中華民國第 59 屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

佳作

080405

動動腦 FUN 石頭

學校名稱：新北市新莊區昌平國民小學

作者：	指導老師：
小六 李泊潁 小六 王銘于	郭麗芬 馬恬舒

關鍵詞：遞迴、費式數列

摘要

我們研究一個有趣的數學遊戲，取材自《科學研習月刊》，不但解決月刊上的問題，更發展出一般化的結果。遊戲規則如下：

「在 4 列 8 行方陣中，從左側第一行開始放石頭，每一行放 1 顆，限制『新放下去的石頭的左上角方向一路延伸都不可以有已經放好的石頭』。問：**放石頭的方法數有多少種？**」

我們研究出 **1 列 n 行～4 列 n 行**（以下簡稱 1xn、2xn、3xn、4xn）**的放石頭方法數**，並提出計數 **mxn 方陣放石頭方法數的策略**（其中 m≧5）。某國中組科展作品曾研究過這個遊戲，他們發現和費氏數列有關的規律，我們用不同方法證明該規律。關於放石頭的方法數，本作品還給出另一種形式的規律，使用的計數策略較為簡潔，並運用本作品的方法保證規律成立。

壹、 研究動機

我們對數學非常有興趣，因此加入研究數學科展的行列。老師問了我們一個刊載在科學期刊上的數學遊戲，叫做「放石頭」，題目如下：

小志在表格中玩放石頭的遊戲，要在每一直行放一個石頭，且從左側第一行開始放(如圖1)。

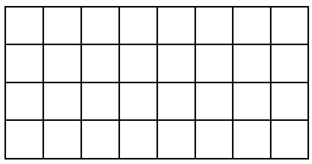


圖1. 玩放石頭的表格

但是有一個特殊的規定，就是新放下去的石頭的左上角方向一路延伸都不可以有已經放好的石頭。比如說，前四行已經放好了石頭，則現在要在第五行放新的石頭，只剩下兩格可以放（打叉的兩格不能放），如圖2。

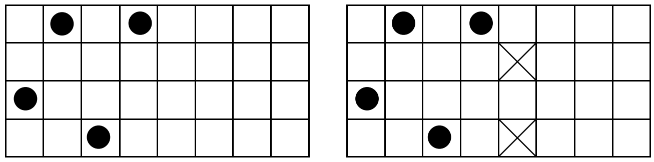


圖 2. 前四行已經放好石頭的情形

如果八個直行都必須有石頭，共有幾種放法？

起初，我們有點懷疑，按照這樣的規則排下去，每一行都有辦法放入石頭嗎？試排了幾次之後，發現每次都能把石頭一一放入各行，而且似乎有一些排列的規則可循，這樣的發現使得我們相當好奇，想知道到底這樣繼續排下去**是否真的有規律**嗎？在**更大的表格中，又有多少種放石頭的方法數呢**？引發了我們想深入研究的動機。

貳、 研究目的

一、在 m 列 n 行方陣中（m×n），探討每行放多顆石頭其解的存在性，及放石頭的最大數量。

二、解決 1×n、2×n、3×n、4×n 方陣的放石頭方法數，並找到遞迴關係式。

三、延伸探討 m×n 方陣放石頭方法數的策略，m≧5。

參、 研究過程與方法

一、文獻探討：

（一）相關作品分析：

嘉義市第 36 屆科展國中組研究「放石頭」問題的作品，其研究分析如下：

1. 2×n 方陣的放石頭方法數為 n+1 種。
2. 利用三個關係式，輾轉找出 3×n 方陣放石頭方法數與費氏數列有某種關聯；並利用「城堡多項式」找出 3×n 方陣的一般式。

（二）本作品的特色：

<u>延伸運用小學生所學到的簡化問題及找規律的方式</u>，進行研究及探討。

1. 除了<u>解決 1×n、2×n、3×n 方陣的放石頭方法數</u>外，我們也證明一般式是成立的。
2. 利用列表找規律，找出 <u>3×n 方陣與費式數列之關的關係及遞迴關係式</u>。
3. 利用相同的構造原則，進一步給出前列國中科展作品未給出的 <u>4×n 方陣放石頭方法數的遞迴關係式</u>。
4. 根據本作品研究提出之方法，給出計數 <u>m×n 方陣放石頭方法數的策略</u>，m≧5。

二、解的存在性——任意方陣都能依規定放石頭

我們想，按照「放石頭」之規定依序在每行放一顆石頭，後面的石頭會被前面的石頭影響，導致有些位置無法擺放石頭（如圖 3)。根據這個規則，**到後面幾行時，是否會無法放石頭**呢？

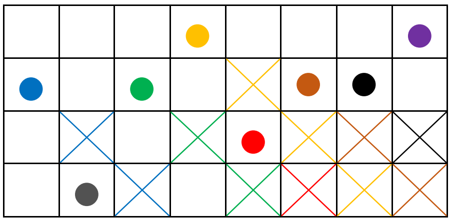


圖 3. 依規定擺放石頭，被石頭影響而不能放的格子以同顏色的「×」表示

我們發現，**每一行所放的石頭，只會影響下一行下一列以下的石頭放置**，例如在第 3 行第 2 列放石頭(見圖 3 綠色石頭)，只會影響第 4 行第 3 列以及第 5 行第 4 列，不會影響第 1 列及第 2 列。因此，

放在第 1 列的石頭，永遠不會被影響，故任意方陣都能依規定放石頭（如圖 4)。

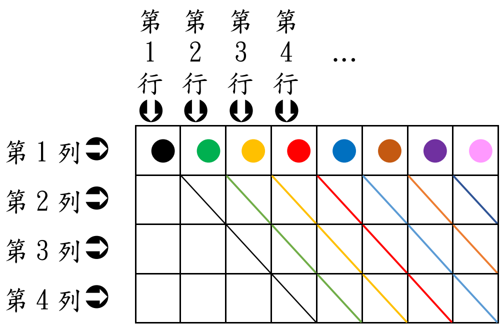


圖 4. 第 1 列放石頭的情形

三、一行多顆情形下，最多能放的石頭數量

了解任意方陣都能依規定放一顆石頭後，我們進一步發想：**如果每一行不只放 1 顆石頭，整個方陣最多能放多少顆石頭呢？**

經過排列後發現同顏色的「左上-右下」走向的格子中，至多只能放 1 顆石頭（如

圖 5)，因為若放 2 顆以上，同顏色的格子內，會發生「左上角方向一路延伸有已經放好的石頭」的現象，不符題目要求。而對 4 列 8 行的方陣來說，至多有 11 條「左上-右下」走向的連續格子。

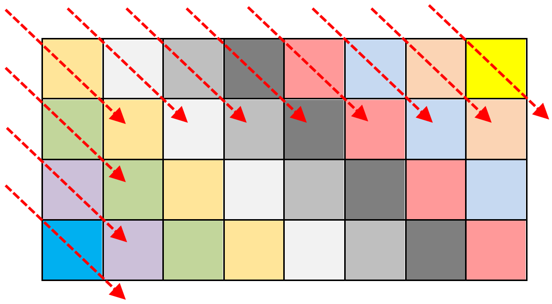


圖5. 同顏色左上-右下格子內只能放1顆石頭

也就是說，若第 1 行放 4 顆石頭，第二行開始的「左上-右下」走向連續 4 列 8 行格子都只能各放 1 顆石頭，所放的石頭方法數，剛好是**列數加行數減 1**(如圖 6)，亦即 4+8-1＝11。同理可證，在 m 列 n 行方陣中，最多可放

$$\boxed{m+n-1 \text{ 顆石頭}} \quad (1)$$

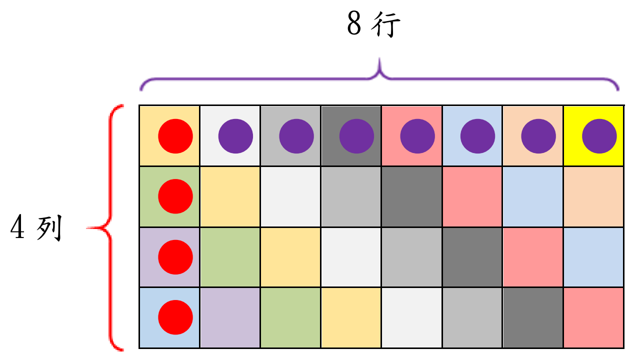


圖 6. 計數「左上-右下」走向連續格子的最多數量

四、簡化問題—1xn 方陣的放石頭方法數

在研究的一開始，我們先在棋盤上排排看，發現 4 列 8 行方陣（**以下稱為 4x8 方陣，以被乘數代表列數、乘數代表行數**）有眾多排列方法，不可能一一排出來；於是，我們想到，是不是可以先把方陣的範圍縮小，也許可以從中找到規律，再進而擴大到解決 4x8 方陣的問題。

於是，我們先**簡化問題，研究只有 1 列的狀況下放石頭的方法數**。發現在第 1 列第 1 行放石頭，只有 1 種排法，就算一直放到第 8 行，方法仍然只有唯一的 1 種（如

圖 7)；也就是說：

在 1×8 方陣中，放石頭的方法數＝1

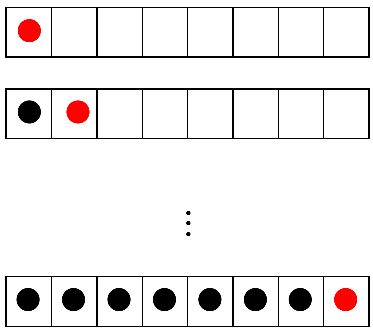


圖 7. 1×8 方陣的放石頭方法數

而一直延伸此排列方式，不論幾行，排列方法永遠只有 1 種（如圖 8)，因此得到：

在 1xn 方陣中，放石頭的方法數＝1 (2)

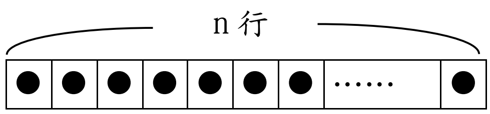


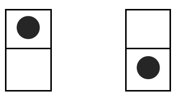
圖 8. 1xn 方陣的放石頭方法數

五、尋找規律—2xn 方陣的放石頭方法數

接下來，我們研究 2xn 方陣放石頭方法，利用簡化問題的方法，依序由 2x1 方陣排列至 2x8 方陣，發現其規律，最後找出 2xn 方陣的一般式。以下列舉 2x1 方陣、2x2 方陣、2x3 方陣及 2x4 方陣的排法，其餘部分呈現於實驗記錄本中：

（一）2x1 方陣有 2 種排法

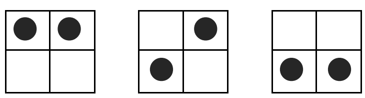
當只有 1 行的情況下，石頭的放置有如下 2 種排法：



(3)

（二）2x2 方陣有 3 種排法

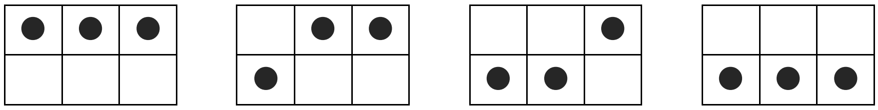
當行數增為 2 行，石頭的放置有如下 3 種排法：



(4)

（三）2x3 方陣有 4 種排法

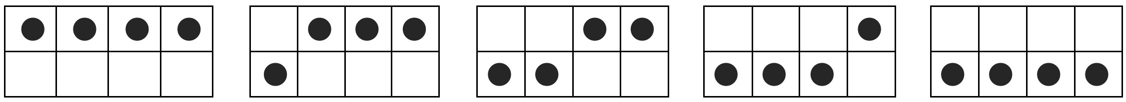
當行數增為 3 行，石頭的放置有如下 4 種排法：



(5)

（四）2x4 方陣有 5 種排法

當行數增為 4 行，石頭的放置有如下 5 種排法：



(6)

（五）觀察(3)～(6)的結果發現：

1. 在 2 列的方陣中，只要在任何一行的第 1 列放石頭，之後的每一行都受其影響，而只能排在第 1 列（如圖 9）。

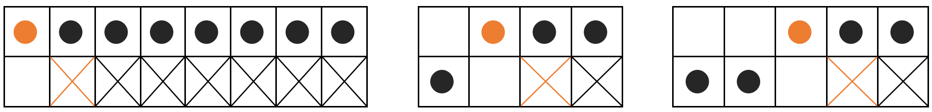


圖 9. 橘色石頭擺在第 1 列，之後每一行只能擺在第 1 列

2. 石頭排在第 2 列不影響之後每一行石頭排放，發展出 2 種排法（如圖 10）。

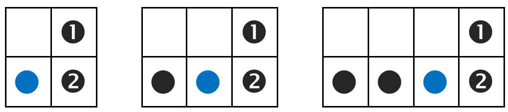
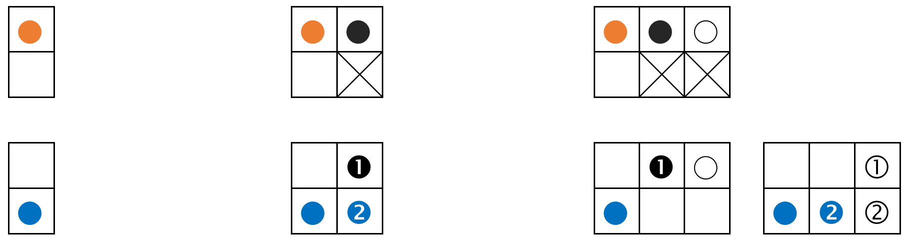


圖 10. 藍色石頭擺在第 2 列，下一行有❶、❷位置可放石頭

3. 發現：**每增加 1 行，就會增加 1 種放石頭的方法。**

從圖形變化分析，第一行有 2 種排法，以橘色及藍色圓點表示（如圖 11a）。增加一行後，因橘色圓點排在第一列，後面只有 1 種排法，排在第二列的藍色圓點後則有 2 種排法，以❶、❷表示，共 3 種排法（如圖 11b）；再增加一行時，排在第一列的石頭(●及❶)後面都各只有 1 種排法，以○表示，而排在第二列的石頭❷又發展出 2 種排法，以①、②表示（如圖 11c）。



a. 1 行有 2 種放法　　b. 2 行有 3 種放法　　c. 3 行有 4 種放法

圖 11. 每增加 1 行，放石頭方法數因第二列石頭而多 1 種放法

由此得知　　**排在第二列的石頭會使下一行多 1 種放石頭方法**

亦即　　$\boxed{\textbf{每增加 1 行，會增加 1 種放石頭的方法}}$

4. 進一步觀察數據，得到一般化的結果：

2×1 有 2 種

2×2 有 3 種

2×3 有 4 種

⋮

由上述數據亦觀察到：每增加 1 行，放石頭數方法數也跟著加 1，與圖形變化相吻合；更進一步發現放石頭方法數與行數之關係，由於第一行有 2 種放石頭方法數，之後的每一行都多加 1 種方法，故

放石頭方法數＝行數+1

以此類推，得到

2xn 方陣的放石頭方法數為 n+1 種 (7)

六、尋找規律—3xn 方陣的放石頭方法數

(一)符號的設定

我們繼續用窮舉法找出 3×8 方陣的放石頭方法數，想要從這些數據中找到一些規律，以下是我們得到的數據:

3×1 有 3 種

3×2 有　 7 種

3×3 有　14 種

3×4 有　26 種

3×5 有　46 種

3×6 有　79 種

3×7 有 133 種

3×8 有 221 種

從上列數據中，我們觀察到二種關係：

1. **後項大約是前項的 2 倍再少一點**，如：

3×4 方法數是 3×3 方法數的 2 倍減 2，3×5 方法數是 3×4 方法數的 2 倍減 6，

3×6 方法數是 3×5 方法數的 2 倍減 13，3×7 方法數是 3×6 方法數的 2 倍減 25　　(8)

⋮

在利用窮舉法解題時，亦發現從 3×3 起，每多一行，放石頭方法數大約會變成原來的 2 倍再少一些，但對於要減去多少，實在找不到可循之規律，便先研究另一個已找到的規律，等待日後再來解決此題。

2. **後項是前二種方陣方法數的和，加上「行數+1」**，如：

3×3 的方法數是 3×2 的方法數加 3×1 的方法數再加 4 →

$$"3\times3" = "3\times2" + "3\times1" + 4$$

3×4 的方法數是 3×3 的方法數加 3×2 的方法數再加 5 →

$$"3\times4" = "3\times3" + "3\times2" + 5$$

⋮

亦即　**該方陣的方法數，是前二個方陣方法數的和，加上行數加 1**

但是上述算式「$"3\times5" = "3\times4" + "3\times3" + 6$」不是適當的數學表達方式，無法與本團隊以外的人溝通，於是我們設定符號來表示：

$A_3(5)$　代表　3 列 5 行方陣的放石頭方法數

因此，3x5 方陣的方法數表示如下：

$$A_3(5) = A_3(4) + A_3(3) + 6$$

即　3x5 方陣方法數 ＝ 3x4 方陣方法數 ＋ 3x3 方陣方法數 ＋（行數+1）

(二) $A_3(n)$ 的一般化

根據上述表示式，我們可以推測 3xn 方陣的一般化公式：

$$A_3(n) = A_3(n-1) + A_3(n-2) + (n+1) \tag{9}$$

但是，我們如何保證這個公式是**正確無誤**的呢？雖然可以再次使用窮舉法，但無法將世上所有的數一一窮舉。於是，我們開始思考如何證明：

3xn 方陣放石頭方法數符合公式： $\underline{A_3(n) = A_3(n-1) + A_3(n-2) + (n+1)}$

證明歷程：

1. 依然用**簡化問題**的方法進行，先以 $A_3(8)$ 為思考的模型，再類推至 $A_3(n)$；觀察 3x8 方陣發現，石頭放在第一行時有 3 種放法，分別是❶、❷及❸，而這三種放法彼此不會互相影響，因此：

   $A_3(8)$ ＝石頭放在❶的方法數+放在❷的方法數+放在❸的方法數（如圖 12）

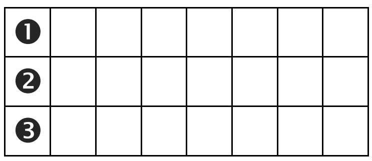


圖 12.　$A_3(8)$ 是石頭放在❶、❷及❸位置的方法數總和

同理可證，$A_3(n)$ 亦即討論下列 3 種方陣的放石頭方法數之和（如圖 13）：

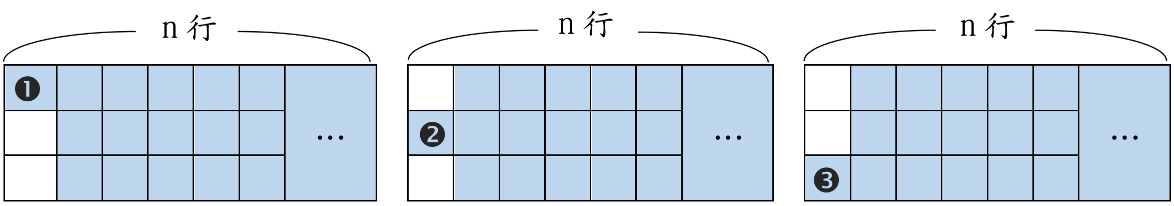


圖 13.　石頭分別放在❶、❷及❸位置之方陣

2. 以下分別討論石頭放在❶、❷及❸位置的方法數，再求三種方法數之和：

（1）石頭放在❶位置，分為情況一和情況二討論：

<u>**情況一**</u>：第 1 列第 1、2 行各放 1 顆石頭（見圖 14）。已知在第一列放石頭時，其後亦只能擺放在第一列，故

$$\text{放石頭的方法數}=1 \tag{10}$$

<u>**情況二**</u>：第 1 列第 1 行、第 3 列第 2 行放石頭（見圖 15）。放石頭的方法數即為紅框部份放石頭的方法數，也就是 **3×(n-2)方陣的方法數扣除石頭放在黃色✕位置的方法數**，亦即

$$A_3(n-2)-A_3(n-3) \tag{11}$$

因此，石頭放在❶位置的方法數，即為(10)和(11)之總和：

$$A_3(n-2)-A_3(n-3)+1 \tag{12}$$

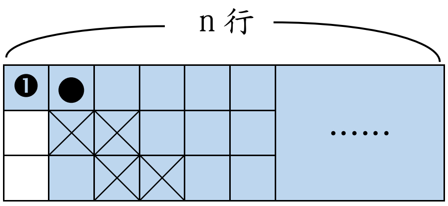


圖 14. 第 1 列第 1、2 行放石頭

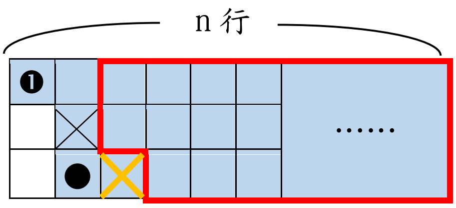


圖 15. 第 1 列第 1 行、第 3 列第 2 行放石頭

（2）石頭放在❷位置，即在第 2 列第 1 行放石頭（見圖 16），放石頭的方法數即為圖 16 紅框部份放石頭的方法數，如下

$$A_3(n-1)-A_3(n-2) \tag{13}$$

（3）石頭放在❸位置，即在第 3 列第 1 行放石頭（見圖 17），放石頭的方法數即為圖 17 紅框部份放石頭的方法數，如下

$$A_3(n-1) \tag{14}$$

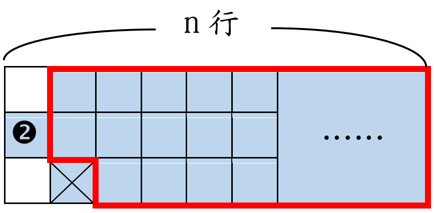


圖 16. 第 2 列第 1 行放石頭

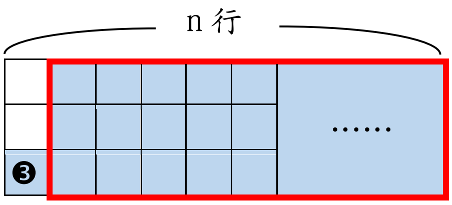


圖 17. 第 3 列第 1 行放石頭

（4）3xn 方陣的所有放石頭方法數：(12)～(14)恰為 3xn 方陣放石頭的所有情況，故有

$$\boxed{\begin{aligned} A_3(n) &= (A_3(n-2)-A_3(n-3)+1)+(A_3(n-1)-A_3(n-2))+A_3(n-1) \\ &= 2A_3(n-1)-A_3(n-3)+1 \end{aligned}} \qquad (15)\ \blacksquare$$

過程中，最令我們困擾而苦思良久的便是 $2A_3(n-1)-A_3(n-3)+1$ 如何轉變為 $A_3(n-1)+A_3(n-2)+(n+1)$。如果這 2 個式子相等，我們知道，運用**等量公理**，等號兩邊同減一數其值不變，得到：

$$\cancel{A_3(n-1)}+A_3(n-1)-A_3(n-3)+\cancel{1}=\cancel{A_3(n-1)}+A_3(n-2)+(n+\cancel{1})$$

可以得知： $\underline{A_3(n-1)-A_3(n-3)}$ 與 $\underline{A_3(n-2)+n}$ 應會相等

我們一一將已知的結果代入，驗證是否相等，舉 n=8 為例：

$$A_3(n-1)-A_3(n-3)=A_3(7)-A_3(5)=133-46=87$$

$$A_3(n-2)+n=A_3(6)+8=79+8=87$$

證實兩式確實相等，但超過 8 行時也適用嗎？苦思許久後，向老師請教，於是用數學歸納法進行驗證。

命題 1. $A_3(n-1)-A_3(n-3)=A_3(n-2)+n$。

證明 （i）已知命題對 $n=3$ 時成立，見(16)。

$$A_3(2)-A_3(0)=7-1=6,\quad A_3(1)+3=3+3=6$$

$$\text{故}\quad A_3(2)-A_3(0)=A_3(1)+3 \qquad (16)$$

（ii）要證如果命題對 $n=k$ 時成立，命題也會對 $n=k+1$ 成立，設

$$A_3(k-1)-A_3(k-3)=A_3(k-2)+k \qquad (17)$$

根據(15)，已知 $A_3(k)=2A_3(k-1)-A_3(k-3)+1$，推得

$$A_3(k-1)-A_3(k-3)=A_3(k)-A_3(k-1)-1$$

代入(17)

得到 $$A_3(k)-A_3(k-2)=A_3(k-1)+(k+1) \qquad \blacksquare$$

3. **猜想之驗證：$A_3(n)$ 與 $2A_3(n-1)$ 之關係**

如(8)所示，一開始尋找 $A_3(n)$ 之一般化時，曾發現**後項大約是前項的 2 倍再少一點**，如：

$A_3(4)$ 是 $A_3(3)$ 的 2 倍減 2，$A_3(5)$ 是 $A_3(4)$ 的 2 倍減 6，$A_3(6)$ 是 $A_3(5)$ 的 2 倍減 13⋯ 卻無法找出減數的變化關係。而今從(15)得知：

$$A_3(n) = 2A_3(n-1) - A_3(n-3) + 1，$$

比前項的 2 倍再少一點的那「一點」，原來是「前前項再加 1」，不但驗證了我們的猜想，更了解到「**關係」可能藏在任何數據**中！

(三) A_3(n)與費式數列的關係

在驗證(15)的歷程中，意外找到另一個公式，並補足先前的猜想；這樣的驚喜引起我們莫大的興趣：**還能不能再找到 A_3(n)的另一個關係式呢？**

再次檢視發現 A_3(n)各項方法數之差（如圖 18 橘色底所示之數列），發現找不出其中的規律，我們再算出二階差（如圖 18 藍色底所示），雖然相差的數比上一階的差還少，但仍然找不到規律，接著再算出三階差（如圖 18 粉色底所示），終於讓我們找到規律：**後二項的差恰好是前一項**，我們一一檢視數列，發現都符合這個規律，上網查詢才知道 1、1、2、3、5、8、13⋯就是**費氏數列**。

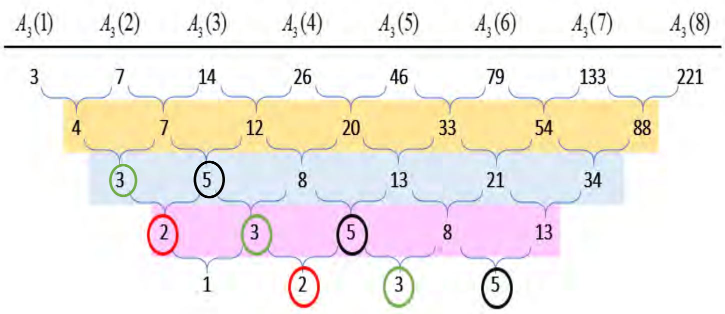


圖 18. A_3(n)形成的數列之一階差、二階差及三階差

我們利用列表的方式觀察（如表 1，以 F_n 代表費式數列），發現其關係式如下：

$$A_3(1) = F_6 - 5，A_3(2) = F_7 - 6，A_3(3) = F_8 - 7，\cdots\cdots$$

得到

$$\boxed{A_3(n) = F_{n+5} - (n+4)}$$

表 1. $A_3(\text{n})$ 數列與費式數列的關係

n	1	2	3	4	5	6	7
F_{n+5}	8	13	21	34	55	89	144
$A_3(\text{n})$	3	7	14	26	46	79	133
$F_{n+5}-A_3(\text{n})$	5	6	7	8	9	10	11

發現規律後，要如何保證我們寫出來的公式是正確的呢？於是我們用數學歸納法進行驗證。

命題 2. $A_3(n)=F_{n+5}-(n+4)$，其中 F_n 為費氏數列，$F_1=F_2=1$。

證明 (i)已知命題分別對 $n=1$ 和 $n=2$ 時成立，見(18)、(19)。

$$A_3(1)=3=F_6-(1+4) \tag{18}$$

$$A_3(2)=7=F_7-(2+4) \tag{19}$$

(ii)設命題分別對 $n=k$ 和 $n=k+1$ 時成立，見(20)、(21)。

$$A_3(k)=F_{k+5}-(k+4) \tag{20}$$

$$A_3(k+1)=F_{k+6}-(k+5) \tag{21}$$

因 $A_3(n)=A_3(n-1)+A_3(n-2)+n+1$，故有

$$\begin{aligned} A_3(k+2) &= A_3(k+1)+A_3(k)+(k+2)+1 \\ &= F_{k+6}-(k+5)+F_{k+5}-(k+4)+(k+3) \\ &= (F_{k+6}+F_{k+5})-(k+6) \\ &= F_{k+7}-(k+6) \end{aligned}$$

■

統整 $A_3(n)$ 的關係式，

$$\boxed{\begin{aligned} A_3(n) &= A_3(n-1)+A_3(n-2)+n+1 \\ &= 2A_3(n-1)-A_3(n-3)+1 \\ &= F_{n+5}-(n+4) \end{aligned}} \tag{22}$$

七、子圖形規律之尋求—4xn 方陣的放石頭方法數

透過尋找 A_1(n)～A_3(n) 放石頭方法數，我們獲得解決問題的成功經驗，先用窮舉的方式找出 $A_4(1)$ ～ $A_4(5)$ 的方法數，如下:

$$A_4(1)=4$$

$$A_4(2)=13$$

$$A_4(3)=36$$

$$A_4(4)=90$$

$$A_4(5)=212$$

窮舉到 $A_4(5)=212$ 時，不僅發現方法數越來越多，更發現了一些規律，但繼續窮舉下去很費時， 因此利用所發現的規律，找出公式來解決 $A_4(n)$ 的方法數。

$A_4(n)$ ＝石頭放在❶的方法數+放在❷的方法數+放在❸的方法數+放在❹的方法數（如圖 19）

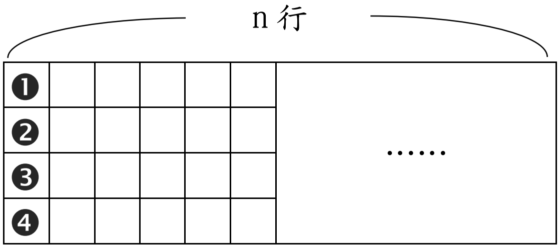


圖 19. A_4(n) 是石頭放在❶、❷、❸及❹位置的方法數總和

（一）子圖形 $B_2(4,n)$ 的產生

正當我們想用同樣的方式分別討論石頭放在❶、❷、❸及❹位置的方法數時，發現一個相當有趣的現象：

當第 1 列第 1、2 行都放石頭時，第 3 行會有①和②的 2 種排法，石頭放在①時，其後的每一行也只能放在第 1 列，故只有 1 種方法數(如圖 20)。

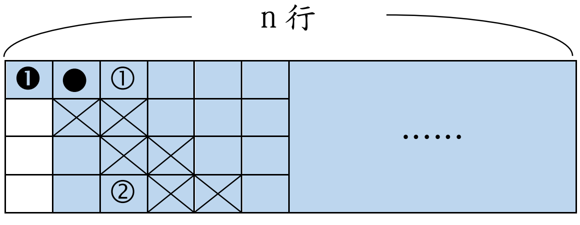


圖 20. 第 1 列第 1、2 行各放 1 顆石頭的情形

石頭放在②時，有③和④二種排法（如圖 21）；當石頭放在④時，又產生了⑤和⑥二種排法(如圖 22)。

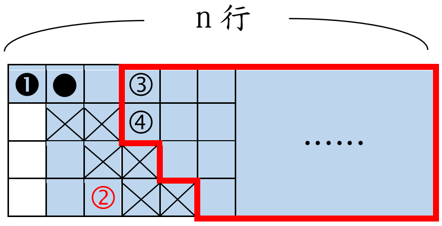


圖 21. 放在②時，有③、④二種排法

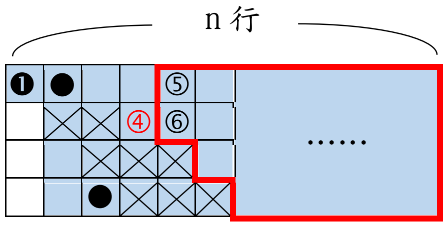


圖 22. 放在④時，有⑤、⑥二種排法

因此，我們從中發現了一個規律：

當石頭放在第 2 列或第 4 列的位置（如圖 21 中的②、圖 22 的④)，其後會出現如圖 23 的圖形，此圖形為**左起第 1 行恰有 2 列，第 2 行恰有 3 列，第 3 行起之後的每一行均為 4 列，行數共 n 行，此種圖形中，符合「放石頭規定」的放法之數量記為** $B_2(4,n)$ 。

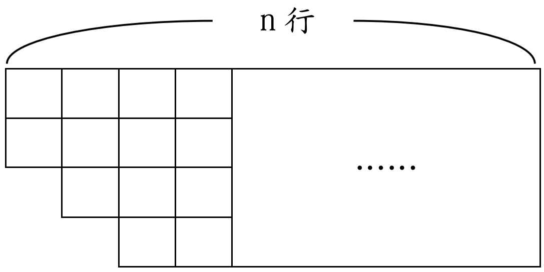
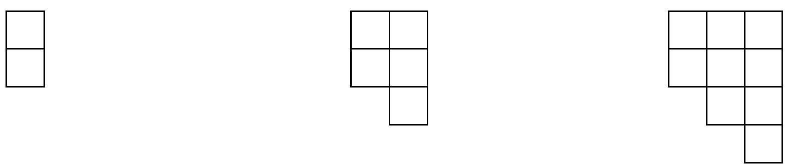


圖 23. 在上面圖形中，符合「放石頭規定」的放法之數量記為 $B_2(4,n)$ 。

規定 $B_2(4,1)$ 、 $B_2(4,2)$ 、 $B_2(4,3)$ 為分別為下圖 24a、b、c 圖形中符合放石頭規定的放法數量。



a. 在上面圖放石頭的方法數記作 $B_2(4,1)$

b. 在上面圖放石頭的方法數記作 $B_2(4,2)$

c. 在上面圖放石頭的方法數記作 $B_2(4,3)$

圖 24. $B_2(4,1)$ 、 $B_2(4,2)$ 、 $B_2(4,3)$ 所指之圖形

（二）子圖形 $B_2(4,n)$ 的方法數

要得知 $A_4(n)$，必須先知道 $B_2(4,n)$ 的方法數，於是我們先用窮舉法得到 $B_2(4,1)$～$B_2(4,5)$ 之數據，再推測其關係式，數據如下：

$$B_2(4,1)=2$$
$$B_2(4,2)=4$$
$$B_2(4,3)=8$$
$$B_2(4,4)=15$$
$$B_2(4,5)=28$$

推測 $B_2(4,n)$ 有遞迴式如下：

$$B_2(4,n)=B_2(4,n-1)+B_2(4,n-2)+B_2(4,n-3)+1 \text{，} n\geq 3 \text{。}$$

證明歷程：

1. 驗證 $n=3$ 成立。

(1) $B_2(4,1)=2$，如圖 25。

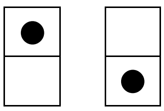
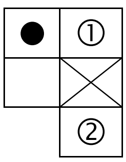
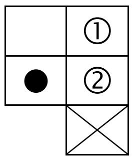


圖 25. $B_2(4,1)$ 有 2 種放法

(2) $B_2(4,2)=4$，如圖 26。





a. 2 種放法　　　b. 2 種放法

圖 26. $B_2(4,2)$ 有 4 種放法

(3) $B_2(4,3)=8$，如圖 27。

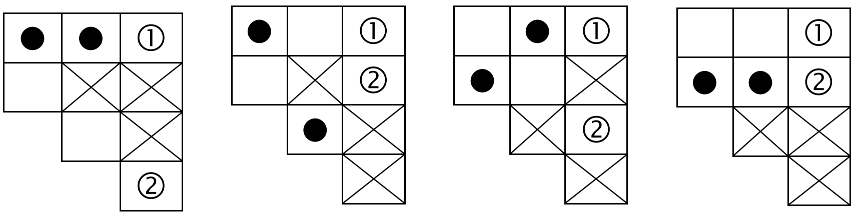


圖 27. $B_2(4,3)$ 有 8 種放法

統整上述討論的第(1)、(2)、(3)項，加上令 $B_2(4,0)=1$，可得

$$B_2(4,3)=8=1+2+4+1=B_2(4,0)+B_2(4,1)+B_2(4,2)+1$$

2. 證明 $n\geq 4$ 成立，恰可分為以下 3 種情況討論。

<u>情況一</u>：第 1 列第 1、2 行各放 1 顆石頭（見圖 28）。

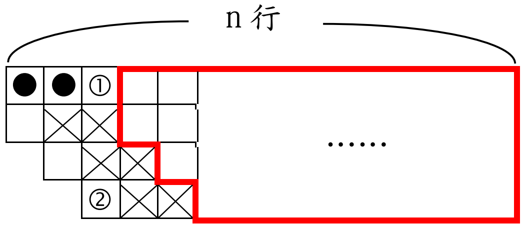


圖 28. 第 1 列第 1、2 行各放 1 顆石頭

若是在①的位置放石頭，其後只能在第 1 列放石頭，故方法數恰有 1 種；若是在②的位置放石頭，則方法數恰為 $B_2(4,n-3)$，故圖 28 的放法共有

$$B_2(4,n-3)+1$$

<u>情況二</u>：第 1 列第 1 行、第 3 列第 2 行各放一顆石頭，方法數恰為 $B_2(4,n-2)$（見圖 29）。

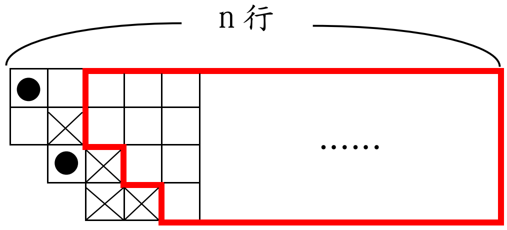


圖 29. 第 1 列第 1 行、第 3 列第 2 行各放 1 顆石頭

<u>情況三</u>：第 2 列第 1 行放 1 顆石頭，其方法數恰為 $B_2(4,n-1)$（見圖 30）。

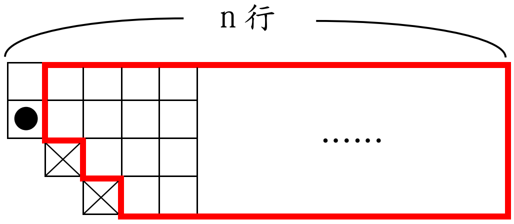


圖 30. 第 1 列第 1 行、第 3 列第 2 行各放 1 顆石頭

情況一～三的方法數之和，即得

$$\boxed{B_2(4,n)=B_2(4,n-1)+B_2(4,n-2)+B_2(4,n-3)+1} \quad (23)■$$

（三）$A_4(n)$ 的方法數

以下分別討論當石頭放在第 1 行第 1 列至第 1 行第 4 列的方法數，也就是石頭放在❶、❷、❸及❹位置之情形，再求 4 種方法數之和：

1. 石頭放在❶位置，分為 5 種情況討論：

<u>情況一</u>：第 1 列第 1、2 行各放 1 顆石頭（見圖 31），若是在①的位置放石頭，其後的方法數恰有 1 種，即只能在第 1 列放石頭；若是在②的位置放石頭，則方法數恰為 $B_2(4,n-3)$，故圖 31 的放法共有

$$B_2(4,n-3)+1 \tag{24}$$

<u>情況二</u>：第 1 列第 1 行及第 2 列第 3 行各放 1 顆石頭（見圖 32），其方法數恰為

$$B_2(4,n-2) \tag{25}$$

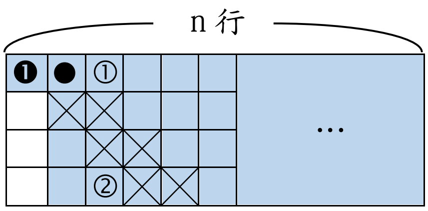


圖 31. 第 1 列第 1、2 行放石頭

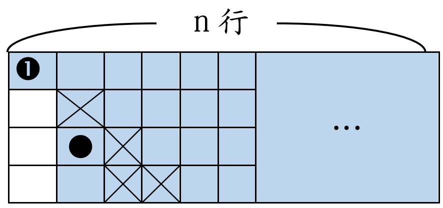


圖 32. 第 1 列第 1 行、第 2 列第 3 行放石頭

<u>情況三</u>：見圖 33，若是在①或②的位置放石頭，方法數合起來恰有 $B_2(4,n-2)$ 種；若是在③的位置放石頭，則方法數恰為 $A_4(n-3)-A_4(n-4)$，故放法共有

$$A_4(n-3)-A_4(n-4)+B_2(4,n-2) \tag{26}$$

2. 石頭放在❷位置：

見圖 34，若是在①或②的位置放石頭，方法數合起來恰有 $B_2(4,n-1)$ 種；若是在③的位置放石頭，則方法數恰為 $A_4(n-2)-A_4(n-3)$，故放法共有

$$A_4(n-2)-A_4(n-3)+B_2(4,n-1) \tag{27}$$

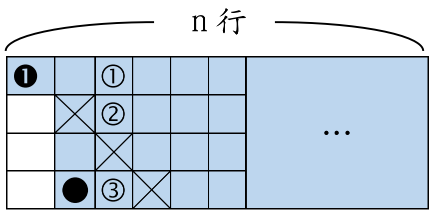


圖 33. 第 1 列第 1 行、第 4 列第 2 行放石頭

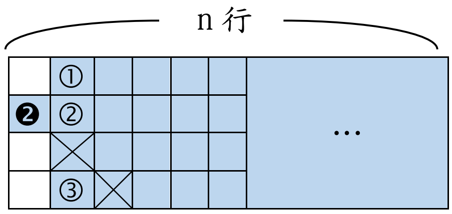


圖 34. 第 2 列第 1 行放石頭

3. 石頭放在❸位置：如下圖 35，放石頭方法數恰有

$$A_4(n-1)-A_4(n-2) \tag{28}$$

4. 石頭放在❹位置：如下圖 36，放石頭方法數恰有

$$A_4(n-1) \tag{29}$$

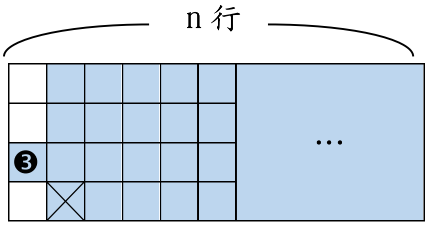


圖 35. 第 3 列第 1 行放石頭

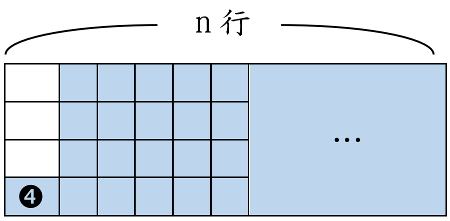


圖 36. 第 4 列第 1 行放石頭

$A_4(n)$ 即為(24)～ (29)方法數的總和，即

$$\begin{aligned}A_4(n)&=A_4(n-1)+\left(A_4(n-1)-A_4(n-2)\right)+\left(A_4(n-2)-A_4(n-3)\right)+\left(A_4(n-3)-A_4(n-4)\right)\\&\quad+\left(B_2(4,n-1)+2B_2(4,n-2)+B_2(4,n-3)+1\right)\\&=2A_4(n-1)-A_4(n-4)+B_2(4,n)+B_2(4,n-2)\end{aligned}$$

得到

$$\boxed{A_4(n)=2A_4(n-1)-A_4(n-4)+B_2(4,n)+B_2(4,n-2)} \tag{30}$$

利用上述遞迴式(30)及 $B_2(4,n)=B_2(4,n-1)+B_2(4,n-2)+B_2(4,n-3)+1$ 的遞迴式，我們便可算出 $A_4(6)\sim A_4(8)$：

項次	0	1	2	3	4	5
$A_4(n)$	1	4	13	36	90	212
$B_4(n)$	1	2	4	8	15	28

$$\begin{aligned}A_4(6)&=2A_4(5)-A_4(2)+B_2(4,6)+B_2(4,4)\\&=478\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_4(7)&=2A_4(6)-A_4(3)+B_2(4,7)+B_2(4,5)\\&=1044\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_4(8)&=2A_4(7)-A_4(4)+B_2(4,8)+B_2(4,6)\\&=2227\end{aligned}$$

八、策略的延伸應用—5xn 方陣的放石頭方法數

有了尋找 $A_1(\mathrm{n}) \sim A_4(\mathrm{n})$ 遞迴式的成功經驗後，我們思考：利用分析圖形的策略既然順利找到了 $A_4(\mathrm{n})$ 的遞迴式，何不再繼續研究 $A_5(\mathrm{n})$，探尋其中的規律，最後再擴展到 $A_m(\mathrm{n})$ 呢？

於是，開始進行 $A_5(\mathrm{n})$ 圖形的分析，在其中發現了 $B_3(5,\mathrm{n})$ 圖形(如圖 37 紅框所示)，此圖形為**左起第 1 行恰有 3 列，第 2 行恰有 4 列，第 3 行起之後的每一行均為 5 列，行數共 n 行，在此種圖形中，符合「放石頭規定」的放法之數量記為 $B_3(5,\mathrm{n})$**。

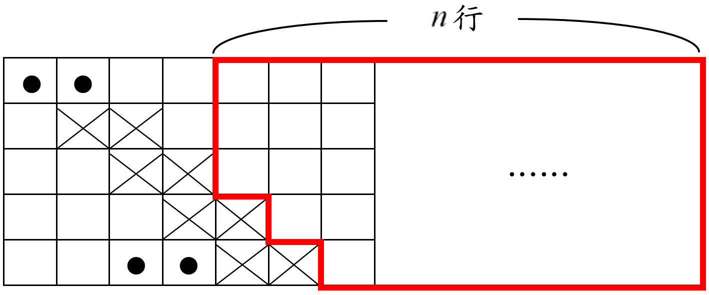


圖 37. 在 $A_5(\mathrm{n})$ 中發現 $B_3(5,\mathrm{n})$ 圖形

由於 $B_2(4,\mathrm{n})$ 有遞迴式，我們也想尋找 $B_3(5,\mathrm{n})$ 的遞迴式，卻發現另一種新圖形不斷重複出現（如下圖 38 塗色部分），此種圖形為**左起第 1 行第 1 列、第 2 列與第 4 列可放石頭，第 2 行第 1 列、第 2 列、第 3 列與第 5 列可放石頭，第 3 行恰有 4 列，第 4 行起之後的每一行均為 5 列，行數共 n 行**，而在①的位置放石頭，會產生如下之遞迴式：

$$
\begin{aligned}
& B_2(5,n-6)+B_2(5,n-5)+B_2(5,n-4)+1 \\
& +B_2(5,n-8)+B_2(5,n-7)+B_2(5,n-6)+1 \\
& +B_2(5,n-10)+B_2(5,n-9)+B_2(5,n-8)+1 \\
& +\cdots
\end{aligned}
$$

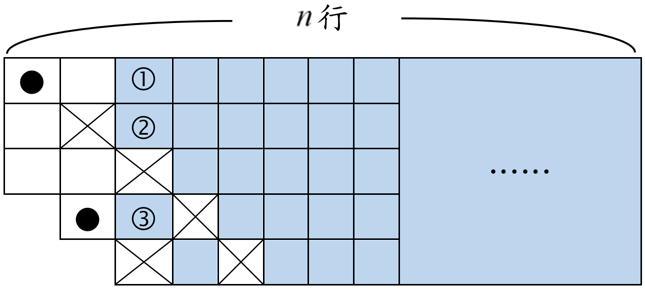


圖 38. $B_3(5,\mathrm{n})$ 圖形內重複出現的圖形

找出 $B_3(5,\mathrm{n})$ 之遞迴式如下（詳細的研究過程請參閱實驗日誌）：

$$B_3(5,n)=1+B_2(5,n-4)+2B_2(5,n-3)+B_2(5,n-2)+B_3(5,n-4)+B_3(5,n-3)+B_3(5,n-1)$$
$$+(B_2(5,n-1)+B_3(5,n-2)+B_3(5,n-3)+B_2(5,n-3)+B_3(5,n-4)+B_3(5,n-5)+...)$$

利用相同策略繼續進行分析，發現

$$\boxed{B_2(5,\mathrm{n})=B_2(5,\mathrm{n-1})+B_2(5,\mathrm{n-2})+B_2(5,\mathrm{n-3})+B_2(5,\mathrm{n-4})+1} \quad (31)$$

再尋找 $A_5(\mathrm{n})$ 的遞迴式，如下（詳細研究過程請參閱實驗日誌）：

$$A_5(n)=2A_5(n-1)-A_5(n-5)+B_2(5,n)-B_2(5,n-1)+B_2(5,n-3)$$
$$+B_3(5,n-1)+B_3(5,n-2)+2B_3(5,n-3)+B_3(5,n-4)$$
$$+2(B_2(5,n-2)+B_3(5,n-3)+B_3(5,n-4)+B_2(5,n-4)+B_3(5,n-5)+B_3(5,n-6)+...)$$
$$+(B_2(5,n-1)+B_3(5,n-2)+B_3(5,n-3)+B_2(5,n-3)+B_3(5,n-4)+B_3(5,n-5)+...)$$

(32)

發現 $A_5(\mathrm{n})$ 的遞迴式中會有 $A_5(\mathrm{n})$ 的部分前幾項，並且包含 $B_2(5,\mathrm{n})$ 及 $B_3(5,\mathrm{n})$ 圖形；回頭檢視 $A_1(\mathrm{n})$ ～ $A_4(\mathrm{n})$ 的遞迴式(2)、(7)、(15)、(30)，發現 $A_3(\mathrm{n})$ ～ $A_5(\mathrm{n})$ 之遞迴式(15)、(30)、(32)有如下的規律：

$A_3(\mathrm{n})$ 的遞迴式中會有 $A_3(\mathrm{n})$ 的部分前幾項

$A_4(\mathrm{n})$ 的遞迴式中會有 $A_4(\mathrm{n})$ 的部分前幾項及 $B_2(4,\mathrm{n})$ 子圖形

$A_5(\mathrm{n})$ 的遞迴式中會有 $A_5(\mathrm{n})$ 的部分前幾項及 $B_2(5,\mathrm{n})$ 、 $B_3(5,\mathrm{n})$ 子圖形 (33)

九、計數 m×n 方陣的放石頭方法數策略，m≧5。

根據上述研究，若方陣擴大至 m×n，m≧5，我們提出以下策略計數放石頭的方法數。

(一)分成若干子圖形

在研究歷程中發現，**同一行的放石頭方法數彼此不會影響**，因此可以**分開計數**；而在 m×n 方陣中，前一行石頭最多會影響其後（m-1）行石頭之放置，因此會形成如階梯般的子圖形。如圖 39 所示，從第一行開始放石頭，直到在某行放石頭後，確定圖中的黃色階梯狀部份不會放任何石頭，便會得出包含子圖形(見灰色部份)的放石頭方法數；如果圖中黃色部份還有放石頭的空間，則我們會繼續用窮舉的方

式，一直到類似黃色階梯狀區域的部份不能放石頭為止；或到最末一行。持續用同樣方法分析的結果，便會得到 $A_m(n)$ 是一些子圖形的方法數總和，即 $A_m(n)$ 的遞迴式包含 $A_m(n)$ 的前幾項，以及一些子圖形 $B_2(m,n)$ 、 $B_3(m,n)$ 、 $B_4(m,n)\cdots\cdots$，詳細說明見命題 3。

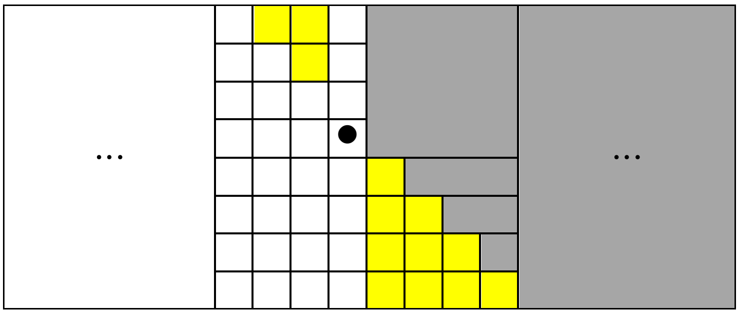


圖 39. $A_m(n)$ 包含子圖形 $B_2(m,n)$ 、 $B_3(m,n)$ 、 $B_4(m,n)\cdots\cdots$

命題 3($A_m(n)$ 遞迴式的形式)： 依本研究分析方式，$A_m(n)$ 遞迴式包含 $A_m(i)$，i 為介於 1~n 的某些值；及一些 $B_s(m,j)$，其中 $2\le s\le m-2$， j 為介於 1~n 的某些值。

說明. 以下分兩部份說明。

Ⅰ. 除了 $A_m(n)$ 以外的子圖形，其形式只會是 $B_s(m,j)$. 依本研究解析 $A_m(n)$ 圖形的方式，恰分下列三類情況討論：

情況一：若石頭❶放在第一列時(見圖 40)，則我們會繼續討論：

a. 若石頭放在位置②，則持續討論若石頭分別放在灰色部份的位置時，灰色該行右側圖形可放石頭的方法數；

b. 若石頭放在③、④、⋯，則進入當石頭放在第二列以下時的討論。

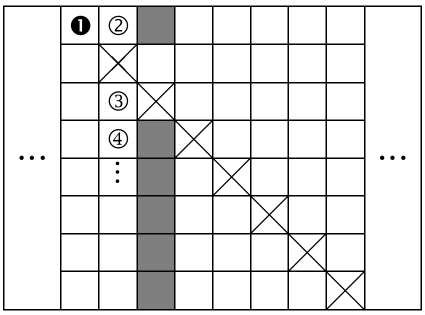


圖 40. 若石頭放在第一列

情況二：若石頭放在第二列以下時，當在某一行放入石頭❶後，使得黃色部份確定不會放任何石頭，見圖 41，則我們會得出 $A_m(n)$ 包含藍色部份放石頭方法

數，藍色部份必為 $B_s(m, j)$ 其中一種子圖形，其中 $2 \le s \le m-2$。

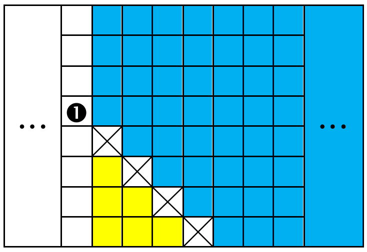


圖 41. 放入石頭❶後，黃色部份確定不會放任何石頭

<u>情況三</u>：當在某一行放石頭後，還要繼續向右討論放石頭方法數，如圖 42。

若在某一行放入石頭❶後，次行的②、③、④…仍可以放石頭，則我們除了得出如圖 41 藍色部份放石頭方法數之外，還會繼續計數若分別在圖 42 的②、③、④…等位置放石頭，灰色部份的放石頭方法數。

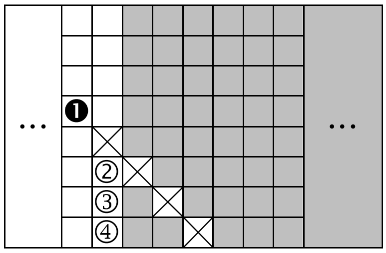


圖 42. 在某一行放入石頭❶後，次行的②、③、④…仍可以放石頭

統整情況一~情況三：當我們每討論完一行，剩下要討論的行數便會減少或不用再討論，由於全部的格子數有限，就必得到有限的項數，而且子圖形的形式只會是 $B_s(m, j)$，$2 \le s \le m-2$。

Ⅱ. <u>$A_m(i)$，$B_s(m, j)$，$2 \le s \le m-2$ 的每一項都會出現.</u> 只要注意在第 1 行的討論，當分別討論若在第 1 列、第 2 列、第 3 列、…第 m 列放石頭時，第二行起到第 n 行間會出現的子圖形。

1. 若在第 2 列放石頭，會出現 $B_2(m, n-1)$ 的子圖形，見圖 43 藍色部份。

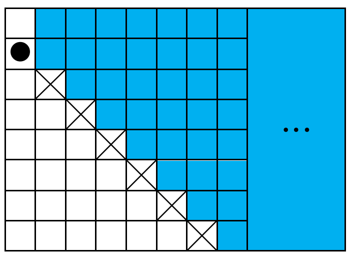


圖 43. 在第 2 列放石頭，討論放石頭方法數時會出現 $B_2(m, n-1)$ 的子圖形

2. 若在第 3 列放石頭，會出現 $B_3(m,n-1)$ 的子圖形，見圖 44 藍色部份。

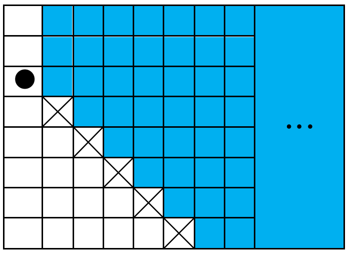


圖 44. 在第 3 列放石頭，討論放石頭方法數時會出現 $B_3(m,n-1)$ 的子圖形

4. 若在第 m 列放石頭，會出現 $A_m(n-1)$ 的子圖形，見圖 45 藍色部份。

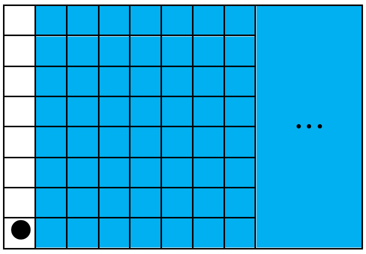


圖 45. 在第 m 列放石頭，討論放石頭方法數時會出現 $A_m(n-1)$ 的子圖形

■

(二)找出子圖形的遞迴關係

根據我們的研究發現，子圖形 $B_s(m,n)$ 的放石頭方法數具有一定的規律，且子圖形的放石頭方法數與上一階層的子圖形息息相關，形成遞迴關係，因此，找出子圖形內的遞迴關係後，便能利用其規律找到 $A_m(n)$ 的遞迴式，說明如下：

1. 子圖形 $B_2(m,n)$ 的放石頭方法數具有一定的規律

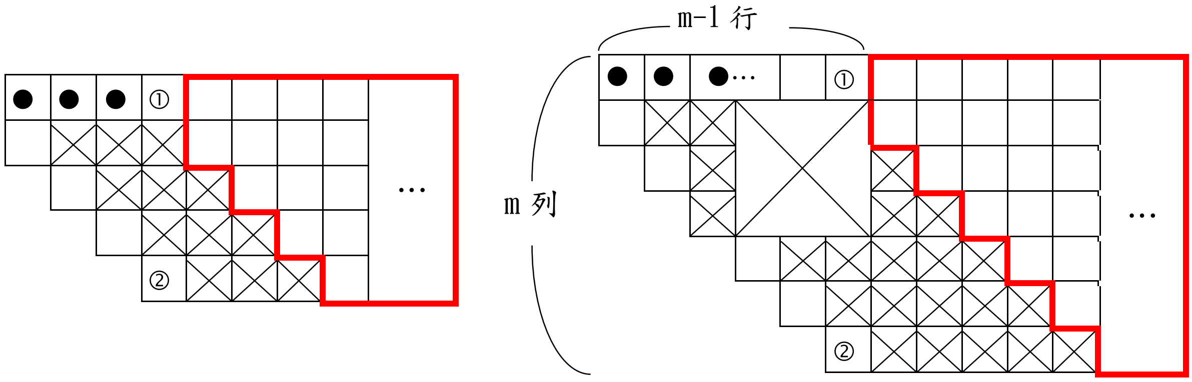
以 $B_2(5,n)$ 為例，分析 $B_2(5,n)$ 圖形時，是討論到第 4 行時，恰剩 2 格可放石頭，此時放石頭方法數為 $1+B_2(5,n-4)$（見圖 46a），接著討論第 3 行，此時放石頭方法數為 $B_2(5,n-3)$，然後討論第 2 行，此時放石頭方法數為 $B_2(5,n-2)$，最後討論第 1 行，此時放石頭方法數為 $B_2(5,n-1)$，找出 $B_2(5,n)$ 的遞迴式(31)：

$$B_2(5,\mathrm{n}) = B_2(5,\mathrm{n}-1) + B_2(5,\mathrm{n}-2) + B_2(5,\mathrm{n}-3) + B_2(5,\mathrm{n}-4) + 1$$

而以 $B_2(5,n)$ 為出發點，去思考 $B_2(m,n)$ 的規律時，便能看出 $B_2(m,n)$ 圖形的(m-1)行與 $B_2(5,n)$ 圖形的第 4 行情形類似(見圖 46b)，故類推 $B_2(m,n)$ 遞迴式為：

$B_2(m,n) = B_2(m,n-1) + B_2(m,n-2) + B_2(m,n-3) + \cdots + B_2(m,n-m+1) + 1$，

，$m \geq 4$，$n \geq m-1$。 (34)■



a. $B_2(5,n)$ 第 4 行的放石頭方法數　　　　b. $B_2(m,n)$ 第(m-1)行的放石頭方法數

圖 46.　子圖形 $B_2(m,n)$ 放石頭方法數之推演過程

2. 同一階層 $B_2(m,n)$ 子圖形的前幾項皆為 2 的幾次方

在窮舉的過程中，發現如下的數據：

$$B_2(4,1)=2 \text{ 、} B_2(4,2)=4 \text{ 、} B_2(4,3)=8 \text{ ；}$$

$$B_2(5,1)=2 \text{ 、} B_2(5,2)=4 \text{ 、} B_2(5,3)=8 \text{ 、} B_2(5,4)=16 \text{ ；}$$

$$\vdots$$

子圖形 $B_2(m,i)$ 在前幾項都有一定的規律，且恰好都是 2 的倍數，這是為什麼呢？

說明如下：

(1)如圖 47 所示，$i=1$ 時，$B_2(m,1)=2^1$ 。

(2) $i=2$ 時，此時圖形增加第 2 行，共 3 列，對於第一行放的石頭，它所在位置的左上-右下連線格子延伸至第二行，延伸線上的格子不放石頭，使得第二行還有 3－1＝2 格空格可放石頭，故得

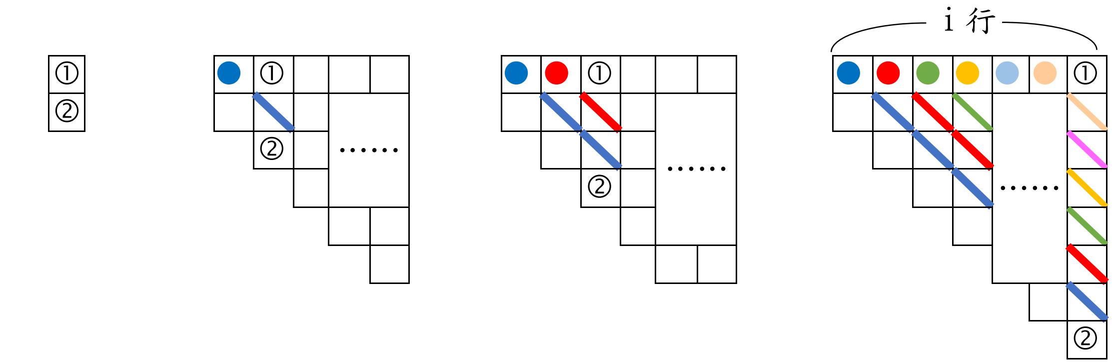
$$B_2(m,2)=B_2(m,1)\times 2=2^1\times 2=2^2 \text{ 。}$$

(3) $i=3$ 時，此時圖形增加第 3 行，共 4 列，對於第一行和第二行放的石頭，這兩顆所在位置的左上-右下連線格子延伸至第三行，延伸線上的格子不放石頭，使得第三行還有 4－2＝2 格空格可放石頭，故得

$$B_2(m,3)=B_2(m,2)\times 2=2^2\times 2=2^3 \text{ 。}$$

以此類推，可得

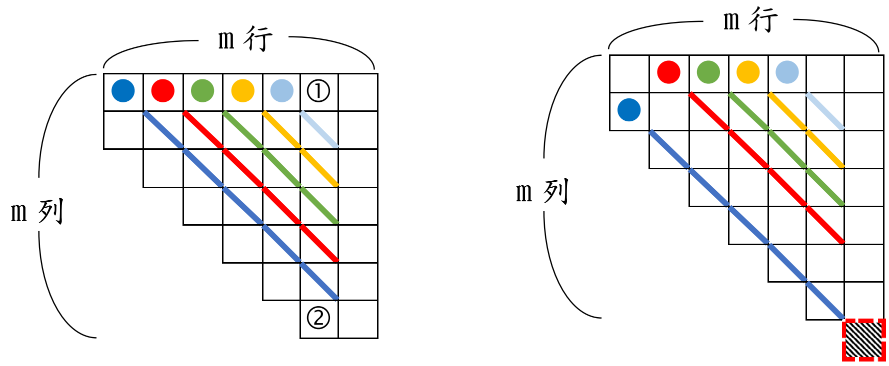
$$B_2(m,i)=B_2(m,i-1)\times 2=2^{i-1}\times 2=2^i$$



$B_2(m,1)=2^1$　　$B_2(m,2)=2^2$　　$B_2(m,3)=2^3$　　$B_2(m,i)=2^i$

圖 47. $B_2(m,i)=2^i$

而 i 的範圍僅到 $m-1$，如圖 48a 所示，注意到前 $m-2$ 行，每一行放的石頭的左上-右下連線格子均會延伸到第 $m-1$ 行，使得第 $m-1$ 行上有 $m-2$ 格不能放石頭，因為該行恰有 m 列，所以還剩 $m-(m-2)=2$ 格可放。然而當第一行的石頭放在第二列時，它的左上-右下連線格子不會延伸至第 m 行（如圖 48b 所示），因而不適用上述討論。故 i 的範圍僅到 $m-1$，$B_2(m,i)=2^i$，$m\geq 4$，$1\leq i\leq m-1$。 ■



a. 第 $m-1$ 行上有 2 格能放石頭　　b. 第 1 行第 2 列放石頭，左上-右下連線格子不會延伸至第 m 行

圖 48. i 的範圍僅到 $m-1$ 之圖示說明

以此類推，得到　$B_3(m,i)=3^i$，$m\geq 5$，$1\leq i\leq m-2$。

$B_4(m,i)=4^i$，$m\geq 6$，$1\leq i\leq m-3$。

$B_5(m,i)=5^i$，$m\geq 7$，$1\leq i\leq m-4$。

$\vdots$

3. 子圖形的放石頭方法數與上一階層的子圖形息息相關，形成遞迴關係

以下稱 $B_2(m,n)$ 為 2 階子圖形、$B_3(m,n)$ 為 3 階子圖形、$B_4(m,n)$ 為 4 階子圖形…。除了發現 2 階子圖形 $B_2(m,n)$ 本身具有規律之外，我們還發現，**子圖形內會**

有另一個階層的子圖形，例如 3 階子圖形 $B_3(m,n)$ 裡面，會有 2 階子圖形 $B_2(m,n)$ 和 3 階子圖形 $B_3(m,n)$；而 4 階子圖形 $B_4(m,n)$ 裡面，會有 2 階子圖形 $B_2(m,n)$、3 階子圖形 $B_3(m,n)$ 和 4 階子圖形 $B_4(m,n)$……，證明過程見命題 4。

命題 4：任一階子圖形的遞迴關係式不會包含更高階的子圖形。

證明. 利用反證法證明。

定義：設 k 階子圖形的遞迴式包含 k+i 階子圖形，其中 1≦i≦n－k，則表示在探討的過程會產生如圖 49 之圖形：

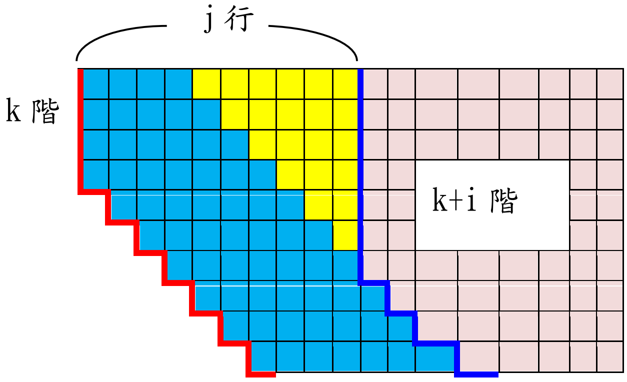


圖 49. 如果 k 階子圖形的遞迴關係式包含 k+i 階的子圖形，其中 1≦i≦n－k

以 4 階(k 階)子圖形內出現 7 階(k+i 階)子圖形來舉例，見圖 49，假設 7 階子圖形出現在第 10 行(j 行)，由於要產生完整的 7 階子圖形，故黃色部份不可放任何石頭，否則會分割該 7 階子圖形。

而當在某行放一顆石頭，就產生一條左上-右下向的格子連線，在這條連線上的其它位置不能再放石頭，此時前面 10 行剩下的藍色部份空間至多可容納左上-右下連線的數量為

$$(4-1+10)-(4+3-1)=10-3=7$$

也就是

$$k-1+j-(k+i-1)=j-i。$$

若前 10 行各放一顆石頭，則至少需產生 10 條左上-右下向的格子連線，然而目前的空間不足以容納，與假設矛盾！故不可能包含較多階的子圖形。 ■

根據命題 4 可推得，k 階子圖形的遞迴式恰由一些 k 階子圖形的前幾項，和 k-1 階、k-2 階、…、2 階子圖形，以及初始值組成，因而可得到：

命題 5. 可藉由 k-1 階子圖形的放石頭方法數去計算 k 階的放法數，還要加上目前這一階的初始值。

舉例來說，$B_4(m,n)$ 的遞迴式包含了 $B_4(m,n)$ 前幾項、$B_3(m,n)$ 和 $B_2(m,n)$；而 $B_3(m,n)$ 的遞迴式包含了 $B_3(m,n)$ 前幾項和 $B_2(m,n)$，回憶(23)、(31)、(34)：

$$\begin{cases} B_2(4,n) = B_2(4,n-1) + B_2(4,n-2) + B_2(4,n-3) + 1, \\ B_2(5,n) = B_2(5,n-1) + B_2(5,n-2) + B_2(5,n-3) + B_2(5,n-4) + 1, \\ B_2(m,n) = B_2(m,n-1) + B_2(m,n-2) + B_2(m,n-3) + \cdots + B_2(m,n-m+1) + 1, m \ge 4, n \ge m-1 \end{cases}$$

我們知道 $B_2(m,n)$ 的遞迴式，所以可以求出任意 n 的 $B_2(m,n)$ 值，再搭配 $B_3(m,n)$ 的初始值，便可算出任意 n 的 $B_3(m,n)$ 值，同理，再搭配 $B_4(m,n)$ 的初始值，就能算出任意 n 的 $B_4(m,n)$ 值。

(三)策略統整

我們提出了計數 m×n 方陣放石頭方法數的策略：

1. **將圖形先分成若干子圖形**：

$A_m(n)$ 的遞迴式包含 $A_m(n)$ 的前幾項，以及一些子圖形 $B_2(m,n)$、$B_3(m,n)$、$B_4(m,n)$、…等。

2. **找出子圖形的遞迴關係**：

由於子圖形 $B_2(m,n)$ 的放石頭方法數有如下 2 個規律：

$$B_2(m,n) = B_2(m,n-1) + B_2(m,n-2) + B_2(m,n-3) + \cdots + B_2(m,n-m+1) + 1，$$

$$m \ge 3，n \ge m-1$$

以及 $B_2(m,i) = 2^i$，$1 \le i \le m-1$。

且子圖形內又有其他階層之子圖形，構成遞迴關係，例如 4 階子圖形 $B_4(m,n)$ 的遞迴式包含了 4 階子圖形 $B_4(m,n)$ 前幾項、3 階子圖形 $B_3(m,n)$ 和 2 階子圖形

$B_2(m,n)$；而 $B_3(m,n)$ 的遞迴式包含了 $B_3(m,n)$ 前幾項和 $B_2(m,n)\cdots$。

因此，利用 2 階子圖形 $B_2(m,n)$ 的遞迴式便能找出 3 階子圖形 $B_3(m,n)$，再利用其遞迴關係算出更多階層的子圖形，如 $B_4(m,n)$、$B_5(m,n)\cdots\cdots$，由於 $A_m(n)$ 遞迴式包含 $A_m(i)$ 圖形（i 為介於 1~n 的某些值），及一些 $B_s(m,j)$ 子圖形（其中 $2\le s\le m-2$，j 為介於 1~n 的某些值），我們便能找到 $A_m(n)$ 的遞迴式，並算出任意 n 的 $A_m(n)$ 值。

肆、研究結論

一、一行多顆的情形下，最多能放的石頭數量：

在 m 列 n 行的方陣中，從左側第一行開始放石頭，限制「新放下去的石頭的左上角方向一路延伸都不可以有已經放好的石頭」，最多能放的石頭數量為

$$m+n-1 \text{ 顆}$$

二、一行一顆的情形下，放石頭的方法數

$A_m(\mathrm{n})$ 代表 m 列 n 行方陣中，符合「放石頭規定」的放法數量。

（一）m=1，$A_1(\mathrm{n})=1$

（二）m=2，$A_2(\mathrm{n})=n+1$

（三）m=3，$A_3(\mathrm{n})=A_3(\mathrm{n-1})+A_3(\mathrm{n-2})+n+1$

$$=2A_3(\mathrm{n-1})-A_3(\mathrm{n-3})+1$$

$$=F_{\mathrm{n+5}}-(n+4)$$，其中 F_{n} 為費氏數列

（四）m=4，$A_4(\mathrm{n})=2A_4(\mathrm{n-1})-A_4(\mathrm{n-4})+B_2(4,\mathrm{n})+B_2(4,\mathrm{n-2})$

其中 $B_2(4,\mathrm{n})$ 為左起第 1 行恰有 2 列，第 2 行恰有 3 列，第 3 行起之後的每一行均為 4 列，行數共 n 行的圖形，符合「放石頭規定」的放法之數量（見右圖 50）。

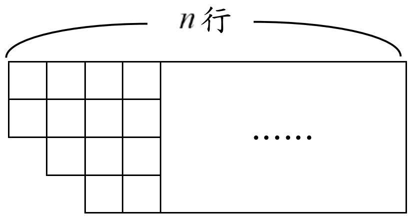


圖 50. 子圖形 $B_2(4,\mathrm{n})$

（五）二階子圖形的遞迴式：

$$B_2(m,n)=B_2(m,n-1)+B_2(m,n-2)+B_2(m,n-3)+\cdots+B_2(m,n-m+1)+1，$$

$m\geq 4$ ，$n\geq m-1$ 。

例： $B_2(4,\mathrm{n})=B_2(4,\mathrm{n}-1)+B_2(4,\mathrm{n}-2)+B_2(4,\mathrm{n}-3)+1$

$B_2(5,\mathrm{n})=B_2(5,\mathrm{n}-1)+B_2(5,\mathrm{n}-2)+B_2(5,\mathrm{n}-3)+B_2(5,\mathrm{n}-4)+1$

（六）m≧5，計數 m×n 方陣的放石頭方法數策略：

1. 將圖形分成若干子圖形 $B_s(m,j)$，其中 $2\leq s\leq m-2$， j 為介於 1~n 的某些值

2. 找出子圖形 $B_s(m,j)$ 的遞迴關係

便能透過 $B_s(m,j)$ 找到 $A_m(n)$ 的遞迴式，並算出任意 n 的 $A_m(n)$ 值。

伍、未來展望

針對放石頭遊戲的 m×n 方陣，當中的每一個 m，我們給出了計數放石頭方法總數的算法，但尚未能探討出一般化公式——也就是給任意 m 值，用一個公式去表達方法數。這一題是否如「約瑟夫問題」只能用演算法一步一步算、或真的有一般化公式，目前因為時間有限及所學有限，還沒有得到結論，希望在未來累積更多的知識後再加以研究。

陸、參考文獻

一、 游森棚(2017)放石頭。科學研習月刊 56 卷第 11 期。上網日期：2018/07/01。取自：https://www.ntsec.gov.tw/User/Article.aspx?a=3468

二、 點石城金放石頭。嘉義市第 36 屆中小學科學展覽會。國中組數學科。上網日期：2018/10/01。取自：http://www2.cy.edu.tw/SCIENCE36/國中組/數學科/國中組-數學科-點石城金放石頭/國中組-數學科-點石城金放石頭.pdf

三、 南一書局教科書編輯委員會(民 107)。等量公理。國民小學數學課本第十一冊。南一書局企業股份有限公司。臺北市。

四、 南一書局教科書編輯委員會(民 107)。怎樣解題（一）(二)。國民小學數學課本第十二冊。南一書局企業股份有限公司。臺北市。

【評語】080405

本文研究有趣的放石頭遊戲，從 4 列 8 行的方陣中以直觀的方式分析(1)可放石頭的最大數，(2)1xn、2xn 的放石頭方法數。雖然這個問題已經在之前的科展有相關的探討，但本文作者以(1)前後方陣的方法數整理出 3xn 的放石頭方法數，及(2)先窮舉再以子圖形的方式整理出 4xn 的放石頭方法數。最後用遞迴的關係試圖推導出一般情況的公式，這對小學生而言，是一份佳作，值得鼓勵。

作品海報

摘要

我們研究《科學研習月刊》中一個有趣的數學遊戲，規則如下：

「在4列8行的陣列中，從左側第1行開始每1行放1顆石頭，並限制『新放下去的石頭的左上角方向一路延伸都不可以有已經放好的石頭』（如圖1）。問：八個直行都必須有石頭，共有幾種放法？」

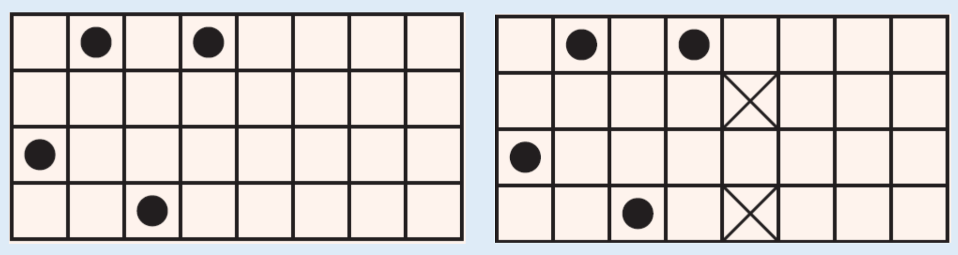


圖1. 前4行已放石頭的其中一種情形

我們發展簡潔的策略來計數放石頭方法數，不僅研究出1列n行～4列n行(以下簡稱$1\times n$、$2\times n$、$3\times n$、$4\times n$)的放石頭方法數，還推廣至m列n行，提出計數$m\times n$陣列放石頭方法數的策略(其中$m\geq 5$)。

研究問題

一、在m列n行陣列中($m\times n$)探討解的存在性，及每行放多顆石頭的最大數量。

二、解決$1\times n$、$2\times n$、$3\times n$、$4\times n$陣列的放石頭方法數，並找到遞迴關係式。

三、延伸探討$m\times n$陣列放石頭方法數的策略，$m\geq 5$。

名詞定義

一、$\boldsymbol{A_m(n)}$　：代表m列n行之陣列，符合放石頭規定之放法數量(如圖2)。

二、$\boldsymbol{B_s(m,n)}$：左起第1行恰有s列，第2行有(s＋1)列，第3行有(s＋2)列⋯，第($m-s+1$)行後的每一行均為m列，行數共n行，此圖形中符合放石頭規定之放法數量；以B2(4, n) 為例。

　　$\boldsymbol{B_2(4,n)}$：左起第1行有2列，第2行為3列，第3行後每一行均為4列，行數共n行(如圖3)。

三、$\boldsymbol{F_n}$　　：代表費氏數列，n為項數。

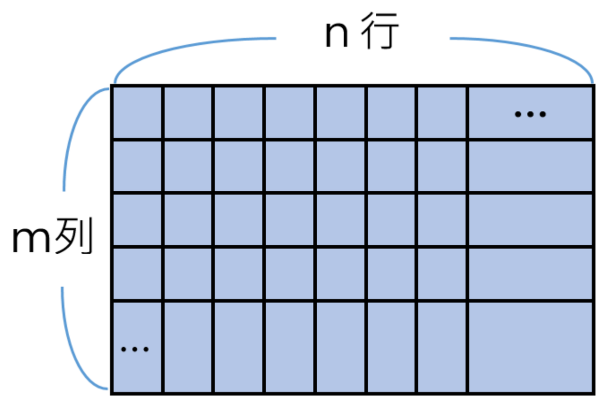


圖2. m列n行陣列圖形

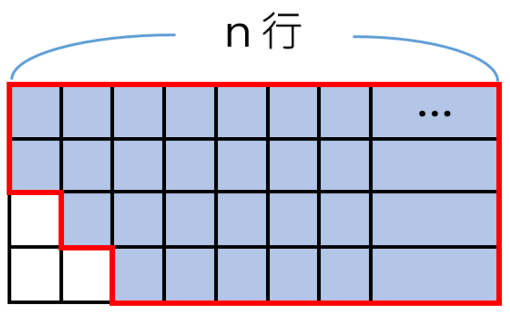


圖3. $B_2(4,n)$陣列圖形

研究過程與方法

一、解的存在性

每一行所放的石頭，只會影響下一行的下一列以下的石頭放置。例如：在第1行第3列放石頭，會被影響的是紫色格子，也就是第4列第2行不能放石頭(如圖4)；在第1行第2列放石頭，則第3列第2行及第4列第3行的綠色格子不能放石頭(如圖5)；在第1行第1列放石頭，則第2列第2行、第3列第3行及第4列第4行的粉紅色格子不能放石頭(如圖6)。也就是說：

放在第 1 列的石頭，永遠不會被影響，故任意陣列皆能依規定放石頭(如圖7)

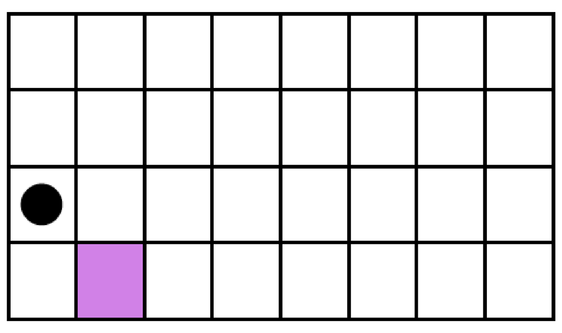


圖4. 第1行第3列放石頭的情形

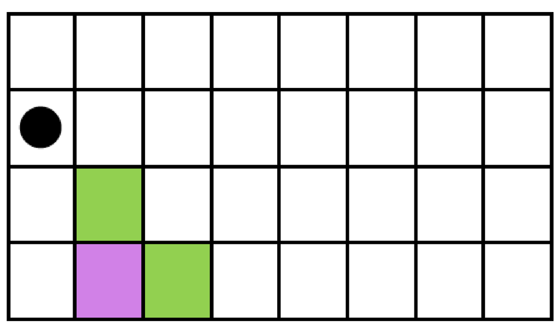


圖5. 第1行第2列放石頭的情形

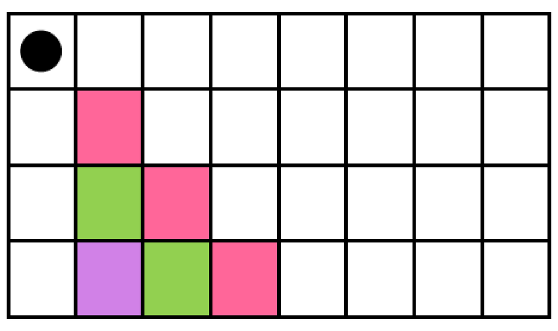


圖6. 第1行第1列放石頭的情形

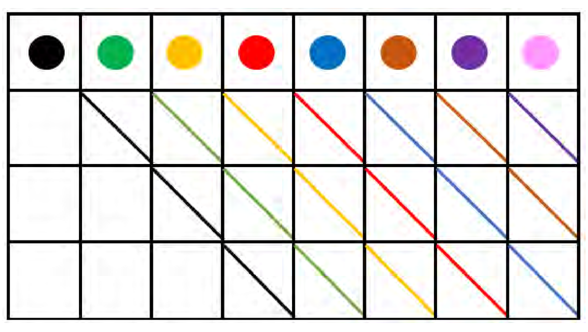
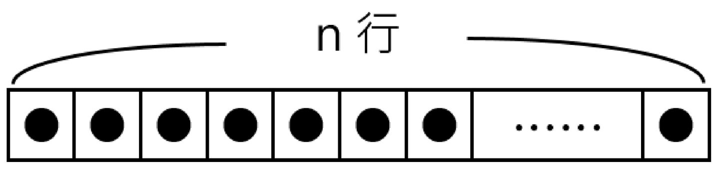


圖7. 第1列皆可放石頭，不受其他行影響

二、簡化問題，尋找1×n、 2×n、 3×n、 4×n 陣列放石頭方法數之規律

(一)$1\times n$ 陣列：

只有唯一的1種放法。

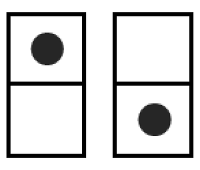


在$1\times n$陣列中，$A_1(n)=1$

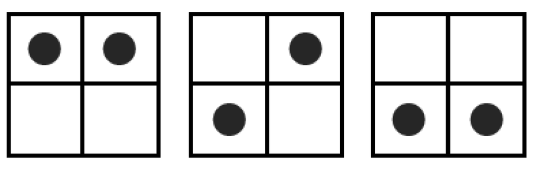
(二)$2\times n$ 陣列：

利用簡化問題的方法，依序由2×1陣列排列至2×8陣列，發現每增加1行，就增加1種放石頭的方法，得出$2\times n$陣列的一般式。

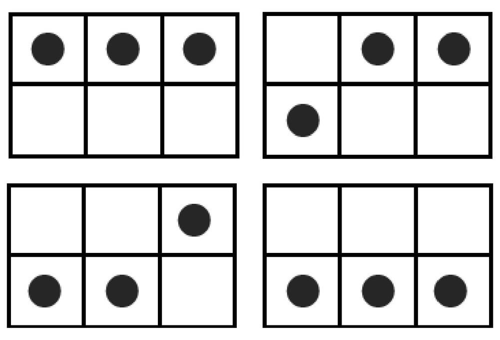
在$2\times n$陣列中，$A_2(n)=n+1$



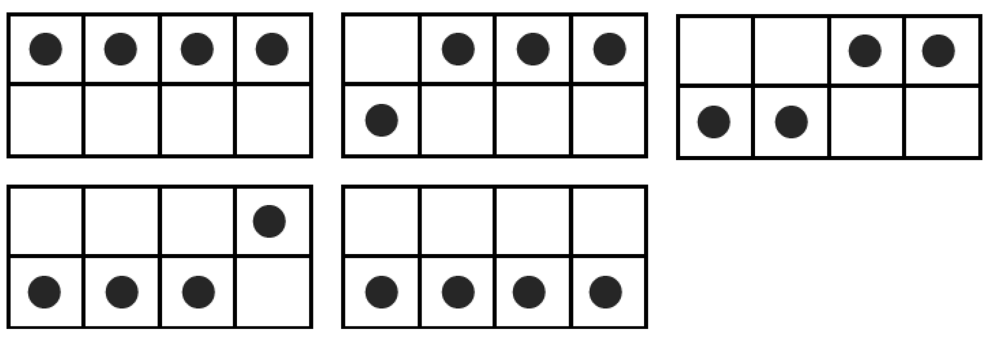
$A_2(1)=2$



$A_2(2)=3$



$A_2(3)=4$



$A_2(4)=5$

(三)$3\times n$ 陣列：

用窮舉法找出$A_3(1)\sim A_3(8)$之放石頭方法數，並從數據中找到規律，規律有二：

1. 從第4項起，其放石頭方法數為前項的2倍減前前前項再加1(右圖粉紅框處)， 如：

$A_3(4)=2A_3(3)-A_3(1)+1$，

$A_3(5)=2A_3(4)-A_3(2)+1$ ，…

得出一般式：

$$A_3(n)=2A_3(n-1)-A_3(n-3)+1$$

2. 從第3項起，其放石頭方法數為前二項之和加上行數加1(見右圖藍框處)， 如：

$A_3(3)=A_3(2)+A_3(1)+(3+1)$，

$A_3(4)=A_3(3)+A_3(2)+(4+1)$，…

得出一般式：

$$A_3(n)=A_3(n-1)+A_3(n-2)+(n+1)$$

$A_3(1)=3$		
$A_3(2)=7$		
$A_3(3)=14$	$=7\times2$	$=7+3+4$
$A_3(4)=26$	$=14\times2-3+1$	$=14+7+5$
$A_3(5)=46$	$=26\times2-7+1$	$=26+14+6$
$A_3(6)=79$	$=46\times2-14+1$	$=46+26+7$
$A_3(7)=133$	$=79\times2-26+1$	$=79+46+8$
$A_3(8)=221$	$=133\times2-46+1$	$=133+79+9$

$$\begin{aligned}A_3(n)&=2A_3(n-1)-A_3(n-3)+1\\&=A_3(n-1)+A_3(n-2)+(n+1)\end{aligned}$$

(四)$3\times n$ 陣列與費氏數列之關係：

檢視各項方法數之差(如圖8橘色底所示數列)，找不出其中的規律；而檢視其二階差(如藍色底所示)、三階差(如粉紅色底所示)、四階差(如綠色底所示)……，意外發現費氏數列藏身其中！

再利用列表的方式觀察$A_3(n)$數列與費式數列(見表1)，得出關係式：

$$A_3(n)=F_{n+5}-(n+4)$$

$A_3(1)$	$A_3(2)$	$A_3(3)$	$A_3(4)$	$A_3(5)$	$A_3(6)$	$A_3(7)$	$A_3(8)$
3	7	14	26	46	79	133	221

4　7　12　20　33　54　88

3　5　8　13　21　34

2　3　5　8　13

1　2　3　5

圖8. 二階差、三階差、四階差與費式數列相關

表1. $A_3(n)$數列與費式數列的關係

n	1	2	3	4	5	6	7
F_{n+5}	8	13	21	34	55	89	144
$A_3(n)$	3	7	14	26	46	79	133
$F_{n+5}-A_3(n)$	5	6	7	8	9	10	11

(五)$4\times n$ 陣列～發現$B_2(4,n)$子圖形

已知同一行的放石頭方法數彼此不會影響，可分開計數，故

$A_4(n)$＝石頭放在❶的方法數 ＋ 放在❷的方法數 ＋放在❸的方法數 ＋ 放在❹的方法數(如圖9)

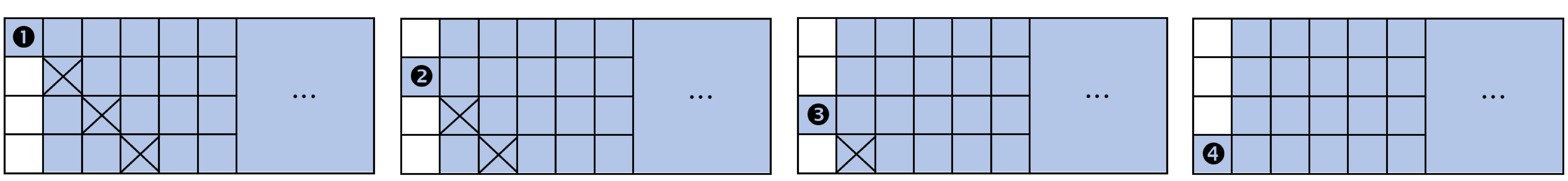


圖9. 同一行的放石頭方法數彼此不會影響，可分開計數

尋找$A_4(n)$規律的過程中，發現只要是放在第2列或第4列的位置(如圖10中的②④⑥)，其後皆會出現同樣的子圖形(如圖10紅框處)，將此子圖形放法數量記為$B_2(4,n)$ ，其關係式如下：

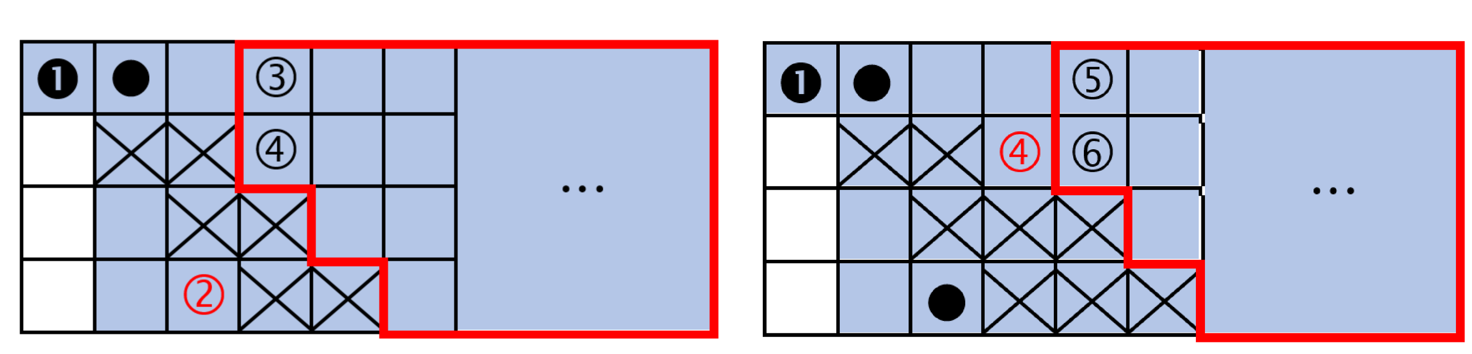


圖10. . 在$A_4(n)$中發現$B_2(4,n)$子圖形

$$B_2(4,n)=B_2(4,n-1)+B_2(4,n-2)+B_2(4,n-3)+1$$

再運用$B_2(4,n)$之關係式，得出 $A_4(n)=2A_4(n-1)-A_4(n-4)+B_2(4,n)+B_2(4,n-2)$

(六)$5\times n$ 陣列～發現$B_2(5,n)$、$B_3(5,n)$子圖形

運用本研究發展之分析圖形方式尋找$A_5(n)$之關係式，得出子圖形$B_2(5,n)$、$B_3(5,n)$ (見圖11)，及其關係式；並發現$A_3(n)$、$A_4(n)$、$A_5(n)$之遞迴式有如下的規律：

$A_3(n)$的遞迴式中會有$A_3(n)$的部分前幾項。

$A_4(n)$的遞迴式中會有$A_4(n)$的部分前幾項及$B_2(4,n)$子圖形。

$A_5(n)$的遞迴式中會有$A_5(n)$的部分前幾項及$B_2(5,n)$、$B_3(5,n)$子圖形。

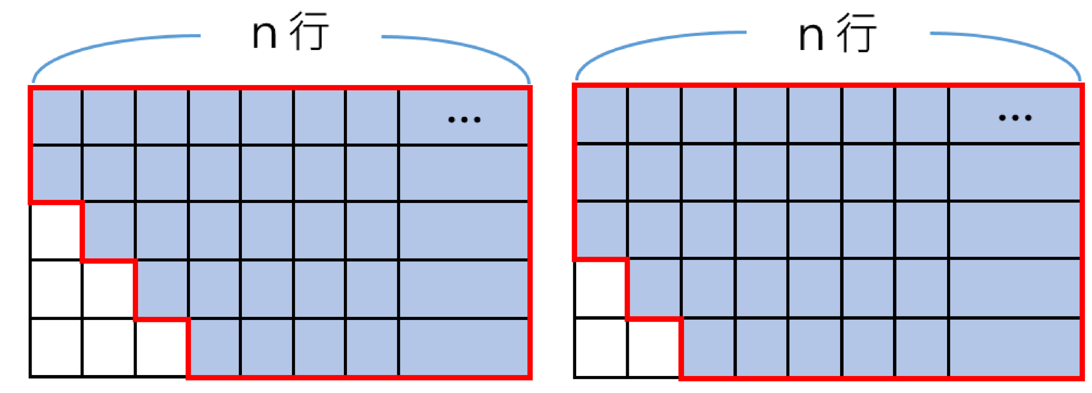


圖11. 在$A_5(n)$中發現 $B_2(5,n)$及$B_3(5,n)$子圖形

(七)計數 $m\times n$ 陣列的放石頭方法數策略，$m\geq 5$

1. 分成若干子圖形

(1)$A_m(n)$遞迴式包含$A_m(n)$前幾項，及子圖形$B_2(m,n)$、$B_3(m,n)$ 、$B_3(m,n)\cdots$。

(2)$B_s(m,j)$，$2\leq s\leq m-2$在每一項皆會出現。

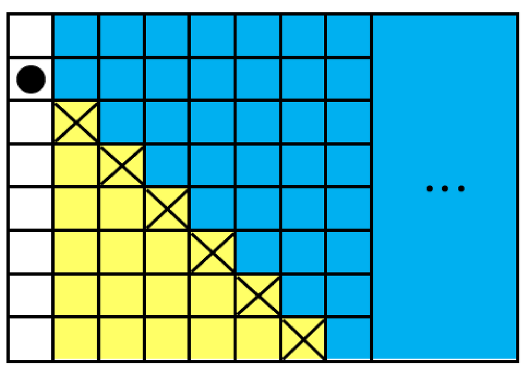


圖12. 在第2列放石頭出現$B_2(m,n-1)$

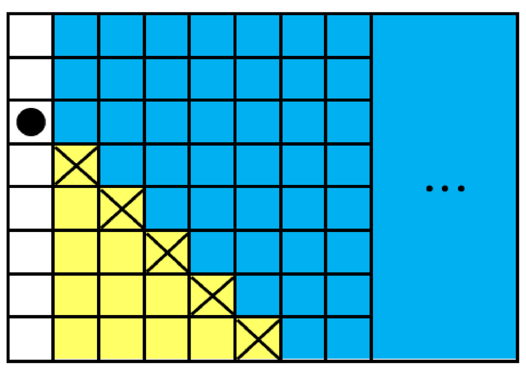


圖13. 在第3列放石頭出現$B_3(m,n-1)$

…

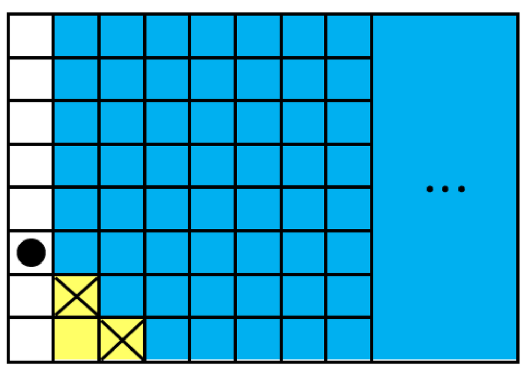


圖14. 在第$m-2$列放石頭出現$B_{m-2}(m,n-1)$

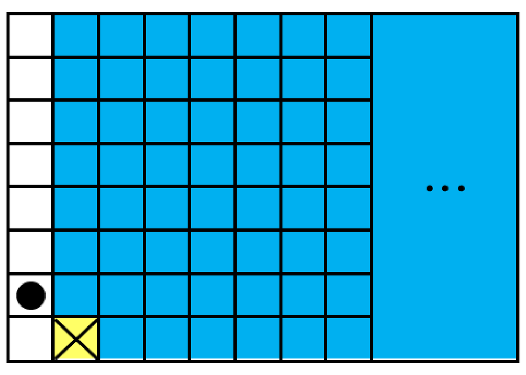


圖15. 在第$m-1$列放石頭出現$A_m(n-1)-Am(n-2)$

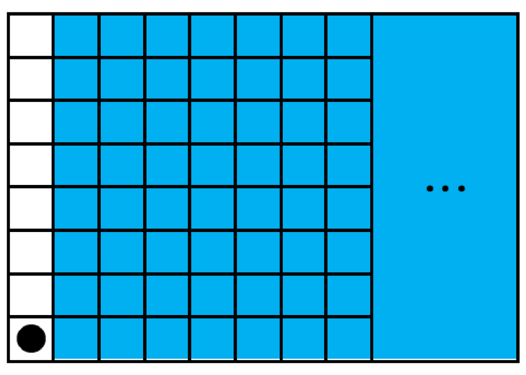


圖16. 在第m列放石頭出現$A_m(n-1)$

2. 找出子圖形的遞迴關係

(1)子圖形$B_2(m,n)$的放石頭方法數具有一定的規律

由$B_2(4,n)$及$B_2(5,n)$的遞迴式，類推$B_2(m,n)$遞迴式如下：

$$B_2(m,n)=B_2(m,n-1)+B_2(m,n-2)+B_2(m,n-3)$$
$$+\cdots+B_2(m,n-m+1)+1,\ m\geq 4,\ n\geq m-1。$$

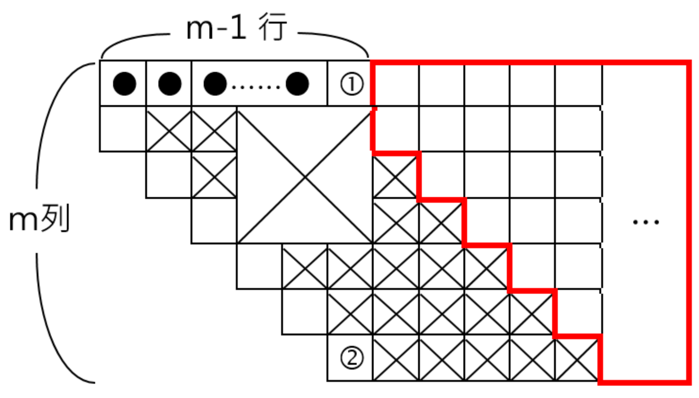


圖17. $B_2(m,n)$第$(m-1)$行放石頭方法數為$1+B_2(m,n-m+1)$

(2)同一階層$B_2(m,n)$子圖形的前幾項皆為2的幾次方

子圖形 $B_2(m,i)$在前幾項都有一定的規律，且恰好都是2的倍數(見圖18)。

$i=1$時，$B_2(m,1)=2^1$；

$i=2$時，$B_2(m,2)=2^1\times 2=2^2$；

$i=3$時，$B_2(m,3)=2^2\times 2=2^3$；

而類推

$$B_2(m,i)=2^i，m\geq 4，1\leq i\leq m-1。$$
$$B_3(m,i)=3^i，m\geq 5，1\leq i\leq m-2。$$
$$B_4(m,i)=4^i，m\geq 6，1\leq i\leq m-3。$$

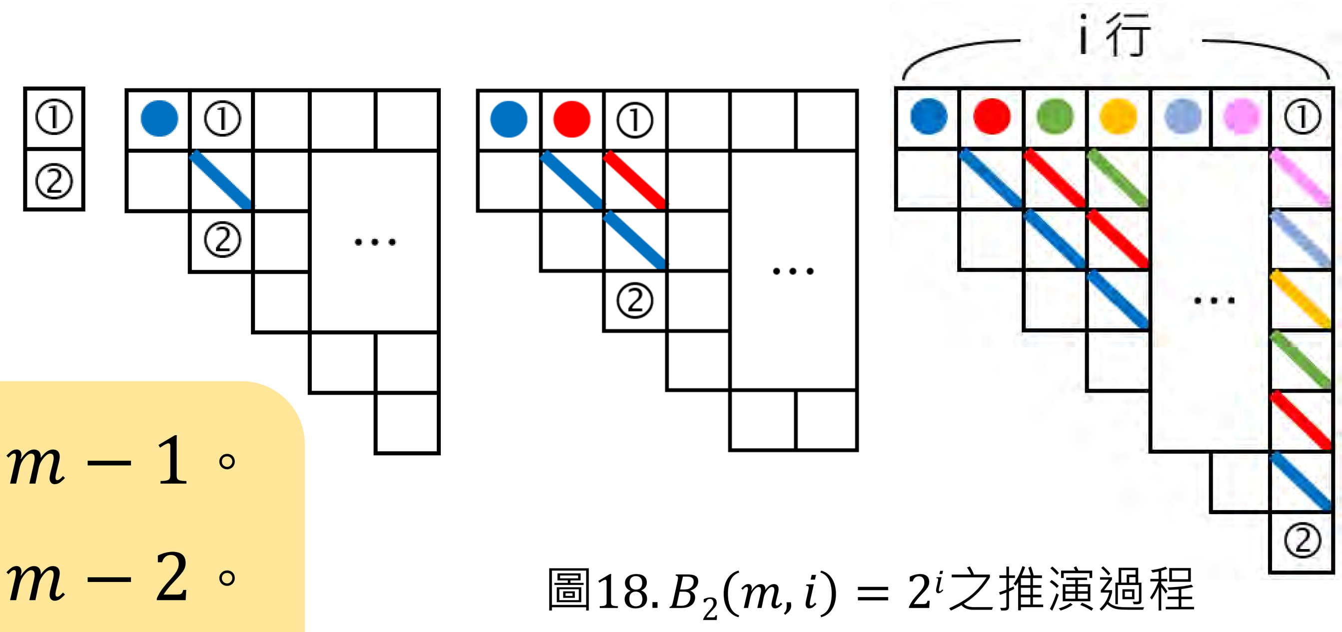


圖18. $B_2(m,i)=2^i$之推演過程

(3)子圖形的放石頭方法數與上一階層子圖形構成遞迴關係

子圖形內會有較低階層的子圖形(見圖19)，例如4階子圖形$B_4(m,n)$裡面，會有2階子圖形 $B_2(m,n)$、3階子圖形$B_3(m,n)$和4階子圖形 $B_4(m,n)$。

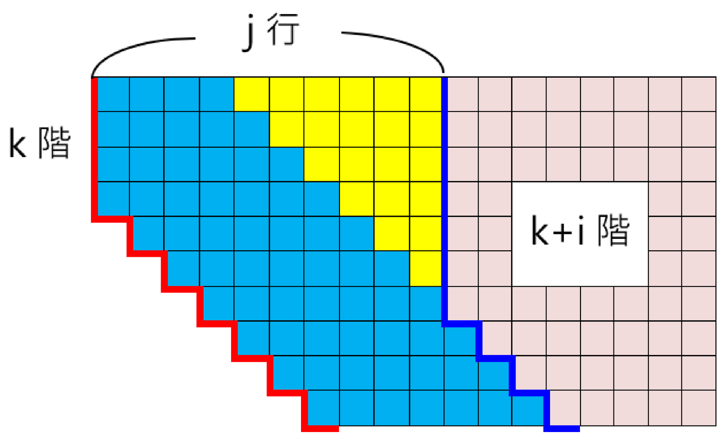


圖19. k階子圖形不會包含$k+i$階子圖形

結論

一、解的存在性——放在第1列不會被其他列的石頭影響，故任意陣列都能依規定放石頭。

二、一行一顆的情形下，放石頭的方法數：

$A_m(n)$代表m列n行陣列中，符合「放石頭規定」的放法數量。

(一)$m=1$，$A_1(n)=1$

(二)$m=2$，$A_2(n)=n+1$

(三)$m=3$，$A_3(n)=2A_3(n-1)-A_3(n-3)+1=A_3(n-1)-A_3(n-2)+n+1$

$=F_{n+5}-(n+4)$，其中F_n為費氏數列

(四)$m=4$，$A_4(n)=2A_4(n-1)-A_4(n-4)+B_2(4,n)+B_2(4,n-2)$

(五)二階子圖形的遞迴式：

$B_2(m,n)=B_2(m,n-1)+B_2(m,n-2)+B_2(m,n-3)+\cdots+B_2(m,n-m+1)+1$，

$m\geq 4$，$n\geq m-1$。

(六)$m\geq 5$，計數$m\times n$陣列的放石頭方法數策略：

1. 將圖形先分成若干子圖形$B_s(m,j)$，$2\leq s\leq m-2$ ，j為介於1~n的某些值。
2. 找出子圖形$B_s(m,j)$的遞迴關係。
3. 透過$B_s(m,j)$找到$A_m(n)$的遞迴式，並算出任意n的$A_m(n)$值。

參考文獻

一、游森棚（2017）。放石頭。**科學研習月刊**，56（11），64。

二、林宏澤、邱暐宸、張庭愷（2018）。 點石城金放石頭。嘉義市第36屆中小學科學展覽會國中組數學科。

三、南一書局教科書編輯委員會（2018）。等量公理。國民小學數學課本第十一冊。南一書局企業股份有限公司。臺北市。