

# 中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國小組 數學科

(鄉土)教材獎

080404

輪盤遊戲-夜市老闆背後的秘密

學校名稱：苗栗縣頭份市建國國民小學

作者： 小五 吳冠諺	指導老師： 彭博生
---------------	--------------

關鍵詞：數字規律、等差數列、機率

## 摘要

本研究主要是探討輪盤遊戲之破解，遊戲規則是從攤販設計好的遊戲輪盤中，玩家先選擇順時針 or 逆時針旋轉，再從一副撲克牌任意抽兩張撲克牌相加，得到的數字為  $N$ ，再從轉盤上  $N$  處按照選擇好的方向轉動  $(N-1)$  步，最後停留的數字所對應的獎品歸玩家所有。研究結果發現：一、不論順時針或逆時針轉，最終轉到的數字只有 1 和奇數二種結果和找出此種結果的原因。二、找出輪盤的終點數公式。三、減少輪盤數字數時，同樣找出終點數公式和終點數公式的一般式。四、設計出新規則，用機率來讓遊戲更有趣。本研究與小六數學「怎樣解題」相關。

## 壹、研究動機

我在逛夜市時看到一個玩輪盤遊戲免錢的攤位，遊戲規則是～(一)玩遊戲不用錢。(二) 玩家先選擇順時針 or 逆時針旋轉。(三) 從一副撲克牌任意抽兩張撲克牌相加，(A:1, J:11, Q:12, K:13) 得到的數字為  $N$ ，再從轉盤上  $N$  處按照選擇好的方向轉動  $(N-1)$  步，最後停留的數字所對應的獎品歸玩家所有，而若最終的數字是 1，則玩家要給攤販 10 元。我在旁觀看了一會兒，發現大部分躍躍欲試的玩家，最後贏得的禮品幾乎都是小獎，且其中有不少人最後的結果，是要付給攤販 10 元。這引起了我極大的好奇心，且有一些疑問：首先是此遊戲的規律為何？輪盤數字是否有公式？是否可改規則讓老闆可以賺錢，顧客也有機會中大獎？因此，想要藉由這次的科展來進行深入的探討，破解這遊戲的祕密。經查詢過去科展是否有人做過這個遊戲的研究，發現並沒有人做過相關研究，所以決定自己做一系列有關此輪盤遊戲的研究。



## 貳、研究目的及研究問題

### 研究一、輪盤規律研究

- 1-1：順時針和逆時針走法，是否會影響終點數的不同？
- 1-2：順時針走法時，二張撲克牌數字和不同時，如何影響終點數？
- 1-3：逆時針走法時，二張撲克牌數字和不同時，如何影響終點數？
- 1-4：在順時針、逆時針的走法下，終點數何時為1呢？
- 1-5：數字和為奇數且順時針走法跟數字和為偶數且逆時針走法下為何終點數都是1呢？
- 1-6：數字和為14時，為何終點數都是1呢？
- 1-7：在順時針、逆時針的走法下，終點數為何都是奇數呢？

### 研究二、尋找終點數公式

- 2-1：數字和為偶數，順時針轉動時，是否有終點數公式可尋找？
- 2-2：數字和為奇數，逆時針轉動時，是否有終點數公式可尋找？

### 研究三、在遊戲規則下，減少牌數字，然後尋找各種牌數終點數公式的一般式

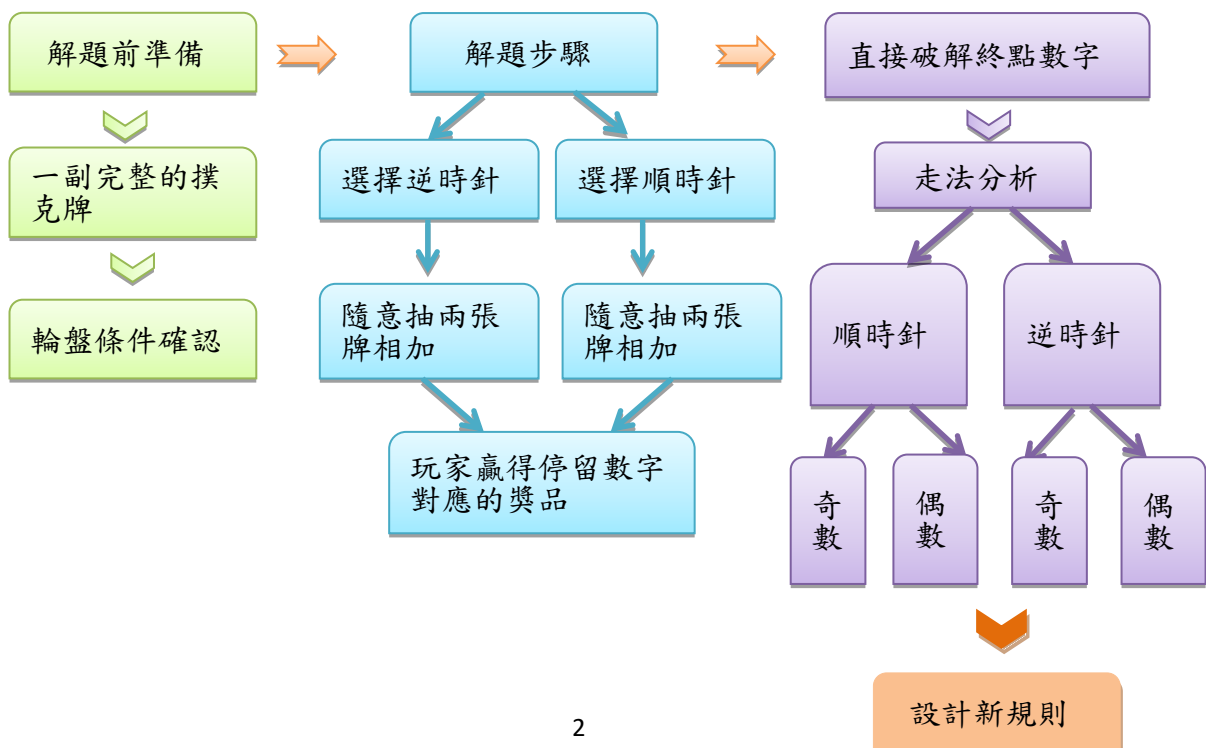
- 3-1：改變牌數，是否有終點數公式可尋找？
- 3-2：改變牌數，是否有終點數公式的一般式可尋找？

### 研究四、設計新規則

## 參、研究設備與器材

紙、筆、一副撲克牌。

## 肆、研究架構



## 伍、研究過程與結果

### 研究一、輪盤規律研究


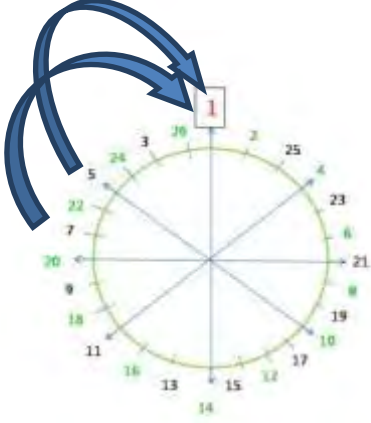
#### 【遊戲規則說明】：

規則一：玩遊戲不用錢。

規則二：先選擇順時針或逆時針走法。

規則三：抽二張撲克牌相加得到一個數字，再按順時針或逆時針走此數字減1步，最後停留數字所對應的獎品歸玩家所有。

例如：

	<p>順時針走法</p> <p>(1)抽二張撲克牌相加數字為2，再按順時針走(2-1)步，所得到的數字為25。</p> <p>(2)抽二張撲克牌相加數字為4，再按順時針走(4-1)步，所得到的數字為21。</p>
	<p>逆時針走法</p> <p>(1)抽二張撲克牌相加數字為5，再按逆時針走(5-1)步，所得到的數字為1。</p> <p>(2)抽二張撲克牌相加數字為7，再按逆時針走(7-1)步，所得到的數字為1。</p>

1-1：順時針和逆時針走法，是否會影響終點數的不同？

#### 【定義符號】：

- (一)  $N$ ：一副撲克牌任意抽兩張撲克牌相加，得到的數字為  $N$ 。
- (二)  $N-1$ ：順時針或逆時針走  $N-1$  步。
- (三)  $L$ ：終點數(順時針或逆時針走  $N-1$  步所到達的數字)。

#### 【步驟】：

1. 依順時針和逆時針的走法，把所有的  $N$  和  $L$  值列出。
2. 再比較順、逆走法  $N$  和  $L$  值是否有不同。
3.  $N$  值為二張兩張撲克牌相加，得到的數字，撲克牌最小的二張相加為2，最大的二張相加為26，所以  $N$  值範圍為2至26； $L$  值是順時針或逆時針走  $N-1$  步所到達的數字。

**【經整理後，得下簡表】：**

表 1：順時針走法：N 和 L 值表

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
L	25	1	21	1	17	1	13	1	9	1	5	1	1
N	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
N-1	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
L	1	23	1	19	1	15	1	11	1	7	1	3	

表 2：逆時針走法：N 和 L 值表

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
N-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
L	1	5	1	9	1	13	1	17	1	21	1	25	1
N	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
N-1	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
L	3	1	7	1	11	1	15	1	19	1	23	1	

表 3：順、逆時針走法：N 和 L 值比較表

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
順(L 值)	25	1	21	1	17	1	13	1	9	1	5	1	1
逆(L 值)	1	5	1	9	1	13	1	17	1	21	1	25	1
N	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
順(L 值)	1	23	1	19	1	15	1	11	1	7	1	3	
逆(L 值)	3	1	7	1	11	1	15	1	19	1	23	1	

**【研究發現】：**

1. 順時針和逆時針的走法不相同，終點數會不相同。
2. 發現二張撲克牌數字和(N 值)不同時，終點數也會不相同。
2. 當 N 為 14 時，終點數皆為 1。

1-2: 順時針走法時，二張撲克牌數字和不同時，如何影響終點數？

**【研究構想】：**

由研究 1-1 發現，順時針和逆時針的走法不相同，終點數會不相同；二張撲克牌數字和(N 值)不同時，終點數(L 值)也會不相同，因此進行「順時針走法時，二張撲克牌的數字和如何影響終點數」的研究。

**【步驟】：**

1. 由表 1 簡化成表 4 觀察

表 4：

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
L	25	1	21	1	17	1	13	1	9	1	5	1	1
N	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
L	1	23	1	19	1	15	1	11	1	7	1	3	

**【研究發現】：**

1. N 為奇數時，L 值都為 1。
2. N 為偶數時，L 值都為奇數。
3. 終點數(L 值)都為奇數。

1-3: 逆時針走法時，二張撲克牌數字和不同時，如何影響終點數？

**【研究構想】：**

由研究 1-1 發現，順時針和逆時針的走法不相同，終點數會不相同；二張撲克牌數字和(N 值)不同時，終點數(L 值)也會不相同，因此進行「逆時針走法時，二張撲克牌的數字和如何影響終點數」的研究。

**【步驟】：**

1. 由表 2 簡化成表 5 觀察

表 5：

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
L	1	5	1	9	1	13	1	17	1	21	1	25	1
N	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
L	3	1	7	1	11	1	15	1	19	1	23	1	

**【研究發現】：**

1. N 為偶數時，L 值都為 1
2. N 為奇數時，L 值都為奇數。
3. 終點數(L 值)都為奇數

1-4：在順時針、逆時針的走法下，終點數何時為 1 呢？

**【步驟】：**

1. 由研究 1-2 和 1-3 得知在順時針、逆時針的走法下，終點數都會出現有 1 的情形，因此整理成表 6 說明。

表 6：順時針、逆時針的走法下，終點數都是 1 的比較表

順時針 N(奇)	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	
L	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
逆時針 N(偶)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
L	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

**【整理】：**

{ 順時針：N 為奇數  $\rightarrow$  終點數：1  
 { 逆時針：N 為偶數  $\rightarrow$  終點數：1

1-5：數字和為奇數且順時針走法跟數字和為偶數且逆時針走法下為何終點數都是 1 呢？

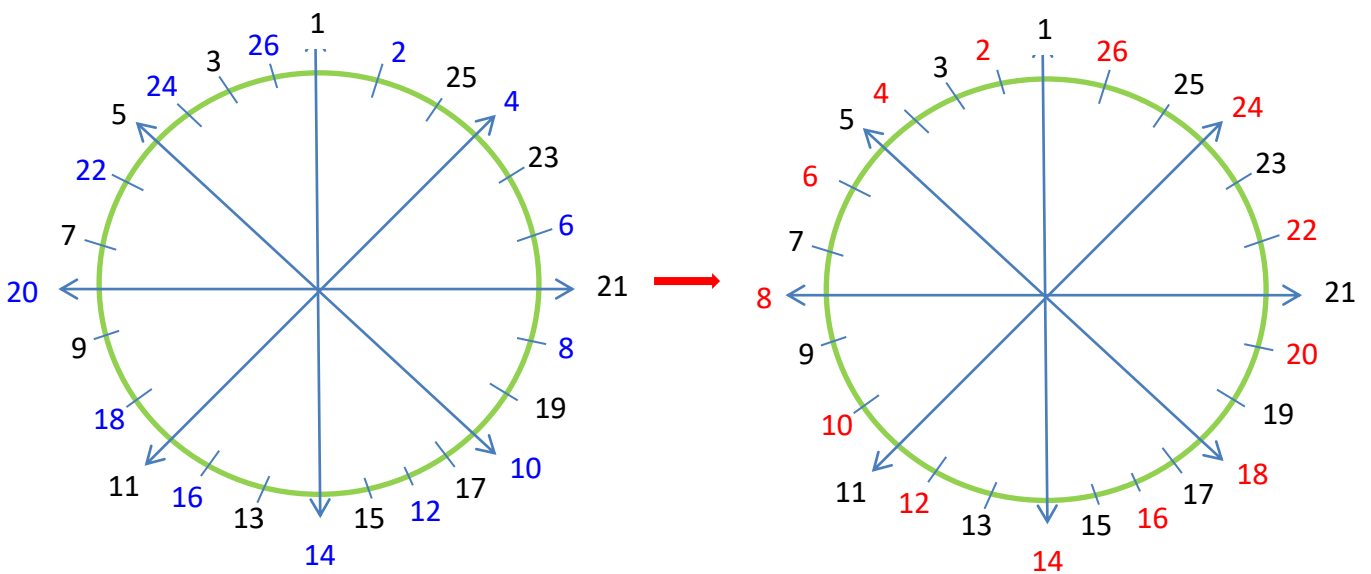
**【研究構想】：**

由研究 1-4 發現，在數字和為奇數且順時針走法跟數字和為偶數且逆時針走法下終點數都是 1，因此進行「數字和為奇數且順時針走法跟數字和為偶數且逆時針走法下為何終點數都是 1」的研究。

**【步驟】：**

(1) 數字和為奇數且順時針走法：

因為數字都是奇數、偶數交錯排列，所以把原本的偶數替換成連續的偶數去觀察。

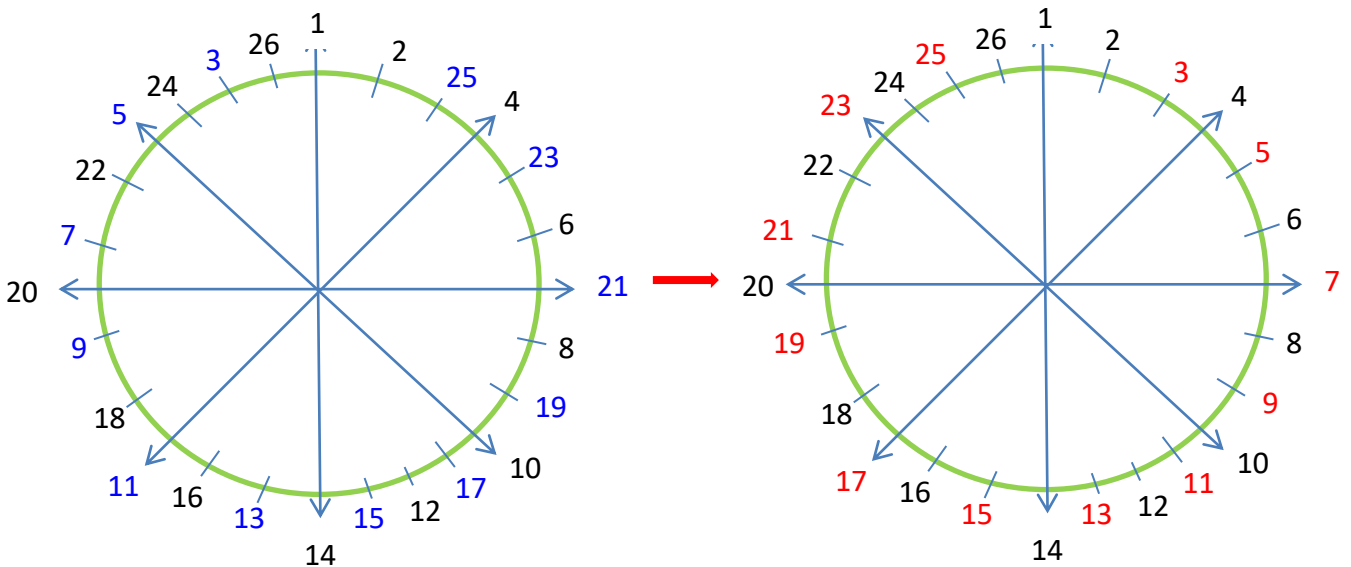


**【研究發現】：**

數字和為奇數且順時針走法時，跟1的間隔都是N-1，所以順時針走N-1步都會走到1。

(2)數字和為偶數且逆時針走法：

因為數字都是奇數、偶數交錯排列，所以把原本的奇數替換成連續的奇數去觀察。



**【研究發現】：**

數字和為偶數且逆時針走法時，跟1的間隔都是N-1，所以逆時針走N-1步都會走到1。

1-6：數字和為14時，為何終點數都是1呢？

**【研究構想】：**

由研究1-1發現，當N為14時，終點數皆為1，因此進行「數字和為14時，為何終點數都是1」的研究。

**【研究發現】：**

由研究1-5得知，數字和為14時，不管順時針或逆時針走法，跟數字1的距離都是13個間隔，所以走N-1步都會走到1。

1-7：在順時針、逆時針的走法下，終點數為何都是奇數呢？

**【研究構想】：**

由研究1-2、1-3發現，不論順時針或逆時針，終點數都是奇數，因此進行「在順時針、逆時針的走法下，終點數為何都是奇數」的研究。

**【步驟】：**

1. 由研究1-4得知

- 順時針：N 為奇數 → 終點數：1
- 逆時針：N 為偶數 → 終點數：1

2. 分析

- 順時針：N 為偶數 → 終點數為何是奇數？
- 逆時針：N 為奇數 → 終點數為何是奇數？



由表 1 和表 2 整理成表 7 觀察

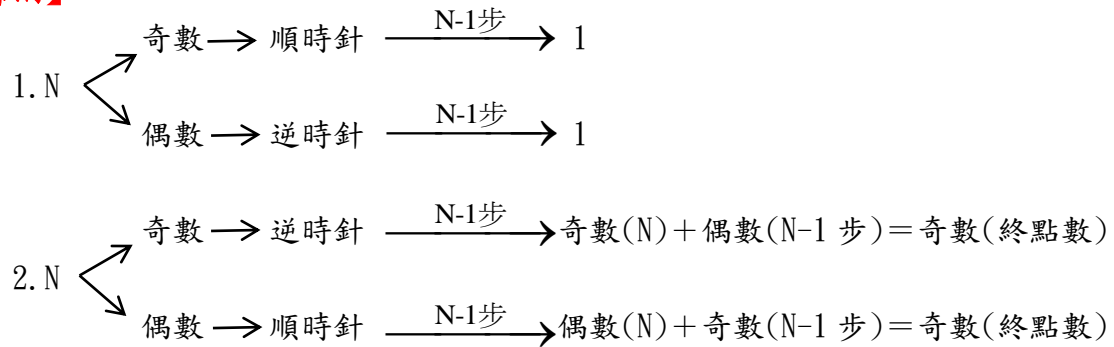
表 7

順時針 N(偶)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
N-1(奇)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
L(奇)	25	21	17	13	9	5	1	23	19	15	11	7	3
逆時針 N(奇)	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	
N-1(偶)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	
L(偶)	5	9	13	17	21	25	3	7	11	15	19	23	

**【研究發現】：**

1. 順時針走法時，當 N 為偶數，N-1 就是奇數，因為輪盤的數字排列是奇數和偶數交錯排列，所以  $N+(N-1)$  就是奇數。
2. 逆時針走法時，當 N 為奇數，N-1 就是偶數，所以  $N+(N-1)$  就是奇數。

**【歸納】：**



3. 所以無論如何選擇，最終轉到的數字只有 1 和奇數二種結果。

## 研究二、尋找終點數公式

之前已歸納出以下兩點：

- 當  $N$  是偶數，選逆時針轉動時，終點數  $L$  為 1。
- 當  $N$  是奇數，選順時針轉動時，終點數  $L$  為 1。

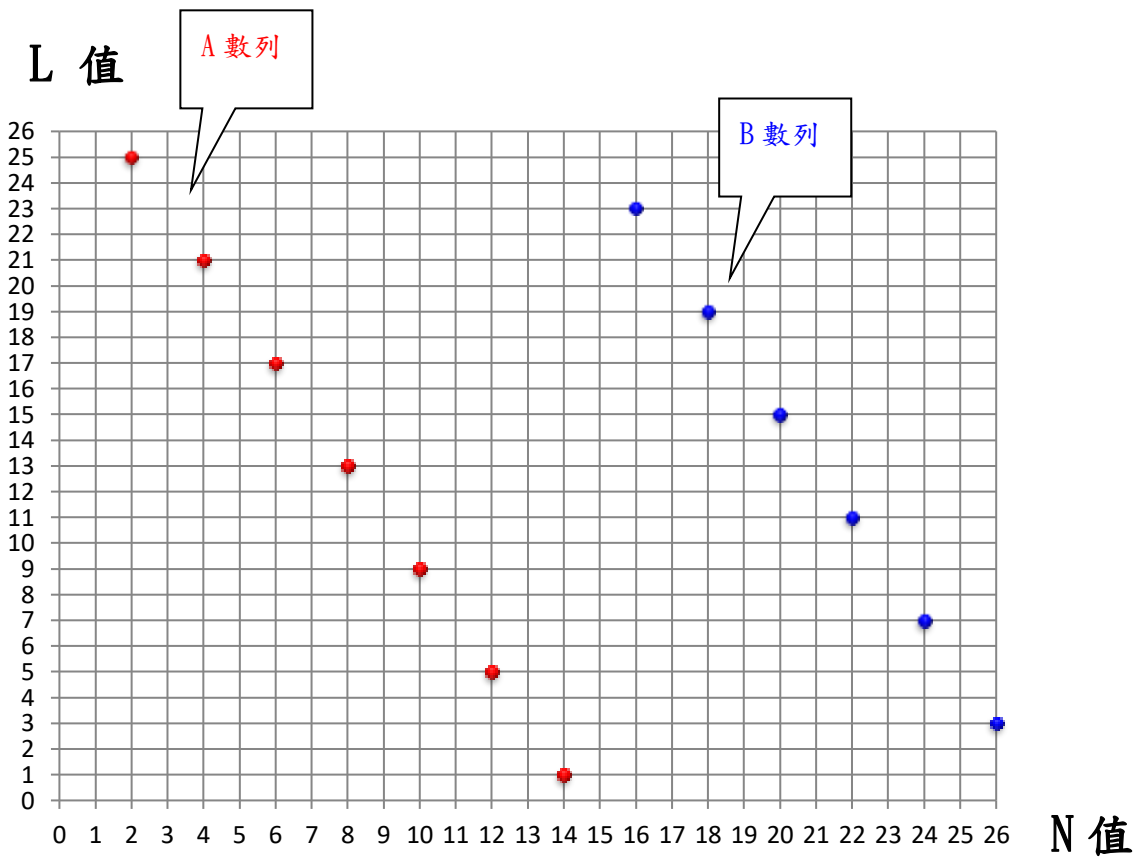
故現針對另外兩種情形（當  $N$  是偶數，選順時針轉動；當  $N$  是奇數，選逆時針轉動）找出規律，尋找終點數公式。

2-1：數字和為偶數，順時針轉動時，是否有終點數公式可尋找？

### 【步驟】：

把表 7 當  $N$  為偶數且順時針走法整理成圖 1 觀察：

圖 1



### 【研究發現】：

$N$  為偶數，順時針轉動

(1) A 數列： $N$  從 2 到 14 的偶數時(公差為+2)， $L$  從 25 到 1(公差為-4)。

(2) B 數列： $N$  從 16 到 26 的偶數時(公差為+2)， $L$  從 23 到 3(公差為-4)。

**想法**：用相加法(和不變)找出規律

因為 A、B 二數列的  $N$  值都是公差為+2 的等差數列， $L$  值都是公差為-4 的等差數列，所以用  $N$  的倍數 $\pm L$ ，就可以正負互相抵消，然後找到一個固定常數，進而找出終點數公式。

驗證過程：

表 8

A 數列								B 數列					
N	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
L	25	21	17	13	9	5	1	23	19	15	11	7	3
2N+L	29	29	29	29	29	29	29	55	55	55	55	55	55
	發現和相等							發現和相等					

所以 A 數列： $2 \times N + L = 29$ ， $L = 29 - 2 \times N$ ；

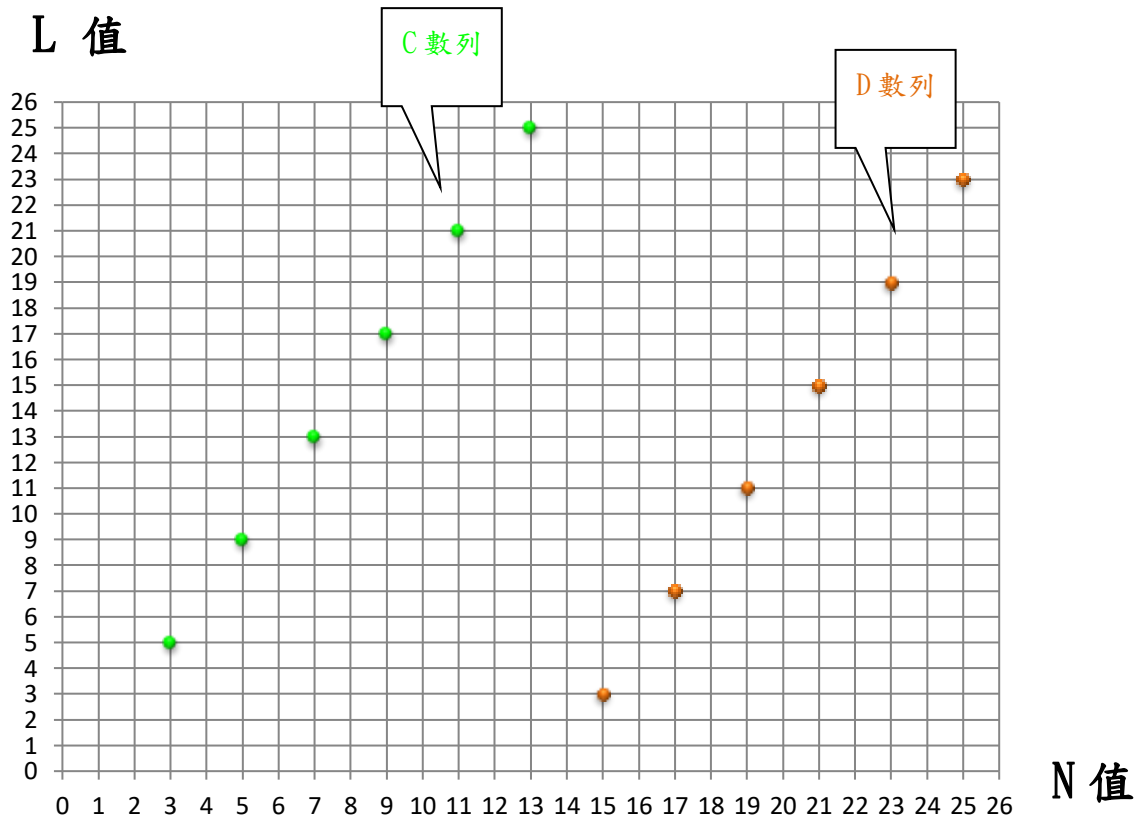
B 數列： $2 \times N + L = 55$ ， $L = 55 - 2 \times N$

2-2：數字和為奇數，逆時針轉動時，是否有終點數公式可尋找？

【步驟】：

把表 7 當 N 為奇數且逆時針走法整理成圖 2 觀察：

圖 2



【研究發現】：

N 為奇數，逆時針轉動

(1) C 數列：N 從 3 到 13 的奇數時(公差為+2)，L 從 5 到 25(公差為+4)。

(2) D 數列：N 從 15 到 25 的奇數時(公差為+2)，L 從 3 到 23(公差為+4)。

想法：用相加法無法找出規律

因為 C、D 二數列的 N 值都是公差為+2 的等差數列，L 值都是公差為+4 的等差數列，所以用 N 的倍數+L 的數值會愈差愈大，無法找到一個固定常數。

驗證過程：

表 9

C 數列							D 數列					
N	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
L	5	9	13	17	21	25	3	7	11	15	19	23
N+L	8	14	20	26	32	38	18	24	30	36	42	48
2N+L	11	19	27	35	43	51	33	41	49	57	65	73
●用相加法無法找到一個固定常數												

想法：用相減法(差不變)找出規律

因為 C、D 二數列的 N 值都是公差為+2 的等差數列，L 值都是公差為+4 的等差數列，所以用 N 的倍數-L，就可以把差距縮小，然後找到一個固定常數，進而找出終點數公式。

驗證過程：

表 10

C 數列							D 數列					
N	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
L	5	9	13	17	21	25	3	7	11	15	19	23
2N-L	1	1	1	1	1	1	27	27	27	27	27	27
發現差相等							發現差相等					

所以 C 數列： $2 \times N - L = 1$ ， $L = 2 \times N - 1$ ；

D 數列： $2 \times N - L = 27$ ， $L = 27 - 2 \times N$

統整

終點數公式：

(1) 順時針轉動

當  $2 \leq N \leq 14$ ，且 N 為偶數時，終點數為  $29 - 2 \times N$

當  $15 \leq N \leq 26$ ，且 N 為偶數時，終點數為  $55 - 2 \times N$

(2) 逆時針轉動

當  $2 \leq N \leq 13$ ，且 N 為奇數時，終點數為  $2 \times N - 1$

當  $14 \leq N \leq 26$ ，且 N 為奇數時，終點數為  $2 \times N - 27$

**【研究一、研究二統整】：**

終點數公式：

(1) 順時針轉動

奇數會轉到 1

當  $2 \leq N \leq 14$ ，且  $N$  為偶數時，終點數為  $29 - 2 \times N$

當  $15 \leq N \leq 26$ ，且  $N$  為偶數時，終點數為  $55 - 2 \times N$

(2) 逆時針轉動

偶數會轉到 1

當  $2 \leq N \leq 13$ ，且  $N$  為奇數時，終點數為  $2 \times N - 1$

當  $14 \leq N \leq 26$ ，且  $N$  為奇數時，終點數為  $2 \times N - 27$

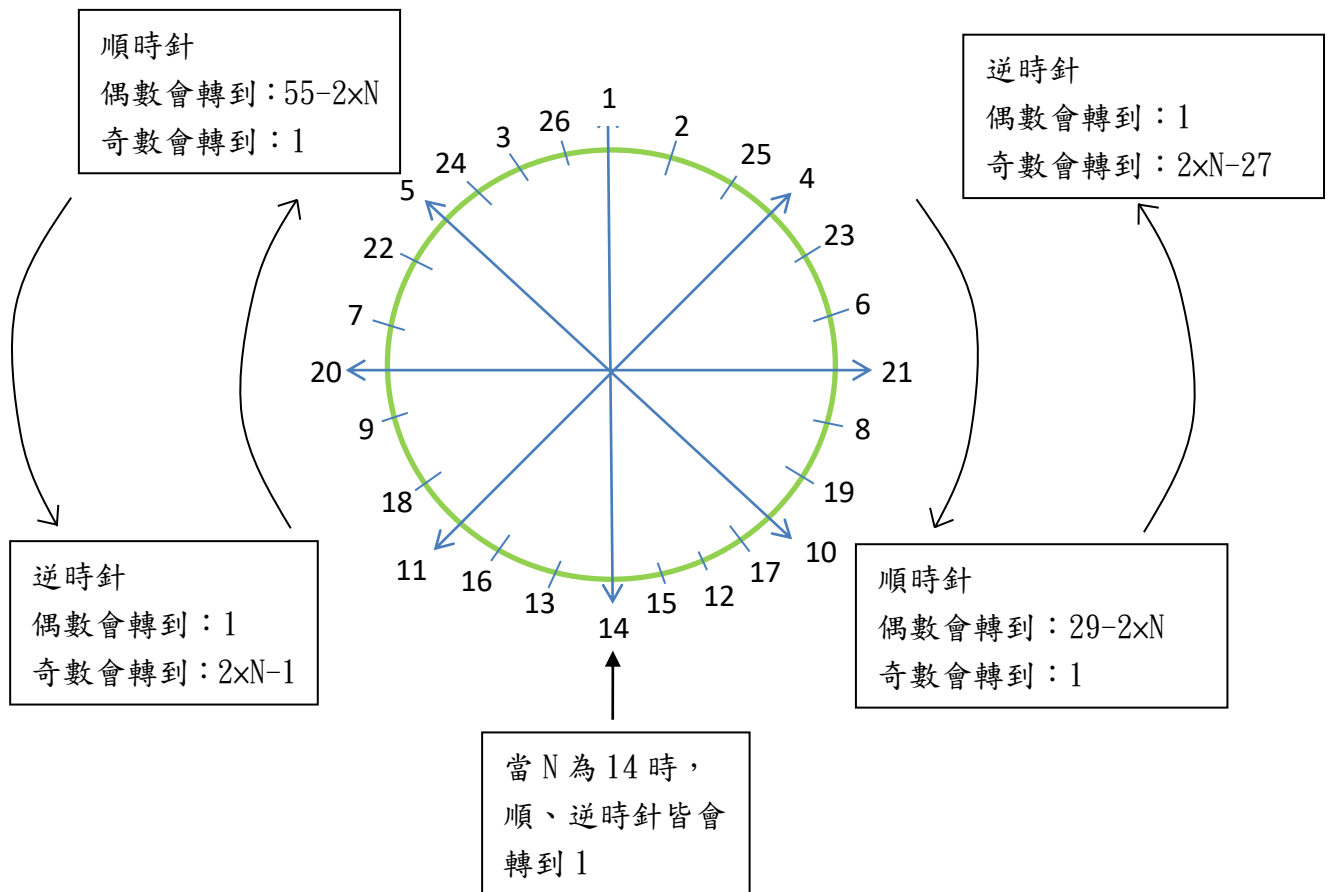
(3) 當  $N$  為 14 時，不管順、逆時針轉動，都會轉到 1。

(4) 圖示終點數公式：

以數字 1 和數字 14 為中線，把圓盤分為右半邊數字和左半邊數字

左半邊數字

右半邊數字



**研究三、在遊戲規則下，減少牌數字，然後尋找各種牌數終點數公式的一般式**

原先的規則是撲克牌數字1~13全部用到，獎品要準備比較多，現在想要減少成本，所以減少撲克牌數字，然後尋找終點數公式，進而希望發現規律，尋找終點數公式的一般式。

**3-1：改變牌數，是否有終點數公式可尋找？**

**【步驟】：**

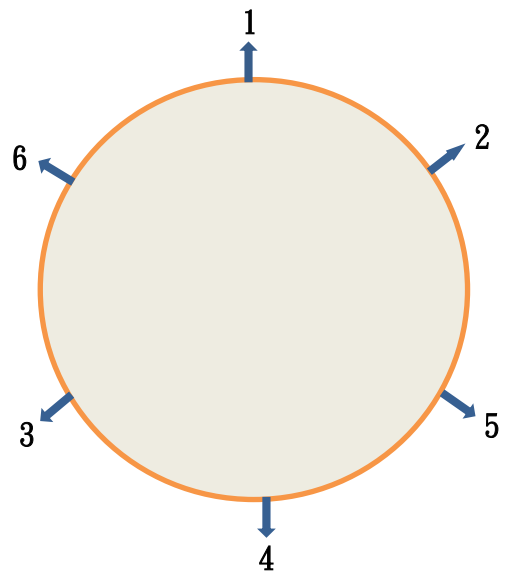
分別取撲克牌的數字1~3、1~4、1~5、1~6，來觀察：

(一)取撲克牌的數字1~3，花色全取，共12張牌，抽二張撲克牌相加得到一個數字N，再按順時針或逆時針走N-1步。撲克牌最小的二張相加為2，最大的二張相加為6，所以N值範圍為2至6；L值是順時針或逆時針走N-1步所到達的數字。

**【經整理後，得下簡表】：**

表 11

N	2	3	4	5	6
順(L 值)	5	1	1	1	3
逆(L 值)	1	5	1	3	1



**【研究發現】：**

根據研究一和研究二的方法，可以得知以下結果和公式：

(1)順時針轉動

奇數會轉到1

當  $2 \leq N \leq 4$ ，且 N 為偶數時，終點數為  $9 - 2 \times N$

當  $5 \leq N \leq 6$ ，且 N 為偶數時，終點數為  $15 - 2 \times N$

(2)逆時針轉動

偶數會轉到1

當  $2 \leq N \leq 3$ ，且 N 為奇數時，終點數為  $2 \times N - 1$

當  $4 \leq N \leq 6$ ，且 N 為奇數時，終點數為  $2 \times N - 7$

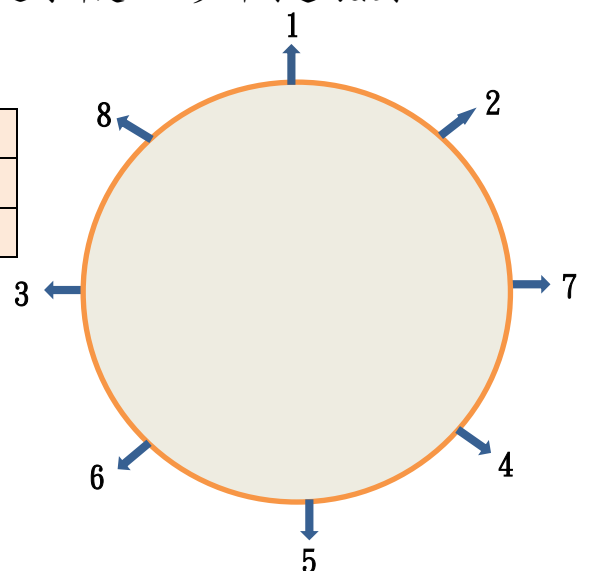
(3)當 N 為 4 時，不管順、逆時針轉動，都會轉到 1。

(二)取撲克牌的數字1~4，花色全取，共16張牌，撲克牌最小的二張相加為2，最大的二張相加為8，所以N值範圍為2至8；L值是順時針或逆時針走N-1步所到達的數字。

**【經整理後，得下簡表】：**

表 12

N	2	3	4	5	6	7	8
順(L 值)	7	1	3	1	7	1	3
逆(L 值)	1	5	1	1	1	5	1



**【研究發現】：**

根據研究一和研究二的方法，可以得知以下結果和公式：

(1) 順時針轉動

奇數會轉到 1

當  $2 \leq N \leq 5$ ，且  $N$  為偶數時，終點數為  $11-2 \times N$

當  $6 \leq N \leq 8$ ，且  $N$  為偶數時，終點數為  $19-2 \times N$

(2) 逆時針轉動

偶數會轉到 1

當  $2 \leq N \leq 4$ ，且  $N$  為奇數時，終點數為  $2 \times N - 1$

當  $5 \leq N \leq 8$ ，且  $N$  為奇數時，終點數為  $2 \times N - 9$

(3) 當  $N$  為 5 時，不管順、逆時針轉動，都會轉到 1。

(三) 取撲克牌的數字 1~5，花色全取，共 20 張牌，撲克牌最小的二張相加為 2，最大的二張相加為 10，所以  $N$  值範圍為 2 至 10； $L$  值是順時針或逆時針走  $N-1$  步所到達的數字。

【經整理後，得下簡表】：

表 13

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10
順(L 值)	9	1	5	1	1	1	7	1	3
逆(L 值)	1	5	1	9	1	3	1	7	1

【研究發現】：

根據研究一和研究二的方法，可以得知以下結果和公式：

(1) 順時針轉動

奇數會轉到 1

當  $2 \leq N \leq 6$ ，且  $N$  為偶數時，終點數為  $13-2 \times N$

當  $7 \leq N \leq 10$ ，且  $N$  為偶數時，終點數為  $23-2 \times N$

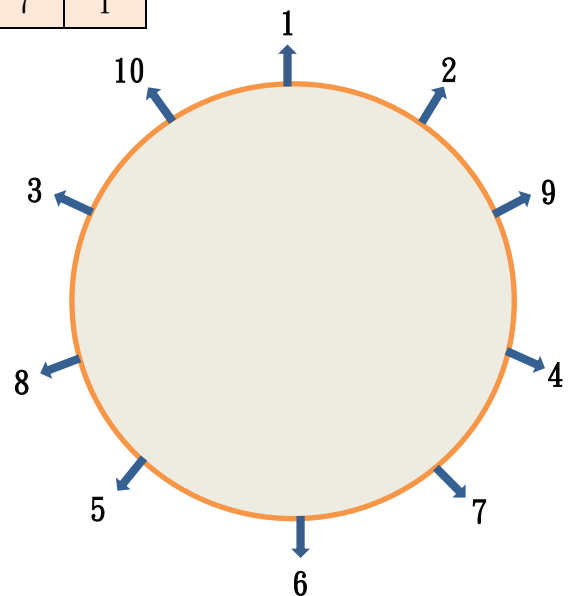
(2) 逆時針轉動

偶數會轉到 1

當  $2 \leq N \leq 5$ ，且  $N$  為奇數時，終點數為  $2 \times N - 1$

當  $6 \leq N \leq 10$ ，且  $N$  為奇數時，終點數為  $2 \times N - 11$

(3) 當  $N$  為 6 時，不管順、逆時針轉動，都會轉到 1。



(四) 取撲克牌的數字 1~6，花色全取，共 24 張牌，撲克牌最小的二張相加為 2，最大的二張相加為 12，所以  $N$  值範圍為 2 至 12； $L$  值是順時針或逆時針走  $N-1$  步所到達的數字。

【經整理後，得下簡表】：

表 14

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
順(L 值)	11	1	7	1	3	1	11	1	7	1	3
逆(L 值)	1	5	1	9	1	1	1	5	1	9	1

**【研究發現】：**

根據研究一和研究二的方法，可以得知以下結果和公式：

(1) 順時針轉動

奇數會轉到 1

當  $2 \leq N \leq 7$ ，且  $N$  為偶數時，終點數為  $15-2 \times N$

當  $8 \leq N \leq 12$ ，且  $N$  為偶數時，終點數為  $27-2 \times N$

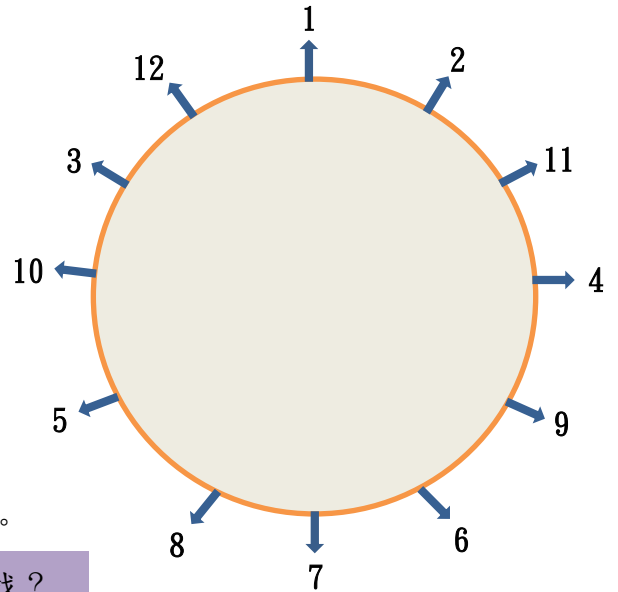
(2) 逆時針轉動

偶數會轉到 1

當  $2 \leq N \leq 6$ ，且  $N$  為奇數時，終點數為  $2 \times N - 1$

當  $7 \leq N \leq 12$ ，且  $N$  為奇數時，終點數為  $2 \times N - 13$

(3) 當  $N$  為 7 時，不管順、逆時針轉動，都會轉到 1。



3-2：改變牌數，是否有終點數公式的一般式可尋找？

**【定義符號】：**

(一)  $M$ ：撲克牌數字的最大值

**【步驟】：**

把研究 3-1 的四種結果整理成表 15 來觀察：

表 15

撲克牌 數字	順時針				
		第一組	第二組		
1~3 M=3	範圍(N 為偶數)	$2 \leq N \leq 4$	$5 \leq N \leq 6$	奇數都 會轉到 1	順、逆時針都會轉到 1 4
	終點數	$9-2 \times N$	$15-2 \times N$		
1~4 M=4	範圍(N 為偶數)	$2 \leq N \leq 5$	$6 \leq N \leq 8$		
	終點數	$11-2 \times N$	$19-2 \times N$		
1~5 M=5	範圍(N 為偶數)	$2 \leq N \leq 6$	$7 \leq N \leq 10$		
	終點數	$13-2 \times N$	$23-2 \times N$		6
1~6 M=6	範圍(N 為偶數)	$2 \leq N \leq 7$	$8 \leq N \leq 12$		
	終點數	$15-2 \times N$	$27-2 \times N$		7
撲克牌 數字	逆時針				
		第三組	第四組		
1~3 M=3	範圍(N 為奇數)	$2 \leq N \leq 3$	$4 \leq N \leq 6$	偶數都 會轉到 1	順、逆時針都會轉到 1 4
	終點數	$2 \times N - 1$	$2 \times N - 7$		
1~4 M=4	範圍(N 為奇數)	$2 \leq N \leq 4$	$5 \leq N \leq 8$		
	終點數	$2 \times N - 1$	$2 \times N - 9$		
1~5 M=5	範圍(N 為奇數)	$2 \leq N \leq 5$	$6 \leq N \leq 10$		
	終點數	$2 \times N - 1$	$2 \times N - 11$		6
1~6 M=6	範圍(N 為奇數)	$2 \leq N \leq 6$	$7 \leq N \leq 12$		
	終點數	$2 \times N - 1$	$2 \times N - 13$		7



**【研究發現】：**

- (1) 第一組：由相減法(差不變)可得公式： $L=2\times M+3-2\times N$ 。  
驗證：當撲克牌數字最大為 13 時，M 代入 13，推得終點數公式為  $L=29-2\times N$ ，與研究二結果相同。
- (2) 第二組：由相減法(差不變)可得公式： $L=4\times M+3-2\times N$ 。  
驗證：當撲克牌數字最大為 13 時，M 代入 13，推得終點數公式為  $L=55-2\times N$ ，與研究二結果相同。
- (3) 第三組：可得公式： $L=2\times N-1$ 。  
驗證：與研究二結果相同。
- (4) 第四組：由相減法(差不變)可得公式： $L=2\times N-(2\times M+1)$ 。  
驗證：當撲克牌數字最大為 13 時，M 代入 13，推得終點數公式為  $L=2\times N-27$ ，與研究二結果相同。
- (5) 順時針或逆時針都會轉到 1 的數字是： $M+1$   
驗證：當撲克牌數字最大為 13 時，M 代入 13，可得數字 14，與研究二結果相同。
- (6) 順時針奇數都會轉到 1；逆時針偶數都會轉到 1。  
驗證：與研究二結果相同。

**【研究一、研究二、研究三統整】：**

終點數公式：

(1) 順時針轉動

奇數會轉到 1

當  $2\leq N\leq M+1$ ，且 N 為偶數時，終點數為  $2\times M+3-2\times N$

當  $M+2\leq N\leq 2\times M$ ，且 N 為偶數時，終點數為  $4\times M+3-2\times N$

(2) 逆時針轉動

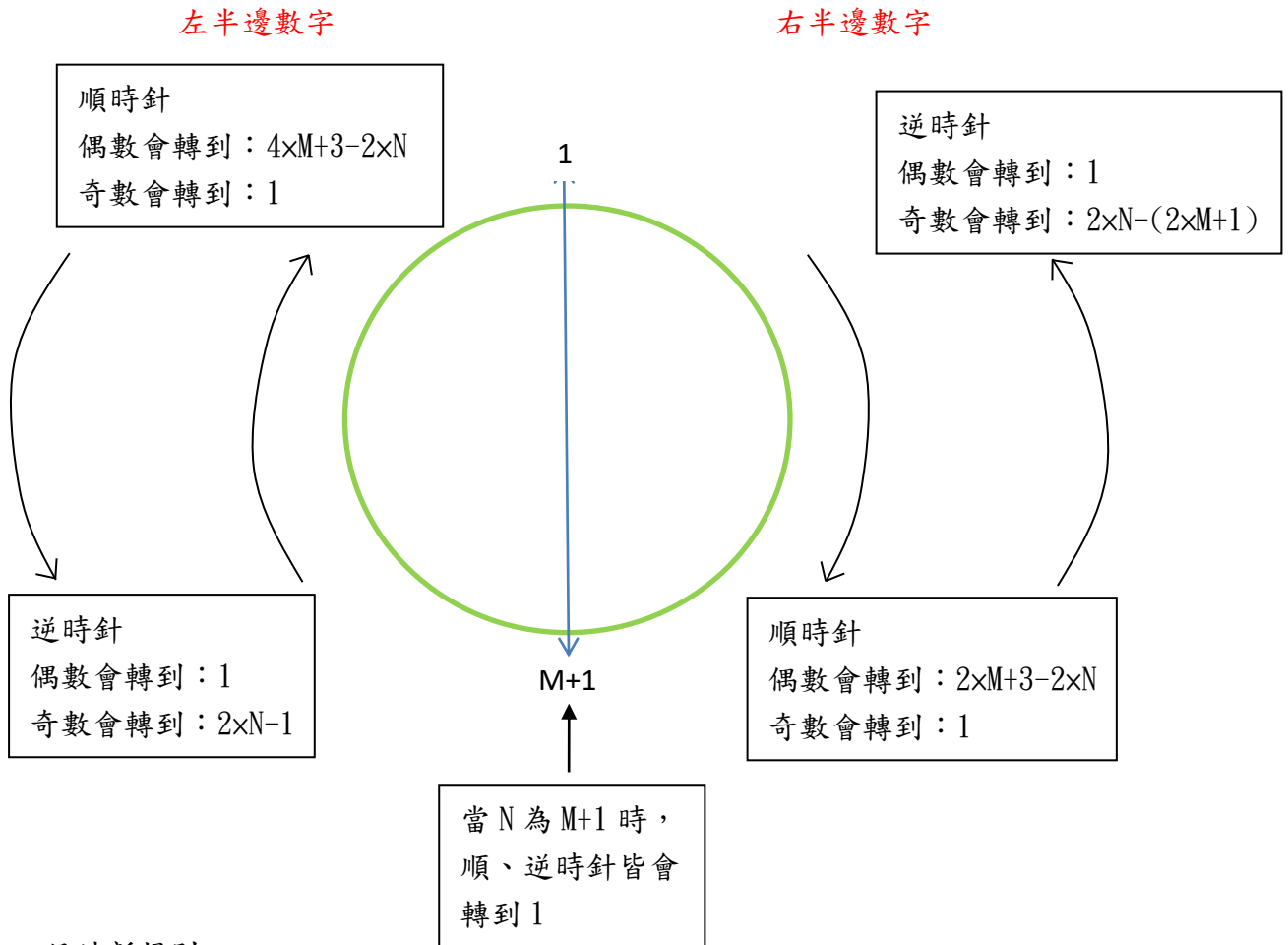
偶數會轉到 1

當  $2\leq N\leq M$ ，且 N 為奇數時，終點數為  $2\times N-1$

當  $M+1\leq N\leq 2\times M$ ，且 N 為奇數時，終點數為  $2\times N-(2\times M+1)$

(3) 當 N 為 M+1 時，不管順、逆時針轉動，都會轉到 1。

(4)圖示終點數公式：以數字 1 和數字 M+1 為中線，把圓盤分為右半邊數字和左半邊數字



#### 四、設計新規則

**想法**：在舊規則下，顧客就只有二種可能，付 10 元給老闆，或得到小獎，完全無法得到大獎。現在希望在不大幅度更改規則下，創立一個新規則，讓老闆可以賺錢，顧客也有機會中大獎。

**想法一**

簡化規則：只用順時針走法。

**想法二**

- (1)因走 N-1 步只能走到奇數數字，所以就把偶數數字獎品都刪除，可以減少成本或把剩下的獎項價值提高。
- (2)如果要再減少成本，可以減少盤面數字，但這邊想要讓盤面獎項看起來多且豐富，所以維持原本的數字組合。

**想法三**

研究每個奇數數字走到的機率，來決定獎品的分配。

**【定義符號】：**

(一)  $L_i$ ：i 代表終點數，例如： $L_3$  代表最後走到 3

**【新規則】：**

從一副撲克牌任意抽兩張撲克牌相加，(A:1, J:11, Q:12, K:13) 得到的數字為 N，再從轉盤上 N 處按照順時針方向走(N-1)步，最終走到的數字為  $L_i$

(一)研究過程

1. 研究問題：研究順時針時，各奇數數字走到的機率

52 張牌取 2 張的組合		52 張牌取 2 張的組合為 $52 \times 51$ 種，但因為先取 A 牌再取 B 牌的和跟先取 B 牌再取 A 牌的和相同，所以要除以 2： 所以有 $52 \times 51 \div 2 = 1326$ 種		
終點數(Li)	N	組合	計算	機率
L <sub>1</sub>	奇數	奇數有 28 張，偶數有 24 張，各挑一張的組合有： $28 \times 24 = 672$ 種	$\frac{672}{1326}$	58.37%
	14	二張牌總和是 14 的組合： (1, 13) (2, 12) (3, 11) (4, 10) (5, 9) (6, 8) ⇒ $4 \times 4 \times 6 = 96$ 種 (7, 7) ⇒ 6 種	$\frac{96+6}{1326}$	
L <sub>3</sub>	26	二張牌總和是 26 的組合： (13, 13) ⇒ 6 種	$\frac{6}{1326}$	0.45%
L <sub>5</sub>	12	二張牌總和是 12 的組合： (1, 11) (2, 10) (3, 9) (4, 8) (5, 7) ⇒ $4 \times 4 \times 5 = 80$ 種 (6, 6) ⇒ 6 種	$\frac{80+6}{1326}$	6.49%
L <sub>7</sub>	24	二張牌總和是 24 的組合： (11, 13) ⇒ $4 \times 4 = 16$ 種 (12, 12) ⇒ 6 種	$\frac{16+6}{1326}$	1.66%
L <sub>9</sub>	10	二張牌總和是 10 的組合： (1, 9) (2, 8) (3, 7) (4, 6) ⇒ $4 \times 4 \times 4 = 64$ 種 (5, 5) ⇒ 6 種	$\frac{64+6}{1326}$	5.28%
L <sub>11</sub>	22	二張牌總和是 22 的組合： (9, 13) (10, 12) ⇒ $4 \times 4 \times 2 = 32$ 種 (11, 11)	$\frac{32+6}{1326}$	2.87%

		⇒ 6 種		
L13	8	二張牌總和是 8 的組合： (1, 7) (2, 6) (3, 5) ⇒ 4×4×3=48 種 (4, 4) ⇒ 6 種	$\frac{48+6}{1326}$	4.07%
L15	20	二張牌總和是 20 的組合： (7, 13) (8, 12) (9, 11) ⇒ 4×4×3=48 種 (10, 10) ⇒ 6 種	$\frac{48+6}{1326}$	4.07%
L17	6	二張牌總和是 6 的組合： (1, 5) (2, 4) ⇒ 4×4×2=32 種 (3, 3) ⇒ 6 種	$\frac{32+6}{1326}$	2.87%
L19	18	二張牌總和是 18 的組合： (5, 13) (6, 12) (7, 11) (8, 10) ⇒ 4×4×4=64 種 (9, 9) ⇒ 6 種	$\frac{64+6}{1326}$	5.28%
L21	4	二張牌總和是 4 的組合： (1, 3) ⇒ 4×4=16 種 (2, 2) ⇒ 6 種	$\frac{16+6}{1326}$	1.66%
L23	16	二張牌總和是 16 的組合： (3, 13) (4, 12) (5, 11) (6, 10) (7, 9) ⇒ 4×4×5=80 種 (8, 8) ⇒ 6 種	$\frac{80+6}{1326}$	6.49%
L25	2	二張牌總和是 2 的組合： (1, 1) ⇒ 6 種	$\frac{6}{1326}$	0.45%

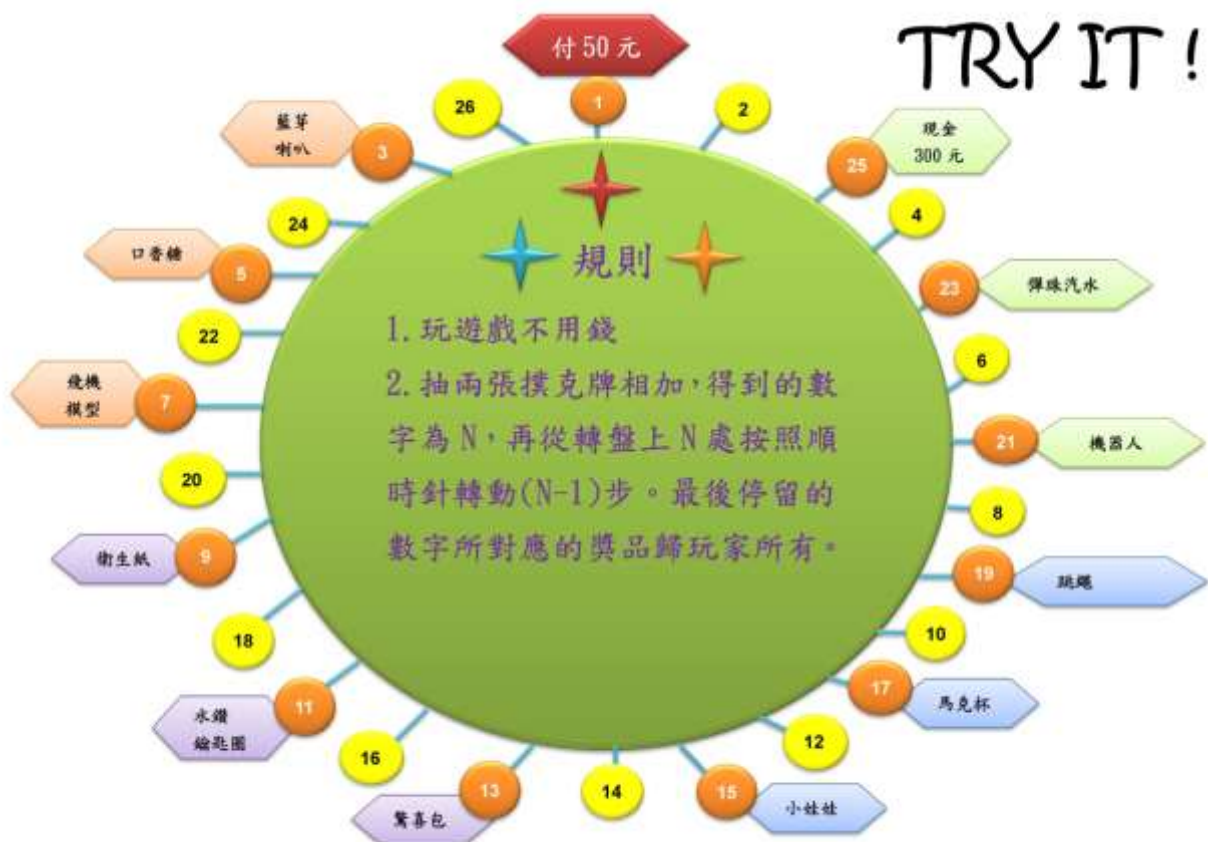
## 2. 分配獎品：

(1) 機率最高的數字分配給老闆。

(2) 機率愈低的數字，獎品價值愈高。

終點數(Li)	機率	獎品
$L_1$	58.37%	付給老闆 50 元
$L_5=L_{23}$	6.49%	口香糖、彈珠汽水
$L_9=L_{19}$	5.28%	跳繩、衛生紙
$L_{13}=L_{15}$	4.07%	驚喜包、小娃娃
$L_{11}=L_{17}$	2.87%	水鑽鑰匙圈、馬克杯
$L_7=L_{21}$	1.66%	機器人、飛機模型
$L_3=L_{25}$	0.45%	藍芽喇叭、現金 300 元

### 3. 新遊戲圖



## 陸、結論

### 一、終點數公式：

#### (1) 順時針轉動

奇數會轉到 1

當  $2 \leq N \leq M+1$ ，且  $N$  為偶數時，終點數為  $2 \times M + 3 - 2 \times N$

當  $M+2 \leq N \leq 2 \times M$ ，且  $N$  為偶數時，終點數為  $4 \times M + 3 - 2 \times N$

#### (2) 逆時針轉動

偶數會轉到 1

當  $2 \leq N \leq M$ ，且  $N$  為奇數時，終點數為  $2 \times N - 1$

當  $M+1 \leq N \leq 2 \times M$ ，且  $N$  為奇數時，終點數為  $2 \times N - (2 \times M + 1)$

(3) 當  $N$  為  $M+1$  時，不管順、逆時針轉動，都會轉到 1。

(4) 順時針奇數都會轉到 1；逆時針偶數都會轉到 1。

### 二、設計新規則

用順時針走法，任意抽兩張撲克牌相加，(A:1，J:11，Q:12，K:13) 得到的數字為  $N$ ，再從轉盤上  $N$  處按照順時針方向走  $(N-1)$  步，最終走到的數字為  $L_i$ ，探討終點數的機率來分配獎品：

終點數( $L_i$ )	機率
$L_1$	58.37%
$L_5 = L_{23}$	6.49%
$L_9 = L_{19}$	5.28%
$L_{13} = L_{15}$	4.07%
$L_{11} = L_{17}$	2.87%
$L_7 = L_{21}$	1.66%
$L_3 = L_{25}$	0.45%

## 柒、心得

(1) 經研究之後，瞭解了一個簡單的輪盤遊戲，背後也有這麼多的數學知識和規律，也讓我學習到，看到問題應該去面對，思考問題的解決辦法，生活上遇到任何的難題時，只要回想自己解決數學問題的態度，應用到生活上，透過不斷的轉彎、思考、連結所有可能的方案，最後便有機會解決遇到的難題。

(2)由此遊戲可看出，任何賭博遊戲都是精算後的結果，老闆不會做賠錢的生意，世上沒有系統能夠打敗機率論，世界上沒有一種方法可以打敗純機率的賭博，短期投注可以靠運氣，長遠來說是不可能抵擋機率的侵蝕，我想用科學的方法從數學角度讓人們意識到，天下沒有白吃的午餐，幸福要靠自己的辛勤去獲得。

## 捌、參考資料

國小數學科各種版本	康軒出版社	南一出版社	翰林出版社
國中數學科各種版本	康軒出版社	南一出版社	翰林出版社

## 【評語】 080404

本文作者從一個夜市的輪盤遊戲出發，基於企圖理解遊戲背後所隱含的數學奧秘之好奇心，經過一連串有趣的探索，循序漸進地尋求解答，展現了一段充滿趣味的數學探索之旅；最後又應用研究結果與機率的相關概念，設計出新的遊戲規則，使得本研究的應用價值獲得提升。



# 摘要

本研究主要是探討輪盤遊戲之破解，。研究結果發現：**一、不論順時針或逆時針轉，最終轉到的數字只有1和奇數二種結果和找出此種結果的原因。****二、找出輪盤的終點數公式。****三、減少輪盤數字數時，同樣找出終點數公式和終點數公式的一般式。****四、設計出新規則，用機率來讓遊戲更有趣。**

## 壹、研究動機

我在逛夜市時看到一個玩輪盤遊戲免錢的攤位，遊戲規則是～（一）玩遊戲不用錢。（二）玩家先選擇順時針or逆時針旋轉。（三）從一副撲克牌任意抽兩張撲克牌相加，（A：1，J：11，Q：12，K：13）得到的數字為N，再從轉盤上N處按照選擇好的方向轉動(N-1)步，最後停留的數字所對應的獎品歸玩家所有，而若最終的數字是1，則玩家要給攤販10元。  
這引起了極大的好奇心，且有一些疑問：首先是**此遊戲的規律為何？輪盤數字是否有公式？是否可改規則讓老闆可以賺錢，顧客也有機會中大獎？**因此，想要藉由這次的科展來進行深入的探討，破解這遊戲的祕密。



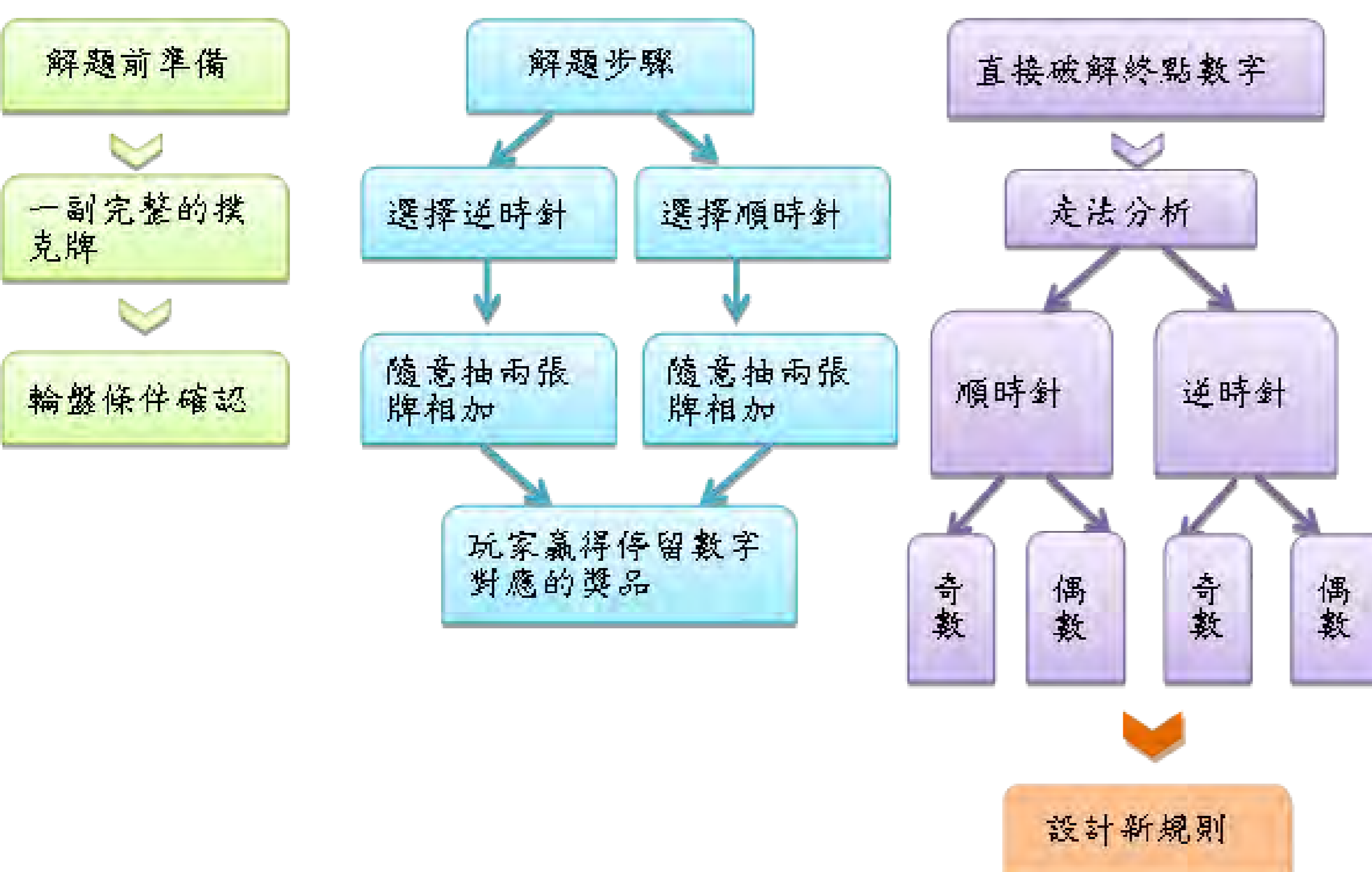
## 貳、研究目的及問題

- 研究一、輪盤規律研究**
- 1-1：順時針和逆時針走法，是否會影響終點數的不同？
  - 1-2：順時針走法時，二張撲克牌數字和不同時，如何影響終點數？
  - 1-3：逆時針走法時，二張撲克牌數字和不同時，如何影響終點數？
  - 1-4：在順時針、逆時針的走法下，終點數何時為1呢？
  - 1-5：數字和為奇數且順時針走法跟數字和為偶數且逆時針走法下為何終點數都是1呢？
  - 1-6：數字和為14時，為何終點數都是1呢？
  - 1-7：在順時針、逆時針的走法下，終點數為何都是奇數呢？
- 研究二、尋找終點數公式**
- 2-1：數字和為偶數，順時針轉動時，是否有終點數公式可尋找？
  - 2-2：數字和為奇數，逆時針轉動時，是否有終點數公式可尋找？
- 研究三、在遊戲規則下，減少牌數字，然後尋找各種牌數終點數公式的一般式**
- 3-1：改變牌數，是否有終點數公式可尋找？
  - 3-2：改變牌數，是否有終點數公式的一般式可尋找？
- 研究四、設計新規則**

## 參、研究設備與器材

紙、筆、一副撲克牌。

## 肆、研究架構



## 伍、研究過程與結果

### 研究一、輪盤規律研究

- 【遊戲規則說明】：**
- 規則一：玩遊戲不用錢。
  - 規則二：先選擇順時針或逆時針走法。
  - 規則三：抽二張撲克牌相加得到一個數字，再按順時針或逆時針走此數字減1步，最後停留數字所對應的獎品歸玩家所有。

例如：

順時針走法  
(1)抽二張撲克牌相加數字為2，再按順時針走(2-1)步，所得到的數字為25。  
(2)抽二張撲克牌相加數字為4，再按順時針走(4-1)步，所得到的數字為21。

1-1：順時針和逆時針走法，是否會影響終點數的不同？

- 【定義符號】：**
- (一) N：一副撲克牌任意抽兩張撲克牌相加，得到的數字為N。
  - (二) N-1：順時針或逆時針走N-1步。
  - (三) L：終點數(順時針或逆時針走N-1步所到達的數字)。
- 【步驟】：**詳見說明書
- 【研究發現】：**
- 1. 順時針和逆時針的走法不相同，終點數會不相同。
  - 2. 發現二張撲克牌數字和(N值)不同時，終點數也會不相同。
  - 2. 當N為14時，終點數皆為1。

1-2：順時針走法時，二張撲克牌數字和不同時，如何影響終點數？

- 【研究構想】：**
- 由研究1-1發現，順時針和逆時針的走法不相同，終點數會不相同；二張撲克牌數字和(N值)不同時，終點數(L值)也會不相同，因此進行「順時針走法時，二張撲克牌的數字和如何影響終點數」的研究。
- 【步驟】：**詳見說明書
- 【研究發現】：**
- 1. N為奇數時，L值都為1。
  - 2. N為偶數時，L值都為奇數。
  - 3. 終點數(L值)都為奇數。

1-3：逆時針走法時，二張撲克牌數字和不同時，如何影響終點數？

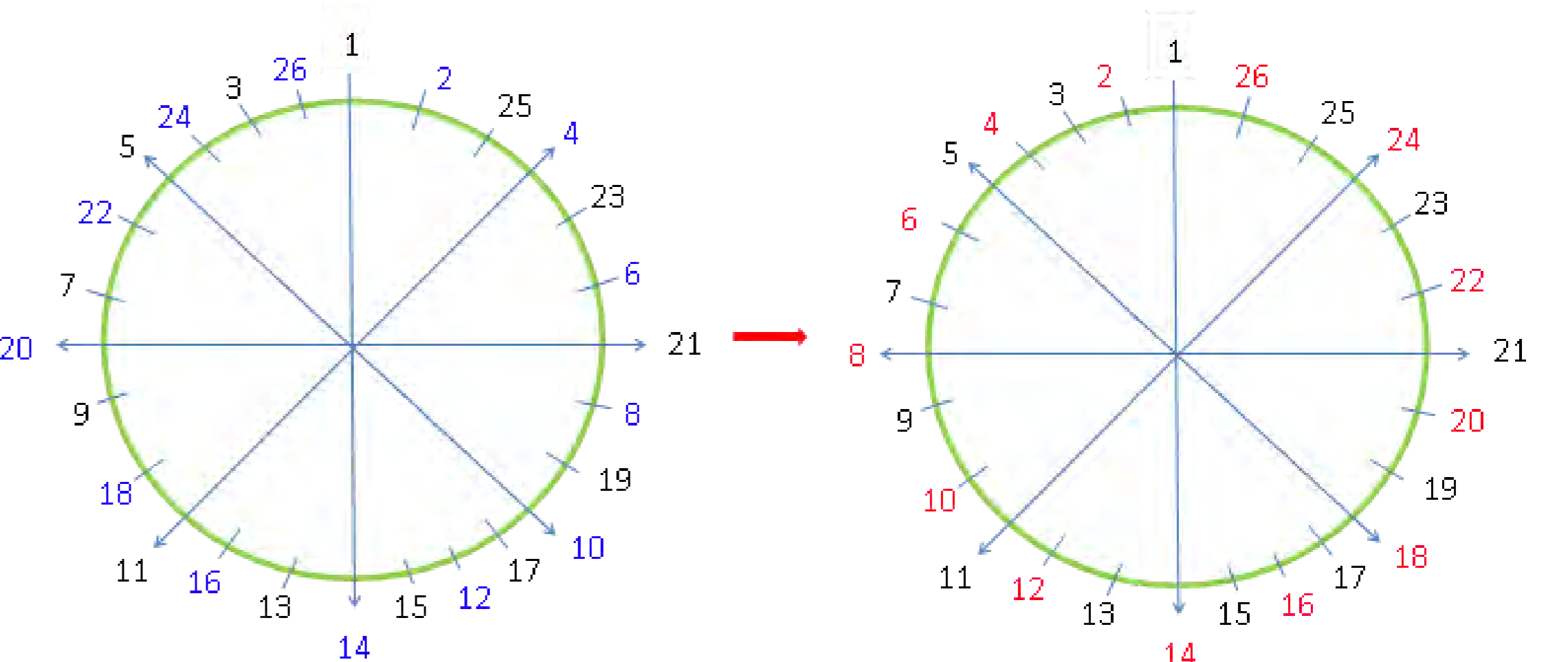
- 【研究構想】：**
- 由研究1-1發現，順時針和逆時針的走法不相同，終點數會不相同；二張撲克牌數字和(N值)不同時，終點數(L值)也會不相同，因此進行「逆時針走法時，二張撲克牌的數字和如何影響終點數」的研究。
- 【步驟】：**詳見說明書
- 【研究發現】：**
- 1. N為偶數時，L值都為1
  - 2. N為奇數時，L值都為奇數。
  - 3. 終點數(L值)都為奇數

1-4：在順時針、逆時針的走法下，終點數何時為1呢？

- 【步驟】：**詳見說明書
- 【整理】：**
- 順時針：N為奇數——終點數：1
  - 逆針針：N為偶數——終點數：1

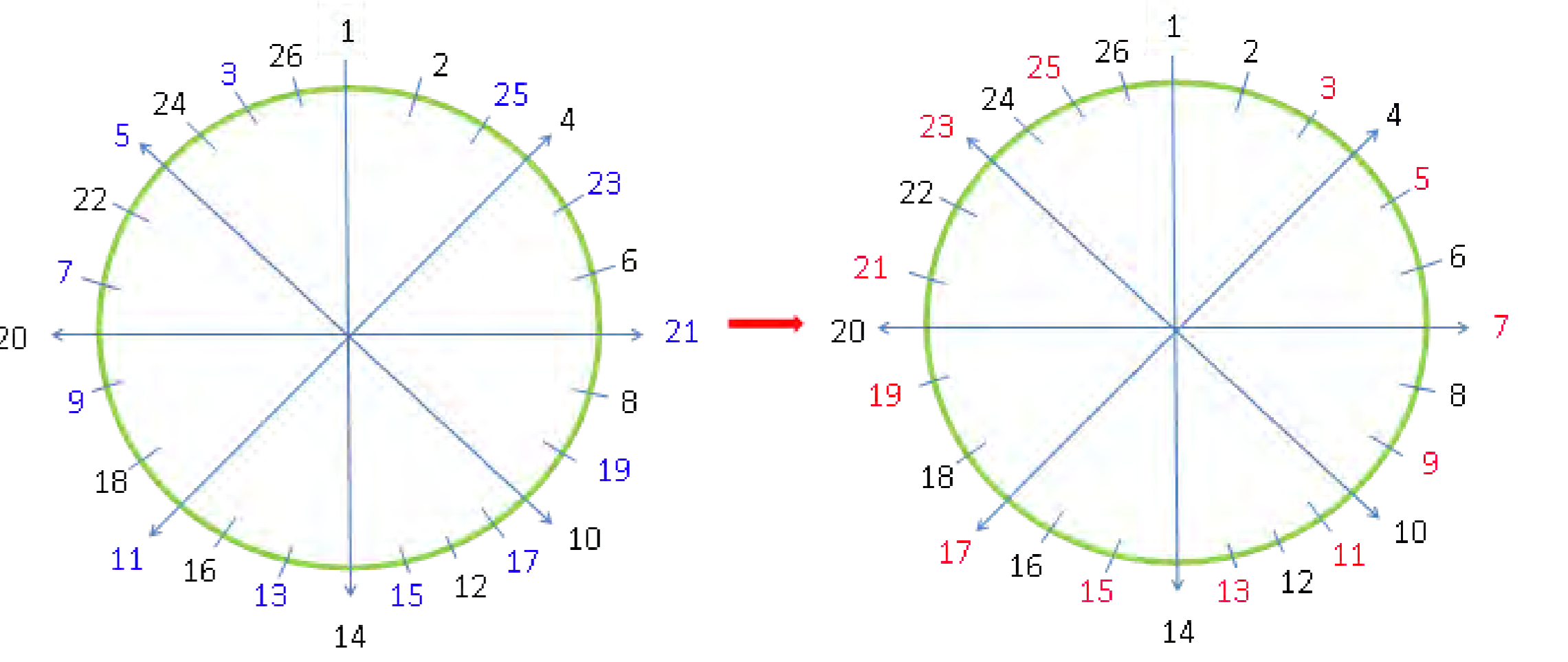
1-5：數字和為奇數且順時針走法跟數字和為偶數且逆時針走法下為何終點數都是1呢？

- 【研究構想】：**
- 由研究1-4發現，在數字和為奇數且順時針走法跟數字和為偶數且逆時針走法下終點數都是1，因此進行「數字和為奇數且順時針走法跟數字和為偶數且逆時針走法下為何終點數都是1」的研究。
- 【步驟】：**
- (1)數字和為奇數且順時針走法：  
因為數字都是奇數、偶數交錯排列，所以把原本的偶數替換成連續的偶數去觀察。



- 【研究發現】：**
- 數字和為奇數且順時針走法時，跟1的間隔都是N-1，所以順時針走N-1步都會走到1。

- (2)數字和為偶數且逆時針走法：  
因為數字都是奇數、偶數交錯排列，所以把原本的奇數替換成連續的奇數去觀察。



- 【研究發現】：**
- 數字和為偶數且逆時針走法時，跟1的間隔都是N-1，所以逆時針走N-1步都會走到1。

1-6：數字和為14時，為何終點數都是1呢？

- 【研究構想】：**
- 由研究1-1發現，當N為14時，終點數皆為1，因此進行「數字和為14時，為何終點數都是1」的研究。

- 【研究發現】：**
- 由研究1-5得知，數字和為14時，不管順時針或逆時針走法，跟數字1的距離都是13個間隔，所以走N-1步都會走到1。

1-7：在順時針、逆時針的走法下，終點數為何都是奇數呢？

**【研究構想】：**

由研究1-2、1-3發現，不論順時針或逆時針，終點數都是奇數，因此進行「在順時針、逆時針的走法下，終點數為何都是奇數」的研究。

表 7

順時針 N(偶)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
N-1(奇)	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
L(奇)	25	21	17	13	9	5	1	23	19	15	11	7	3
逆時針 N(奇)	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	
N-1(偶)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	
L(奇)	5	9	13	17	21	25	3	7	11	15	19	23	

**【研究發現】：**

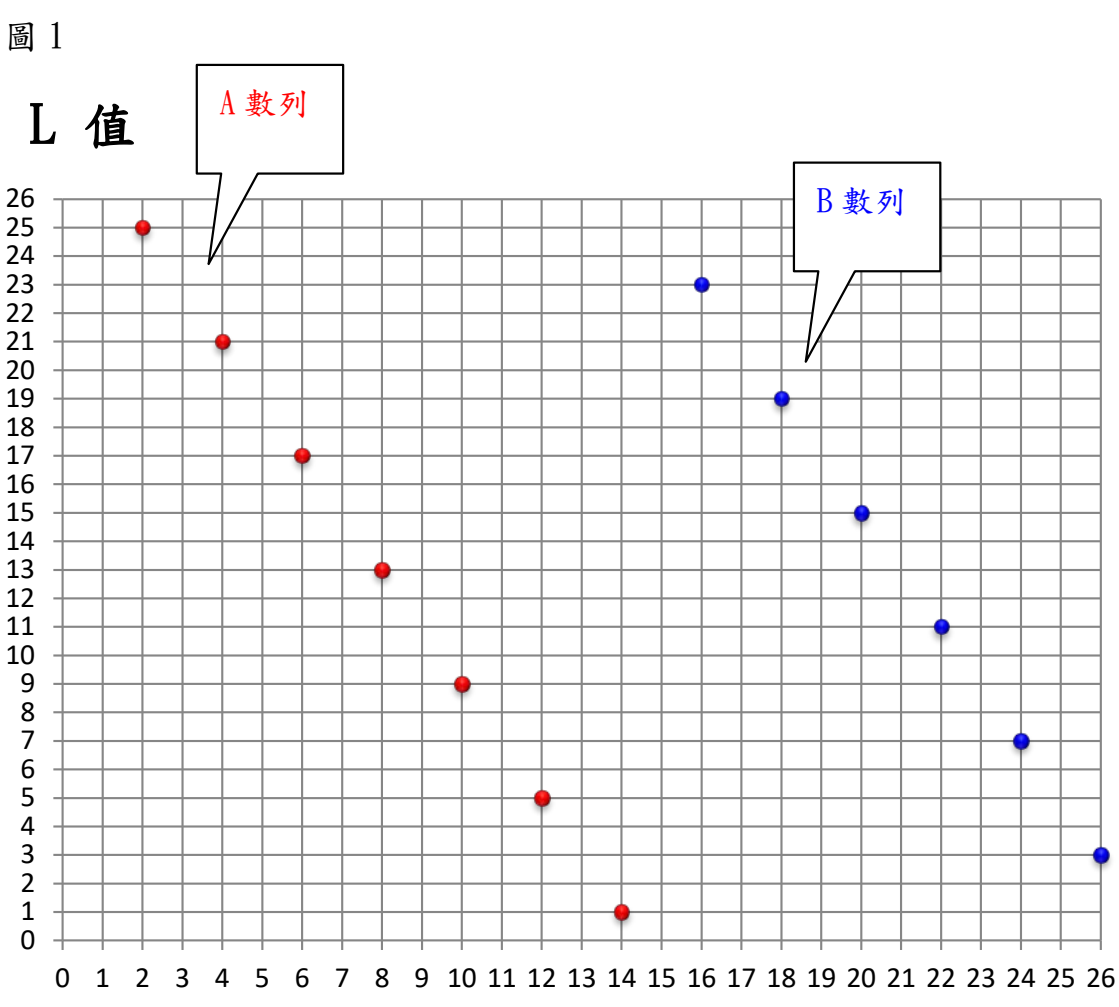
1. 順時針走法時，當N為偶數，N-1就是奇數，因為輪盤的數字排列是奇數和偶數交錯排列，所以N+(N-1)就是奇數。
2. 逆時針走法時，當N為奇數，N-1就是偶數，所以N+(N-1)就是奇數。

**【歸納】：**

1. N
  - 奇數 → 順時針 → N-1步 → 1
  - 偶數 → 逆時針 → N-1步 → 1
2. N
  - 奇數 → 逆時針 → N-1步 → 奇數(N) + 偶數(N-1步) = 奇數(終點數)
  - 偶數 → 順時針 → N-1步 → 偶數(N) + 奇數(N-1步) = 奇數(終點數)
3. 所以無論如何選擇，最終轉到的數字只有1和奇數二種結果。

**研究二、尋找終點數公式**

2-1：數字和為偶數，順時針轉動時，是否有終點數公式可尋找？



**【研究發現】：**

- N為偶數，順時針轉動
- (1) A數列：N從2到14的偶數時(公差為+2)，L從25到1(公差為-4)。
  - (2) B數列：N從16到26的偶數時(公差為+2)，L從55到3(公差為-4)。

**想法：**用相加法(和不變)找出規律  
因為A、B二數列的N值都是公差為+2的等差數列，L值都是公差為-4的等差數列，所以用N的倍數+L，就可以正負互相抵消，然後找到一個固定常數，進而找出終點數公式。

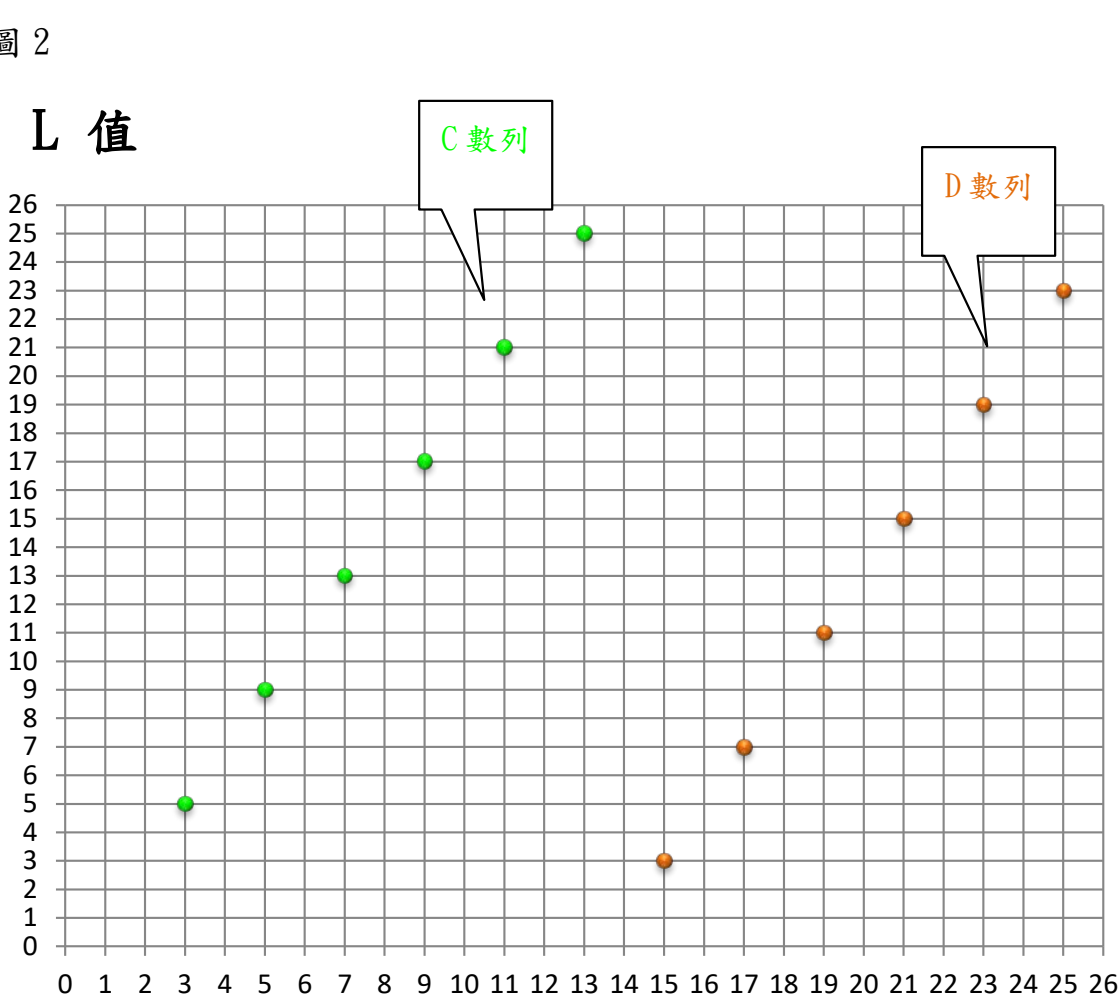
**驗證過程：**

表 8

N	A 數列						B 數列					
	2	4	6	8	10	14	16	18	20	22	24	26
L	25	21	17	13	9	1	55	51	47	43	39	35
2N+L	29	29	29	29	29	29	55	55	55	55	55	55
	發現和相等						發現和相等					

A數列： $2 \times N + L = 29$ ，  
 $L = 29 - 2 \times N$   
B數列： $2 \times N + L = 55$ ，  
 $L = 55 - 2 \times N$

2-2：數字和為奇數，逆時針轉動時，是否有終點數公式可尋找？



**【研究發現】：**

- N為奇數，逆時針轉動
- (1) C數列：N從3到13的奇數時(公差為+2)，L從5到25(公差為+4)。
  - (2) D數列：N從15到25的奇數時(公差為+2)，L從3到23(公差為+4)。

**想法：**用相加法無法找出規律  
因為C、D二數列的N值都是公差為+2的等差數列，L值都是公差為+4的等差數列，所以用N的倍數+L的數值會愈差愈大，無法找到一個固定常數。

**想法：**用相減法(差不變)找出規律  
因為C、D二數列的N值都是公差為+2的等差數列，L值都是公差為+4的等差數列，所以用N的倍數-L，就可以把差距縮小，然後找到一個固定常數，進而找出終點數公式。

表 10

N	C 數列					D 數列					
	3	5	7	9	11	15	17	19	21	23	25
L	5	9	13	17	21	3	7	11	15	19	23
2N-L	1	1	1	1	1	27	27	27	27	27	27
	發現差相等					發現差相等					

C數列： $2 \times N - L = 1$ ，  
 $L = 2 \times N - 1$   
D數列： $2 \times N - L = 27$ ，  
 $L = 27 - 2 \times N$

**統整**

終點數公式：

- (1) 順時針轉動
  - 當 $2 \leq N \leq 14$ ，且N為偶數時，終點數為 $29 - 2 \times N$
  - 當 $15 \leq N \leq 26$ ，且N為偶數時，終點數為 $55 - 2 \times N$
- (2) 逆時針轉動
  - 當 $2 \leq N \leq 13$ ，且N為奇數時，終點數為 $2 \times N - 1$
  - 當 $14 \leq N \leq 26$ ，且N為奇數時，終點數為 $2 \times N - 27$

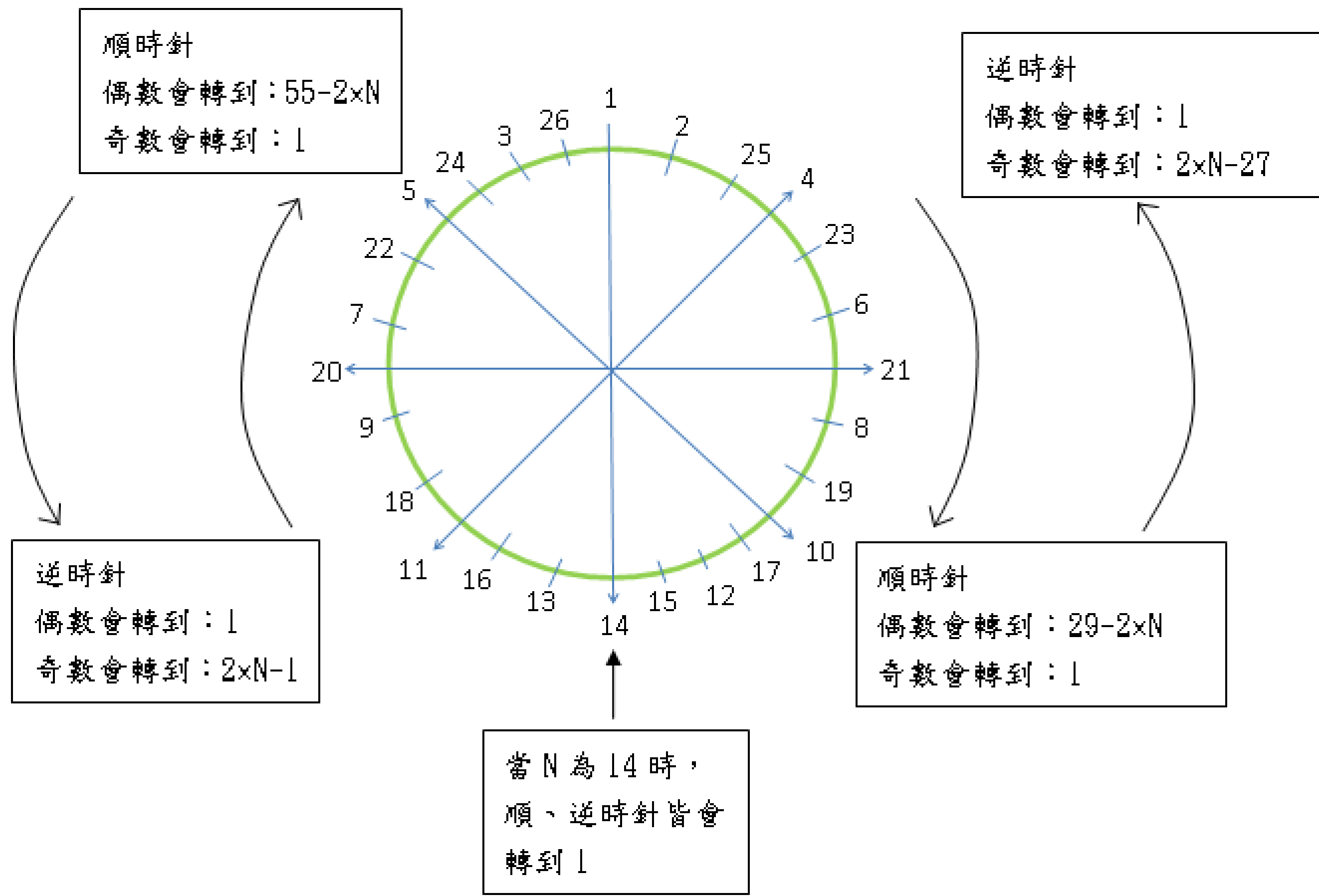
**【研究一、研究二統整】：**

終點數公式：

- (1) 順時針轉動
  - 奇數會轉到1
  - 當 $2 \leq N \leq 14$ ，且N為偶數時，終點數為 $29 - 2 \times N$ 。
  - 當 $15 \leq N \leq 26$ ，且N為偶數時，終點數為 $55 - 2 \times N$ 。
- (2) 逆時針轉動
  - 偶數會轉到1
  - 當 $2 \leq N \leq 13$ ，且N為奇數時，終點數為 $2 \times N - 1$ 。
  - 當 $14 \leq N \leq 26$ ，且N為奇數時，終點數為 $2 \times N - 27$ 。

(3) 當N為14時，不管順、逆時針轉動，都會轉到1。

(4) 圖示終點數公式：  
以數字1和數字14為中線，把圓盤分為右半邊數字和左半邊數字



**研究三、在遊戲規則下，減少牌數字，然後尋找各種牌數終點數公式的一般式**

原先的規則是撲克牌數字1~13全部用到，獎品要準備比較多，現在想要減少成本，所以減少撲克牌數字，然後尋找終點數公式，進而希望發現規律，尋找終點數公式的一般式。

3-1：改變牌數，是否有終點數公式可尋找？

分別取撲克牌的數字1~3、1~4、1~5、1~6，來觀察：

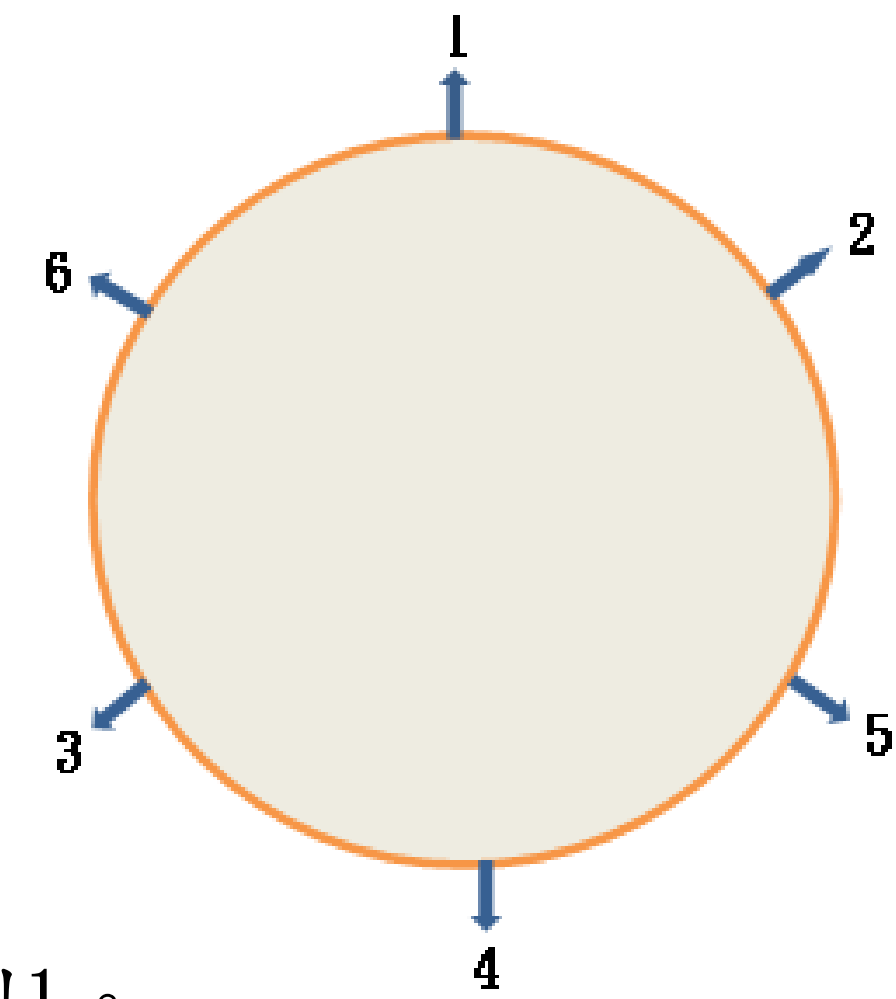
(一) 取撲克牌的數字1~3，花色全取，共12張牌

**【步驟】：**詳見說明書

**【研究發現】：**

根據研究一和研究二的方法，可以得知以下結果和公式：

- (1) 順時針轉動
  - 奇數會轉到1
  - 當 $2 \leq N \leq 4$ ，且N為偶數時，終點數為 $9 - 2 \times N$
  - 當 $5 \leq N \leq 6$ ，且N為偶數時，終點數為 $15 - 2 \times N$
- (2) 逆時針轉動
  - 偶數會轉到1
  - 當 $2 \leq N \leq 3$ ，且N為奇數時，終點數為 $2 \times N - 1$
  - 當 $4 \leq N \leq 6$ ，且N為奇數時，終點數為 $2 \times N - 7$
- (3) 當N為4時，不管順、逆時針轉動，都會轉到1。



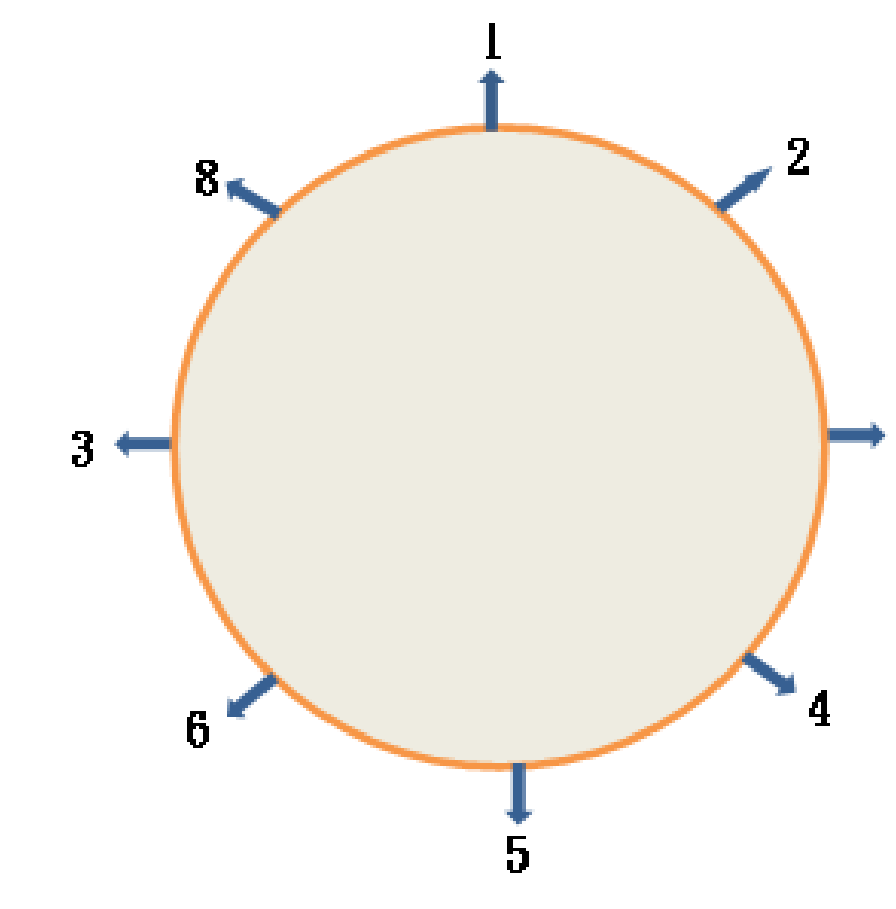
(二) 取撲克牌的數字1~4，花色全取，共16張牌

**【步驟】：**詳見說明書

**【研究發現】：**

根據研究一和研究二的方法，可以得知以下結果和公式：

- (1) 順時針轉動
  - 奇數會轉到1
  - 當 $2 \leq N \leq 5$ ，且N為偶數時，終點數為 $11 - 2 \times N$
  - 當 $6 \leq N \leq 8$ ，且N為偶數時，終點數為 $19 - 2 \times N$
- (2) 逆時針轉動
  - 偶數會轉到1
  - 當 $2 \leq N \leq 4$ ，且N為奇數時，終點數為 $2 \times N - 1$
  - 當 $5 \leq N \leq 8$ ，且N為奇數時，終點數為 $2 \times N - 9$
- (3) 當N為5時，不管順、逆時針轉動，都會轉到1。



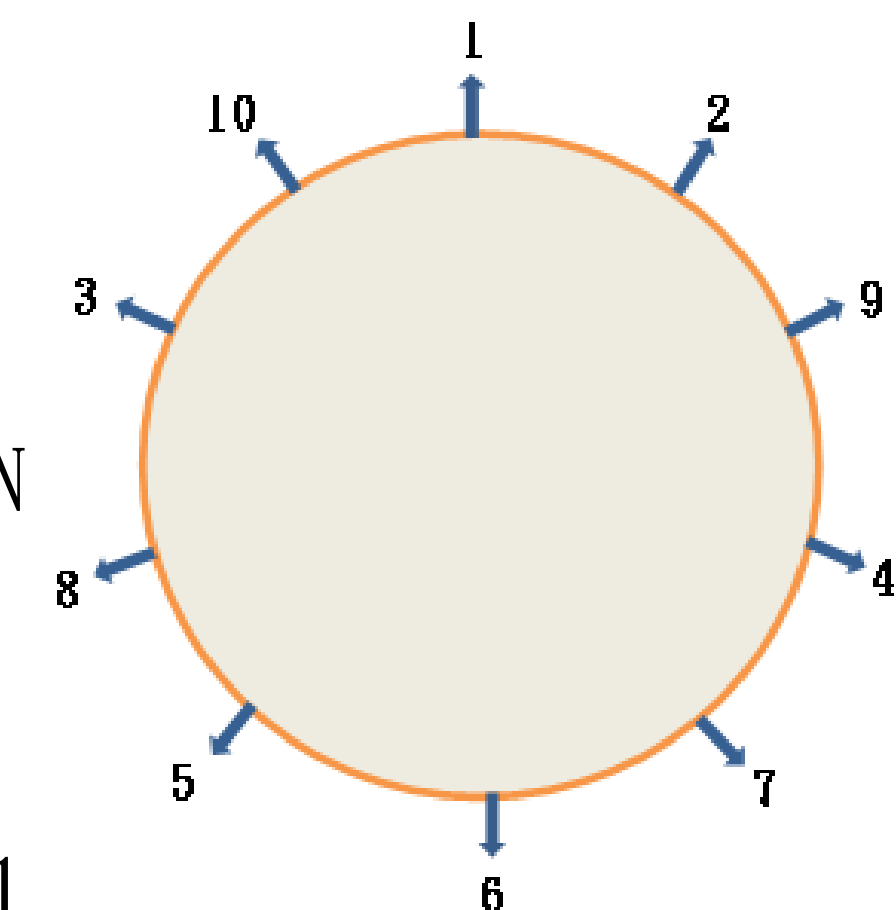
(三) 取撲克牌的數字1~5，花色全取，共20張牌

**【步驟】：**詳見說明書

**【研究發現】：**

根據研究一和研究二的方法，可以得知以下結果和公式：

- (1) 順時針轉動
  - 奇數會轉到1
  - 當 $2 \leq N \leq 6$ ，且N為偶數時，終點數為 $13 - 2 \times N$
  - 當 $7 \leq N \leq 10$ ，且N為偶數時，終點數為 $23 - 2 \times N$
- (2) 逆時針轉動
  - 偶數會轉到1
  - 當 $2 \leq N \leq 5$ ，且N為奇數時，終點數為 $2 \times N - 1$
  - 當 $6 \leq N \leq 10$ ，且N為奇數時，終點數為 $2 \times N - 11$
- (3) 當N為6時，不管順、逆時針轉動，都會轉到1。



#### (四)取撲克牌的數字1~6，花色全取，共24張牌

【步驟】：詳見說明書

【研究發現】：

根據研究一和研究二的方法，可以得知以下結果和公式：

(1)順時針轉動

奇數會轉到1

當 $2 \leq N \leq 7$ ，且 $N$ 為偶數時，終點數為 $15-2 \times N$

當 $8 \leq N \leq 12$ ，且 $N$ 為偶數時，終點數為 $27-2 \times N$

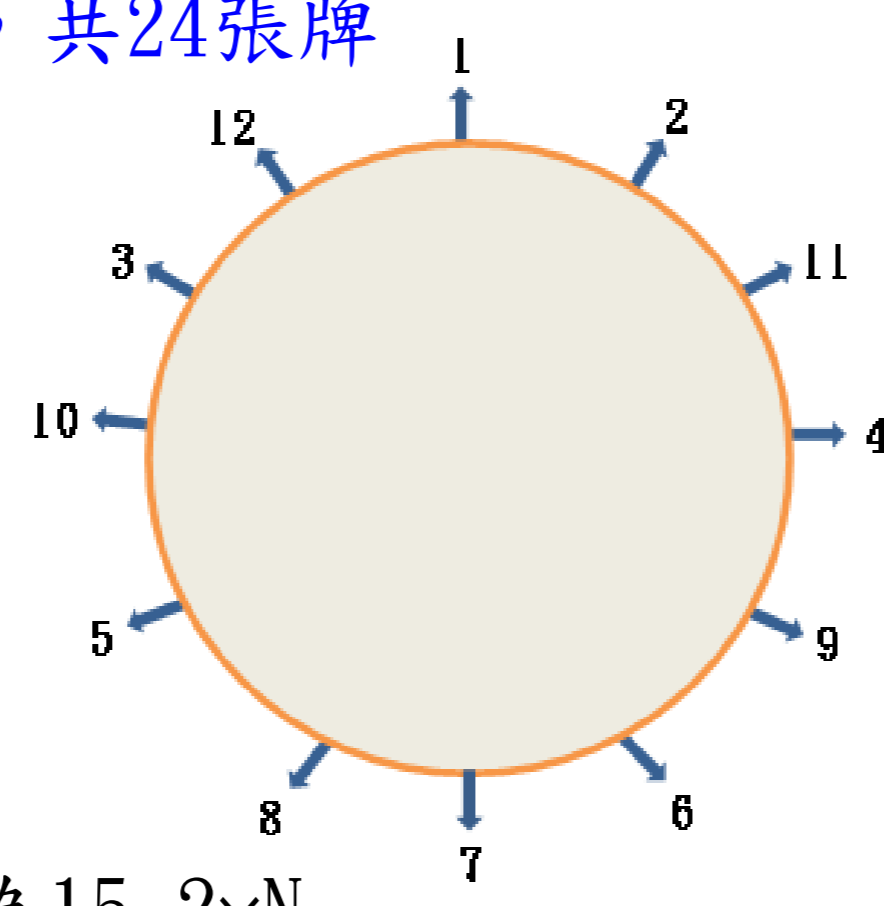
(2)逆時針轉動

偶數會轉到1

當 $2 \leq N \leq 6$ ，且 $N$ 為奇數時，終點數為 $2 \times N-1$

當 $7 \leq N \leq 12$ ，且 $N$ 為奇數時，終點數為 $2 \times N-13$

(3)當 $N$ 為7時，不管順、逆時針轉動，都會轉到1。



3-2：改變牌數，是否有終點數公式的一般式可尋找？

【定義符號】：

(一)  $M$ ：撲克牌數字的最大值

【步驟】：

把研究3-1的四種結果整理成表15來觀察：

表 15

撲克牌數字	順時針				轉動結果	
	第一組	第二組	第三組	第四組		
1~3 $M=3$	範圍( $N$ 為偶數) 終點數	$2 \leq N \leq 4$ $9-2 \times N$	$5 \leq N \leq 6$ $15-2 \times N$		奇數都會轉到1	
1~4 $M=4$	範圍( $N$ 為偶數) 終點數	$2 \leq N \leq 5$ $11-2 \times N$	$6 \leq N \leq 8$ $19-2 \times N$			
1~5 $M=5$	範圍( $N$ 為偶數) 終點數	$2 \leq N \leq 6$ $13-2 \times N$	$7 \leq N \leq 10$ $23-2 \times N$			
1~6 $M=6$	範圍( $N$ 為偶數) 終點數	$2 \leq N \leq 7$ $15-2 \times N$	$8 \leq N \leq 12$ $27-2 \times N$			
1~3 $M=3$	範圍( $N$ 為奇數) 終點數	$2 \leq N \leq 3$ $2 \times N-1$	$4 \leq N \leq 6$ $2 \times N-7$			偶數都會轉到1
1~4 $M=4$	範圍( $N$ 為奇數) 終點數	$2 \leq N \leq 4$ $2 \times N-1$	$5 \leq N \leq 8$ $2 \times N-9$			
1~5 $M=5$	範圍( $N$ 為奇數) 終點數	$2 \leq N \leq 5$ $2 \times N-1$	$6 \leq N \leq 10$ $2 \times N-11$			
1~6 $M=6$	範圍( $N$ 為奇數) 終點數	$2 \leq N \leq 6$ $2 \times N-1$	$7 \leq N \leq 12$ $2 \times N-13$			

【研究發現】：

(1)第一組：由相減法(差不變)可得公式： $L=2 \times M+3-2 \times N$ 。

驗證：當撲克牌數字最大為13時， $M$ 代入13，推得終點數公式為 $L=29-2 \times N$ ，與研究二結果相同。

(2)第二組：由相減法(差不變)可得公式： $L=4 \times M+3-2 \times N$ 。

驗證：當撲克牌數字最大為13時， $M$ 代入13，推得終點數公式為 $L=55-2 \times N$ ，與研究二結果相同。

(3)第三組：可得公式： $L=2 \times N-1$ 。

驗證：與研究二結果相同。

(4)第四組：由相減法(差不變)可得公式： $L=2 \times N-(2 \times M+1)$ 。

驗證：當撲克牌數字最大為13時， $M$ 代入13，推得終點數公式為 $L=2 \times N-27$ ，與研究二結果相同。

(5)順時針或逆時針都會轉到1的數字是： $M+1$

驗證：當撲克牌數字最大為13時， $M$ 代入13，可得數字14，與研究二結果相同。

(6)順時針奇數都會轉到1；逆時針偶數都會轉到1。

驗證：與研究二結果相同。

【研究一、研究二、研究三統整】：

終點數公式：

(1)順時針轉動

奇數會轉到1

當 $2 \leq N \leq M+1$ ，且 $N$ 為偶數時，終點數為 $2 \times M+3-2 \times N$

當 $M+2 \leq N \leq 2 \times M$ ，且 $N$ 為偶數時，終點數為 $4 \times M+3-2 \times N$

(2)逆時針轉動

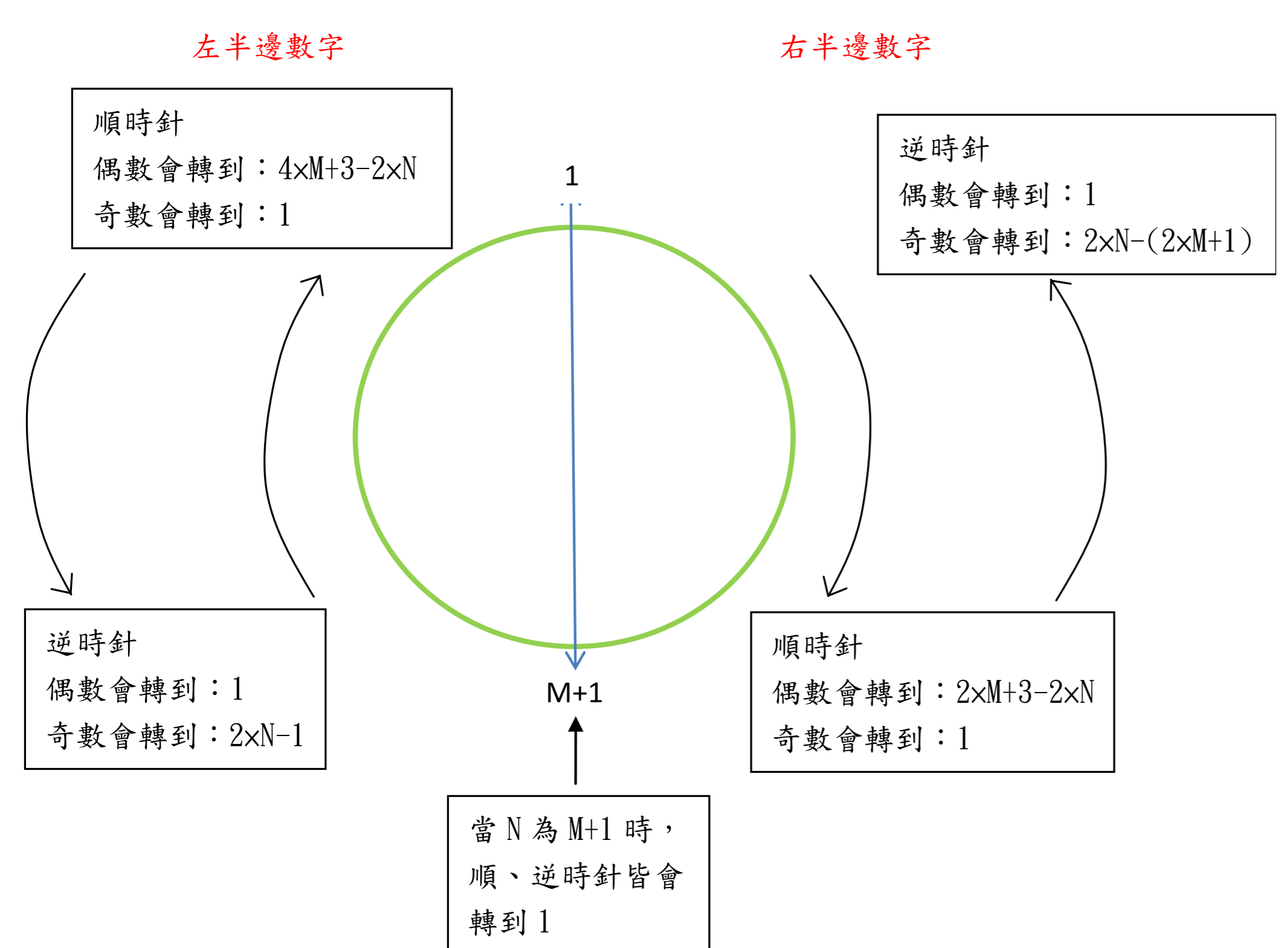
偶數會轉到1

當 $2 \leq N \leq M$ ，且 $N$ 為奇數時，終點數為 $2 \times N-1$

當 $M+1 \leq N \leq 2 \times M$ ，且 $N$ 為奇數時，終點數為 $2 \times N-(2 \times M+1)$

(3)當 $N$ 為 $M+1$ 時，不管順、逆時針轉動，都會轉到1。

(4)圖示終點數公式：以數字1和數字 $M+1$ 為中線，把圓盤分為右半邊數字和左半邊數字



#### 研究四、設計新規則

想法：在舊規則下，顧客就只有二種可能，付10元給老闆，或得到小獎，完全無法得到大獎。現在希望在不大幅度更改規則下，創立一個新規則，讓老闆可以賺錢，顧客也有機會中大獎。

想法一：簡化規則：只用順時針走法。

想法二：(1)因走 $N-1$ 步只能走到奇數數字，所以就把偶數數字獎品都刪除，可以減少成本或把剩下的獎項價值提高。(2)如果要再減少成本，可以減少盤面數字，但這邊想要讓盤面獎項看起來多且豐富，所以維持原本的數字組合。

想法三：研究每個奇數數字走到的機率，來決定獎品的分配。

【定義符號】：

(一)  $L_i$ ： $i$ 代表終點數，例如： $L_3$ 代表最後走到3

【研究過程】：

1. 研究問題：研究順時針時，各奇數數字走到的機率

終點數( $L_i$ )	$N$	組合	計算	機率
$L_1$	奇數	奇數有28張，偶數有24張，各挑一張的組合有： $28 \times 24 = 672$ 種	672	58.37%
		二張牌總和是14的組合： (1,13) (2,12) (3,11) (4,10) (5,9) (6,8) (7,7) $\Rightarrow 6$ 種 $4 \times 4 \times 6 = 96$ 種	96+6	
$L_3$	26	二張牌總和是26的組合： (13,13) $\Rightarrow 6$ 種	6	0.45%
$L_5$	12	二張牌總和是12的組合： (1,11) (2,10) (3,9) (4,8) (5,7) (6,6) $\Rightarrow 6$ 種 $4 \times 4 \times 6 = 80$ 種 (6,6) $\Rightarrow 6$ 種	80+6	6.49%

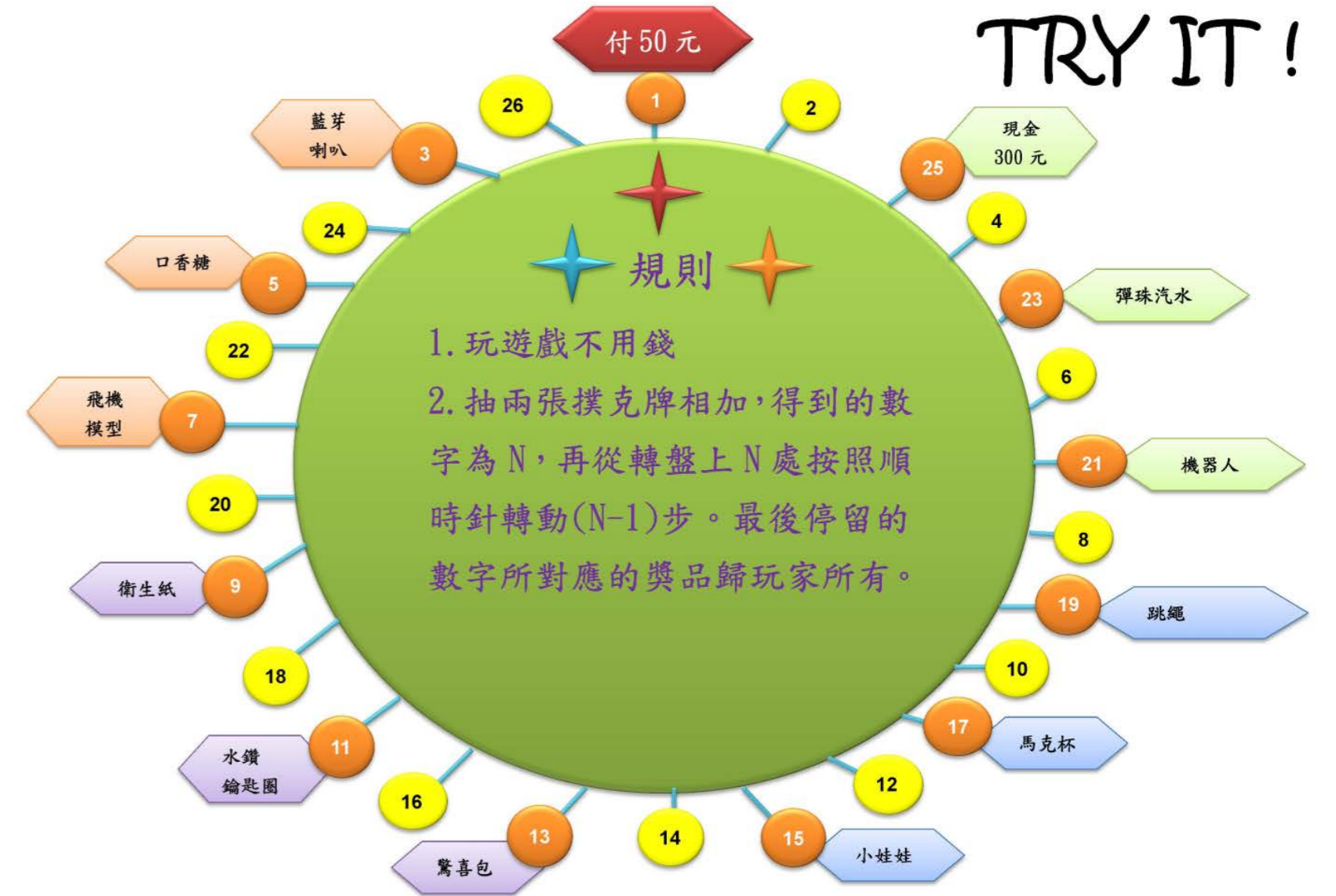
終點數( $L_i$ )	$N$	組合	計算	機率
$L_{15}$	20	二張牌總和是20的組合： (7,13) (8,12) (9,11) (10,10) $\Rightarrow 6$ 種 $4 \times 4 \times 6 = 48$ 種	48+6	4.07%
$L_{17}$	6	二張牌總和是6的組合： (1,5) (2,4) (3,3) $\Rightarrow 6$ 種 $4 \times 4 \times 6 = 32$ 種	32+6	2.87%
$L_{19}$	18	二張牌總和是18的組合： (5,13) (6,12) (7,11) (8,10) (9,9) $\Rightarrow 6$ 種 $4 \times 4 \times 6 = 64$ 種	64+6	5.28%
$L_{21}$	4	二張牌總和是4的組合： (1,3) (2,2) $\Rightarrow 6$ 種 $4 \times 4 = 16$ 種	16+6	1.66%

2. 分配獎品：

- 機率最高的數字分配給老闆。
- 機率愈低的數字，獎品價值愈高。

終點數( $L_i$ )	機率	獎品
$L_1$	58.37%	付給老闆50元
$L_5=L_{23}$	6.49%	口香糖、彈珠汽水
$L_9=L_{19}$	5.28%	跳繩、衛生紙
$L_{13}=L_{15}$	4.07%	驚喜包、小娃娃
$L_{11}=L_{17}$	2.87%	水鑽鑰匙圈、馬克杯
$L_7=L_{21}$	1.66%	機器人、飛機模型
$L_3=L_{25}$	0.45%	藍芽喇叭、現金300元

3. 新遊戲圖



## 陸、結論

一、終點數公式：

(1)順時針轉動

奇數會轉到1

當 $2 \leq N \leq M+1$ ，且 $N$ 為偶數時，終點數為 $2 \times M+3-2 \times N$

當 $M+2 \leq N \leq 2 \times M$ ，且 $N$ 為偶數時，終點數為 $4 \times M+3-2 \times N$

(2)逆時針轉動

偶數會轉到1

當 $2 \leq N \leq M$ ，且 $N$ 為奇數時，終點數為 $2 \times N-1$

當 $M+1 \leq N \leq 2 \times M$ ，且 $N$ 為奇數時，終點數為 $2 \times N-(2 \times M+1)$

(3)當 $N$ 為 $M+1$ 時，不管順、逆時針轉動，都會轉到1。

(4)順時針奇數都會轉到1；逆時針偶數都會轉到1。

二、設計新規則

用順時針走法，任意抽兩張撲克牌相加，( $A:1, J:11, Q:12, K:13$ )得到的數字為 $N$ ，再從轉盤上 $N$ 處按照順時針方向走 $(N-1)$ 步，最終走到的數字為 $L_i$ ，探討終點數的機率來分配獎品：

終點數( $L_i$ )	機率
$L_1$	58.37%
$L_5=L_{23}$	6.49%
$L_9=L_{19}$	5.28%
$L_{13}=L_{15}$	4.07%
$L_{11}=L_{17}$	2.87%
$L_7=L_{21}$	1.66%
$L_3=L_{25}$	0.45%

## 柒、心得

- 經研究之後，瞭解了一個簡單的輪盤遊戲，背後也有這麼多的數學知識和規律，也讓我學習到，看到問題應該去面對，思考問題的解決辦法，生活上遇到任何的難題時，只要回想自己解決數學問題的態度，應用到生活上，透過不斷的思考、連結所有可能的方案，最後便有機會解決遇到的難題。
- 由此遊戲可看出，任何賭博遊戲都是精算後的結果，老闆不會做賠錢的生意，世上沒有系統能夠打敗機率論，世界上沒有一種方法可以打敗純機率的賭博，短期投注可以靠運氣，長遠來說是不可能抵擋機率的侵蝕，我想用科學的方法從數學角度讓人們意識到，天下沒有白吃的午餐，幸福要靠自己的辛勤去獲得。

## 捌、參考資料

- |           |       |       |       |
|-----------|-------|-------|-------|
| 國小數學科各種版本 | 康軒出版社 | 南一出版社 | 翰林出版社 |
| 國中數學科各種版本 | 康軒出版社 | 南一出版社 | 翰林出版社 |