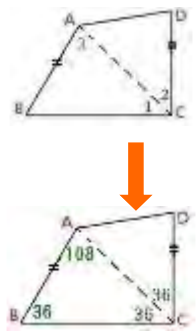
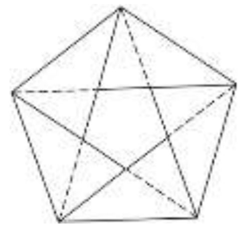
(四)設計製作正 n 角星

思考

製作成果中的星形,因凸出的星角沒有等分圓周，感覺不美，我們想做出星角一樣大且等分圓周的正 n 角星形，由摺紙過程中發現凸出的星角是由∠B、∠1 構成，因∠1=∠2，所以$\overline{CD}$會摺到$\overline{BC}$上，形成一直線，又∠B=∠1，所以∠B、∠1、∠2 這三個角會重疊摺在一起，形成另一個凸出的星角，且與$\overline{AC}$、$\overline{BC}$重疊，這樣星角與正 n 邊形的邊互相連成一直線，才能成功摺出正 n 角星。

設計與製作成果

以最常見的正五角星去設計，中間是正五邊形，正五邊形的每一邊都往外延伸，可畫出五個等分圓周的星角，我們計算正五邊形內角與星角的角度，設計製作出正五角星如下：

			
正五角星	角度設計	繪製圖	製作成果

計算星角角度

正 n 邊形的中心點與星角連線必垂直正 n 邊形的邊，

所以星角 $\angle B=\{90°-\{180°-[\frac{(n-2)\times 180°}{n}]\}\}\times 2=180°-\frac{720°}{n}$。

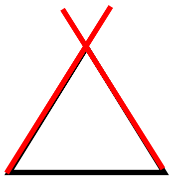
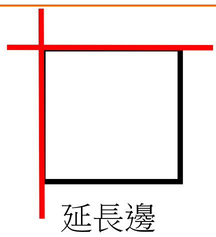
只能做出正五角星理由

單位圖形中，$\angle 1+\angle 2<180°$，若 $\angle 1=\angle 2$，則 $\angle 1=\angle 2<90°$，

因凸出的星角是由 $\angle B$、$\angle 1$ 構成，若要做出正 n 角星，則 $\angle B=\angle 1=\angle 2$，

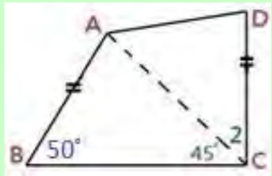
所以 $\angle B=180°-\frac{720°}{n}<90°$，得到 $n<8$，下表分別說明不能做出正 n 角星的理由，

故只有正五角星做得出來。

n 角星	正三角星	正四角星	正六角星	正七角星
做不出來原因	 延長邊 無法畫出星角	 延長邊 無法畫出星角	$\angle B=180°-\frac{720°}{6}$ $=60°$ 不符合 $\angle B\neq$ 正 n 邊形內角	$\angle B=180°-\frac{720°}{7}$ $=\frac{540}{7}\fallingdotseq 77.1°$ 不符合 $\angle B<60°$

研究六、在基本圖形中，若∠1≠∠2，∠B 不一定是正 n 邊形內角，探討裙底摺疊後的樣貌。

(一)製作過程



單位圖形

1.用直尺畫一線段 $\overline{BC}$（ 自訂 $\overline{BC}$= 5 公分)。

2.用量角器畫∠1 = 45°，∠B = 50°，延長線段交於 A 點。

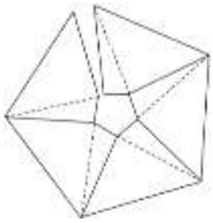
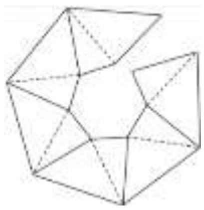
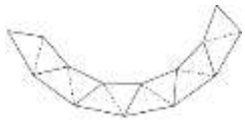
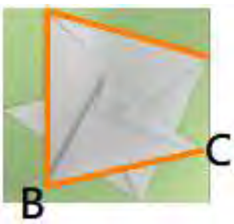
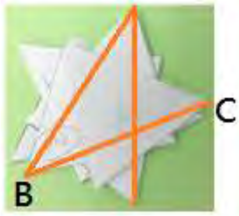
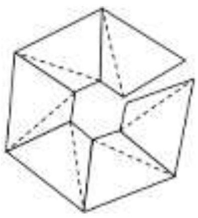
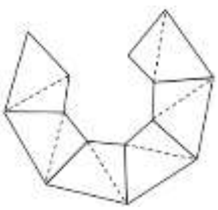
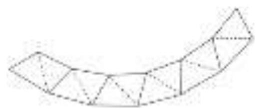
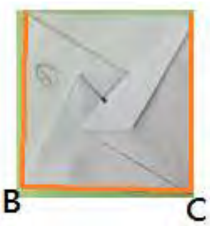
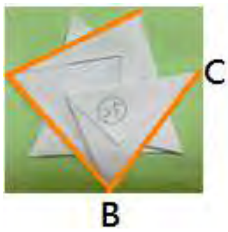
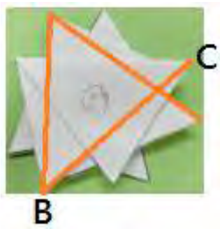
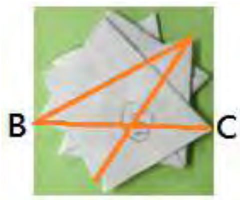
3.畫∠2 =15°，$\overline{AB}=\overline{DC}$，連接$\overline{AD}$，完成 1 個單位圖形。。

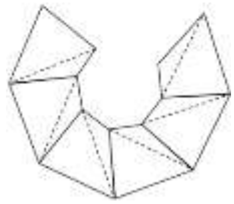
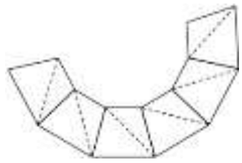
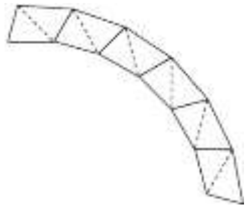
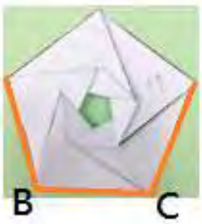
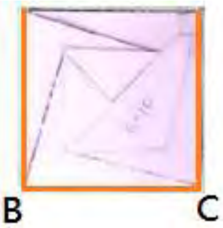
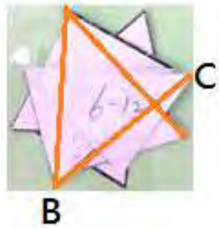
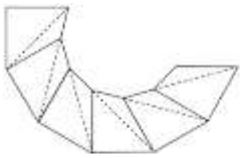
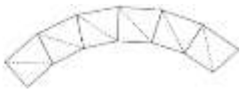
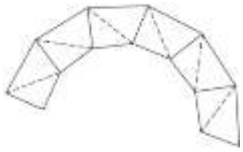
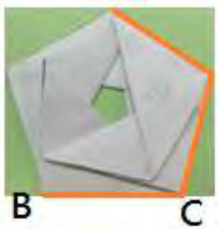
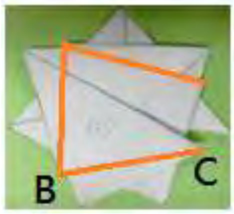
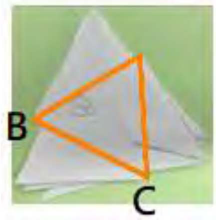
4.拼接 6 個單位圖形，按照摺痕摺疊。

5.重複步驟 1.~4.，分別更改∠2 = 30°、60°、75°。

6.重複步驟 1.~5.，分別更改∠B = 60°、75°、90°。

(二)製作成果

編號	6-1	6-2	6-3	6-4
∠B、∠2	**50°、15°**	**50°、30°**	**50°、60°**	**50°、75°**
繪製圖				
摺疊後照片				
編號	6-5	6-6	6-7	6-8
∠B、∠2	**60°、15°**	**60°、30°**	**60°、60°**	**60°、75°**
繪製圖				
摺疊後照片				

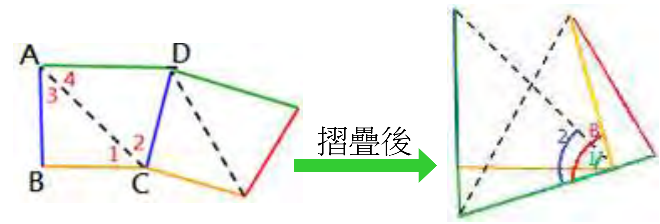
編號	6-9	6-10	6-11	6-12
∠B、∠2	**75°、15°**	**75°、30°**	**75°、60°**	**75°、75°**
繪製圖				
摺疊後照片				
編號	6-13	6-14	6-15	6-16
∠B、∠2	**90°、15°**	**90°、30°**	**90°、60°**	**90°、75°**
繪製圖				
摺疊後照片				

(三)發現與歸納

由星形與不平整多邊形的定義，我們必須確認兩條$\overline{BC}$(橘線)的關係：

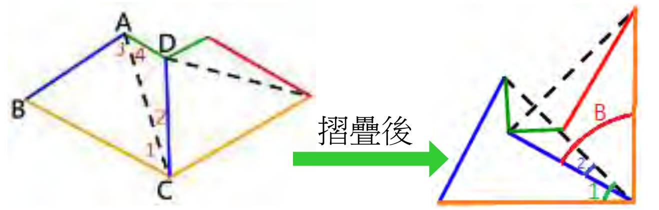
1.觀察拼摺 2 個單位圖形$\overline{BC}$(橘線)的夾角，不論∠1>∠2 或∠1<∠2，兩條$\overline{BC}$(橘線)的夾角皆為∠B+∠1−∠2。

2.觀察拼摺 3 個單位圖形的$\overline{BC}$(橘線)，**當∠B+∠1−∠2< 60°時，摺疊後會呈現星形**，如編號 6-3、6-4、6-7、6-8、6-12。



當∠1<∠2

$\overline{BC}$(橘線)的夾角=∠B−(∠2−∠1)



當∠1>∠2

$\overline{BC}$(橘線)的夾角=∠B+(∠1−∠2)

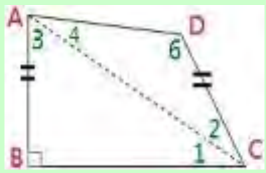
3.**當∠B+∠1－∠2> 60°且∠B+∠1－∠2≠正 n 邊形內角時，摺疊後會呈現不平整多邊形**，如編號 6-1、6-2、6-6、6-9、6-14、6-15。

4.**當∠B+∠1－∠2=正 n 邊形內角時，摺疊後會呈現正 n 邊形**，如編號 6-5、6-10、6-11、6-13、6-16。

柒、討論

一、製作正 n 邊形裙底的條件是什麼？

觀察



基本圖形

由研究二發現製作正 n 邊形裙底的條件是∠B＝正 n 邊形內角，∠1＝∠2，$\overline{AB}=\overline{DC}$，拼接 n 個基本圖形，但由研究六製作成果編號 6-10、6-11 發現當∠B≠正 n 邊形任一內角度數，∠1≠∠2，也能摺出正 n 邊形，我們整合研究二與研究六，希望能找出製作正 n 邊形裙底的條件。在繪製基本圖形(或單位圖形)時，我們給定∠B、∠1、∠2，可以算出∠3(∠3$=180°-\angle B-\angle 1$)，因$\overline{AB}=\overline{DC}$，最後再連接$\overline{AD}$，∠4、∠6 被∠B、∠1、∠2、$\overline{AB}=\overline{DC}$條件限定住，所以我們去探討研究二、研究六中∠2、∠3 與正 n 邊形裙底的關係，發現如下：

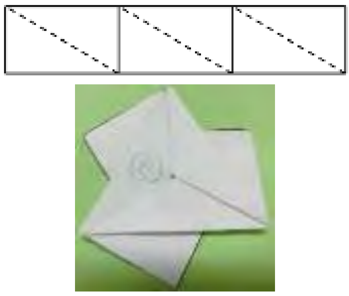
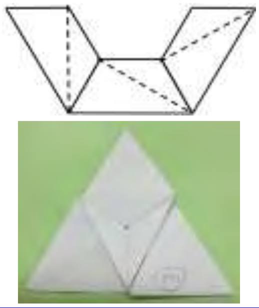
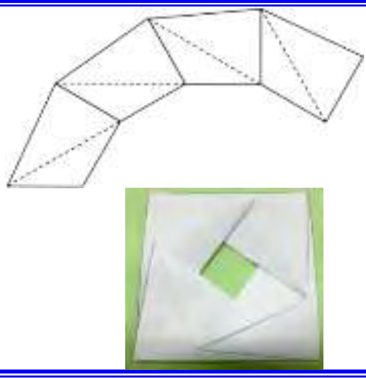
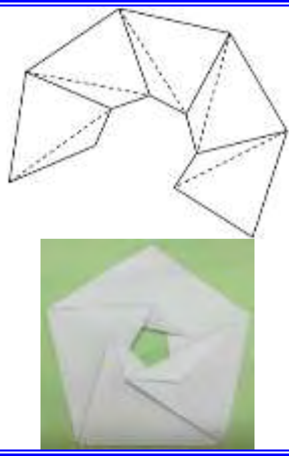
正$\boxed{三}$角形裙底：∠2+∠3=120° $=\frac{360°}{3}$	正$\boxed{四}$邊形裙底：∠2+∠3=90° $=\frac{360°}{4}$
正$\boxed{五}$邊形裙底：∠2+∠3=72° $=\frac{360°}{5}$	正$\boxed{六}$邊形裙底：∠2+∠3=60° $=\frac{360°}{6}$

猜想

我們猜想**製作正 n 邊形裙底的條件是：(1)∠2+∠3=$\frac{360°}{n}$ (2) $\overline{AB}=\overline{DC}$ (3)拼接 n 個基本圖形(或單位圖形)。**

實作

我們嘗試製作成果如下：

	∠2	∠3	繪製圖與摺疊後照片	∠2	∠3	繪製圖與摺疊後照片
正三邊形裙底	**60°**	**60°**		**30°**	**90°**	
正四邊形裙底	**60°**	**30°**		**30°**	**60°**	
正五邊形裙底	**30°**	**42°**		**60°**	**12°**	

發現

發現只要設定這三個條件∠2＋∠3＝$\frac{\mathbf{360°}}{\boldsymbol{n}}$、$\overline{\boldsymbol{AB}}=\overline{\boldsymbol{DC}}$、拼接 n 個基本圖形(或單位圖形)，即可做出正 n 邊形裙底，因基本圖形(或單位圖形)要互相拼接，所以$\overline{\boldsymbol{AB}}=\overline{\boldsymbol{DC}}$，要做出正 n 邊形，最少需拼接 n 個基本圖形(或單位圖形)，多拼接的話，基本圖形(或單位圖形)會重疊在正 n 邊形上，所以我們只需說明∠2＋∠3＝$\frac{\mathbf{360°}}{\boldsymbol{n}}$此一條件即可。

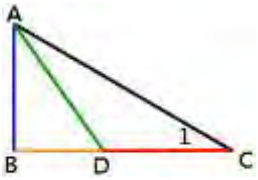
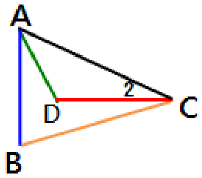
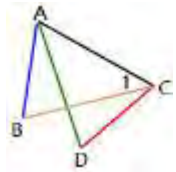
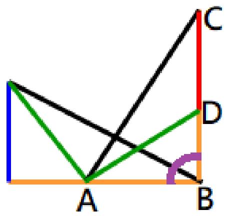
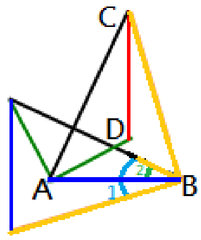
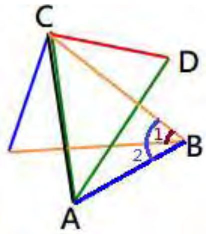
理由

因$\angle 2+\angle 3=\frac{360°}{n}$ => $\angle 3=\frac{360°}{n}-\angle 2$

又$\angle 1+\angle 3+\angle B=180°$ => $\angle 1+(\frac{360°}{n}-\angle 2)+\angle B=180°$

=> $\angle B+(\angle 1-\angle 2)=180°-\frac{360°}{n}$ ———— (∗)

因兩條$\overline{BC}$(橘線)夾角為$\angle B+(\angle 1-\angle 2)$(表三)，所以由上述理由(∗)中得知不管∠1、∠2 的關係，兩條$\overline{BC}$夾角為正 n 邊形的一內角，故只要設定這三個條件$\angle 2+\angle 3=\frac{360°}{n}$、$\overline{AB}=\overline{DC}$、拼接 n 個基本圖形(或單位圖形)，即可做出正 n 邊形裙底。

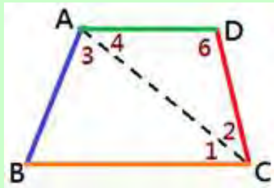
表三：當∠1、∠2 關係不同時，兩條$\overline{BC}$的夾角。				
情　形		(1) ∠1=∠2	(2) ∠1>∠2	(3) ∠1<∠2
舉例	1 個基本圖形(或單位圖形)沿$\overline{AC}$對摺			
舉例	2 個基本圖形(或單位圖形)拼　摺			
兩條$\overline{BC}$的夾角		∠B	∠B+∠1−∠2	∠B+∠1−∠2

二、改變基本圖形並拼接 n 個，可以摺疊成哪幾種不同型態的正 n 邊形裙底呢？

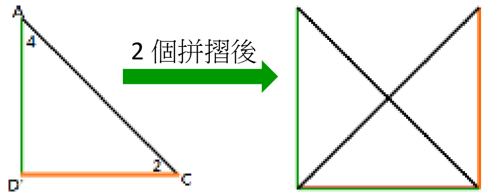
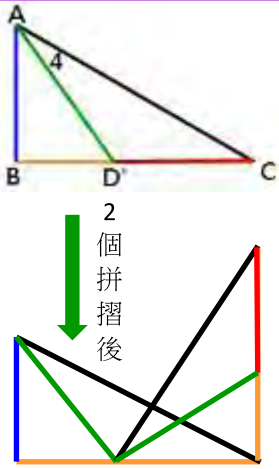
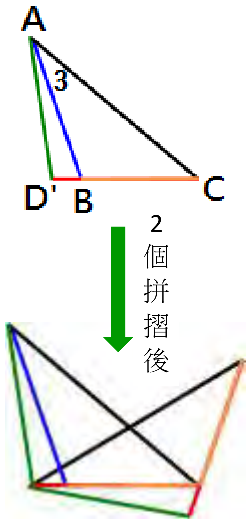
我們將所有正 n 邊形裙底的製作成果分成下列四型：

分類	1. 飛鏢型	2. 靠邊型	3. 內部型	4. 全等型
圖示舉例				
說明	只有內部是正 n 邊形，且凸出正 n 邊形以外的三角形其中一角靠著正 n 邊形的一角。	全部皆由正 n 邊形組成，除了空洞以外，內部正 n 邊形的頂點都靠著外面正 n 邊形的邊。	全部皆由正 n 邊形組成，內部正 n 邊形的頂點都在最外面正 n 邊形裡面。	全部皆由正 n 邊形組成，上到下全部的正 n 邊形都一樣大。

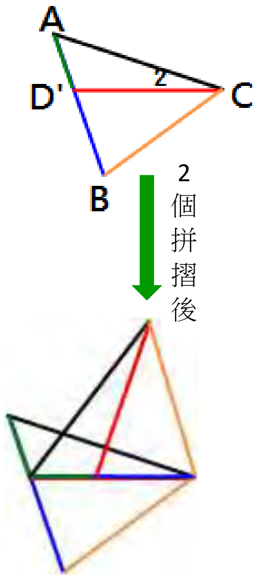
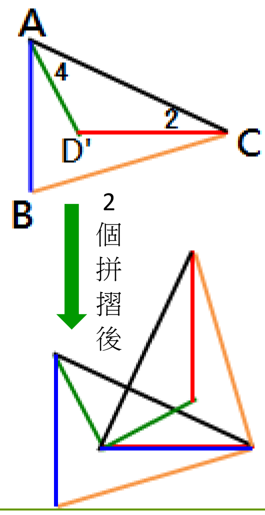
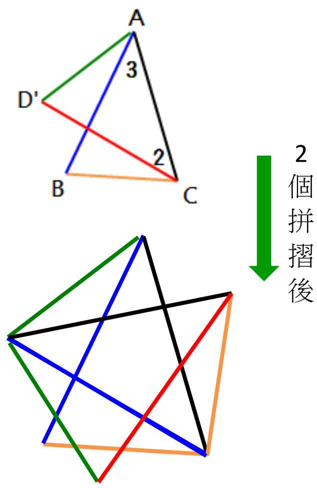
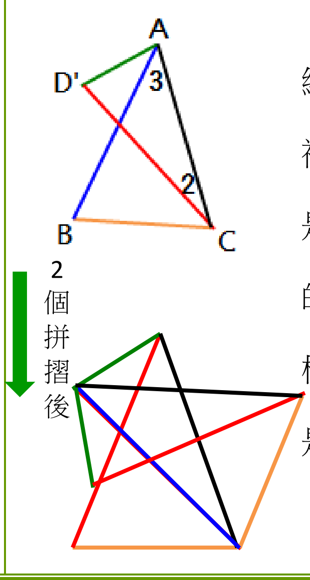
我們思考真的只有這四種型態嗎？會不會有哪一種型態是我們研究中沒摺出來的，我們列出基本圖形(或單位圖形)的角度與線段長度改變時的全部狀況，摺出來的樣子(如下表四、表五、表六)確實只有這四種型態，沒有其它。



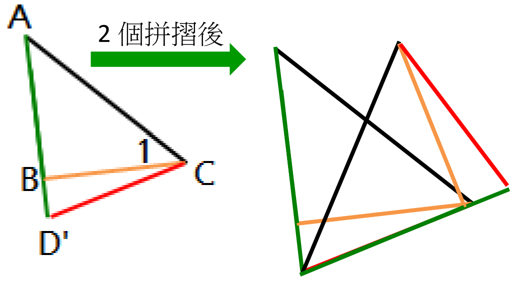
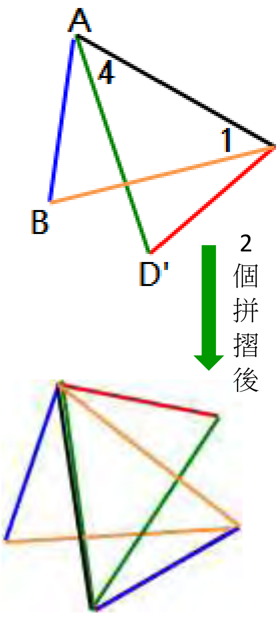
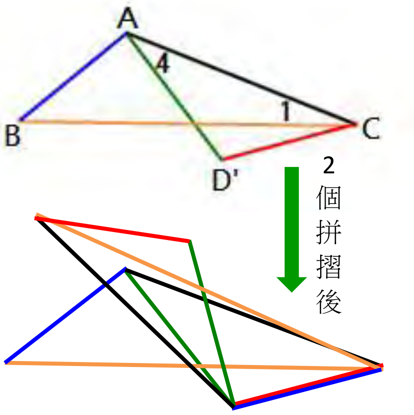
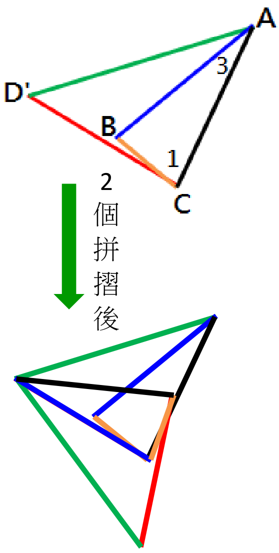
基本圖形
(或單位圖形)

表四：當∠1=∠2 時，2 個基本圖形(或單位圖形)拼摺後的樣貌。		
情形	$\overline{AD}=\overline{BC}$	$\overline{AD}\neq\overline{BC}$
∠3=∠4	$\Delta ABC\cong ADC$ (ASA)  綠線與橘線等長，所以是**全等型**。	$\Delta ABC\cong ADC$ (ASA) => $\overline{AD}=\overline{AB}$、$\overline{DC}=\overline{BC}$ 但原定$\overline{AB}=\overline{CD}$ => $\overline{AD}=\overline{BC}$ (不合) **無此情形**
∠3>∠4	$\overline{AB}=\overline{DC}$、$\overline{AC}=\overline{AC}$、$\overline{AD}=\overline{BC}$ => $\Delta ABC\cong CDA$ (SSS) =>∠2=∠3、∠1=∠4　但∠1=∠2 =>∠3=∠4 (不合) **無此情形**	 橘線是正 n 邊形外面的邊，綠線是正 n 邊形裡面的邊，綠線靠著橘線，所以是**靠邊型**。
∠3<∠4	與上面∠3>∠4 情形相同 **無此情形**	 橘線是正 n 邊形裡面的邊，綠線是正 n 邊形外面的邊，橘線都在綠線裡面，所以是**內部型**。

表五：當∠1>∠2 時，2 個基本圖形(或單位圖形)拼摺後的樣貌。

情形	$\overline{AD} = \overline{BC}$	$\overline{AD} \neq \overline{BC}$
∠3=∠4	$\overline{AB} = \overline{DC}$、$\overline{AC} = \overline{AC}$、$\overline{AD} = \overline{BC}$ => ΔABC ≅ CDA (SSS) =>∠2=∠3、∠1=∠4　但∠3=∠4 =>∠1=∠2 (不合) 無此情形	 綠線是正 n 邊形裡面的邊，橘線是正 n 邊形外面的邊，綠線都在橘線裡面，所以是內部型。
∠3>∠4	$\overline{AB} = \overline{DC}$、$\overline{AC} = \overline{AC}$、$\overline{AD} = \overline{BC}$ => ΔABC ≅ CDA (SSS) =>∠2=∠3、∠1=∠4　但∠3>∠4 =>∠2>∠1 (不合) 無此情形	 綠線是正 n 邊形裡面的邊，橘線是正 n 邊形外面的邊，綠線都在橘線裡面，所以是內部型。
∠3<∠4	 綠線與橘線等長，所以是全等型。	 綠線是正 n 邊形裡面的邊，橘線是正 n 邊形外面的邊，綠線都在橘線裡面，所以是內部型。

表六：當∠1<∠2 時，2 個基本圖形(或單位圖形)拼摺後的樣貌。

情形	$\overline{AD}=\overline{BC}$	$\overline{AD}\neq\overline{BC}$
∠3=∠4	$\overline{AB}=\overline{DC}$、$\overline{AC}=\overline{AC}$、$\overline{AD}=\overline{BC}$ => ΔABC ≅ CDA (SSS) => ∠2=∠3、∠1=∠4　但∠3=∠4 => ∠2=∠1 (不合) 無此情形	 橘線是正 n 邊形裡面的邊，綠線是正 n 邊形外面的邊，橘線靠著綠線，所以是靠邊型。
∠3>∠4	 橘線是正 n 邊形的邊，凸出正 n 邊形以外的三角形其中一角靠著正 n 邊形的一角，所以是飛鏢型。	 橘線是正 n 邊形的邊，凸出正 n 邊形以外的三角形其中一角靠著正 n 邊形的一角，所以是飛鏢型。
∠3<∠4	$\overline{AB}=\overline{DC}$、$\overline{AC}=\overline{AC}$、$\overline{AD}=\overline{BC}$ => ΔABC ≅ CDA (SSS) => ∠2=∠3、∠1=∠4　但∠3<∠4 => ∠2<∠1 (不合) 無此情形	 綠線是正 n 邊形外面的邊，橘線是正 n 邊形裡面的邊，橘線都在綠線裡面，所以是內部型。

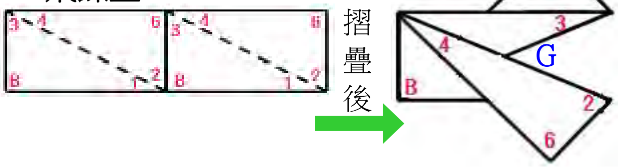
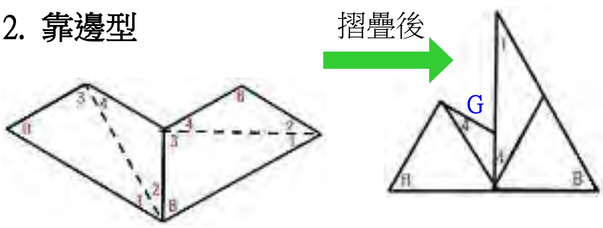
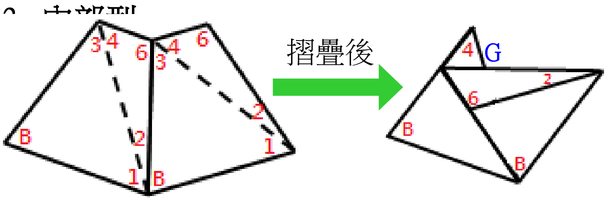
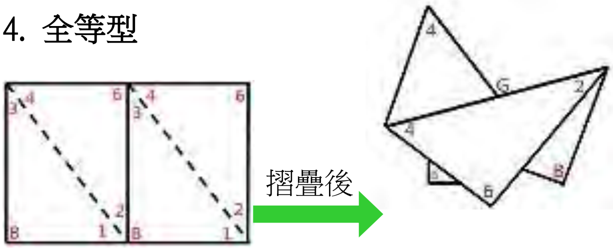
三、正 n 邊形裙底在什麼情況下中間會剛好沒洞？

表七是四種不同類型剛好沒洞的正 n 邊形裙底，不論是哪一型，若中間剛好沒洞，G 點就是正 n 邊形的中心點，中心點與正 n 邊形的頂點連線，會平分正 n 邊形內角，

所以∠6－∠3＝∠4　　又∠2＋∠3＝$\frac{360°}{n}$ ＝＞∠3＝$\frac{360°}{n}$－∠2

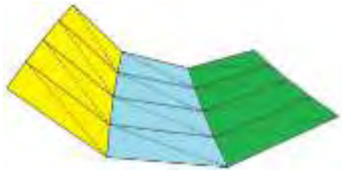
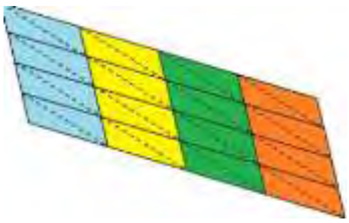
＝＞∠6－($\frac{360°}{n}$－∠2)＝∠4 ＝＞ 180°－∠4－$\frac{360°}{n}$＝∠4 ＝＞ ∠4＝90°－$\frac{180°}{n}$

故製做正 n 邊形裙底，只要**基本圖形中∠4 設定成 90°－$\frac{180°}{n}$度，裙底摺疊後，中間會剛好沒洞，當∠4＜90°－$\frac{180°}{n}$時有洞，且∠4 愈小洞愈大，∠4＞90°－$\frac{180°}{n}$時沒洞。**由討論一我們得知正 n 邊形內角度數為$180° - \frac{360°}{n}$，若中間剛好沒洞，中心點與正 n 邊形的頂點連線，會平分正 n 邊形內角，所以$(180° - \frac{360°}{n}) \div 2$＝90°－$\frac{180°}{n}$，與之前的推測相符合。

表七：四種不同類型剛好沒洞的正 n 邊形裙底	
1. 飛鏢型 	2. 靠邊型 
3. 內部型 	4. 全等型 

四、將飛鏢型的正 n 邊形裙底層疊(多層)，摺疊後會呈現什麼樣子呢？

從研究四的製作成果中，我們做出靠邊型(編號 3-1、3-2、4-1)、內部型(編號 5-2、5-3)、全等型(編號 4-2、5-1)的正 n 邊形裙底層疊後的樣子，但沒有做出飛鏢型，所以我們想做做看，想知道結果是否與研究四相同，我們自定∠1= 15°，基本圖形要符合∠2＞∠1、∠2＋∠3＝$\frac{360°}{n}$，製作成果如下：

∠1	∠2	∠3	繪 製 圖	摺疊後照片(壓平)	摺疊後照片(拉起來)
15°	45°	75°			
15°	45°	45°			
15°	45°	27°			

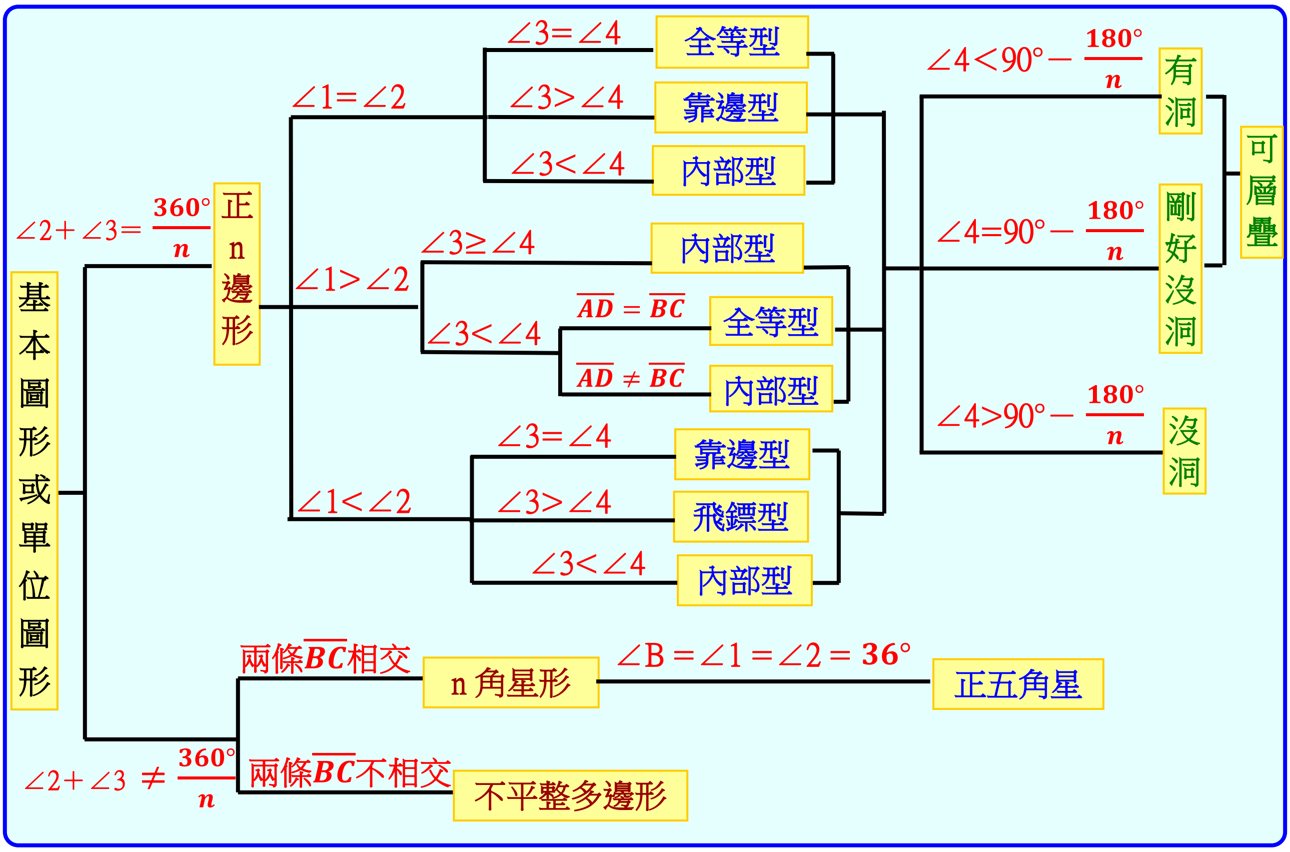
我們發現

1.**當繪製圖呈現平行四邊形時，壓平摺疊後，仍呈現每一層轉動的變化，與研究四全等型的正 n 邊形每一層會互相重疊不同**，但相同的是拉起來都像直筒狀的角柱形體。

2.當繪製圖不是平行四邊形時，壓平摺疊後，拉起來類似像金字塔狀的角錐形體，與研究四結果相同。

捌、結論

我們將研究結果整理成下圖：



只要設定好基本圖形(或單位圖形)的角度與邊長，就可以設計出我們想要的服裝樣式了！

玖、未來展望

1.若基本圖形(或單位圖形)改成其它形狀(不是四邊形)，摺出來會有什麼樣貌。

2.三宅一生以基本圖形做服裝設計，也可應用在其它物品上，如：燈籠、燈罩、傘套…等。

拾、參考資料

1.常文武、王儷娟、呂安雲(2017)。三宅一生的服裝設計與扭棱摺疊。**數學傳播**，41(4)，69-73。

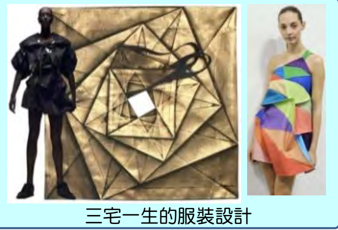
2.王晨諺、鄧价閔、簡碩君、張書晨(2018)。正多邊形的圓舞曲。中華民國第 58 屆中小學科學展覽會作品說明書。

【評語】080407

本作品以研究三宅一生摺紙服裝為起點，先做了完整的文獻分析，為了區別與之前研究的不同，作者改變原來基本圖形中的諸多元素，做出了不一樣的服裝設計，也獲致更多豐富的成果，是一件相當有趣也很富數學底蘊的佳作。

作品海報

壹、研究動機


三宅一生的服裝設計

奇美博物館「紙上奇蹟」特展中，有一件衣服，是利用拼組幾何圖形摺疊出來的，我們都驚呼太神奇了！我們**想知道這些壓平的幾何圖形是怎麼設計、做出來的，每個拼組出來的幾何圖形都能這樣壓平呈現完美圖案，且能立體的被拉起來嗎？**於是我們利用所學（南一版四上「角度」、四下「四邊形」、五上「多邊形」、六下「縮圖和比例尺」），探討這個服裝設計背後所藏的數學奧秘是什麼。

貳、研究目的

研究一、探討三宅一生服裝設計的性質。

研究二、在∠B=正 n 邊形內角的基本圖形中，探討裙底(一層)摺疊後的樣貌。

研究三、正 n 邊形裙底摺疊後，探討在何種狀況下中間會形成空洞。

研究四、正 n 邊形裙底層疊後(多層)形成裙子，探討在何種狀況下能沿著摺痕壓平摺疊。

研究五、在基本圖形中，若改變∠B≠正 n 邊形內角時，探討裙底摺疊後的樣貌。

研究六、在基本圖形中，若∠1≠∠2，∠B 不一定是正 n 邊形內角，探討裙底摺疊後的樣貌。

參、研究過程與方法

一、名詞解釋及定義

(一)**基本圖形**：四邊形 ABCD 中，滿足∠B＝正 n 邊形內角、∠1＝∠2、$\overline{AB}=\overline{DC}$，則此四邊形稱為基本圖形。(如圖 3)

(二)**單位圖形**：四邊形 ABCD 中，若不滿足基本圖形三條件之一，則此四邊形稱為單位圖形。

(三)**裙子**：由數個基本圖形或單位圖形橫向、縱向拼組而成，如圖 4 是由 16 個基本圖形拼組而成(橫向拼組 4 個、縱向拼組 4 個)，左右兩邊黏貼摺疊後，就形成裙子，

(四)**裙底**：設計圖中(圖 4)塗綠色部分在裙子最底層，稱為裙底。

(五)**星形**：觀察 3 個單位圖形拼摺後的樣子，若第一個單位圖形的$\overline{BC}$與第三個單位圖形的$\overline{BC}$相交，且兩條$\overline{BC}$的夾角不是正 n 邊形內角度數，則摺出來的圖形為星形。(圖 5)

(六)**不平整多邊形**：觀察 3 個單位圖形拼摺後的樣子，若第一個單位圖形的$\overline{BC}$與第三個單位圖形的$\overline{BC}$不相交，且兩條$\overline{BC}$的夾角不是正 n 邊形內角度數，則摺出來的圖形為不平整多邊形。(圖 6)

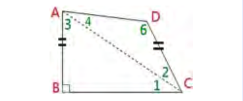


圖 3：∠B＝90°的基本圖形

圖 5：星形

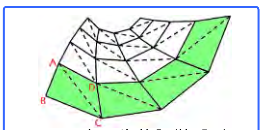


圖 4：三宅一生的服裝設計圖

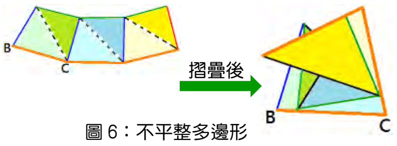
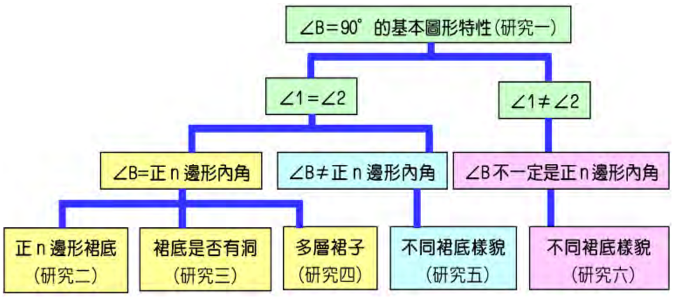


圖 6：不平整多邊形

二、研究架構圖



肆、研究結果

研究一、探討三宅一生服裝設計的性質。

(一)製作過程

1. 將三宅一生服裝設計(圖 7)外圍剪下。
2. 實線為山線，虛線為谷線，按照摺痕摺疊，將左右兩側邊黏起來。

(二)製作成果 如圖 8

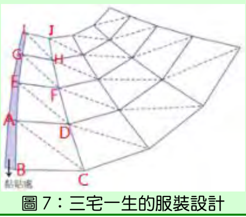


圖 7：三宅一生的服裝設計

(三)發現與歸納

1. 四邊形 ABCD 為基本圖形(如圖 7，∠B＝90°、∠1＝∠2、$\overline{AB}=\overline{DC}$)。
2. 此服裝設計共 4 層，每層皆由 4 個基本圖形拼組而成(裙底)，**同一層的基本圖形是全等的，不同層的基本圖形是相似的，$\overline{BC}:\overline{AD}=\overline{AD}:\overline{EF}=\overline{EF}:\overline{GH}=\overline{GH}:\overline{IJ}$。**
3. 摺疊後呈現 5 個內接正方形(最內部的空心正方形除外)。
4. 由外往內第 1 個最大的正方形邊長由$\overline{BC}$構成，第 2 個正方形邊長由$\overline{AD}$構成，第 3 個正方形邊長由$\overline{EF}$構成，依此類推。

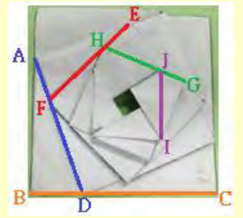
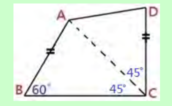


圖 8

研究二、在∠B=正 n 邊形內角的基本圖形中，探討裙底(一層)摺疊後的樣貌。

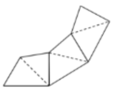
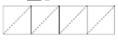
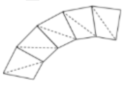
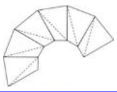
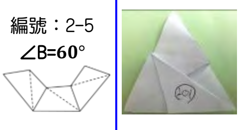
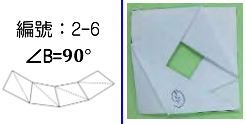
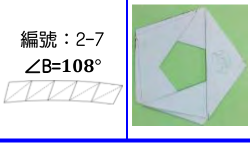
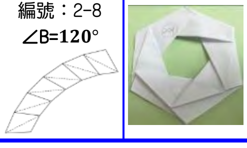
(一)製作過程

1. 畫一個基本圖形，使∠B=60°、∠1=∠2=45°。
2. 拼接 3 個基本圖形，完成裙底繪製圖，外圍剪下後，按照摺痕摺疊。
3. 重複步驟 1.、2.，將∠B 分別改成90°、108°、120°，拼接 4 個、5 個、6 個基本圖形，外圍剪下後，按照摺痕摺疊。
4. 重複步驟 1.~3.，將∠1 改成35°。



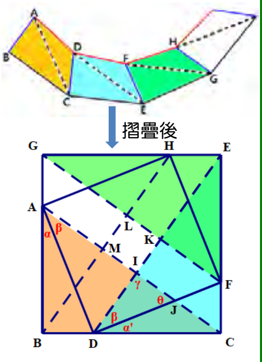
基本圖形

(二)製作成果

∠1	繪製圖	摺疊後	發現	繪製圖	摺疊後	發現
45°	編號：2-1 ∠B=60° 		摺出正三角形	編號：2-2 ∠B=90° 		摺出正方形
45°	編號：2-3 ∠B=108° 		摺出正五邊形	編號：2-4 ∠B=120° 		摺出正六邊形
35°	編號：2-5 ∠B=60° 		摺出正三角形	編號：2-6 ∠B=90° 		摺出正方形
35°	編號：2-7 ∠B=108° 		摺出正五邊形	編號：2-8 ∠B=120° 		摺出正六邊形

(三)發現與歸納

在∠B=正 n 邊形內角、∠1=∠2、$\overline{AB}=\overline{DC}$的基本圖形中，若拼接 n 個基本圖形形成裙底，則摺疊後的裙底會形成正 n 邊形，圖形中間也是正 n 邊形。



理由：(以 n=4 做說明)

(先以兩個基本圖形拼摺後來說明角度均為90°)

(1)在四邊形 ABCD 與 DCEF 中：

∠BAC ＝∠CDE、∠CAD ＝∠EDF

=>∠α=∠α’

又∠ADC ＝∠α+∠ABC

∠ADC=∠α’+∠ADF

=>∠ABC ＝∠ADF

∠γ=∠MIK (對頂角相等)

ΔDIJ 中 ∠β+∠γ+∠θ= 180°

ΔADJ 中 ∠β+∠ADJ+∠θ= 180°

=>∠γ=∠ADF

即∠ABC ＝∠ADF=∠MIK=90°

(再以三個基本圖形拼摺後來說明$\overline{IK}>0$)

(2)在四邊形 ABCD、DCEF 與 FEGH 中：

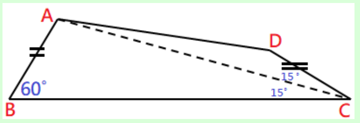
第一個基本圖形 ABCD 沿$\overline{AC}$對摺後，D 點落在$\overline{BC}$之間，第二個基本圖形 DCEF 沿$\overline{DE}$對摺後，F 點也必落在$\overline{CE}$之間，F 點不落在$\overline{AC}$上，而是落在$\overline{AC}$的上方，可見 F 點到$\overline{AC}$之間存在一段距離，$\overline{FG}$是第三個基本圖形的對角線，即兩對角線$\overline{AC}$、$\overline{FG}$之間存在一段距離，即$\overline{IK}>0$。

(3)因旋轉的對稱性，所以∠ABC=∠BCE=∠CEG=∠EGB=90°，∠ADF=∠DFH=∠FHA=∠HAD=90°，∠MIK=∠IKL=∠KLM=∠LMI=90°，$\overline{BC}=\overline{CE}=\overline{EG}=\overline{GB}$，$\overline{AD}=\overline{DF}=\overline{FH}=\overline{HA}$，$\overline{MI}=\overline{IK}=\overline{KL}=\overline{LM}$，即四邊形 GBCE、ADFH、MIKL 都是正方形，同理當 n≥3 情況相同。

研究三、正 n 邊形裙底摺疊後，探討在何種狀況下中間會形成空洞。

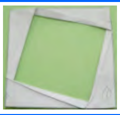
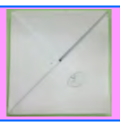
(一)製作過程

1. 畫一個基本圖形，使**∠B=60°、∠1=∠2=15°**。
2. 拼接 3 個基本圖形，完成裙底繪製圖，外圍剪下後，按照摺痕摺疊。
3. 重複步驟 1.、2.，分別更改∠1=∠2 的度數為**30°、45°、60°、75°**。
4. 重複步驟 1.~3.，將∠B 分別改成 **90°、108°、120°**，分別拼接 4 個、5 個、6 個基本圖形，外圍剪下後，按照摺痕摺疊。



基本圖形

(二)製作成果

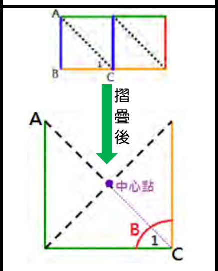
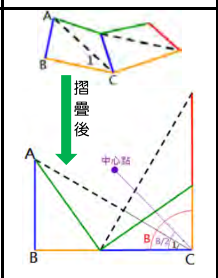
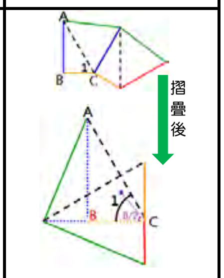
∠1	15°	30°	45°	60°	75°
正三角形裙底					
正方形裙底					
正五邊形裙底					做不出來
正六邊形裙底				做不出來	做不出來

(三)發現與歸納

1. 當∠B= 108°、∠1=75°時，和∠B= 120°、∠1=60°或75°時，基本圖形畫不出來。
2. (1)若$\angle 1=\frac{\angle B}{2}$時，摺疊後中間剛好沒洞，且$\overline{BC}$是最外圍正 n 邊形的邊。

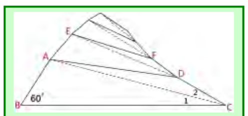
   (2)若$\angle 1<\frac{\angle B}{2}$時，摺疊後中間有洞，∠1 愈大，洞愈小，$\overline{BC}$是最外圍正 n 邊形的邊。

   (3)若$\angle 1>\frac{\angle B}{2}$時，摺疊後中間沒洞，$\overline{BC}$是最裡面正 n 邊形的邊，$\overline{AD}$是最外面正 n 邊形的邊。

情形	$\angle 1=\frac{\angle B}{2}$	$\angle 1<\frac{\angle B}{2}$	$\angle 1>\frac{\angle B}{2}$
圖示			
4 個基本圖形拼摺後照片	 圖 9	 圖 10	 圖 11

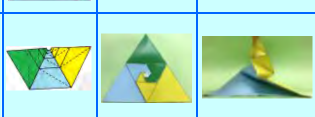
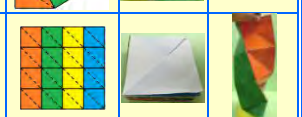
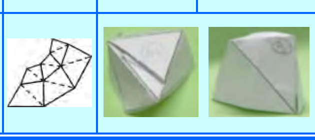
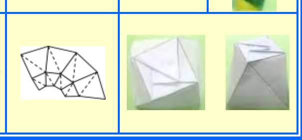
研究四、正 n 邊形裙底層疊後(多層)形成裙子，探討在何種狀況下能沿著摺痕壓平摺疊。

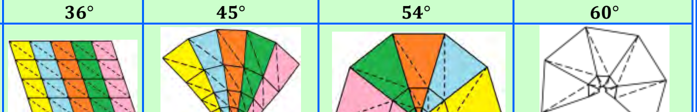
(一)製作過程


正三角形的一組圖形

1. 畫基本圖形 ABCD，使∠B=60°、∠1=∠2=15°。
2. 將 1. 的基本圖形等比例縮小畫出 EADF，使 $\overline{BC}:\overline{AD}=\overline{AD}:\overline{EF}$，拼疊成 2 層基本圖形。
3. 同 2. 作法，縱向拼疊 4 個基本圖形，此為一組圖形。
4. 橫向拼接 3 組圖形，完成正三角形裙底層疊成裙子的繪製圖。
5. 同 1.~3.，將∠B 改成90°，∠1=∠2 分別改成30°、45°、60°，橫向拼接 4 組圖形，完成正四邊形裙底層疊成裙子的繪製圖。
6. 同 1.~3.，將∠B 改成108°，∠1=∠2 分別改成36°、45°、54°、60°，橫向拼接 5 組圖形，完成正五邊形裙底層疊成裙子的繪製圖。
7. 將全部繪製圖外框剪下，按照摺痕摺疊。

(二)製作成果

正三角形裙底層疊成裙子					正方形裙底層疊成裙子				
編號	∠1	繪製圖	摺疊後壓平	摺疊後拉起來	編號	∠1	繪製圖	摺疊後壓平	摺疊後拉起來
3-1	15°				4-1	30°			
3-2	30°				4-2	45°			
3-3	45°				4-3	60°			

正五邊形裙底層疊成裙子	編號	5-1	5-2	5-3	5-4
	∠1	36°	45°	54°	60°
	繪製圖				
	摺疊後壓平				
	摺疊後拉起				

(三)發現與歸納

1. 在是否能沿摺痕壓平摺疊中：

   (1)當$\angle 1=\angle 2>\frac{\angle B}{2}$時，不能全部沿摺痕摺疊壓平，只能摺疊某一層，如編號 3-3。

   (2)當$\angle 1=\angle 2\leq\frac{\angle B}{2}$且繪製圖不是平行四邊形時，能全部沿著摺痕摺疊壓平，呈現每一層螺旋的轉動變化，拉起來類似金字塔狀的角錐形體，如編號 3-1、4-1、5-2。

   (3)當$\angle 1=\angle 2\leq\frac{\angle B}{2}$且繪製圖是平行四邊形時，如編號 4-2、5-1，能全部沿著摺痕摺疊壓平，但不會呈現每一層轉動的變化，拉起來像直筒狀的角柱形體。
2. 在摺疊為數層的旋轉角度中：

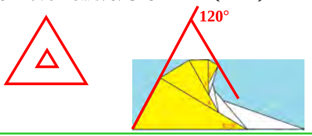
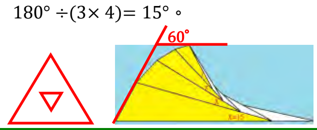
   (1)當∠1=∠2≤∠B/2 且$\overline{BC}>\overline{AD}$時，$\overline{AB}$每次往中心旋轉的角度均為 x°。若要讓最中間與最外面的圖形關係為旋轉0°或180°，則 x 最小的旋轉角為：(n是正 n 邊形、k是摺疊後的層數)

   ①當 n=奇數，最中間與最外面的圖形旋轉 0°，x 最小的旋轉角為 $\frac{360°}{nk}$。

   ②當 n=奇數，最中間與最外面的圖形旋轉 180°，x 最小的旋轉角為 $\frac{180°}{nk}$。

   ③當 n=偶數，不管最中間與最外面的圖形旋轉 0°或 180°，x 最小的旋轉角為 $\frac{360°}{nk}$。

舉例：

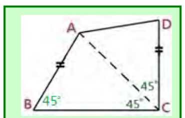
a. 若要讓最中間與最外面的正三角形旋轉 0°，則 x 最小的旋轉角為360° ÷(3× 4)= 30°。	b. 若要讓最中間與最外面的正三角形旋轉 180°，則 x 最小的旋轉角為180° ÷(3× 4)= 15°。
	

   (2)當∠1=∠2≤∠B/2 且$\overline{BC}=\overline{AD}$時，$\overline{AB}$旋轉的角度為正 n 邊形任一外角(即$\frac{360°}{n}$)。

   (3)當∠1=∠2≤∠B/2 且$\overline{BC}<\overline{AD}$時，$\overline{AB}$往外旋轉的角度＝180°−(∠B−∠4＋∠3)。

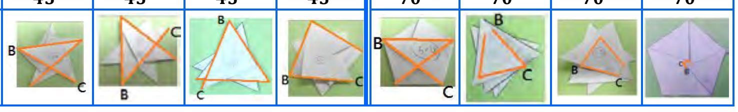
研究五、在基本圖形中，若改變∠B≠正 n 邊形內角時，探討裙底摺疊後的樣貌。

(一)製作過程


單位圖形

1. 畫一個單位圖形，使∠B=45°、∠1=∠2=45°。
2. 拼接 6 個單位圖形，完成裙底繪製圖，外圍剪下後，按照摺痕摺疊。
3. 重複步驟 1.、2.，將∠B 分別改成30°、52°、75°。
4. 重複步驟 1.~3.，定∠1=∠2=70°，分別更改∠B= 35°、65°、70°、105°。

(二)製作成果

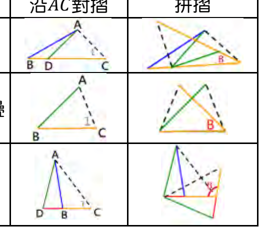
編號	5-1	5-2	5-3	5-4	5-5	5-6	5-7	5-8
∠B ∠1	30° 45°	45° 45°	52° 45°	75° 45°	35° 70°	65° 70°	70° 70°	105° 70°
摺疊後								

(三)發現與歸納

1. 若∠B≠正 n 邊形內角、∠1=∠2、$\overline{AB}=\overline{DC}$為一個單位圖形，則拼接 n 個單位圖形，摺不出正 n 邊形。
2. 觀察拼摺 3 個單位圖形的$\overline{BC}$(橘線)：

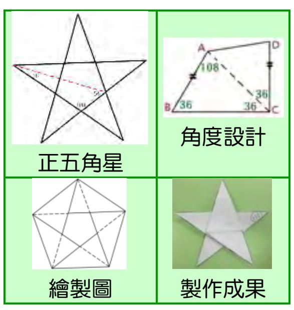
   (1)當∠B≠正 n 邊形內角且∠B< 60°時，摺疊後會呈現星形。

   (2)當∠B≠正 n 邊形內角且∠B> 60°時，摺疊後呈現不平整多邊形。

情形	1 個單位圖形沿$\overline{AC}$對摺	2 個單位圖形拼摺
(1)D 點在$\overline{BC}$之間		
(2)D 點與 B 點重疊		
(3)D 點在$\overline{BC}$外面		

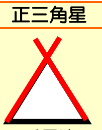
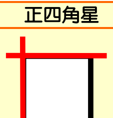
(四)設計製作正 n 角星

以最常見的正五角星去設計，中間是正五邊形，正五邊形的每一邊都往外延伸，可畫出五個等分圓周的星角，我們計算正五邊形內角與星角的角度，設計製作出正五角星如右。


正五角星 角度設計 繪製圖 製作成果

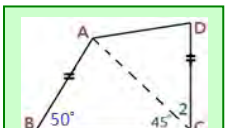
只能做出正五角星理由

單位圖形中，∠1+∠2< 180°，若∠1＝∠2，則∠1＝∠2< 90°，因凸出的星角是由∠B、∠1 構成，若要做出正 n 角星，則∠B＝∠1＝∠2，所以$\angle B=180°-\frac{720°}{n}<90°$，得到 n<8，下表分別說明不能做出正 n 角星的理由，故只有正五角星做得出來。

n 角星	正三角星	正四角星	正六角星	正七角星
做不出來原因	 延長邊無法畫出星角	 延長邊無法畫出星角	$\angle B=180°-\frac{720°}{6}=60°$ 不符合∠B≠正 n 邊形內角	$\angle B=180°-\frac{720°}{7}=\frac{540}{7}≒77.1°$ 不符合∠B< 60°

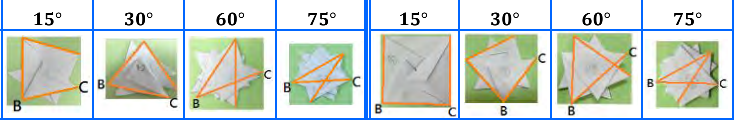
研究六、在基本圖形中，若∠1≠∠2，∠B 不一定是正 n 邊形內角，探討裙底摺疊後的樣貌。

(一)製作過程


單位圖形

1. 畫一個單位圖形，使∠B=50°、∠1=45°、∠2=15°。
2. 拼接 6 個單位圖形，完成裙底繪製圖，外圍剪下後，按照摺痕摺疊。
3. 重複步驟 1.、2.，分別更改∠2＝ 30°、60°、75°。
4. 重複步驟 1.~3.，分別更改∠B＝ 60°、75°、90°。

(二)製作成果

編號	6-1	6-2	6-3	6-4	6-5	6-6	6-7	6-8
∠B ∠2	50° 15°	50° 30°	50° 60°	50° 75°	60° 15°	60° 30°	60° 60°	60° 75°
摺疊後								

編號	6-9	6-10	6-11	6-12	6-13	6-14	6-15	6-16
∠B ∠2	75° 15°	75° 30°	75° 60°	75° 75°	90° 15°	90° 30°	90° 60°	90° 75°
摺疊後								

(三)發現與歸納

由星形與不平整多邊形的定義，我們必須確認兩條$\overline{BC}$(橘線)的關係：

1. 觀察拼摺 2 個單位圖形$\overline{BC}$(橘線)的夾角，不論∠1>∠2 或∠1<∠2，兩條$\overline{BC}$(橘線)的夾角皆為∠B+∠1−∠2。
2. 觀察拼摺 3 個單位圖形的$\overline{BC}$(橘線)，當∠B+∠1−∠2< 60° 時，摺疊後會呈現星形，如編號 6-3、6-4、6-7、6-8、6-12。
3. 當∠B+∠1−∠2> 60° 且∠B+∠1−∠2≠正 n 邊形內角時，摺疊後會呈現不平整多邊形，如編號 6-1、6-2、6-6、6-9、6-14、6-15。
4. 當∠B+∠1−∠2=正 n 邊形內角時，摺疊後會呈現正 n 邊形，如編號 6-5、6-10、6-11、6-13、6-16。

伍、討 論

一、製作正 n 邊形裙底的條件是什麼？

重大發現：

$\angle 2+\angle 3=\frac{360^\circ}{n}$、$\overline{AB}=\overline{DC}$、拼接 n 個基本圖形(或單位圖形)，只要設定這三個條件，即可做出正 n 邊形裙底。

理由

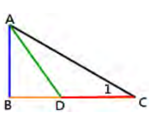
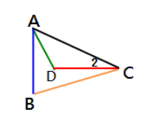
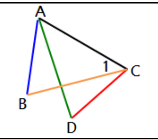
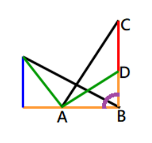
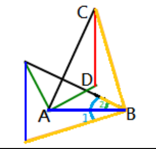
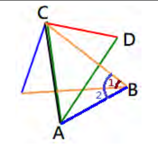
因$\angle 2+\angle 3=\frac{360^\circ}{n}$ => $\angle 3=\frac{360^\circ}{n}-\angle 2$

又$\angle 1+\angle 3+\angle B=180^\circ$ =>$\angle 1+(\frac{360^\circ}{n}-\angle 2)+\angle B=180^\circ$

=>$\angle B+(\angle 1-\angle 2)=180^\circ-\frac{360^\circ}{n}$ (＊)

因兩條$\overline{BC}$(橋線)夾角為$\angle B+(\angle 1-\angle 2)$(表三)，所以由上述理由(＊)中得知不管∠1、∠2 的關係，兩條$\overline{BC}$夾角為正 n 邊形的一內角。

表三：當∠1、∠2 關係不同時，兩條$\overline{BC}$的夾角。

情 形		(1) ∠1=∠2	(2) ∠1>∠2	(3) ∠1<∠2
舉例	1 個基本圖形(或單位圖形)沿$\overline{AC}$對摺			
	2 個基本圖形(或單位圖形)拼 摺			
兩條$\overline{BC}$的夾角		∠B	∠B+∠1−∠2	∠B+∠1−∠2

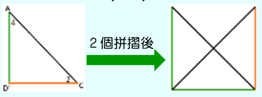
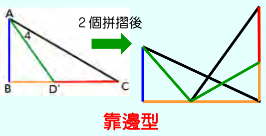
二、可以摺疊出哪幾種不同型態的正 n 邊形裙底呢？

我們將所有正 n 邊形裙底的製作成果分成下列四型：

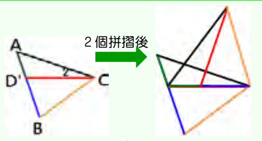
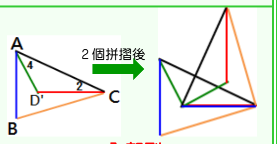
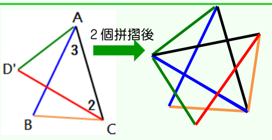
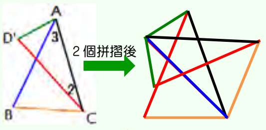
分類	1. 飛鏢型	2. 靠邊型	3. 內部型	4. 全等型
圖示舉例				
說明	只有內部是正 n 邊形，凸出正 n 邊形以外的三角形其中一角靠著正 n 邊形的一角。	全部皆由正 n 邊形組成，除了空洞以外，內部正 n 邊形的頂點都靠著外面正 n 邊形的邊。	全部皆由正 n 邊形組成，內部正 n 邊形的頂點都在最外面正 n 邊形裡面。	全部皆由正 n 邊形組成，上到下全部的正 n 邊形都一樣大。

真的只有這四種型態嗎？我們列出基本圖形(或單位圖形)的角度與線段長度改變時的全部狀況，摺出來的樣子(如下表四、表五、表六)確實只有這四種型態，沒有其它。

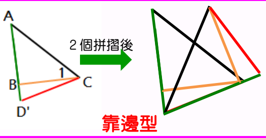
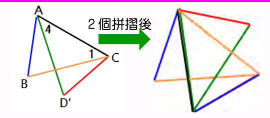
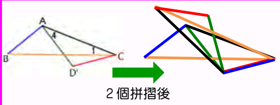
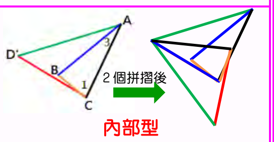
表四：當∠1=∠2 時，2 個基本圖形(或單位圖形)拼摺後的樣貌。

情形	$\overline{AD}=\overline{BC}$	$\overline{AD}\neq\overline{BC}$
∠3＝∠4	ΔABC ≅ ADC(ASA)  全等型	ΔABC ≅ ADC(ASA) => $\overline{AD}=\overline{AB}$、$\overline{DC}=\overline{BC}$ 但原定$\overline{AB}=\overline{CD}$ => $\overline{AD}=\overline{BC}$(不合) 無此情形
∠3>∠4	$\overline{AB}=\overline{DC}$、$\overline{AC}=\overline{AC}$、$\overline{AD}=\overline{BC}$ => ΔABC ≅ CDA(SSS) =>∠2=∠3、∠1=∠4 但∠1=∠2 =>∠3=∠4(不合) 無此情形	 靠邊型
∠3＜∠4	與上面∠3>∠4 情形相同 無此情形	 內部型

表五：當∠1>∠2 時，2 個基本圖形(或單位圖形)拼摺後的樣貌。

情形	$\overline{AD}=\overline{BC}$	$\overline{AD}\neq\overline{BC}$
∠3=∠4	$\overline{AB}=\overline{DC}$、$\overline{AC}=\overline{AC}$、$\overline{AD}=\overline{BC}$ => ΔABC ≅ CDA(SSS) =>∠2=∠3、∠1=∠4 但∠3=∠4 =>∠1=∠2(不合) 無此情形	 內部型
∠3>∠4	$\overline{AB}=\overline{DC}$、$\overline{AC}=\overline{AC}$、$\overline{AD}=\overline{BC}$ => ΔABC ≅ CDA(SSS) =>∠2=∠3、∠1=∠4 但∠3>∠4 =>∠2>∠1(不合) 無此情形	 內部型
∠3<∠4	 全等型	 內部型

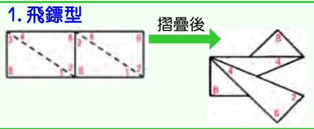
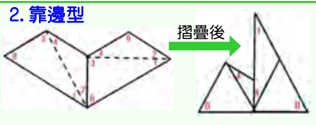
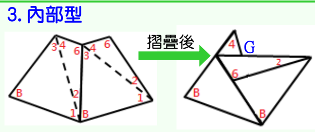
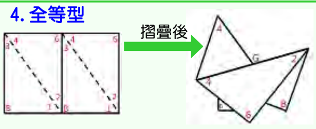
表六：當∠1<∠2 時，2 個基本圖形(或單位圖形)拼摺後的樣貌。

情形	$\overline{AD}=\overline{BC}$	$\overline{AD}\neq\overline{BC}$
∠3=∠4	$\overline{AB}=\overline{DC}$、$\overline{AC}=\overline{AC}$、$\overline{AD}=\overline{BC}$ => ΔABC ≅ CDA(SSS) =>∠2=∠3、∠1=∠4 但∠3=∠4 =>∠2=∠1(不合) 無此情形	 靠邊型
∠3>∠4	 飛鏢型	 飛鏢型
∠3<∠4	$\overline{AB}=\overline{DC}$、$\overline{AC}=\overline{AC}$、$\overline{AD}=\overline{BC}$ => ΔABC ≅ CDA(SSS) =>∠2=∠3、∠1=∠4 但∠3<∠4 =>∠2<∠1(不合) 無此情形	 內部型

三、正 n 邊形裙底在什麼情況下中間會剛好沒洞？

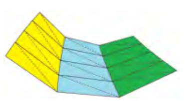
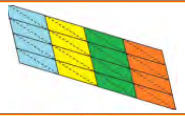
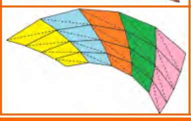
若中間剛好沒洞，中心點與正 n 邊形的頂點連線，會平分正 n 邊形內角，所以$\angle 6-\angle 3=\angle 4$，又$\angle 2+\angle 3=\frac{360^\circ}{n}$ =>$\angle 3=\frac{360^\circ}{n}-\angle 2$=> $\angle 6-(\frac{360^\circ}{n}-\angle 2)=\angle 4$ => $180^\circ-\angle 4-\frac{360^\circ}{n}=\angle 4$ => $\angle 4=90^\circ-\frac{180^\circ}{n}$，故製做正 n 邊形裙底，只要**基本圖形中∠4 設定成 $90^\circ-\frac{180^\circ}{n}$度，裙底摺疊後，中間會剛好沒洞，當$\angle 4<90^\circ-\frac{180^\circ}{n}$時有洞，且∠4 愈小洞愈大，$\angle 4>90^\circ-\frac{180^\circ}{n}$時沒洞。**

表七：四種不同類型剛好沒洞的正 n 邊形裙底

1. 飛鏢型 	2. 靠邊型 
3. 內部型 	4. 全等型 

四、將飛鏢型的正 n 邊形裙底層疊(多層)，摺疊後會呈現什麼樣子呢？

我們自定∠1= 15°，要符合∠2 >∠1、$\angle 2+\angle 3=\frac{360^\circ}{n}$，製作成果如下：

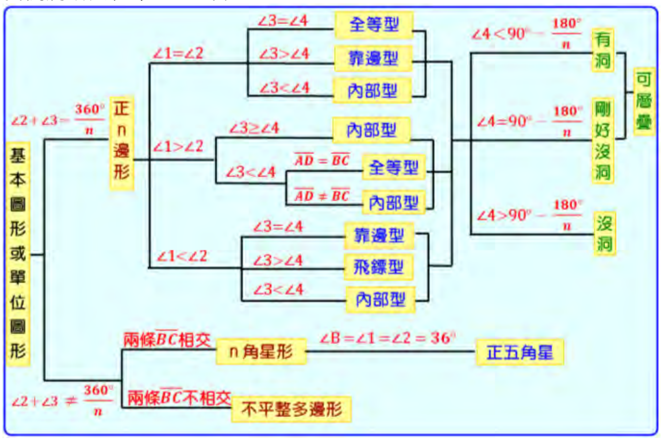
∠1	∠2	∠3	繪 製 圖	摺疊後壓平	摺疊後拉起來
15°	45°	75°			
15°	45°	45°			
15°	45°	27°			

我們發現

1. **當繪製圖呈現平行四邊形時，壓平摺疊後，仍呈現每一層轉動的變化，與研究四全等型的正 n 邊形每一層會互相重疊不同**，但相同的是拉起來都像直筒狀的角柱形體。
2. 當繪製圖不是平行四邊形時，壓平摺疊後，拉起來類似像金字塔狀的角錐形體，與研究四結果相同。

陸、結 論

我們將研究結果整理成下圖：



只要設定好圖形的角度與邊長，就可以設計出我們想要的樣式了！

柒、未來展望

1. 若圖形改成其它形狀(不是四邊形)，摺出來會有什麼樣貌。
2. 因摺疊後壓平具有節省空間的優點，也可應用在其它物品上，如：燈籠、傘套、水桶、升降舞台、收納式太陽能板…等。

捌、參考資料

1. 常文武、王儷娟、呂安雲(2017)。三宅一生的服裝設計與扭棱摺疊。數學傳播，41(4)，69-73。
2. 王晨諺、鄧价閔、簡碩君、張書晨(2018)。正多邊形的圓舞曲。中華民國第 58 屆中小學科學展覽會作品說明書。