中華民國第59屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

080406

正多邊形規律之美

學校名稱：臺中市私立葳格高級中學附設國小

作者：	指導老師：
小四 賴奕銓	阮靖文

關鍵詞：正多邊形、規律

摘要

本研究探討可以使用哪些正多邊形拼排出有規律的圖形？由可用「1~3 種正多邊形」共 3~6 個拼成交接面360°的圖形，推導出等式：$\frac{k-2}{2}=\underbrace{\frac{1}{x}+......+\frac{1}{y}+......+\frac{1}{z}}_{\text{共k項，x、y、z可相等}}$ k∈{3、4、5、6}, x、y、z∈{N|N≧3} 利用枚舉法及十字交乘法，求等式的整數解。再實際製作正多邊形拼排，發現：有 10 組正多邊形可連續拼排出交接面360°都相同的規律圖形；有 1 組可連續規律拼排，但並非交接面360°都相同；而有 6 組圖形無法繼續規律拼排。最後分析能否連續規律拼排的原因，找出檢驗方法，並運用軟體 illustrator 繪出有規律的圖形。

研究發現，雖然我們只能使用正三邊形、正四邊形、正六邊形、正八邊形、正十二邊形作為拼排規律圖形的元素，但卻能選取多組圖形，發揮創造力，設計出更多有規律的圖案。

壹、研究動機

上學期的數學課堂中，老師讓我們做遊戲推理數學④的一道題目，題目為媽媽想把家裡的地磚重新換過，全家到地磚店裡，看到各式各樣的圖案。其中，老闆有一款為正六邊形的地磚，試問如果換成正五邊形、正七邊形，能鋪出規律的圖形嗎?這個問題引發我的好奇心，想更進一步了解，還有哪些正多邊形，也能拼出規律的圖形?於是，我搜尋相關作品，想以更有系統且具科學性的方法，找出可以拼排出規律圖形的正多邊形。

歷屆作品分析:

參展組別	研究主題	研究方法
27 屆 國中數學	磁磚和 正多邊形	分別討論使用一種、二種、三種正多邊形，列出二元、四元、六元未知等式，將內角列出，逐一代入內角與個數，找出符合等式的組合。
42 屆 國中數學	磁磚 的秘密	列出方程式 $1/2-1/N_1+1/2-1/N_2+......+1/2-1/N_k=1$，討論 k 值。再依序討論使用 3 個、4 個、5 個、6 個正多邊形的情形，以逐一討論 N 值方式進行。

以上兩件作品分別以「正多邊形種類」、「正多邊形個數」做逐一討論，找出符合等式的未知數，並未提供系統化的解法，也未探討無法拼排的原因，及未呈現美麗的圖案。所以，我希望我能雙管齊下，由「正多邊形種類與正多邊形個數」列出能拼合成交接面360°的等式，以達減少等式的未知數個數，用系統化的方法求解，再實際拼排，並分析無法拼排的原因，找出檢驗方法，最重要的是呈現圖形規律的奧妙。

貳、研究目的

一、列出用正多邊形拼成交接面為 360°的等式。

二、求出用正多邊形拼成交接面為 360°的圖形組合。

三、實際製作正多邊形，看看能用正多邊規律拼排的組合有哪些?

四、討論圖形組合能否連續規律拼排的檢驗方法。

五、用繪圖軟體 illustrator 繪出正多邊形規律美圖。

參、研究設備及器材

計算機、美術紙、軟磁鐵、白板、電腦(word、 Illustrator)

肆、研究過程與方法

一、列出用正多邊形拼成交接面為 360°的等式。

(一)討論可以用「幾個」正多邊形拼成交接面角度相加等於 360°的圖形?

1.要用正 N 邊形拼排區塊，則圖形交接面的角度相加一定要剛好等於 360°才可以，如下圖 A、B。

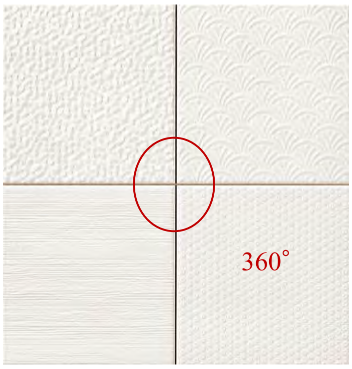


圖 A

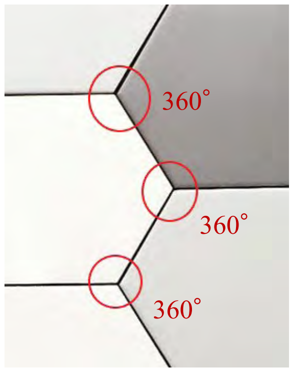
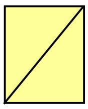
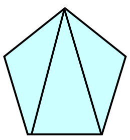


圖 B

2.所以，我們探討正多邊形的內角是幾度?

利用三角形的內角和為 180 度，推出多邊形的內角和＝180° ×（N－2）， N≧ 3 。

例如:四邊形  可分割的三角形個數＝2，所以四邊形內角和＝180°× 2＝360°

例如:五邊形  可分割的三角形個數＝3，所以五邊形內角和＝180°× 3 ＝ 540°

所以正 N 邊形的內角和為 180°x(N - 2)，因此正 N 邊形的每一個內角為 180°x(N - 2) / N

由正多邊形內角公式算出正多邊形內角度數，作為研究參考。

正多邊形	正三邊形	正四邊形	正五邊形	正六邊形	正七邊形	正八邊形
邊　數	3	4	5	6	7	8
內角和	180° × 1	180° × 2	180° × 3	180° × 4	180° × 5	180° × 6
內　角	60°	90°	108°	120°	≒128.57°	135°

正多邊形	正九邊形	正十邊形	正 11 邊形	正 12 邊形	正 13 邊形	正 14 邊形
邊　數	9	10	11	12	13	14
內角和	180° × 7	180° × 8	180° × 9	180° × 10	180° × 11	180° × 12
內　角	140°	144°	≒147.27°	150°	≒152.31°	≒154.29°

正多邊形	正 15 邊形	正 16 邊形	正 17 邊形	正 18 邊形	正 19 邊形	正 20 邊形
邊　數	15	16	17	18	19	20
內角和	180° × 13	180° × 14	180° × 15	180° × 16	180° × 17	180° × 18
內　角	156°	157.5°	≒158.82°	160°	≒162.84°	162°

正多邊形	正 21 邊形	正 22 邊形	正 23 邊形	正 24 邊形	……	正 1000 邊形
邊　數	21	22	23	24	……	1000
內角和	180° × 13	180° × 14	180° × 15	180° × 16	……	180°×998
內　角	≒162.86°	$163.\overline{63}^\circ$	≒164.35°	165°	……	179.64°

3.由上表可以看出，正多邊形最小內角=60 度，最大內角<180 度。

因為 360° ÷ 60° = 6 ， 360° ÷ 180° = 2 ，

所以結論(一)：

我們可能可以用 **3**、**4**、**5**、**6** 個正多邊形拼成交接面等於 360°的圖形，但絕對不能用 **2** 個、**7** 個及 **7** 個以上正多邊形拼成交接面等於 360°的圖形。

(二)討論可以用「幾種」正多邊形拼成交接面角度相加等於 360°的圖形?

使用愈多種不同的正多邊形來拼排規律的圖形，感覺愈有難度。但最多可以用幾種不同的正多邊形呢?因為要用愈多種正多邊形，則正多邊形的內角要愈小，觀察上頁正多邊形內角度數，將四個不同的最小內角相加 $60° + 90° + 108° + 120° = 378° > 360°$，表示無法使用四種不同正多邊形拼成交接面 360°的圖形。三種呢?找到 $60°+140°+160°=360°$ 所以可以使用三種不同正多邊形交接面 360°的圖形。二種呢?找到 $60°\times 4+120°=360°$，所以可以使用二種不同正多邊形交接面 360°的圖形。一種呢?我想沒問題，因為 $60°\times 6=360°$。所以結論(二)：

我們能用一種、二種及三種不同的正多邊形拼成交接面為 360°的圖形。

(三)討論用正多邊形拼成交接面為 360°的等式?

1.綜合結論(一)與(二)，假設某一區塊圖形交接面由「正 x 多邊形、正 y 多邊形、正 z 多邊形」共 3~6 個拼合而成，如下圖 C。

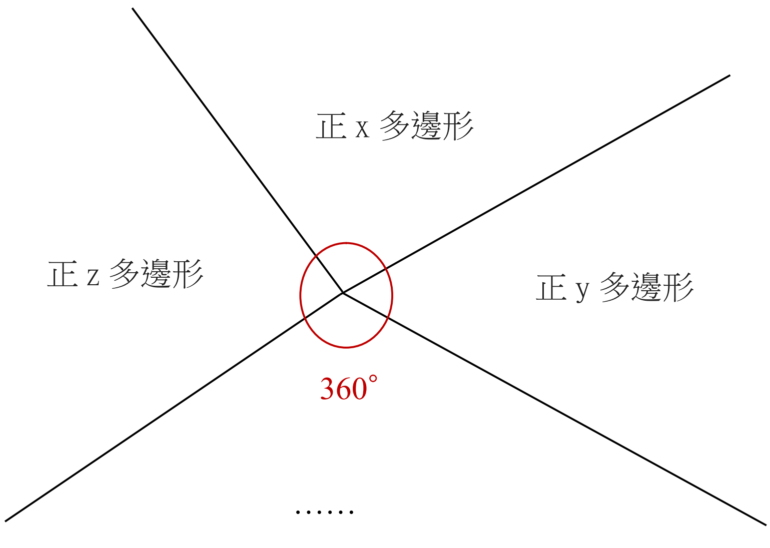


圖 C

註: x、y、z 可以相等，共 3~6 個。
註:最小為正三邊，所以 x、y、z≧3 。

$$\text{則}\underbrace{\text{正 } x \text{ 多邊形的內角} + \cdots\cdots + \text{正 } y \text{ 多邊形的內角} + \cdots\cdots + \text{正 } z \text{ 多邊形的內角}}_{\text{共 } k \text{ 項，} k=3、4、5、6} = 360°$$

利用正多邊形內角公式將上列等式寫成 ：

$$\underbrace{\frac{180°(x-2)}{x}+\ldots\ldots+\frac{180°(y-2)}{y}+\ldots\ldots+\frac{180°(z-2)}{z}}_{共\,k\,項，\ k=3、4、5、6}=360°$$

$\boxed{將等式同除以\ 180°}$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x-2}{x}+\ldots\ldots+\frac{y-2}{y}+\ldots\ldots+\frac{z-2}{z}}_{共\,k\,項，\ k=3、4、5、6}=2$$

$$\Rightarrow 1-\frac{2}{x}+\ldots\ldots+1-\frac{2}{y}+\ldots\ldots+1-\frac{2}{z}=2$$

$$\Rightarrow \underbrace{1+1+\ldots\ldots+1}_{k\,個\,1}-2\times(\underbrace{\frac{1}{x}+\ldots\ldots+\frac{1}{y}+\ldots\ldots+\frac{1}{z}}_{k\,項})=2$$

$$\Rightarrow k-2=2\times\left(\frac{1}{x}+\ldots\ldots+\frac{1}{y}+\ldots\ldots+\frac{1}{z}\right)$$

=> 結論(三)用正多邊形拼成交接面為 360°的等式為：

$$\frac{k-2}{2}=\underbrace{\frac{1}{x}+\ldots\ldots+\frac{1}{y}+\ldots\ldots+\frac{1}{z}}_{共\,k\,項，x、y、z\,可相等}\quad k\in\{3、4、5、6\}，\ x、y、z\in\{N\mid N\geqq 3\}$$

二、求出用正多邊形拼成交接面為 360°的圖形組合。

(一)由研究一得知，可以使用 1~3 種正多邊形共 3~6 個拼成交接面為 360°的圖形，並且成功的推導出只有三個未知數的等式，我們再搭配「枚舉法」依序列出所有可能拼成交接面 360°的組合，如此就可以讓我們有系統且快速的求出等式的整數解，不須以逐一代入的方式尋找符合的答案。

1.用 $\boxed{3\ 個}$正多邊形拼成交接面為 360°的圖形，可能的組合：3 同、2 同 1 異、3 異 。

2.用 $\boxed{4\ 個}$正多邊形拼成交接面為 360°的圖形，可能的組合：

4 同、3 同 1 異、2 同 2 同、2 同 2 異、~~4 異~~ 。

3.用 $\boxed{5\ 個}$正多邊形拼成交接面為 360°的圖形，可能的組合：

5 同、4 同 1 異、3 同 2 同、3 同 2 異、2 同 2 同 1 異、~~2 同 3 異~~、~~5 異~~ 。

4.用 $\boxed{6\ 個}$正多邊形拼成交接面為 360°的圖形，可能的組合：6 同。

(因為 $360°\div 6=60°$ 而最小的正多邊形內角=60°，所以不會有其他 6 個正多邊形的組合。)

註:未符合 1~3 種正多邊形則刪除，不須列入討論。

(二)利用等式：$\dfrac{k-2}{2}=\underbrace{\dfrac{1}{x}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{y}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{z}}_{\text{共 } k \text{ 項}}$ 依序代入 k 值(k= 3~6)，求 x、y、z 。

- ✧ 若 x=y=z，則可以輕易的求出未知數 x。
- ✧ 若 x= z≠y，則使用十字交乘法，求二元一次方程式 x、y 的整數解。
- ✧ 若為三元(3 種正多邊形拼成)情形，則先討論 z 值範圍，再將 z 值代入等式，使用十字交乘法，求二元一次方程式 x、y 的整數解。

註: x、y、z 為大於等於 3 的正整數。

1. k =3 代入等式 => $\dfrac{3-2}{2}=\underbrace{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}_{\text{共 3 項}}$

(1) 3 同 => x=y=z => $\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{x}$ => x=6

也就是用 3 **個正六邊形**拼合成一交接面為 360°的圖形，如圖 1。

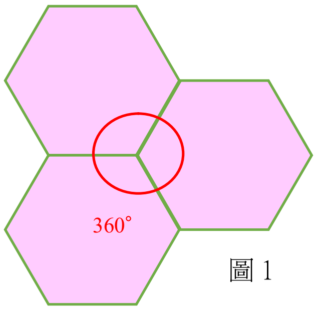


圖 1

(2) 2 同 1 異 => x= z≠y => $\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}$ => x y = 4y + 2x => (x-4) (y-2)=8

=>符合 x≠y, x、y≧3 的整數解

x	12	8	5
y	3	4	10

也就是①用 2 **個正十二邊**和 1 **個正三邊形**拼合成一交接面為 360°的圖形，如圖 2。

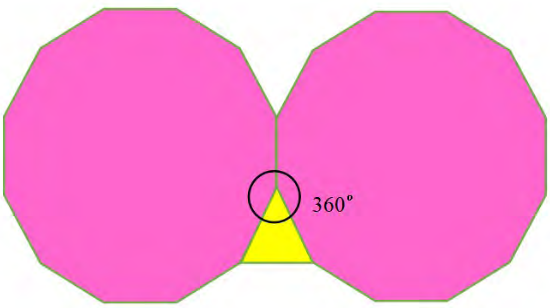


圖 2

②用 2 **個正八邊形**和 1 **個正四邊形**拼合成一交接面為 360°的圖形，如圖 3。

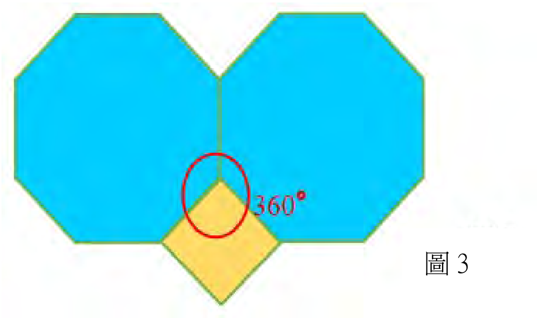


圖 3

③用 2 個正五邊和 1 個正十邊形拼合成一交接面為 360°的圖形，如圖 4。

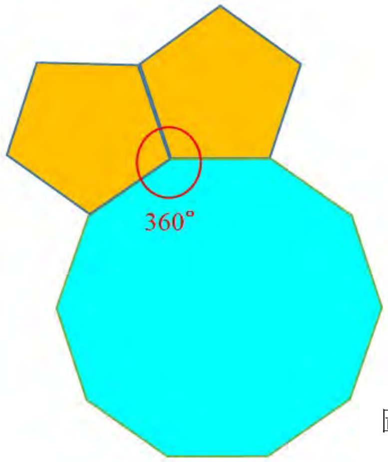


圖 4

(3) **3 異** => $\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ x≠z≠y 令 x > y > z ≧3 => $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}\leq\frac{1}{3}$

=> $\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{3}{z}$ => **3**≦z **<6** => 依序討論 z = 3、4、5

(註: 因為分母 x、y、z 的分子都是 1 ，所以令 **x > y > z**，以避免求出相同的組合或求出三同。)

① x > y ，z=3 => $\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{3}$ => xy-6y-6x=0 => (x-6)(y-6)=36

=>符合 x > y > 3 的整數解

x	42	24	18	15
y	7	8	9	10

也就是:

(i)用正 1 個四十二邊形、1 個正七邊形和 1 個正三邊形拼合成一交接面為 360°的圖形，如圖 5。

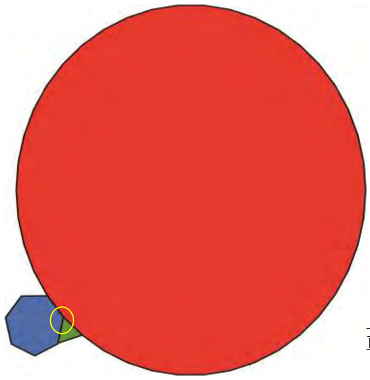


圖 5

(ii)用 1 個正二十四邊形、1 個正八邊形和 1 個正三邊形拼合成一交接面為 360°的圖形，如圖 6。

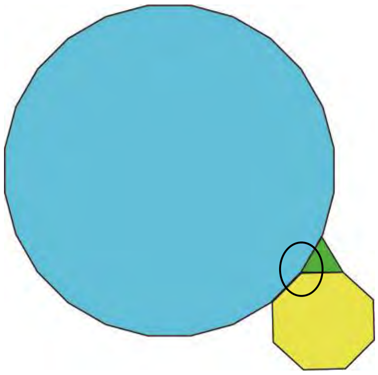


圖 6

(iii)用 1 個正十八邊形、1 個正九邊形和 1 個正三邊形拼合成一交接面為 360°的圖形，如圖 7。

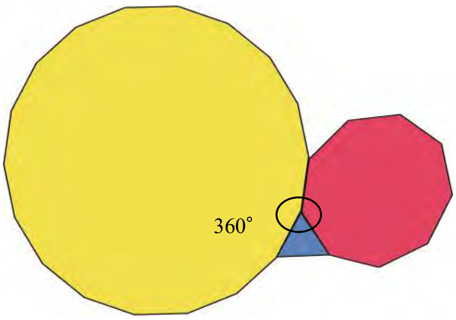


圖 7

(iv)用 1 個正十五邊形、1 個正十邊形和 1 個正三邊形拼合成一交接面為 360°的圖形，如圖 8。

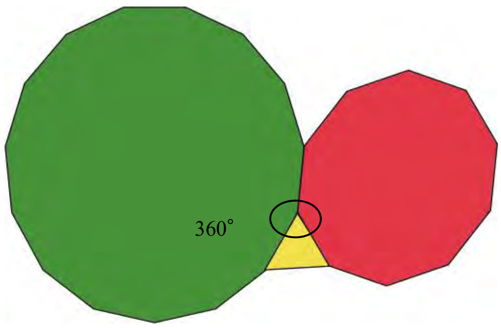


圖 8

② x > y，z=4 => $\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{4}$ => $\frac{1}{4}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

=> xy-4x-4y=0 => (x-4)(y-4)=16

=>符合 x > y > 4 的正整數解

x	20	12
y	5	6

也就是:

(i)用 1 個正二十邊形、1 個正五邊形和 1 個正四邊形拼合成一交接面為 360°的圖形，如圖 9。

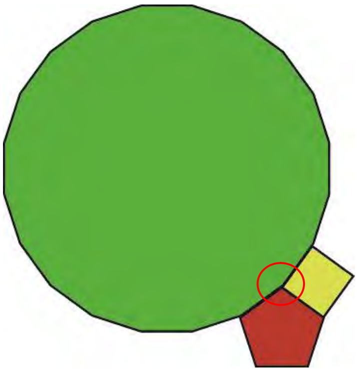


圖 9

(ii)用 1 個正十二邊形、1 個正六邊形和 1 個正四邊形拼合成一交接面為 360°的圖形，如圖 10。

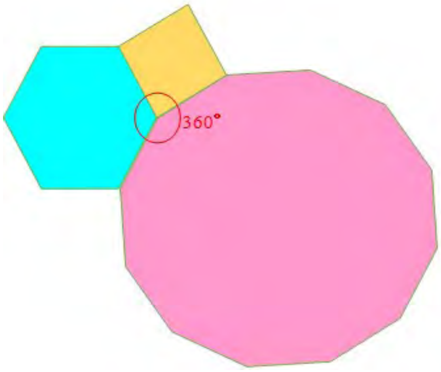


圖 10

③ x > y，z=5 => $\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{5}$ => $\frac{3}{10}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

=> 9xy-30x-30y=0 => (3x-10)(3y-10)=100 => x、y 沒有正整數解

2. **k =4** 代入等式 => $\frac{4-2}{2} = \underbrace{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \ldots\ldots + \frac{1}{z}}_{\text{共 4 項}}$

(1) 4 同 => x=y=z => $1=\frac{4}{x}$ => x= 4

也就是用 4 **個正四邊形**拼合成一交接面為 360°的圖形，如圖 11。

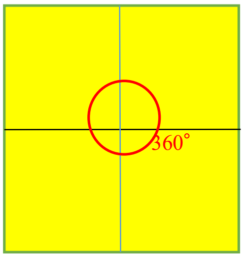


圖 11

(2) **3 同 1 異** => x≠y , x、y≧3 => $1=\frac{3}{x}+\frac{1}{y}$ => xy-x-3y=0 => (x-3)(y-1)=3

=> 沒有符合 x≠y 且 x、y≧3 的整數解。

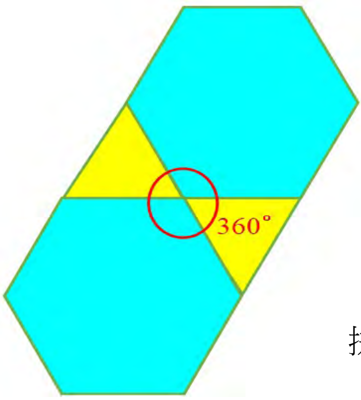
(3) 2 同 2 同 => x≠y ,令 x>y≧3 => $1=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}$ => xy-2x-2y=0 => (x-2)(y-2)=4

=>符合 x>y≧3 的整數解

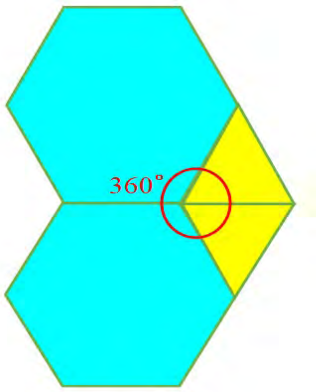
x	6
y	3

(註: 因為分母 x、y 的分子都是 2 ，所以令 **x > y**，以避免求出相同的組合或求出四同。)

也就是用 2 **個正六邊形**和 2 **個正三邊形**拼合成一交接面為 360°的圖形，如圖 12，拼法有 2 種。



拼法一



拼法二

圖 12

(4) **2 同 2 異**

因為要先求出 z 值，但不確定 x、y、z 誰為 2 同，所以要分析下列 3 種情形。

即等式為 ① $1=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ ② $1=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}$ ③ $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}$

並令 x≠y≠z ， x > y > z ≥3 => $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}\le\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow 1=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}<\frac{4}{z}$$

=> $1<\frac{4}{z}$ => z < 4 且 z ≥3 => z=3

則 ① $1=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{3}$ => $\frac{2}{3}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$ => 4xy=12y+6x => (2x-6)(2y-3)=18

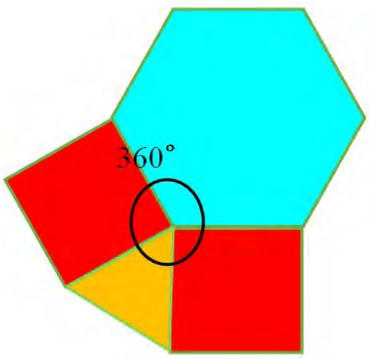
=>沒有符合 x > y>3 的正整數解。

② $1=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{3}$ => $\frac{2}{3}=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ => 4xy=6y+12x =>(2x-3)(2y-6)=18

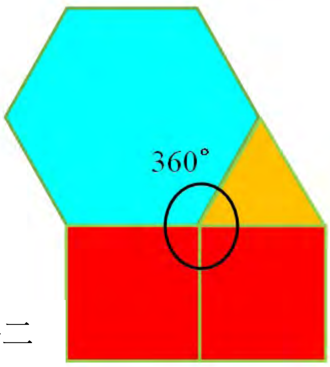
=>符合 x > y > 3 的正整數解

x	6
y	4

也就是用 1 個正六邊形、2 個正四邊形和 1 個正三邊形拼成一交接面為 360°的圖形，如圖 13，拼法有 2 種。



拼法一



拼法二

圖 13

③ $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{3}$ => $\frac{1}{3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ => xy-3x-3y=0 => (x-3)(y-3)=9

=>符合 x > y > 3 的整數解

x	12
y	4

也就是用 1 **個正十二邊形**、1 **個正四邊形**和 2 **個正三邊形**拼成一交接面為 360°的圖形，如圖 14，拼法有 2 種。

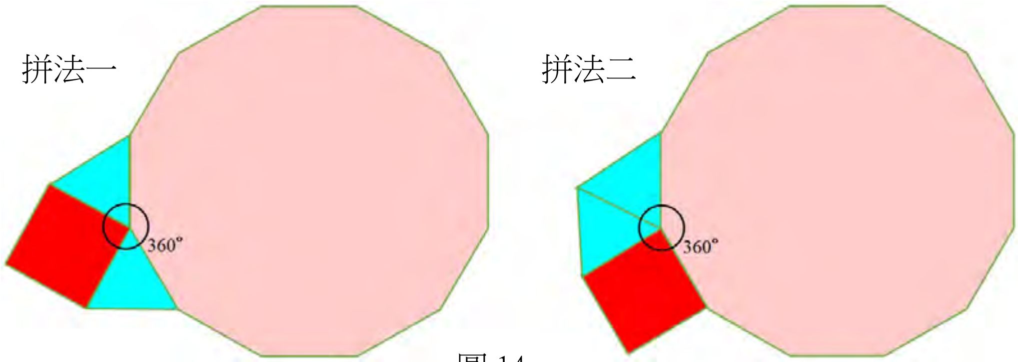


圖 14

3. **k =5** 代入等式 => $\underbrace{\frac{5-2}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\ldots\ldots+\frac{1}{z}}_{\text{共 5 項}}$

(1) 5 同 => x=y=z => $\frac{3}{2}=\frac{5}{x}$ => $x=\frac{10}{3}$ (不合)

(2) 4 同 1 異 => x≠y , x、y≧3 => $\frac{3}{2}=\frac{4}{x}+\frac{1}{y}$ => 3xy-2x-8y=0

=> (3x-8)(3y-2)=16 =>符合 x≠y , x、y≧3 的整數解

x	3
y	6

也就是用 4 **個正三邊形**和 1 **個正六邊形**拼成一交接面為 360°的圖形，如圖 15。

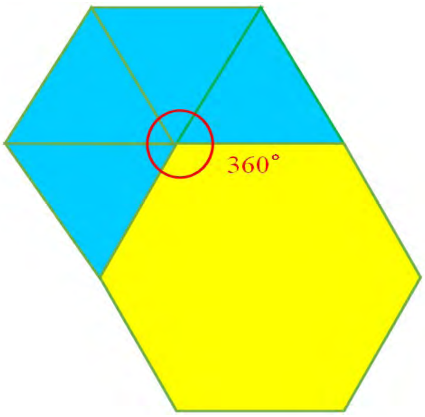


圖 15

(3) 3 同 2 同 => $\frac{3}{2}=\frac{3}{x}+\frac{2}{y}$ ， x≠y

=> 3xy-4x-6y=0 => (x-2)(3y-4)=8 =>符合 x、y≧3 的正整數解

x	3
y	4

也就是用 **3 個正三邊形**和 **2 個正四邊形**拼成一交接面為 360°的圖形，如圖 16，拼法有 2 種。

拼法一

拼法二

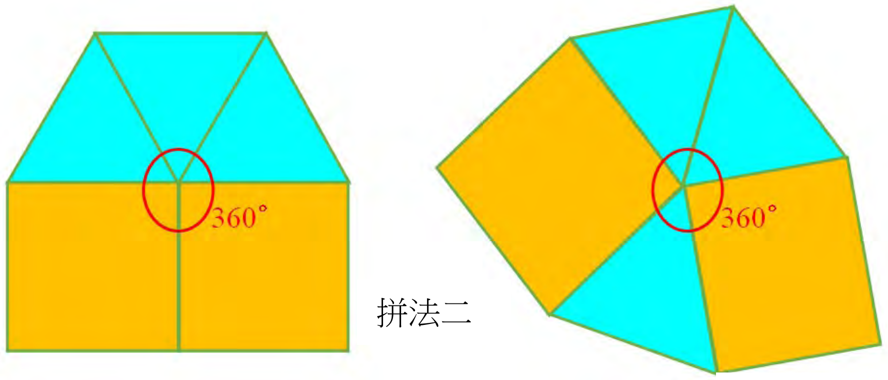


圖 16

(4) 3 同 2 異

因為要先求出 z 值，但不確定 x、y、z 誰為 3 同，所以要分析下列 3 種情形。

即等式為 ① $\frac{3}{2}=\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ ② $\frac{3}{2}=\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}$ ③ $\frac{3}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{z}$

令 x≠y≠z , x > y > z≧3 => $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}\leq\frac{1}{3}$

=> $\frac{3}{2}=\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{z}<\frac{5}{z}$ => $z<\frac{10}{3}$ 且 z≧3 => z = 3

則 ① $\frac{3}{2}=\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{3}$ => $\frac{7}{6}=\frac{3}{x}+\frac{1}{y}$ => 49xy-42x-126y = 0

=> (7x-18)(7y-6)=108 =>x、y 沒有正整數解

② $\frac{3}{2}=\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{3}$ => $\frac{7}{6}=\frac{1}{x}+\frac{3}{y}$ => 49xy-42y-126x=0

=> (7x-6)(7y-18)=108 =>x、y 沒有正整數解

③ $\frac{3}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{3}$ => $\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ => xy-2x-2y=0 => (x-2)(y-2)=4

=>沒有符合 x > y> 3 的正整數解。

(5) 2 同 2 同 1 異

=> ① $\frac{3}{2}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}$ ② $\frac{3}{2}=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}$ ③ $\frac{3}{2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}$

$x \neq y \neq z$，令 $x > y > z \geqq 3$

=> $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}\leq\frac{1}{3}$ => $\frac{3}{2}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}<\frac{5}{z}$

=> $\frac{3}{2}<\frac{5}{z}$ => $3 \leqq z < \frac{10}{3}$ => $z=3$

則 ① $\frac{3}{2}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{3}$ => $\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=\frac{7}{6}$

=> $7xy-12x-12y=0$ => $(7x-12)(7y-12)=144$ => $x=12$, $y=2$(不合)

則 ② $\frac{3}{2}=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{3}$ => $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{5}{6}$ => $30xy-72x-36y=0$ => x、y 沒有正整數解

則 ③ $\frac{3}{2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{3}$ => $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$ => $30xy-36x-72y=0$ => x、y 沒有正整數解

4. **k =6** 代入等式 => $\frac{6-2}{2}=\underbrace{\frac{1}{x}+\ldots\ldots\frac{1}{y}+\ldots\ldots\frac{1}{z}}_{\text{共 6 項}}$

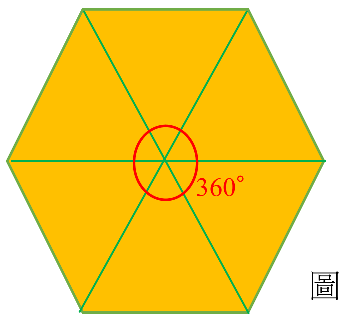


圖 17

(1) 6 同 => $x=y=z$ => $2=\frac{6}{x}$ => $x=3$

也就是用 6 個正三邊形拼合成一交接面為 360°的圖形，如圖 17。

因為 360°÷6 = 60° ，而最小的正多邊形內角= 60°，所以圖形由 6 個正多邊形拼合成的情形只有「6 個正三邊形」這一組。

結論二 ： 可以用正多邊形拼合成一交接面為 360°的圖形組合共有 17 組，其中 **4** 組有二種拼法，如上列圖 **1** ~ 圖 **17**。

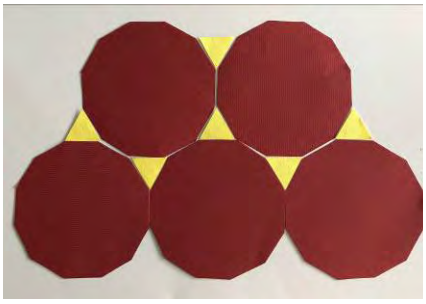
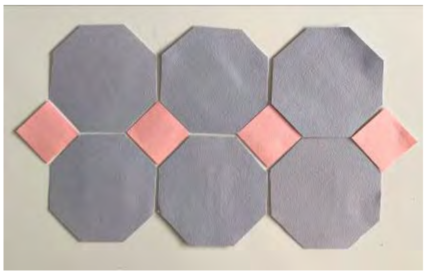
三、實際製作正多邊形，看看能用正多邊形規律拼排的圖形組合有哪些?

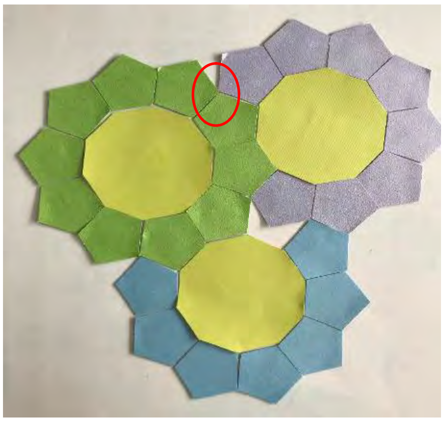
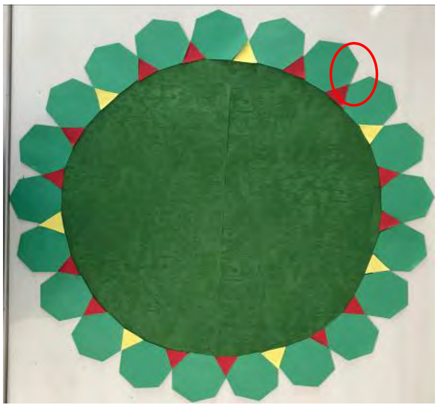
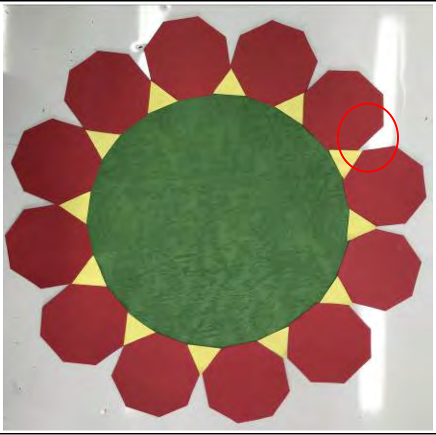
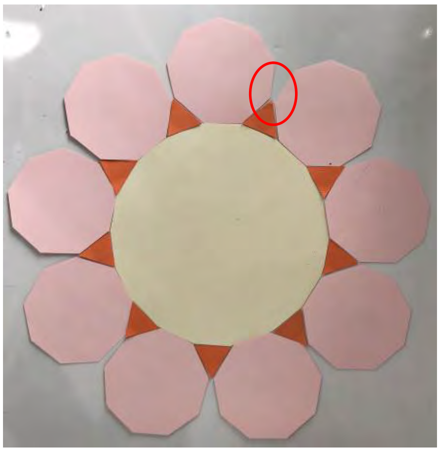
(一) 製作正多邊形：

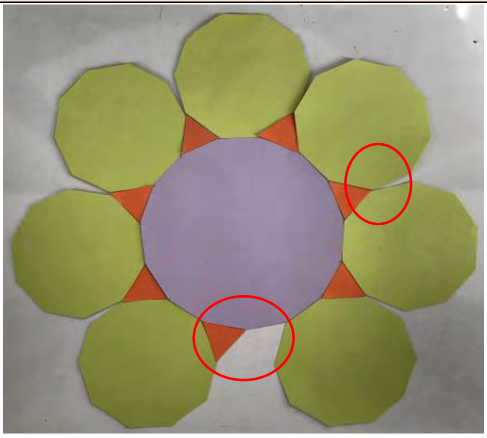
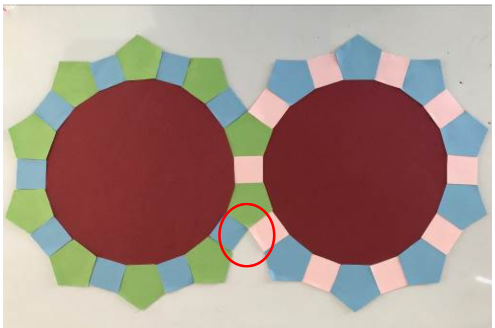
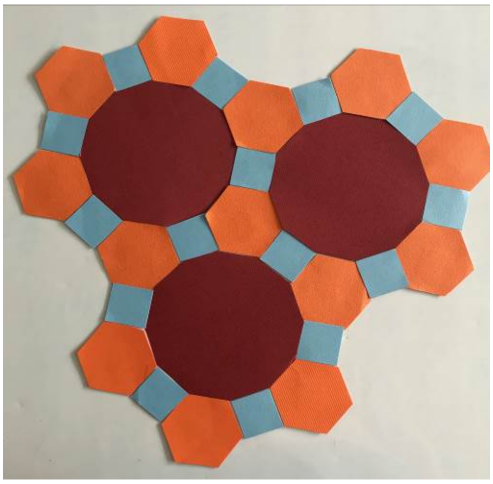
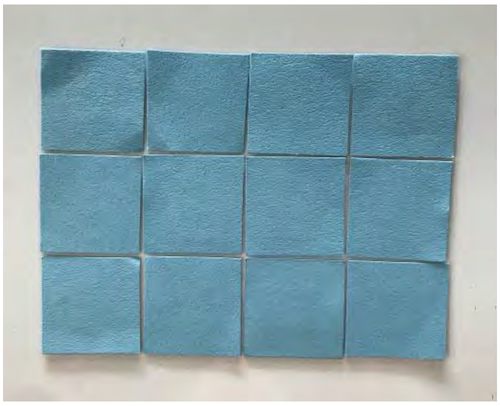
要用正多邊形連續規律拼排，除了拼成的交接面必須為 360°外，不同正多邊形的邊長也必須相同。雖然在數學上，大都使用量角器等分割圓心角，透過做出圓內接正多邊形的方式做出正多邊形，但是我們必須做出「邊長等長」的正多邊形，所以我們以量外角方式製作正多邊形。因為繞行多邊形一圈的角度是 360°，所以任意多邊形的一組外角和為 360°，也就是正多邊形的外角和等於 360°。

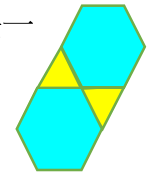
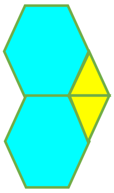
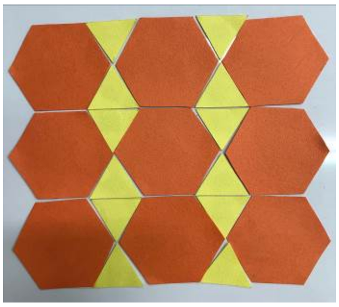
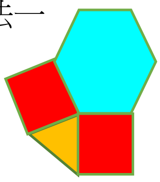
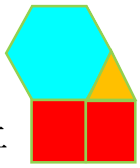
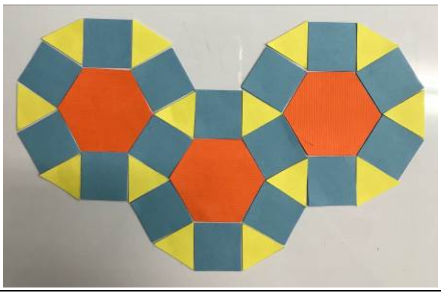
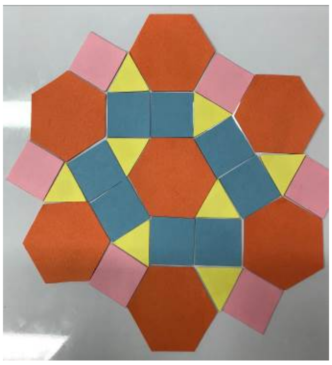
=> 正 N 邊形的一個外角度數 $= \dfrac{360°}{N}$，動手製作正多邊形，開始規律拼排。

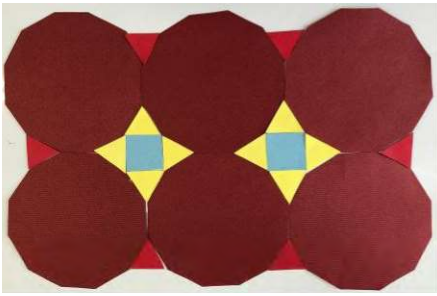
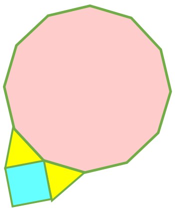
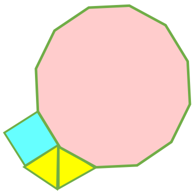
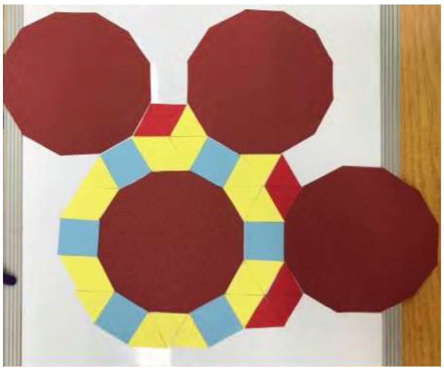
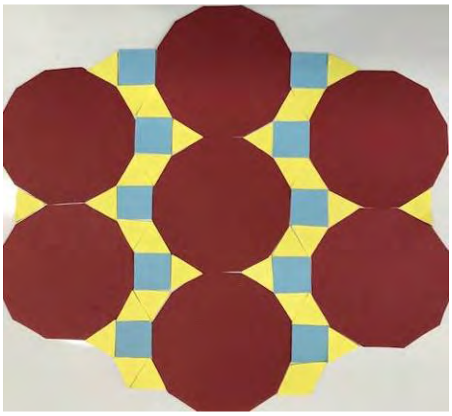
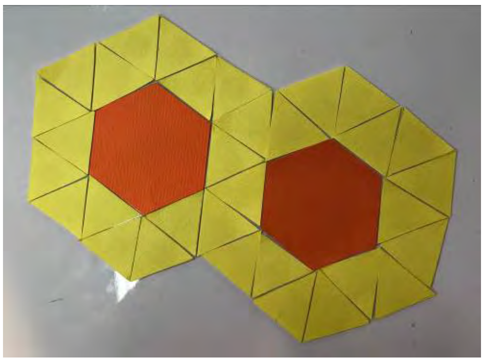
(二) 將研究結果二的 17 組圖形組合實際拼排，並同時以數對表示正多邊形種類。

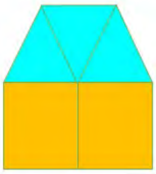
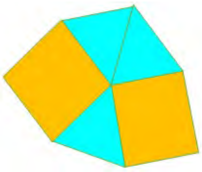
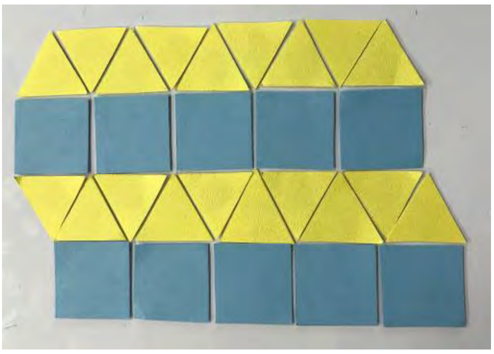
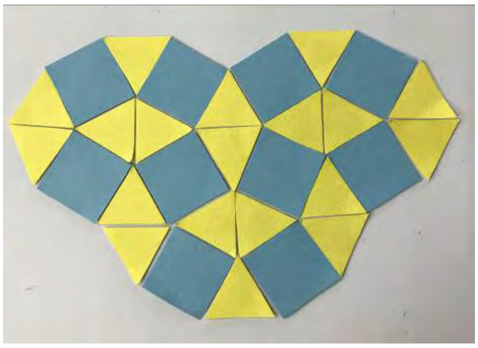
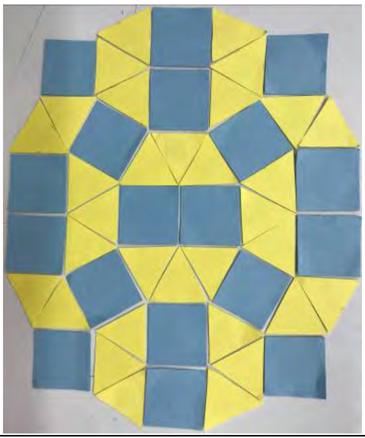
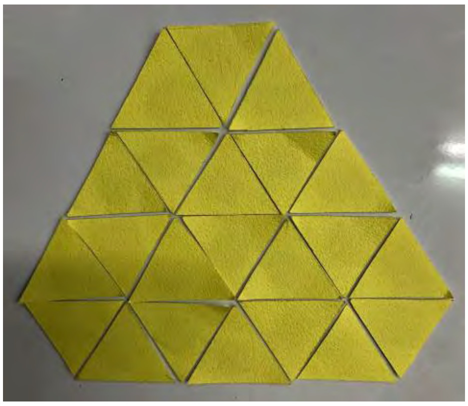
編號	正多邊形個數	正多邊形種類	連續拼排後圖形	可否連續規律拼排
1	3 個	正六邊形 ×3 (6 , 6 , 6)		可以 且每個 360° 交接面都是 (6 , 6 , 6)
2	3 個	正三邊形 ×1 正十二邊形×2 (3 , 12 , 12)		可以 且每個 360° 交接面都是 (3 , 12 , 12)
3	3 個	正四邊形 ×1 正八邊形 ×2 (4 , 8 , 8)		可以 且每個 360° 交接面都是 (4 , 8 , 8)

編號	正多邊形個數	正多邊形種類	連續拼排後圖形	可否連續規律拼排
4	3 個	正五邊形 ×2 正十邊形 ×1 (5 , 5 , 10)		不可以 有缺口 360°-108°x3 =36°
5	3 個	正三邊形 ×1 正七邊形 ×1 正 42 邊形 ×1 (3 , 7 , 42)		不可以 有缺口 360°-(128.57°x2 +60°)=42.86°
6	3 個	正三邊形 ×1 正八邊形 ×1 正 24 邊形×1 (3 , 8 , 24)		不可以 有缺口 360°-(135°x2 +60°) = 30°
7	3 個	正三邊形 ×1 正九邊形 ×1 正 18 邊形 ×1 (3 , 9 , 18)		不可以 有缺口 360°-(140°x2 +60°) = 20°

編號	正多邊形個數	正多邊形種類	連續拼排後圖形	可否連續規律拼排
8	3 個	正三邊形 ×1 正十邊形 ×1 正 15 邊形 ×1 (3 , 10 , 15)		不可以 無法規律拼排 且有缺口 360°-(144°x2+60°) = 12°
9	3 個	正四邊形 ×1 正五邊形 ×1 正 20 邊形×1 (4 , 5 , 20)		不可以 有缺口 360°-(90°x2+108°) = 72°
10	3 個	正四邊形 ×1 正六邊形 ×1 正 12 邊形×1 (4 , 6 , 12)		可以 且每個 360°交接面都是 (4 , 6 , 12)
11	4 個	正四邊形 ×4 (4 , 4 , 4 , 4)		可以 且每個 360°交接面都是 (4 , 4 , 4 , 4)

編號	正多邊形個數	正多邊形種類	連續拼排後圖形	可否連續規律拼排
12	4 個	正三邊形 ×2 正六邊形 ×2 (3 , 3 , 6 , 6) 拼法有二種: 拼法一  拼法二 	拼法一 	可以 且每個 360° 交接面都是 (3 , 3 , 6 , 6)
			拼法二  拼法二連續拼排後，會出現拼法一的拼法，所以不再合併拼排。	可以 且每個 360° 交接面都是 (3 , 3 , 6 , 6)
13	4 個	正三邊形 ×1 正四邊形 ×2 正六邊形 ×1 (3 , 4 , 4 , 6) 拼法有二種: 拼法一   拼法二	拼法一 	可以 且每個 360° 交接面都是 (3 , 4 , 4 , 6)
			拼法一  拼法二連續拼排後，會出現拼法一的拼法，所以不再合併拼排。	可以 且每個 360° 交接面都是 (3 , 4 , 4 , 6)

編號	正多邊形個數	正多邊形種類	連續拼排後圖形	可否連續規律拼排
14	4 個	正三邊形 ×2 正四邊形 ×1 正十二邊形×1 (3 , 3 , 4 , 12)	拼法一 	可以 但並非每個 360°交接面 都是 (3 ,3 ,4 ,12)
		拼法有二種 ： 拼法一  拼法二 	拼法二 	可以 但並非每個 360°交接面 都是 (3 ,3 ,4 ,12)
			拼法一、二合併 	可以 但並非每個 360°交接面 都是 (3 ,3 ,4 ,12)
15	5 個	正三邊形 ×4 正六邊形 ×1 (3 , 3 , 3 , 3 , 6)		可以 且每個 360° 交接面都是 (3,3,3,3,6)

編號	正多邊形個數	正多邊形種類	連續拼排後圖形	可否連續規律拼排
16	5 個	正三邊形 ×3 正四邊形 ×2 (3 , 3 , 3 , 4 , 4) 拼法有二種 ： 拼法一  拼法二 	拼法一 	可以 且每個 360° 交接面都是 (3,3,3,4,4)
			拼法二 	可以 且每個 360° 交接面都是 (3,3,3,4,4)
			拼法一、二合併 	可以 且每個 360° 交接面都是 (3,3,3,4,4)
17	6 個	正三邊形 ×6 (3 ,3 ,3 ,3 ,3 ,3)		可以 且每個 360° 交接面都是 (3,3,3,3,3,3)

【研究三發現】:

1. 共有 10 組正多邊形可以連續規律的拼排，且每一 360°交接面的圖形組合都一致。

編號 1 : (6，6，6) : 3 個正六多邊形。

編號 2 : (4，8，8) : 1 個正四邊形和 2 個正八邊形。

編號 3 : (3 , 12 , 12) : 1 個正三邊形和 2 個正十二邊形。

編號 10 : (4 , 6，12) : 1 個正四邊形、1 個正六邊形和 1 個正十二邊形。

編號 11 : (4 , 4 , 4 , 4) : 4 個正四邊形。

編號 12 : (3 , 3 , 6 , 6) : 2 個正三邊形和 2 個正六邊形。

編號 13 : (3 , 4 , 4 , 6) : 1 個正三邊形、2 個正四邊形和 1 個正六邊形。

編號 15 : (3, 3 , 3 , 3 , 6) : 4 個正三邊形和 1 個正六邊形。

編號 16 : (3, 3 , 3 , 4 , 4) : 3 個正三邊形和 2 個正四邊形。

編號 17 : (3, 3, 3, 3, 3, 3) : 6 個正三邊形。

2. 共有 1 組正多邊形可以連續規律的拼排，但不是每一 360°交接面的圖形組合都相同。

編號 14 : (3 , 3 , 4 , 12) : 2 個正三邊形、1 個正四邊形和 1 個正十二邊形。

3. 共有 6 組正多邊形不可以連續規律的拼排。

編號 4 : (5 , 5，10) : 2 個正五邊形和 1 個正十邊形 。

編號 5 : (3 , 7，42) : 1 個正三邊形、1 個正七邊形和 1 個正四十二邊形。

編號 6 : (3 , 8，24) : 1 個正三邊形、1 個正八邊形和 1 個正二十四邊形。

編號 7 : (3 , 9，18) : 1 個正三邊形、1 個正九邊形和 1 個正十八邊形。

編號 8 : (3 , 10 , 15) : 1 個正三邊形、1 個正十邊形和 1 個正十五邊形。

編號 9 : (4 , 5，20) : 1 個正四邊形、1 個正五邊形和 1 個正二十邊形。

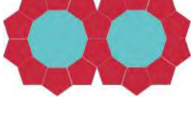
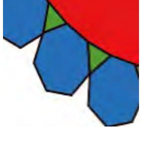
四、討論能否連續規律拼排的檢驗方法？

先討論使用最少種(一種)正多邊形拼排的組合，再討論使用最少個(三個)正多邊形拼排的組合。為了方便說明，將正 x、y、z 多邊形拼成交接面是 360°的圖形組合以數對表示。

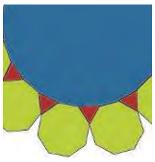
(一)討論使用「一種」正多邊形。

1. (6 , 6 , 6) :正六邊形 6 個邊都是正六邊形，可以連續規律的拼排。
2. (4 , 4 , 4 , 4) :正四邊形的 4 個邊都是正四邊形，可以連續規律的拼排。
3. (3, 3, 3,3, 3, 3) :正三邊形的 3 個邊都是正三邊形，可以連續規律的拼排。

(二)討論使用「三個」正多邊形。　註:(6 , 6 , 6) 已於討論(一)討論。

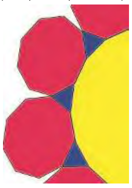
1. (3,12,12):正三邊形 3 個邊都是正十二邊形；正十二邊形 12 個邊平分兩半，且正三邊形、正十二邊形交錯規律拼排。
($\boxed{3}$, ⑫ , ⑫) 以$\boxed{3}$來看，它的 3 個邊全排⑫。
(③ , $\boxed{12}$, ⑫) 以$\boxed{12}$來看，它的 12 個邊排③和⑫(各半)。
2. (4 , 8 , 8):正四邊形的 4 個邊都是正八邊形；正八邊形的 8 個邊平分兩半，一半是正四邊形，一半是正八邊形，且正四邊形、正八邊形交錯規律拼排。
($\boxed{4}$, ⑧ , ⑧) 以$\boxed{4}$來看，它的 4 個邊全排⑧。
(④ , $\boxed{8}$, ⑧) 以$\boxed{8}$來看，它的 8 個邊排④和⑧(各半)。
3. (4, 6, 12):正四邊形 4 個邊平分兩半，且正四邊形、正六邊形規律交錯拼排；正六邊形 6 個邊平分兩半，且正四邊形、正十二邊形規律交錯拼排；正十二邊形 12 個邊平分兩半，且正四邊形、正六邊形規律交錯拼排。
($\boxed{4}$, ⑥ , ⑫) 以$\boxed{4}$來看，它的 4 個邊排⑥和⑫(各半)。
(④ , $\boxed{6}$, ⑫) 以$\boxed{6}$來看，它的 6 個邊排④和⑫(各半)。
(④ , ⑥ , $\boxed{12}$) 以$\boxed{12}$來看，它的 12 個邊排④和⑥(各半)。
4. (5 , 5 , 10):正十邊形的 10 個邊都是正五邊形；但是正五邊形的 5 個邊無法平分給正五邊形、正十邊形交錯規律拼排，所以產生 3 個正五邊形拼合的交接面≠360°的缺口問題。

5. (3 , 7 , 42):正四十二邊形的 42 個邊可以平分給正七邊形、正三邊形規律交錯拼排。但是正三邊形是奇數邊，無法平分給正四十二邊形和正七邊形交錯規律拼排，而排了 2 個正七邊形，造成 2 個正七邊形和 1 個正三邊形拼合的交接面≠360°的缺口問題。


6. (3, 8 , 24):正二十四邊形的 24 個邊可以平分兩半給正八邊形、正三邊形規律交錯



拼排。但是正三邊形是奇數邊，無法平分給正二十四邊形和正八邊形交錯規律拼排，而排了 2 個正八邊形，造成 2 個正八邊形和 1 個正三邊形拼合的交接面≠360°的缺口問題，所以正八邊形的邊無法繼續拼排。

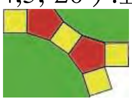
7. (3, 9 , 18):正十八邊形的 18 個邊可以平分兩半給正九邊形、正三邊形規律交錯拼



排。但是正三邊形是奇數邊無法平分給正十八邊形、正九邊形交錯規律拼排，所以造成 2 個正九邊形和 1 個正三邊形拼合的交接面≠360°的缺口問題。而正九邊形的邊也無法繼續拼排，也無法平分。

8. (3,10,15) :正十五邊形的 15 個邊無法平分給正十邊形、正三邊形交錯規律拼排。

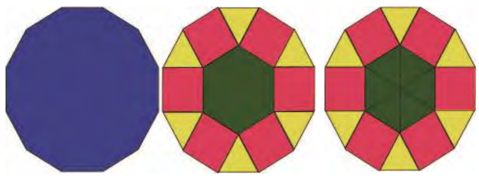
9. (4,5, 20) :正五邊形的 5 個邊無法平分給正二十邊形、正四邊形交錯規律拼排。所



以造成 2 個正五邊形和 1 個正四邊形拼合的交接面≠360°的缺口問題。

結論：圖形組合(x , y , z)
1. 若 x=y=z ，一定可以連續規律拼排。
2. 若 x≠y≠z 須符合 **x、y、z 都是偶數**，才能平分給另 2 種正多邊形交錯規律拼排。
3. 若 x≠y=z 的情況下，即(x , y , y)，則因為正 x 多邊形被正 y 多邊形包圍，所以 **x 奇數、偶數皆可**；但正 y 多邊形的 y 個邊須平分兩半給正 x 多邊形、正 y 多邊形交錯規律拼排，所以 **y 必須是偶數**。

(三)討論其他正多邊形組合。



因為所有正多邊形的邊長都一樣，由右圖，可以知道:

1.正六邊形=正三邊形 x6

2.正十二邊形=正三邊形 x6+正四邊形 x6+正六邊形=正三邊形 x12+正四邊形 x6

又因為 1.正六邊形內角=正三邊形內角 x 2

2.正十二邊形內角=正三邊形內角+正四邊形內角

則 1. (6 , 6 , 6)可以分解為(3, 3, 6, 6)或(3, 3, 3, 3, 6)　　註:或(3 ,3 ,3 ,3 ,3 ,3)已討論過。

2. (4, 6, 12)可以分解為(4, 6, 3, 4)或(4 ,3 ,3 ,3 ,4)

所以(3, 3, 6, 6)、(3, 3, 3, 3, 6)、(3, 4, 4, 6) 、(3 ,3 ,3 ,4 ,4)可以連續規律的拼排。

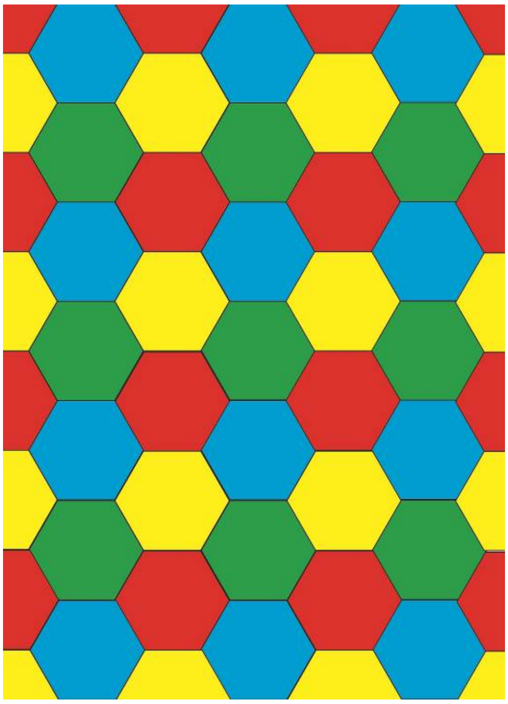
3. (4, 6, 12) 可以分解為(4, 3, 3 ,12)，但因為正十二邊形內角太大，在共用正三邊形、正四邊形時，會產生 2 個正十二邊形靠在一起或重疊現象。為了可以繼續拼排，而產生不同的圖形組合。

所以(3, 3 , 4 ,12)可以連續規律的拼排，但不是每一 360°交接面的圖形組合都相同。

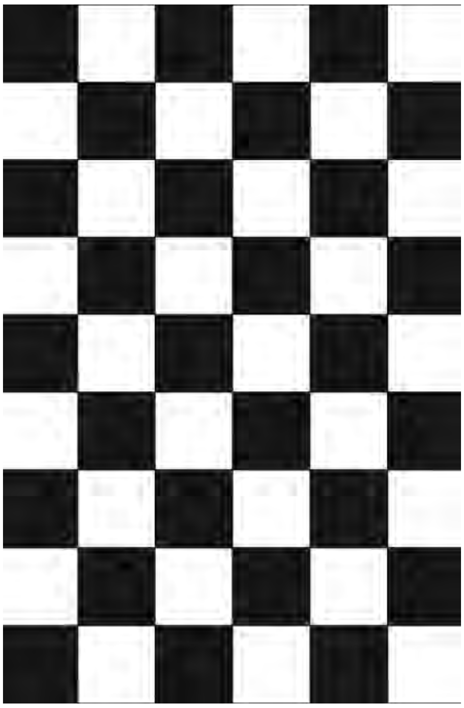
五、用繪圖軟體 illustrator 繪出正多邊形規律美圖。

我運用 Illustrator 繪圖軟體，繪製研究三的 11 組圖案。這 11 組圖案，可以不上色，讓學童塗上具有規律的顏色。這 11 組圖案顏色也可以依個人喜好做改變，作為 11 間教室、臥室的牆面或地磚圖案，讓數學融入生活中。

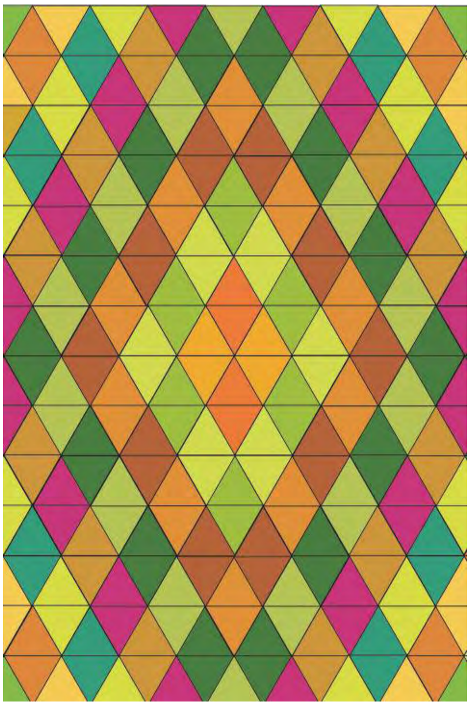
第一間教室: 正六多邊形



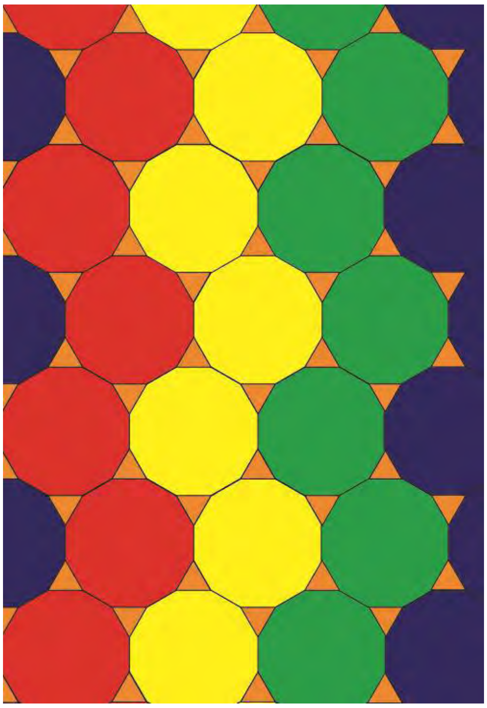
第二間教室: 正四邊形



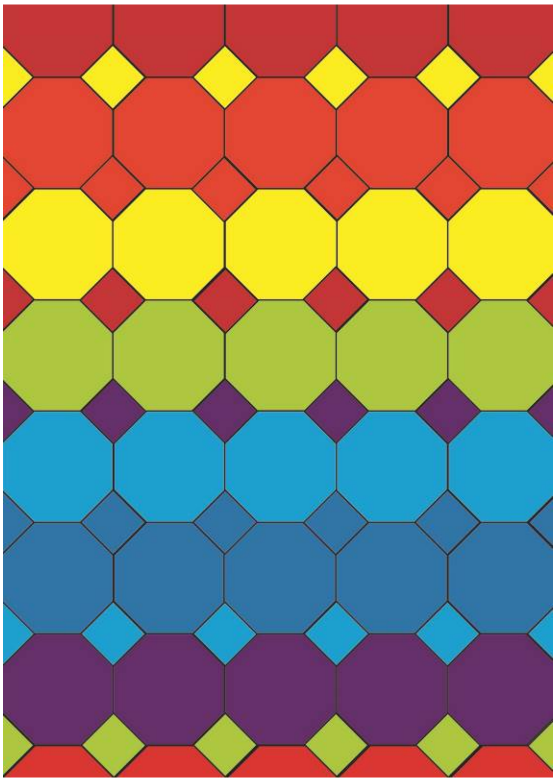
第三間教室: 正三邊形



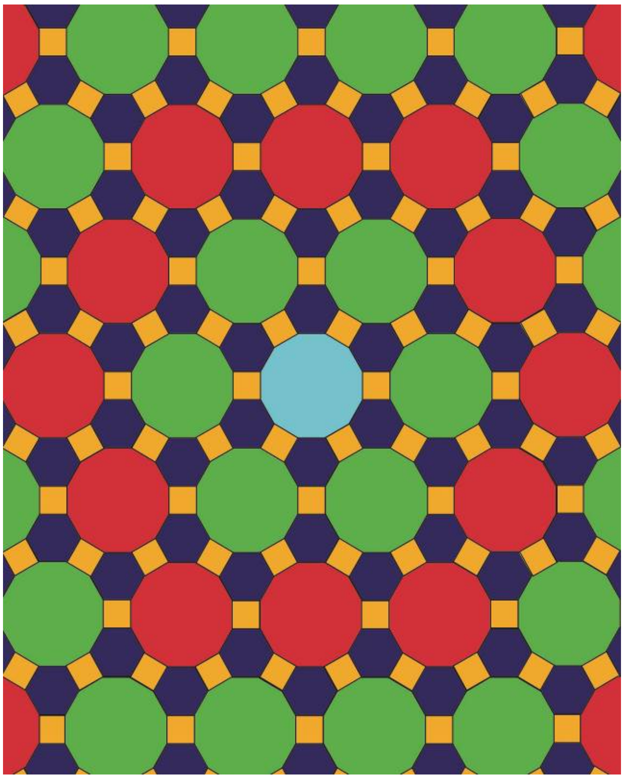
第四間教室: 正三邊形和正十二邊形



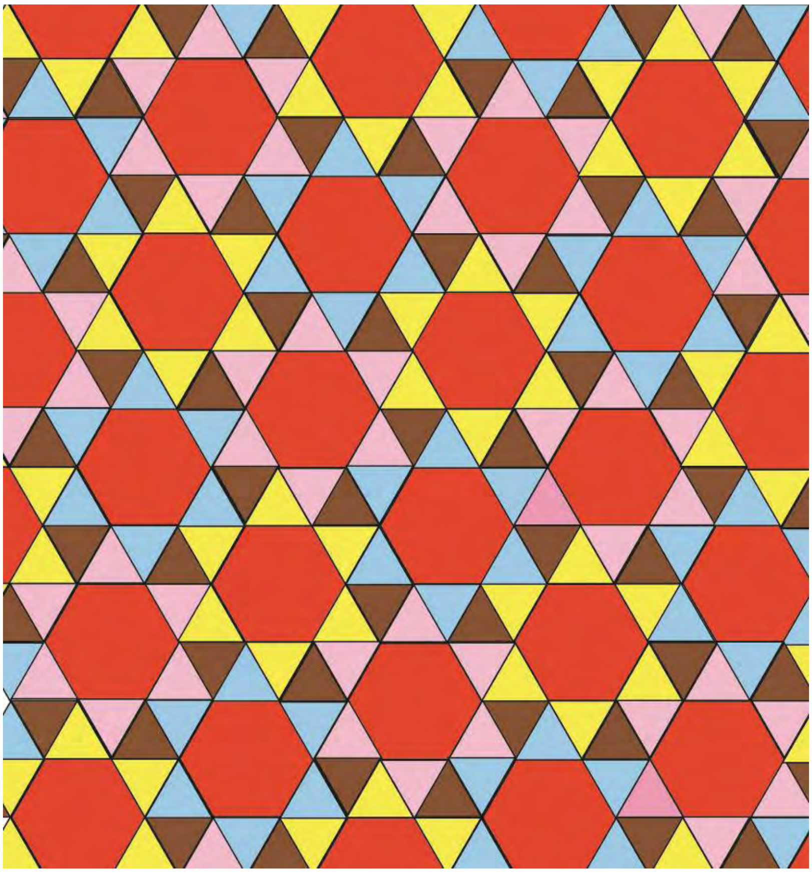
第五間教室: 正四邊形和正八邊形



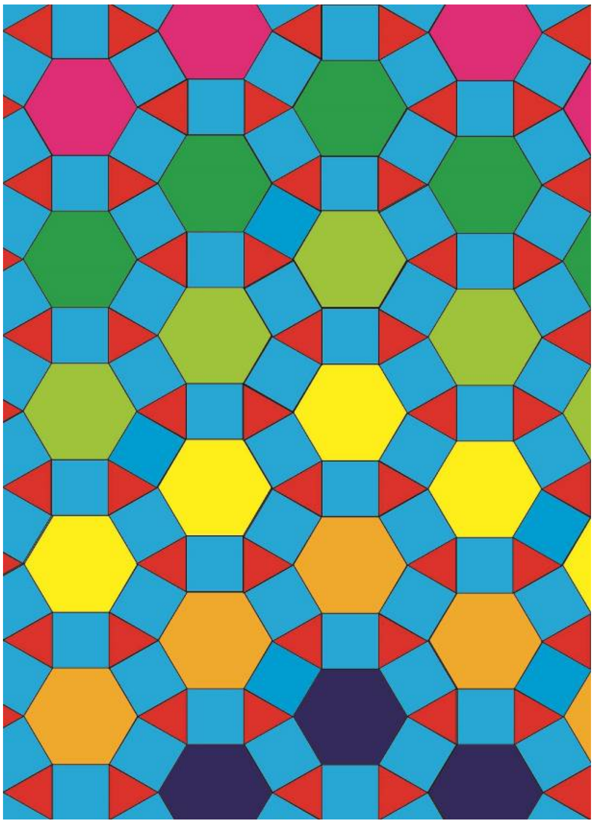
第六間教室: 正四邊形、正六邊形和正十二邊形

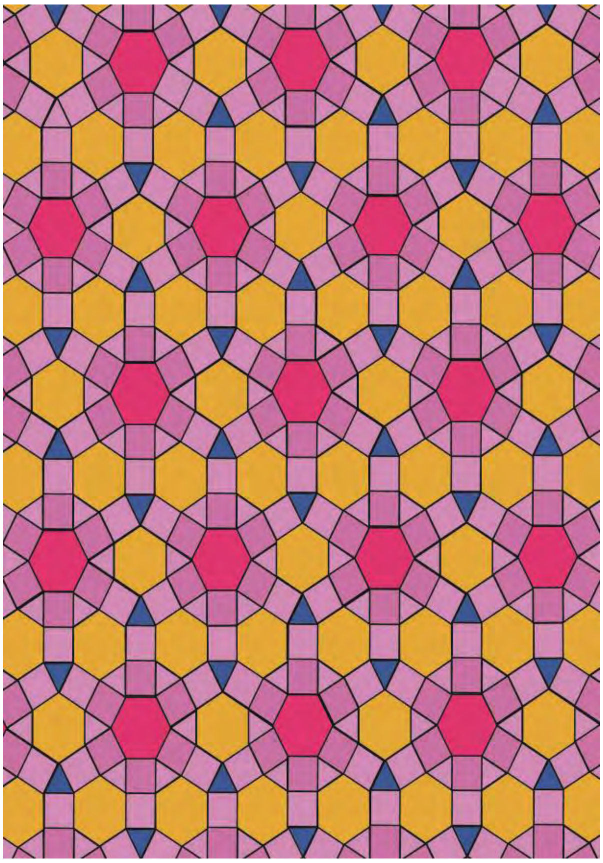


第七間教室:正三邊形和正六邊形

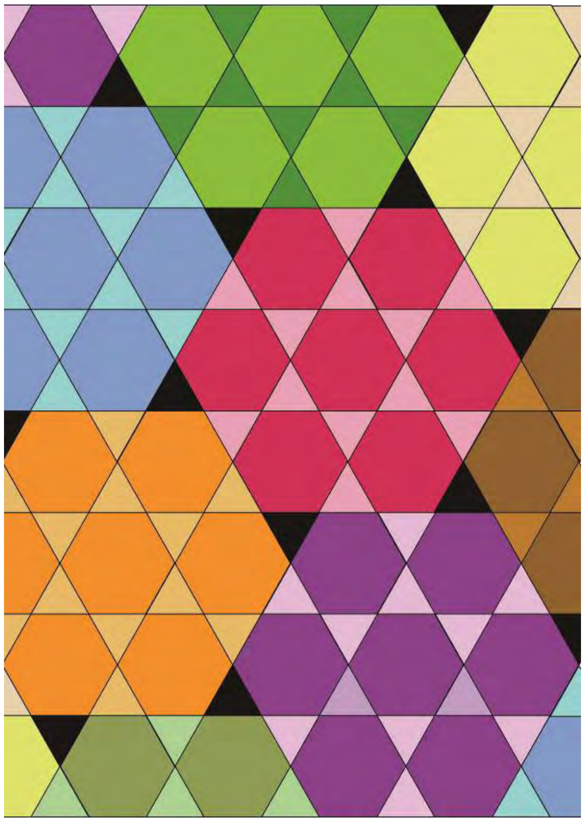


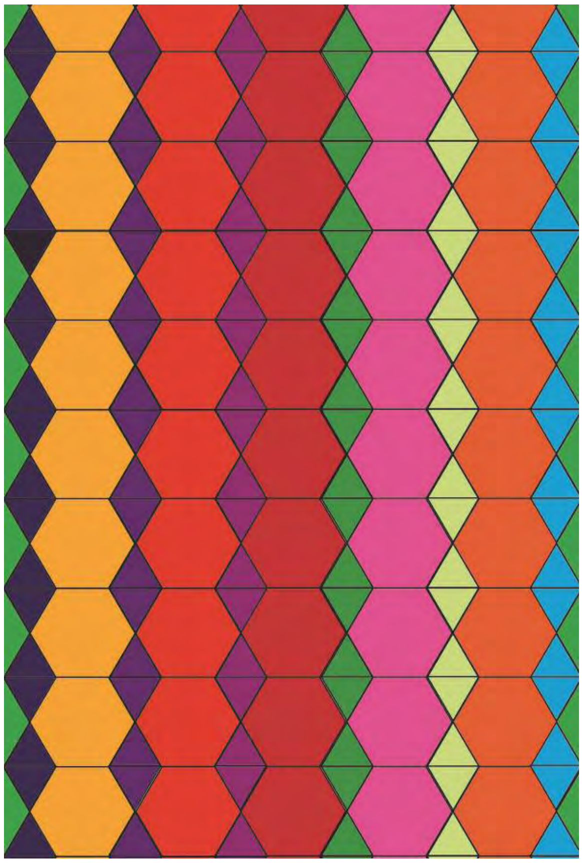
第八間教室:正三邊形、正四邊形和正六邊形



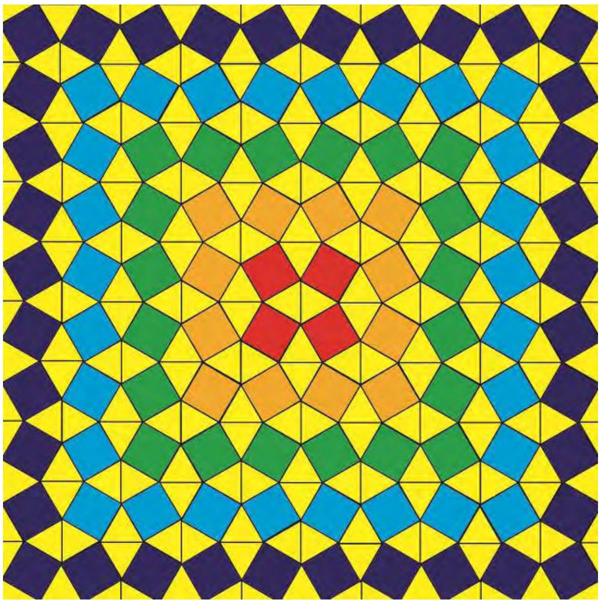


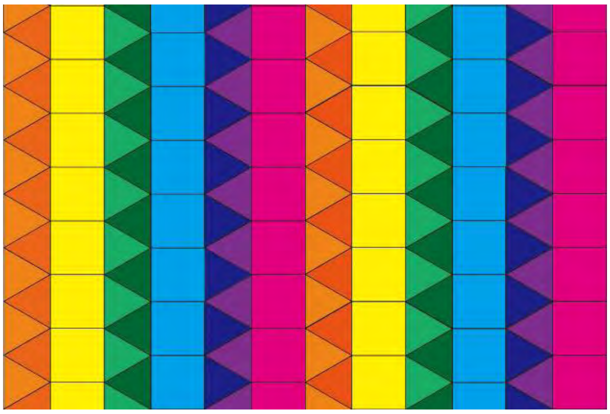
第九間教室: 正三邊形和正六邊形

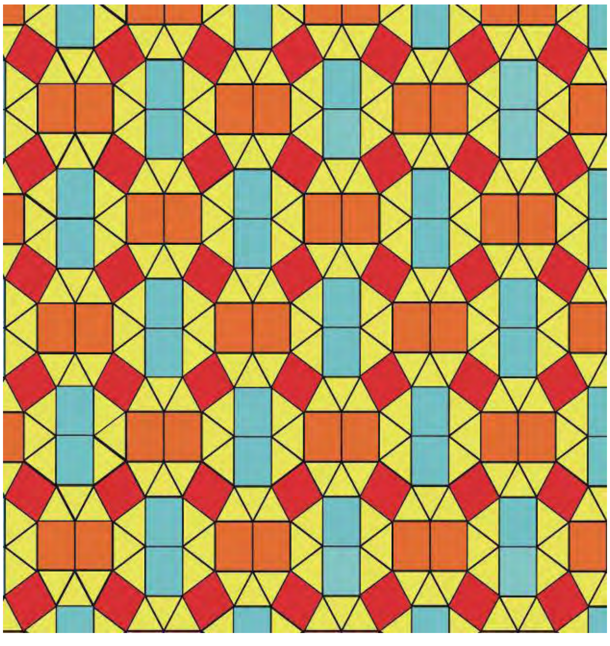




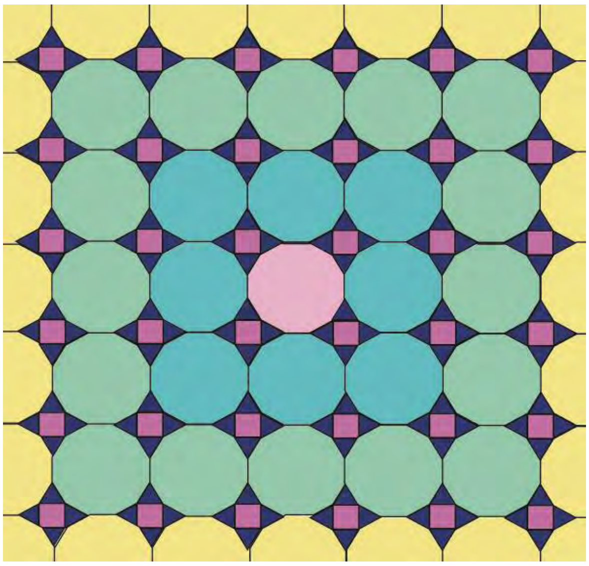
第十間教室:
正三邊形和正四邊形

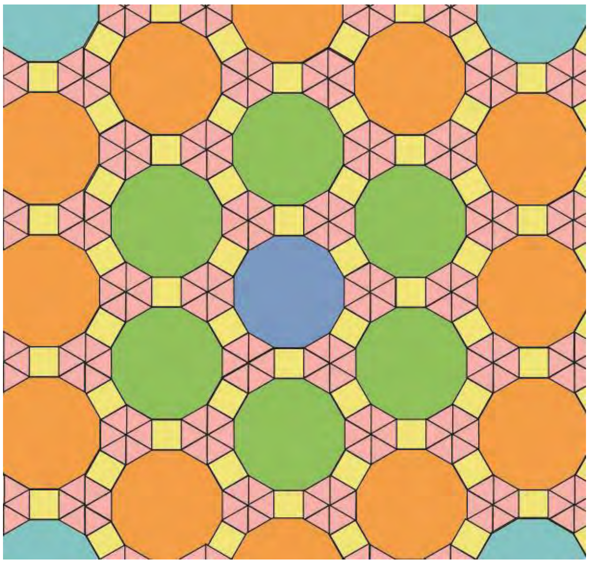


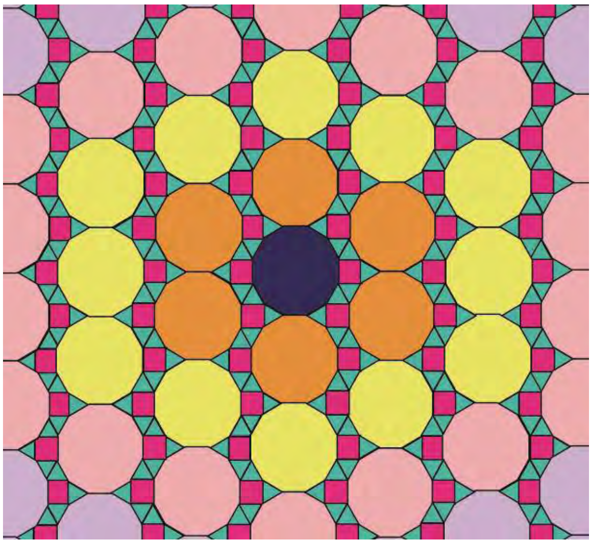




第十一間教室(特別教室):
正三邊形、正四邊形和正十二邊形







伍、討論

一、在拼排(3, 3, 4, 12)拼法一時，共用正三邊形時，2 個正十二邊形會剛好拼排在一起，而產生(3, 12, 12)的圖形組合。而在拼排(3, 3, 4, 12)拼法二時，會產生(3, 3, 3, 3, 3, 3)的圖形組合，若將 6 個正三邊形合併為正六邊形，則圖形組合與(4, 6, 12)一樣。由(3, 3, 4, 12)這組不完美的拼排，讓我意外的發現，可以由一組可連續拼排的正多邊形圖形組合，創造出 360°交接面組合不同，卻仍是有規律的美圖。

如圖一由(3, 3, 4, 12)連續拼排，產生 360°交接面是(3, 3, 4, 12)和(3, 3, 3, 4, 4)的圖形。

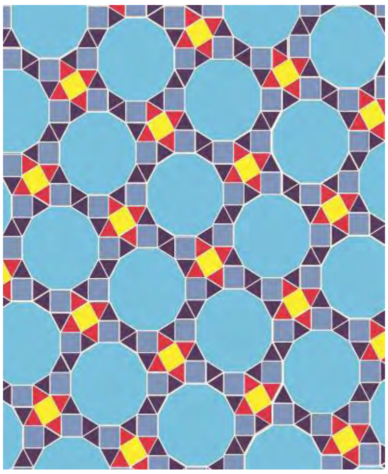
如圖二由(3, 4, 4, 6)連續拼排，產生 360°交接面(3, 4, 4, 6)和(4, 4, 4, 4)的圖形。

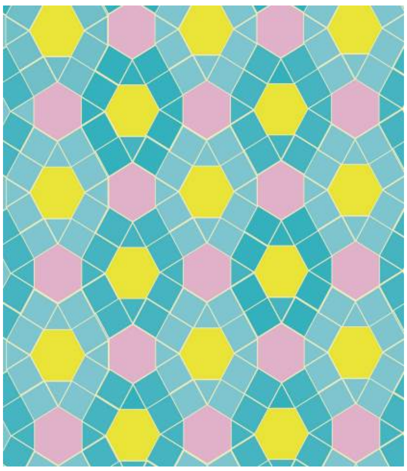
二、這也表示可以選取二組、三組，甚至更多組圖形，在可以繼續拼排的情況下，合作拼排，創造出更多變、複雜，卻仍有規律的美圖。

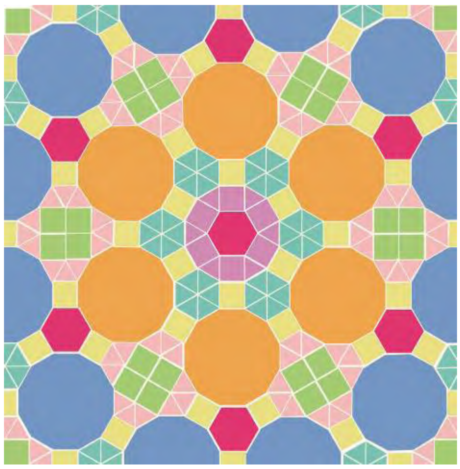
如圖三由（3，4，4，6）、(4, 6, 12)、（3, 3, 3, 3, 3, 3）、(3，3，4，12)、（4，4，4，4）、（3，3，3，4，4)等圖形組合拼排。

三、因為正八邊形內角=135°，不能拆成正三邊形與正四邊形的內角組合；而雖然正八邊形內角x2=270°=正六邊形內角(120°)+正十二邊形內角(150°)，但是正十二邊形內角(150°)+正八邊形內角(135°)+正四邊形內角(90°)≠360°，且正六邊形內角(120°)+正八邊形內角(135°)+正四邊形內角(90°)≠360°，所以(4，8，8) 無法與其他圖形組合合作拼排。

四、觀察研究三可以連續規律拼排的圖形組合，發現正多邊形中，只有正三邊形、正四邊形、正六邊形、正八邊形、正十二邊形可以作為連續規律拼排的元素。


圖一


圖二


圖三

陸、研究結果

本研究想知道能用哪些正多邊形拼排出和諧有規律的圖形。研究發現：

一、能連續規律拼排的正多邊形組合，須通過二個關卡。

第一關：符合交接面等於 360°的等式。

正 x、y、z 多邊形拼成一交接面是 360°的等式：

$$\frac{k-2}{2}=\underbrace{\frac{1}{x}+\ldots\ldots+\frac{1}{y}+\ldots\ldots+\frac{1}{z}}_{\text{共 k 項，x、y、z 可相等}} \qquad k\in\{3、4、5、6\},\ \ x、y、z\in\{N \mid N\geqq 3\}$$

利用枚舉法及十字交乘法，求出 17 組解。

第二關：符合能否連續規律拼排的檢驗方法。

正多邊形組合能否連續規律拼排的檢驗方法：

1.正多邊形組合元素若為同一種圖形，一定可以連續規律拼排。

2.若正多邊形組合元素為(x , y , z)，當 $x\neq y\neq z$，須符合 x、y、z 都是偶數。

3.若正多邊形組合元素為(x , y , z)，當 $x\neq y=z$，即組合型態為(x , y , y)，則 x 奇數、偶數皆可，但 y 必須是偶數。

4.若正多邊形組合元素個數超過 3 個，則①邊數沒有 12，一定可連續規律拼排。②邊數有 12，可以連續規律拼排，但會有不同的圖形組合出現。

二、能用正多邊形連續規律拼排，且 360°交接面都相同的圖形組合共 10 組，如下:

(一)拼法一種：☆ (6 , 6 , 6)　☆ (4 , 4 , 4 , 4)　☆ (3, 3, 3, 3, 3, 3)　☆ (3 ,12 ,12)

☆ (4 , 8 , 8)　☆ (4, 6, 12)　☆ (3 , 3 , 3 , 3 , 6)

(二)拼法二種：☆ (3 , 3 , 6 , 6)　☆ (3 , 4 , 4 , 6)　☆ (3 , 3 , 3 , 4 , 4)

三、能用正多邊形連續規律拼排，但 360°交接面並非都相同的圖形組合共 1 組，如下:

☆ (3 , 3 , 4 , 12) 拼法二種

四、正多邊形中，可以作為連續規律拼排的元素有：正三邊形、正四邊形、正六邊形、正八邊形、正十二邊形。

五、除了(4 , 8 , 8)外，可以選取二組、三組，甚至更多組圖形組合，在內角相加相同及可以繼續拼排的情況下，自由創造和諧有規律的圖形。

柒、研究應用

我們可以設計四個層次的關卡，讓同學動動腦及發揮創意，拼排出有規律的圖形。

第一關：分別給予多個「正三邊形」、「正四邊形」、「正六邊形」、「正三邊形+正十二邊形」、「正四邊形+正八邊形」、「正四邊形+正六邊形+正十二邊形」，讓同學拼排出規律圖形。

第二關：分別給予多個「正三邊形+正四邊形」、「正三邊形+正六邊形」，請同學拼排出有規律的圖形。

第三關：分別給予多個「正三邊形+正四邊形+正六邊形」、「正三邊形+正四邊形+正十二邊形」、，讓同學拼排出有規律的圖形。

第四關：給予多個「正三邊形+正四邊形+正六邊形+正十二邊」，請同學拼排出有規律的圖形。

同學在第二關~第四關能拼排出越多種規律圖形的獲得越多分。

捌、未來展望

幾個簡單的正多邊形，改變一下排法，改變一下顏色，就能創造出如此和諧有規律的圖案，令我覺得很神奇。規律真的是生活與數學中的一個美好存在!下一次，我想將研究範圍擴大到非正多邊形的圖形，希望可以創造出更美妙且有規律的圖案。我也希望能再融入正多邊形的個數計算及面積計算，以準確的估算一區域規律的拼滿一組圖形所需的正多邊形數量。

玖、參考資料

一、**遊戲推理數學 4**，捷英社文教事業，2004。

二、**國民小學第九冊數學第四單元多邊形與扇形**，康軒文教事業，2018。

三、何祥志、盧自強、陳彥源(1987)。**中華民國 第 27 屆全國中小學科學展覽作品：磁磚和正多邊形**。取自: file:///C:/Users/user/Downloads/pta_8956_3957447_70358.pdf

四、林靜宜、吳穰蓉、李玟慧(2002)。**中華民國 第 42 屆中小學科學展覽作品：磁磚的秘密**。取自: https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/42/pdf/d/4/030410.pdf

【評語】080406

本文探討使用正多邊形拼排出有規律的圖形，將多種正多邊形拼成交接面為 360 度的圖形，並推導出一個通用的等式，是一個很棒的做法。雖然是一份「美麗」的作品，然而，由於過去關於鑲嵌問題的討論很多，從平面到空間或球面皆有，建議作者可針對過去相關主題的研究有更完整的理解與分析後，有助於增加本研究的探究價值。

作品海報

壹、研究動機

數學課堂中，老師讓我們做一道題目:地磚店有一款正六邊形的地磚，試問如果換成正五邊形、正七邊形，能鋪出規律的圖形嗎?這個問題讓我想更進一步了解，還有哪些正多邊形，也能拼排出規律的圖形?

文獻探討:

作品名稱	討論依據	研究方法	研究結果
磁磚和正多邊形	依序討論使用一種、二種、三種正多邊形。	分別列出二元、四元、六元未知等式，將內角列出，找出符合等式的內角與個數。	11種磁磚圖形。
磁磚的秘密	列出相同頂點上，內角和為360˚的方程式$1/2-1/N_1+1/2-1/N_2+\cdots\cdots+1/2-1/N_k=1$。	找出k值範圍(3~6)，再依序討論使用3~6個正多邊形的情形，以逐一討論N值方式進行。	10組能均勻密鋪。

以上作品分別以正多邊形種類、正多邊形個數做逐一討論，未提供系統化的解法及未探討無法拼排的原因，也未呈現美麗的圖案。所以，我希望能推導出未知數個數較少的等式，系統化求解，實際拼排，分析無法拼排的原因，找出檢驗方法，並呈現圖形規律的奧妙。

貳、研究目的

一、列出用正多邊形拼成交接面為360˚的等式。

二、求出用正多邊形拼成交接面為360˚的圖形組合。

三、實際製作正多邊形，看看能用正多邊規律拼排的組合有哪些?

四、討論圖形組合能否連續規律拼排的檢驗方法。

五、用繪圖軟體illustrator繪出正多邊形規律美圖。

参、研究器材

計算機、美術紙、軟磁鐵、白板、電腦(word、 illustrator)

肆、研究過程

一、列出用正多邊形拼成交接面為360˚的等式。

(一)討論可以使用「幾個」正多邊形拼成交接面角度相加等於360˚的圖形?

正多邊形最小內角=60˚，最大內角<180˚，因為 360˚÷ 60˚=6，360˚÷180˚= 2，所以

結論(一)：我們可能可以用3、4、5、6 個正多邊形拼成交接面等於360˚的圖形。

(二)討論可以使用「幾種」正多邊形拼成交接面角度相加等於360˚的圖形?

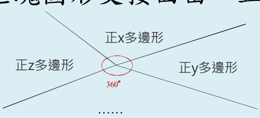
觀察正多邊形內角度數，將四個不同的最小內角相加60˚+ 90˚+108˚+120˚=378˚ ＞ 360˚，表示無法使用四種不同正多邊形拼成交接面360˚的圖形。

因為60˚x6=360˚，60˚x4+120˚=360˚，60˚+140˚+160˚=360˚，所以可以使用一、二、三種不同正多邊形拼成交接面360˚的圖形。

結論(二)：我們可以用一種、二種及三種不同的正多邊形拼成交接面為360˚的圖形。

(三)討論用正多邊形拼成交接面為360˚的等式?

1.綜合結論(一)與(二)，假設某一區塊圖形交接面由「正x多邊形、正y多邊形、正z多邊形」共3~6個拼合而成，如圖。



註: x、y、z可以相等，共3~6個。
註:最小為正三邊形，所以 x、y、z≥3。

$$\underbrace{\text{則正x多邊形的內角} + \ldots\ldots + \text{正y多邊形的內角} + \ldots\ldots + \text{正z多邊形的內角}}_{\text{共k 項，k= 3、4、5、6}} = 360^\circ$$

利用正多邊形內角公式將上列等式寫成：

$$\underbrace{\frac{180^\circ(x-2)}{x} + \ldots\ldots + \frac{180^\circ(y-2)}{y} + \ldots\ldots + \frac{180^\circ(z-2)}{z}}_{\text{共k 項，k= 3、4、5、6}} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x-2}{x} + \ldots\ldots + \frac{y-2}{y} + \ldots\ldots + \frac{z-2}{z}}_{\text{共k 項，k= 3、4、5、6}} = 2 \qquad \Rightarrow 1 - \frac{2}{x} + \ldots\ldots + 1 - \frac{2}{y} + \ldots\ldots + 1 - \frac{2}{z} = 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{1+1+\ldots\ldots+1}_{\text{共k 個1}} - 2\times\underbrace{\left(\frac{1}{x} + \ldots\ldots + \frac{1}{y} + \ldots\ldots + \frac{1}{z}\right)}_{\text{共k 項}} = 2 \qquad \Rightarrow k-2 = 2\times\left(\frac{1}{x} + \ldots\ldots + \frac{1}{y} + \ldots\ldots + \frac{1}{z}\right)$$

結論(三)用正多邊形拼成交接面為360˚的等式為：

$$\frac{k-2}{2} = \underbrace{\frac{1}{x} + \ldots\ldots + \frac{1}{y} + \ldots\ldots + \frac{1}{z}}_{\text{共k項，x、y、z可相等}} \qquad k\in\{3、4、5、6\}，x、y、z\in\{N|N\geq 3\}$$

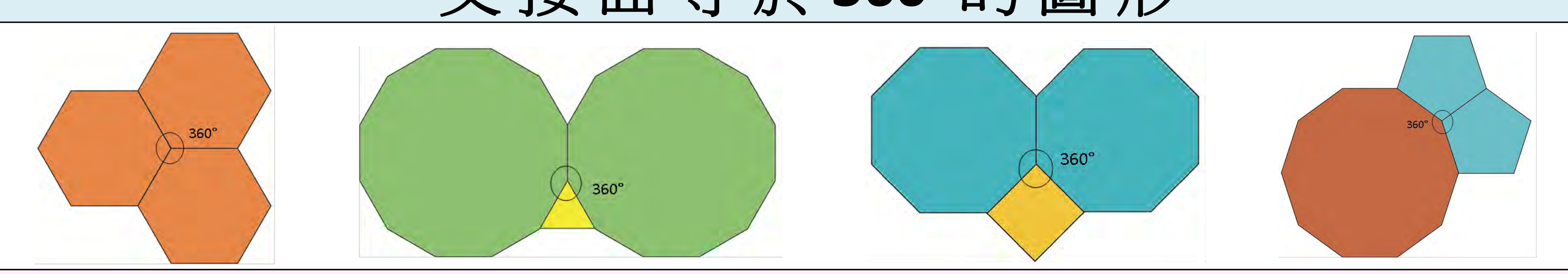
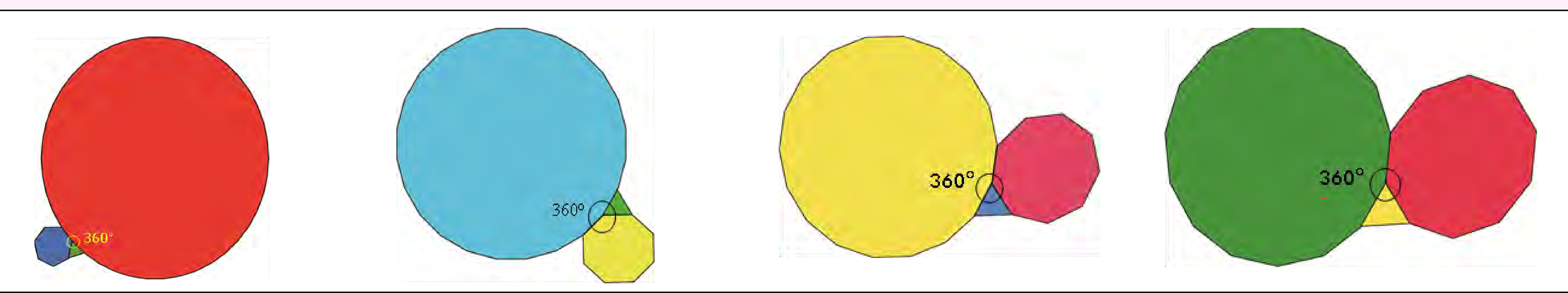
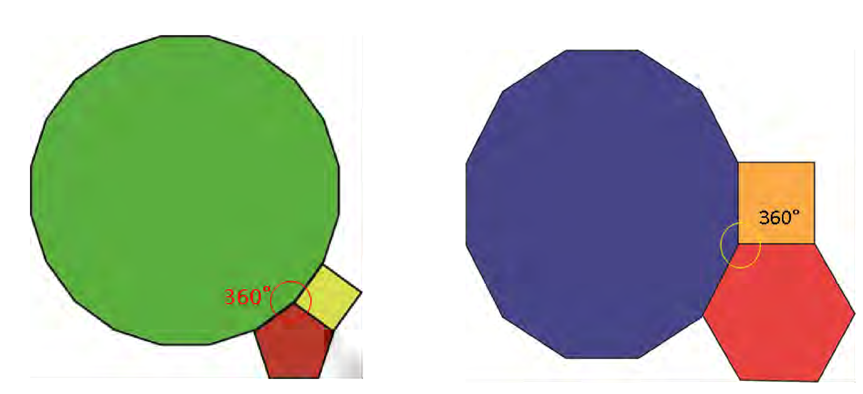
二、求出用正多邊形拼成交接面為360°的圖形組合。

★利用「**枚舉法**」依序列出所有可能拼成交接面等於360°的組合。

★將k值(k=3~6)依序代入等式 $\frac{k-2}{2}=\underbrace{\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{y}+\cdots+\frac{1}{z}}_{共k項}$，求x、y、z 。 x、y、z ∈{N | N≧3}

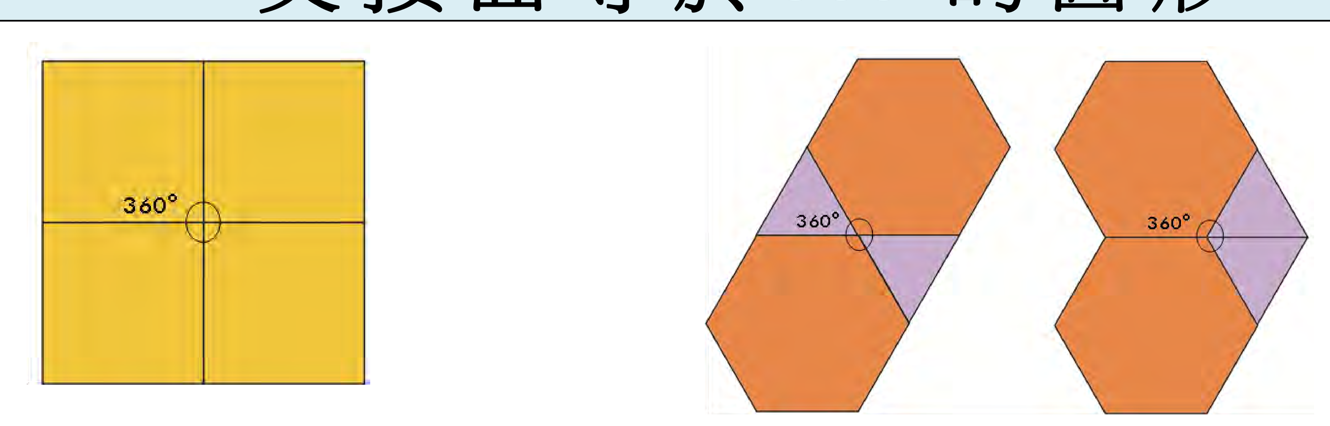
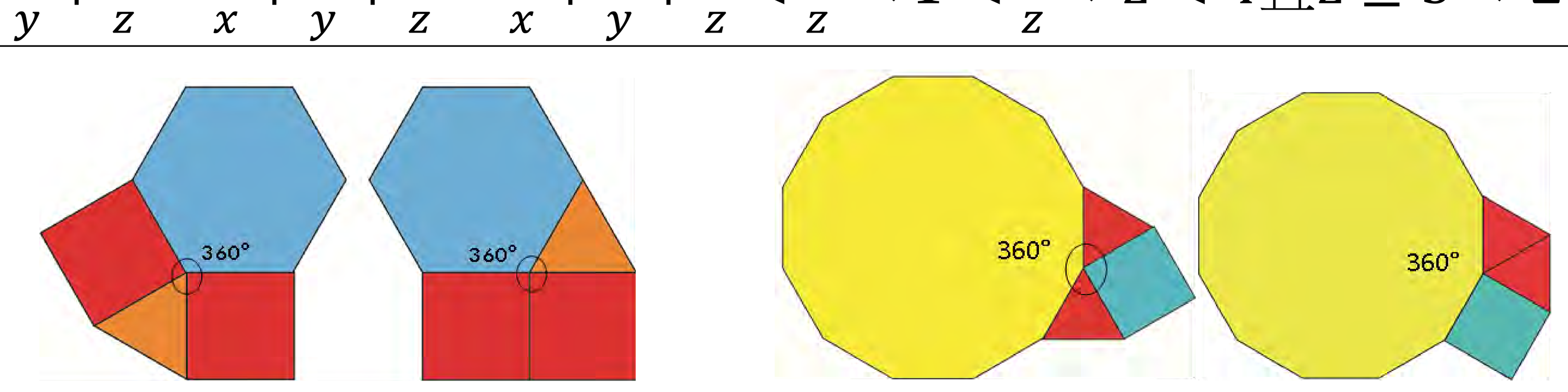
☆若x=y=z，則可以輕易的求出未知數x。
☆若x=z≠y，則使用十字交乘法，求二元一次方程式x、y的正整數解。
☆若x≠y≠z ，則先討論z值範圍，再將z值代入等式，求x、y的正整數解。

(一) k=3代入等式 $\Rightarrow \frac{3-2}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$

組合	等式	符合的解	交接面等於360°的圖形
3同	$\frac{1}{2}=\frac{3}{x}$	x=6	
2同1異	$\frac{1}{2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}$	(x , y)=(12,3),(8,4),(5,10)	
3異	$\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 討論z值:令 **x > y > z ≧ 3** $\Rightarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}\le\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{3}{z} \Rightarrow \frac{1}{2}<\frac{3}{z} \Rightarrow z<6$ 且 $z\ge 3$ ⇒ **3 ≦ z < 6**		
	z=3 $\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{3}$	(x,y)=(42,7) , (24, 8) (18,9) , (15,10)	
	z=4 $\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{4}$	(x,y)=(20,5) , (12,6)	
	z=5 $\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{5}$	沒有符合x > y > 5的解	

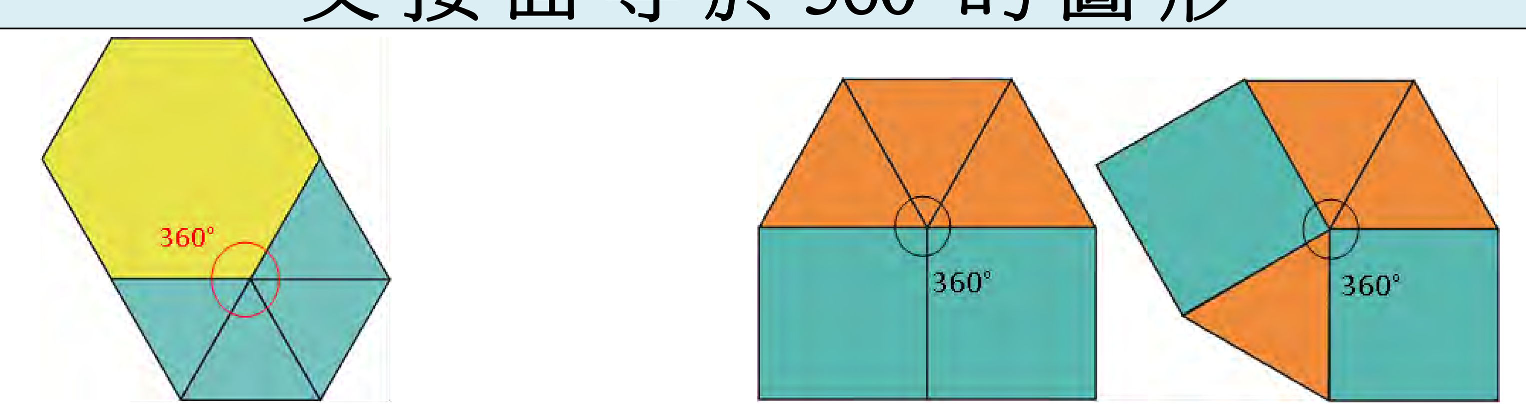
(二) k=4代入等式 $\Rightarrow \frac{4-2}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\cdots+\frac{1}{z}$

4異:超過3種正多邊形，不討論。

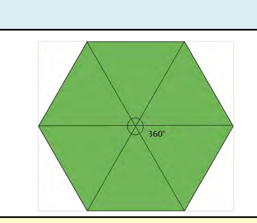
組合	等式	符合的解	交接面等於360°的圖形
4同	$1=\frac{4}{x}$	x= 4	
3同1異	$1=\frac{3}{x}+\frac{1}{y}$	沒有符合x≠y 且 x、y≥3的解	
2同2同	$1=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}$	(x,y)=(6,3) 註:分子都是2 ，所以令x > y 以避免求出相同的組合或求出四同。	
2同2異	三種情形：1. $1=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 2. $1=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}$ 3. $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}$		
	討論z值:令 **x > y > z ≧ 3** $\Rightarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}\le\frac{1}{3} \Rightarrow 1=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}<\frac{4}{z} \Rightarrow 1<\frac{4}{z} \Rightarrow z<4$且$z\ge 3$ ⇒ **z=3**		
	1. $1=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{3}$	沒有符合x>y>3的解	
	2. $1=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{3}$	(x,y)=(6,4)	
	3. $1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{3}$	(x,y)=(12,4)	

(三) k=5代入等式 $\Rightarrow \frac{5-2}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\cdots+\frac{1}{z}$

2同3異、5異:超過3種正多邊形，不討論。

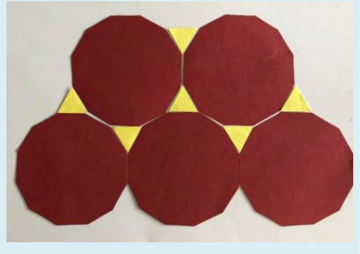
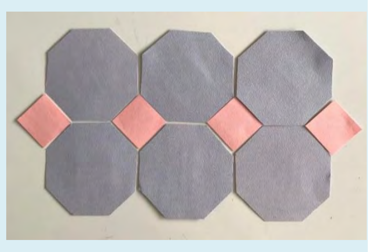
組合	等式	符合的解	交接面等於360°的圖形
5同	$\frac{3}{2}=\frac{5}{x}$	沒有正整數解	
4同1異	$\frac{3}{2}=\frac{4}{x}+\frac{1}{y}$	(x,y)=(3,6)	
3同2同	$\frac{3}{2}=\frac{3}{x}+\frac{2}{y}$	(x,y)=(3,4)	
3同2異	三種情形：1. $\frac{3}{2}=\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ 2. $\frac{3}{2}=\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}$ 3. $\frac{3}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{z}$		
	討論z值:令 **x > y > z ≧ 3** $\Rightarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}\le\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{z}<\frac{5}{z} \Rightarrow \frac{3}{2}<\frac{5}{z} \Rightarrow z<\frac{10}{3}$且$z\ge 3$ ⇒**z=3**		
	1. $\frac{3}{2}=\frac{3}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{3}$ ⇒沒有符合x>y>3的解	2. $\frac{3}{2}=\frac{1}{x}+\frac{3}{y}+\frac{1}{3}$ ⇒沒有符合x>y>3的解	3. $\frac{3}{2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{3}$ ⇒沒有符合x>y>3的解
2同2同1異	三種情形：1. $\frac{3}{2}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}$ 2. $\frac{3}{2}=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}$ 3. $\frac{3}{2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}$		
	討論z值:令 **x > y > z ≧ 3** $\Rightarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{y}<\frac{1}{z}\le\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{2}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}<\frac{5}{z} \Rightarrow \frac{3}{2}<\frac{5}{z} \Rightarrow z<\frac{10}{3}$且$z\ge 3$ ⇒**z=3**		
	1. $\frac{3}{2}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{3}$ ⇒沒有符合x>y>3的解	2. $\frac{3}{2}=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{3}$ ⇒沒有正整數解	3. $\frac{3}{2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{3}$ ⇒沒有正整數解

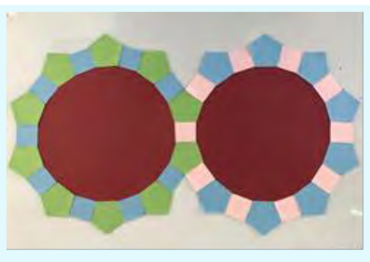
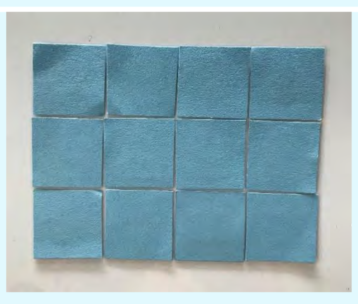
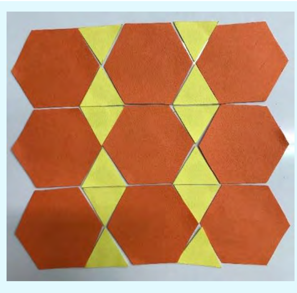
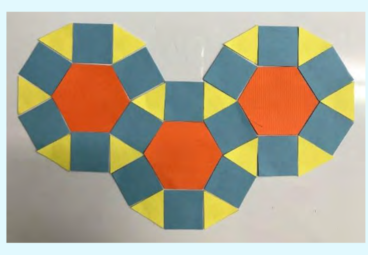
(四) k=6代入等式 $\Rightarrow \frac{6-2}{2}=\frac{1}{x}+\cdots+\frac{1}{y}+\cdots+\frac{1}{z}$

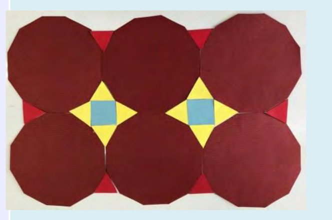
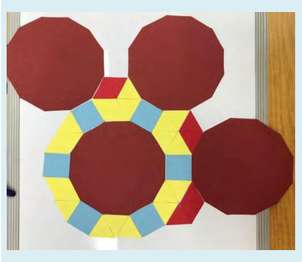
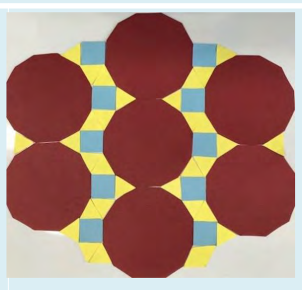
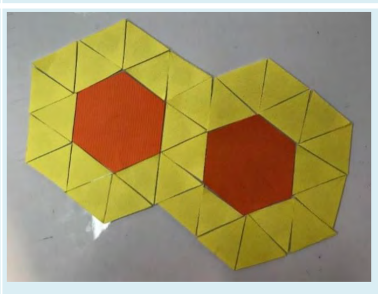
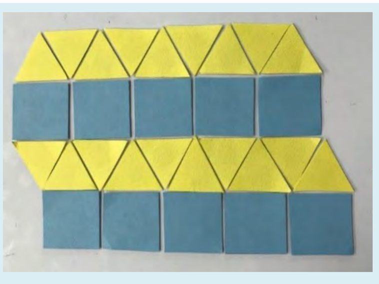
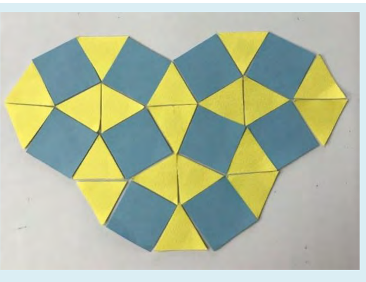
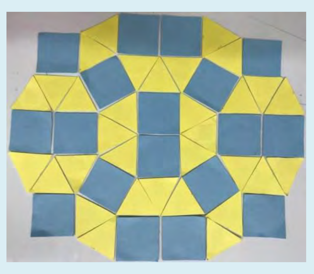
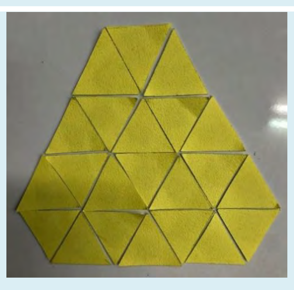
組合	等式	符合的解	交接面等於360°的圖形	
6同	$2=\frac{6}{x}$	x= 3		因為360°÷6 = 60° 而最小的正多邊形內角=60°，所 以不會有其他6個正多邊形的組合。

結論二:可以用正多邊形拼成交接面為360°的圖形組合共有17組，其中4組有二種拼法。

三、實際製作正多邊形，看看能用正多邊形規律拼排的圖形組合有哪些？

圖形組合	(6,6,6)	(3,12,12)	(4,8,8)	(5,5,10)	(3,7,42)	(3,8,24)	(3,9,18)
連續規律拼排圖形							
連續拼排	可以	可以	可以	不可以	不可以	不可以	不可以

圖形組合	(3,10,15)	(4,5,20)	(4,6,12)	(4,4,4,4)	(3,3,6,6)		(3,4,4,6)	
連續規律拼排圖形								
連續拼排	不可以	不可以	可以	可以	可以	可以	可以	可以

圖形組合	(3,3,4,12)			(3,3,3,3,6)	(3,3,3,4,4)			(3,3,3,3,3,3)
連續規律拼排圖形								
連續拼排	可以，但並非每個360°交接面都是(3,3,4,12)。			可以	可以	可以	可以	可以

四、討論能否連續規律拼排的檢驗方法？

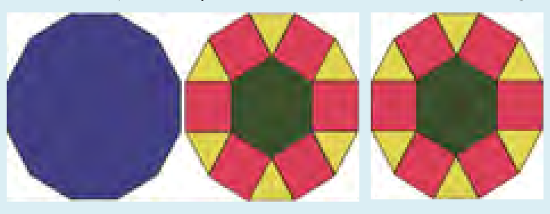
(一)使用「一種」正多邊形:(6,6,6)、(4,4,4,4)和(3,3,3,3,3,3)可以連續規律的拼排。

(二)使用「三個」正多邊形:

- 圖形組合為(x , y , z) ，x≠y≠z，須符合x、y、z都是偶數，才能平分給另2種正多邊形交錯規律拼排。
- 圖形組合為(x , y , y)，x≠y，則因為正x多邊形被正y多邊形包圍，所以x奇數、偶數皆可；但正y多邊形的y個邊須平分兩半給正x多邊形、正y多邊形交錯規律拼排 ，所以y必須是偶數。

(三)討論其他正多邊形組合:

所有正多邊形的邊長都一樣，由下圖，可以知道：



1.正六邊形=正三邊形x6
2.正十二邊形=正三邊形x6+正四邊形x6+正六邊形
=正三邊形x12+正四邊形x6
3.正六邊形內角=正三邊形內角x 2
4.正十二邊形內角=正三邊形內角+正四邊形內角

- (6, 6, 6)可以分解為(3,3,6,6)或(3,3,3,3,6) 註:或(3,3,3,3,3,3)已討論過。
- (4,6,12)可以分解為(4,6,3,4)或(4,3,3,3,4) ⇒(3,3,6,6)、(3,3,3,3,6)、(3,4,4,6) 、(3,3,3,4,4)可連續規律拼排。
- (4,6,12)可以分解為(4,3,3,12)，但因為正十二邊形內角太大，在共用正三邊形、正四邊形時，會產生2個正十二邊形靠在一起或重疊現象，為了繼續拼排，而產生不同的圖形組合。

五、用繪圖軟體illustrator繪出正多邊形規律美圖。

伍、研究結果

一、能連續規律拼排的正多邊形組合，須通過二個關卡。

第一關 :用正x、y、z多邊形拼成交接面360°的等式： $\frac{k-2}{2} = \underbrace{\frac{1}{x} + \dots\dots + \frac{1}{y} + \dots\dots + \frac{1}{z}}_{\text{共k項，x、y、z可相等}}$ k∈{ 3、4、5、6} , x、y、z∈{N|N≧3}

第二關 :連續規律拼排的檢驗方法：

♦若為同一種圖形，一定可以連續規律拼排。

♦若正多邊形組合型態為(x , y , z)，x≠y≠z，須符合x、y、z都是偶數。

♦若正多邊形組合型態為(x , y , y)，x≠y，則x奇數、偶數皆可，但y必須是偶數。

♦若正多邊形組合元素個數超過3個，則邊數沒有12，一定可連續規律拼排；邊數有12，可以連續規律拼排，但會有不同的圖形組合出現。

二、能用正多邊形連續規律拼排的圖形組合:

♦ 360°交接面都相同的圖形組合共10組:

拼法一種： (6,6,6)、(4,4,4,4)、(3,3,3,3,3,3)、(3,12,12)、(4,8,8)、(4,6,12)、(3,3,3,3,6)

拼法二種： (3,3,6,6)、(3,4,4,6)、(3,3,3,4,4)

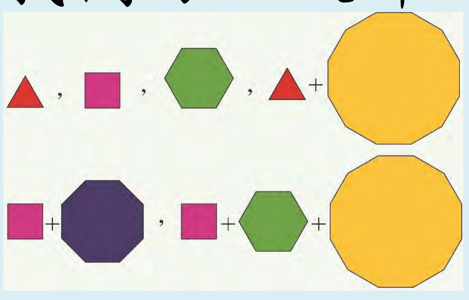
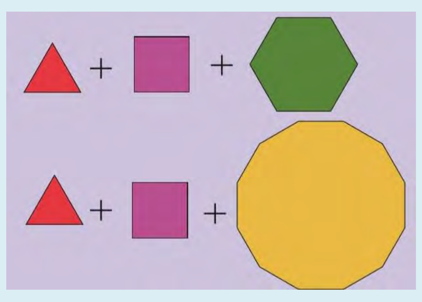
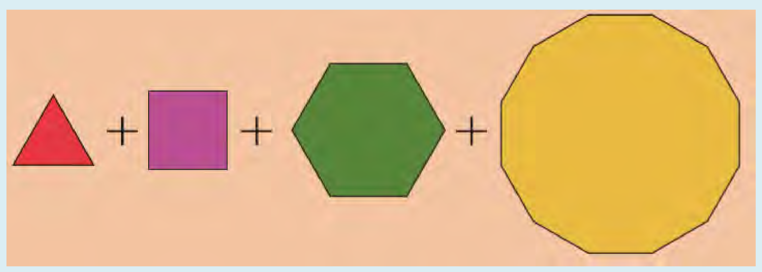
♦ 360°交接面並非都相同的圖形組合共1組: (3,3,4,12) 拼法二種

三、正多邊形中，可以做為連續規律拼排的元素有:正三邊形、正四邊形、正六邊形、正八邊形、正十二邊形

四、創造無限規律圖形: 除了(4,8,8)外，可以選取二組、三組，甚至更多組圖形組合，在內角相加相同及可以繼續拼排的情況下，自由創造和諧有規律的圖形。

陸、研究應用

我們可以設計四個層次的關卡，讓同學動動腦及發揮創意，拼排出有規律的圖形。

I  II  III  IV 

柒、參考資料

一、**遊戲推理數學4**，捷英社文教事業，2004。
二、**國民小學第九冊數學第四單元多邊形與扇形**，康軒文教事業，2018。
三、何祥志、盧自強、陳彥源(1987)。**中華民國 第27 屆全國中小學科學展覽作品：磁磚和正多邊形**。取自：file:///C:/Users/user/Downloads/pta_8956_3957447_70358.pdf
四、林靜宜、吳穰蓉、李玟慧(2002)。**中華民國 第42 屆中小學科學展覽作品：磁磚的秘密**。取自：https://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-1/42/pdf/d/4/030410.pdf