中華民國第59屆中小學科學展覽會
作品說明書

國小組　數學科

第三名

080403

翻滾吧！正方形—探討正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值。

學校名稱：彰化縣彰化市中山國民小學

作者：	指導老師：
小六　廖宥翔	陳瑩柔
小六　林艾彤	謝宜蓁
小六　田宜禾	
小六　蔡敦尹	

關鍵詞：奇偶性、相似三角形、插旗法

摘 要

本研究在探討n×n正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值及計數方法，藉由觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗與論證的探究過程，發現透過插旗法、相似三角形的性質、正方形網格的奇偶性及網點構成正方形邊長長度的最大公因數，可發展出n×n正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量最大值之計數方法，並發展出計數公式如下：

一、當n為偶數(2k)，其計數公式分為三類：

1.2×2、4×4和6×6 (2k×2k，k=1，2，3時)：$[(k+1)\times(k+1)-(k+1)]\times4+k\times4$。

2.8×8以上(2k×2k，且k為偶數)：$\{[(k-1)+1]\times[(k+1)+1]-2\}\times4+(k-1)\times4$。

3.8×8以上(2k×2k，且k為奇數)：$\{[(k-1)+1]\times[(k+1)+1]-3\}\times4+(k-1)\times4$。

二、當n為奇數(2k+1)，其計數公式為：$\{(k+1)\times[(k+1)+1]-2\}\times4+k\times4$。

壹、 研究動機

有一天，我們發現一個有趣的數學題目，題目是：在 6×6 的方格表中，正方形 EFGH 的位置如圖 1-1-1 所示，請問圖中總共有多少個小直角三角形的三邊都落在格線或正方形 EFGH 的邊上，且與圖上陰影的小直角三角形對應內角相等？(圖中塗上陰影的小三角形也算其中一個)。

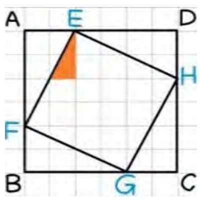


圖 1-1-1 原始題目示意圖

我們開開心心的算出了此題目的答案，卻想出可以再把它擴大延伸，這個數學問題引發了我們的注意，於是，我們開始進行「翻滾吧！正方形」的研究，決定深入探討，以了解其奧秘。

貳、 名詞釋義

一、相似三角形：當兩個三角形的三個對應角相等，如圖 2-1-1 中的三角形 AEF 與三角形 JEK 的三個對應角相等，即∠A=∠J、∠F=∠K 且共用∠E，或兩個三角形的三個對應邊成比例，如圖 2-1-2 中，$\overline{PQ}$：$\overline{EM}$ =$\overline{FQ}$：$\overline{FM}$=$\overline{PF}$：$\overline{EF}$ =1：2，就可推得兩個三角形相似。

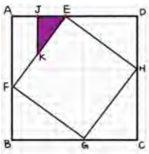


圖 2-1-1 對應角相等的ΔAEF 和ΔJEK

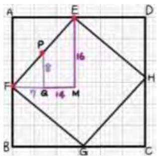


圖 2-1-2 對應邊比例相等的ΔEFM 和ΔPFQ

二、合法的直角三角形：小直角三角形的三邊，都需落在正方形網格 ABCD 的格線或正方形 EFGH 的邊上，如圖 2-1-3 所示。

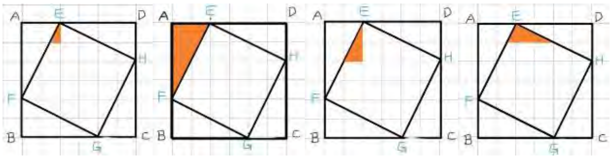


圖 2-1-3 合法的直角三角形

三、插旗法：為了方便表示圖形，我們將斜邊落在正方形 EFGH 邊上的直角三角形，用插旗法表示，如圖 2-1-4 所示，我們將這個橘色的直角三角形直角的頂點，以紫色的點來表示。依此類推，我們也可以將其他斜邊落在 EFGH 邊上的直角三角形直角的頂點都以插旗法標示出來，如圖 2-1-5 所示，即我們將所有斜邊在$\overline{EF}$上的直角三角形直角的頂點都用紫色的點來表示。

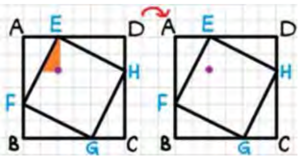


圖 2-1-4 以插旗法表示圖形的方法

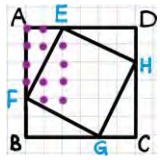


圖 2-1-5 將所有斜邊在$\overline{EF}$上的直角三角形用插旗法表示

參、 研究目的

一、發展 2×2、3×3、4×4、5×5、6×6…n × n正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值之計數方法。

二、探討 2×2、4×4、6×6…n × n(n 為偶數)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值。

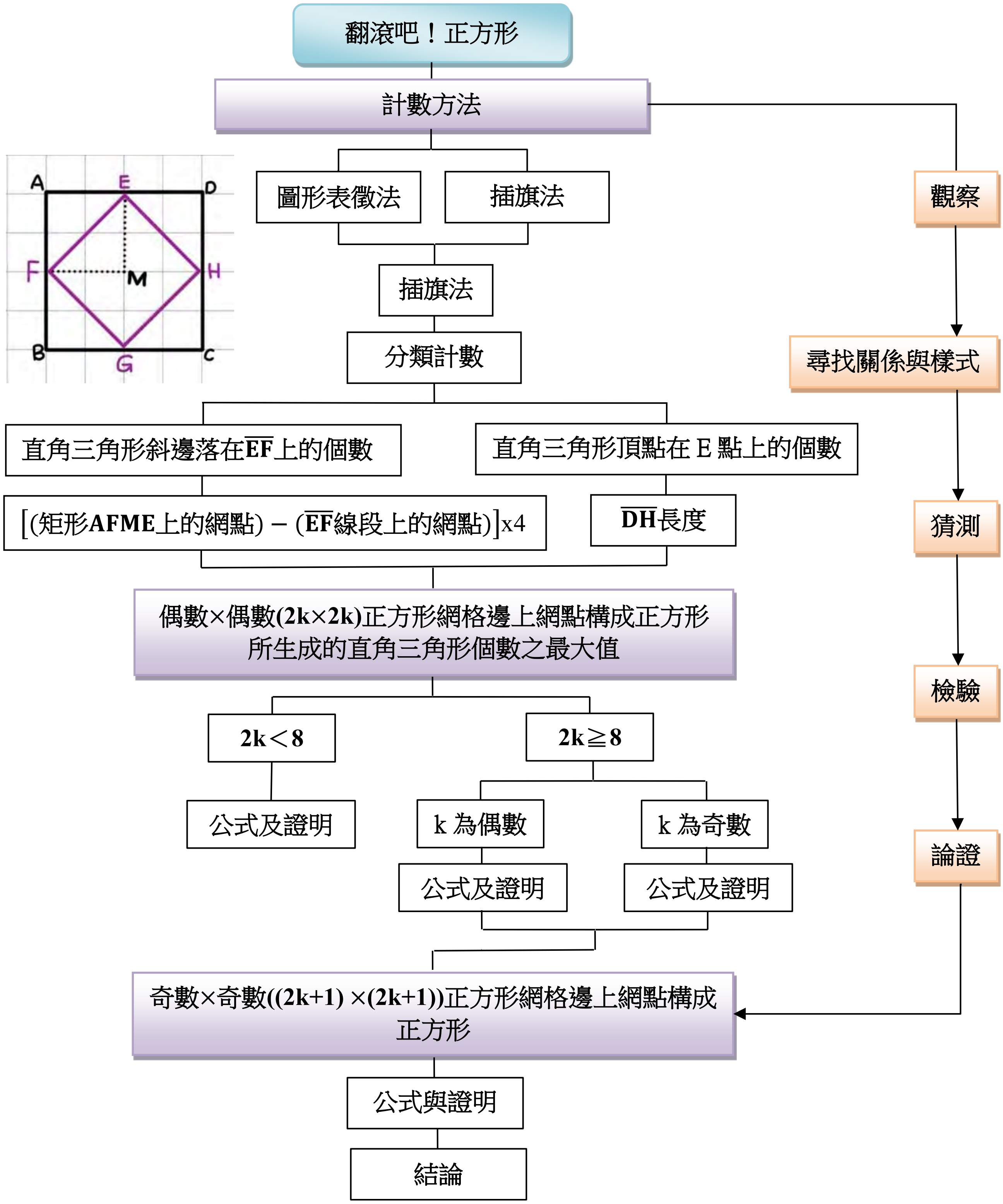
三、探討 3×3、5×5、7×7…n × n(n 為奇數)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值。

肆、研究設備及器材

繪圖軟體 Doceri、筆、電腦、平板電腦、方格紙。

伍、研究過程及方法

一、研究架構與流程圖



二、研究過程

(一) 發展 2×2、3×3、4×4、5×5、6×6…n × n正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量最大值之計數方法。

1.觀察：

原始題目的敘述是：在 6×6 的網格中，正方形 EFGH 的位置如圖 5-2-1 所示，請問圖中總共有多少個小直角三角形的三邊都落在格線或正方形 EFGH 的邊上，且與圖上陰影的小三角形對應內角相等？(圖中塗上陰影的小三角形也算其中一個)。

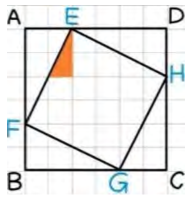


圖 5-2-1 原始題目示意圖

我們由題目中得知：6×6 的網格中，符合題目要求的直角三角形的三邊，都需落在格線或正方形 EFGH 的邊上，且與圖上的小三角形對應內角相等，合法的直角三角形如圖 5-2-2 所示，而我們在找這些合法的直角三角形的過程中，也同時發現有一些圖是違反以上的規則，即使它們是直角三角形，因為有一個邊是沒有在正方形邊上，或是沒有在網格格線上，所以是不合法的，我們不能把這些直角三角形列入計數，如圖 5-2-3 所示。

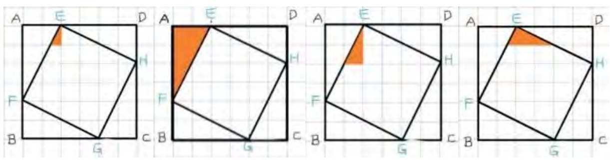


圖 5-2-2 符合題目要求的合法直角三角形

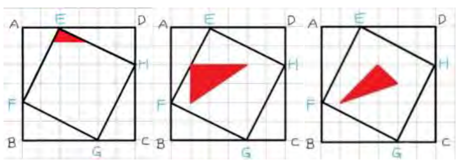


圖 5-2-3 不符合題目要求的不合法直角三角形

2.尋找關係與樣式：

了解題目的要求之後，我們開始嘗試在 6×6 的網格中，找出符合題目要求的合法直角三角形，我們發現可將這些直角三角形的類型分為兩種類型進行探討，第一種類型是斜邊落在正方形 EFGH 邊上的直角三角形，當直角三角形的斜邊落在$\overline{EF}$線段上，會形成許多直角落在網格節點上的直角三角形，其兩股邊長會分別與$\overline{AF}$線段及$\overline{AE}$線

段平行，且其角的角度都與∠A、∠E、∠F 相等，而這些三角形就是與三角形 AEF 相似的合法直角三角形，因此在第一種類型中總共可以找到 **12** 個相似合法直角三角形，如圖 5-2-4 所示，第二種類型是直角三角形的斜邊在網格格線上，且直角落在正方形 EFGH 的∠E 上，就會再形成了 2 個相似的直角三角形，如圖 5-2-5 所示。

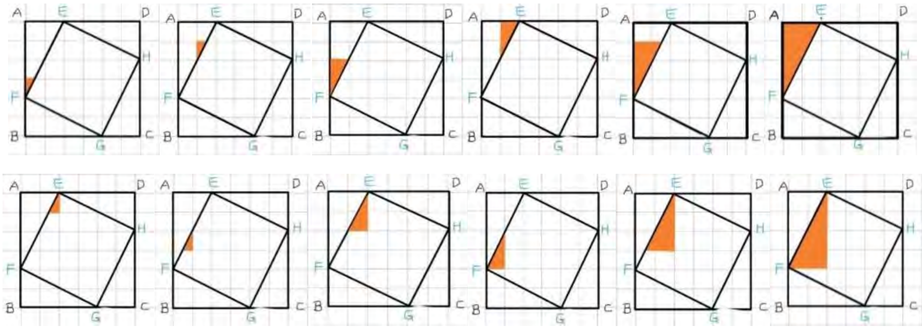


圖 5-2-4 斜邊在正方形 EFGH 上的合法直角三角形(第一類型)

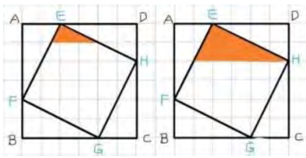


圖 5-2-5 斜邊在網格格線上，且直角落在正方形 EFGH 的∠E 上的合法直角三角形(第二類型)

此外，根據我們在五下數學課本中所學到的圖形旋轉對稱(即中心對稱)原理，如圖 5-2-6 所示，我們發現在計算第一類型的直角三角形時，只要把正方形 EFGH 其中一邊上的直角三角形的個數算出來後，再乘以四，就可得知四個邊的直角三角形總個數，也就是 12×4=48，而第二類型是直角落在正方形 EFGH 的∠E 上的直角三角形，只要把正方形 EFGH 其中一角上的直角三角形的個數算出來後，再乘以四，就可得知四個角的直角三角形總個數，也就是 2×4=8，最後將第一類型與第二類型的直角三角形數量相加，所以總數是 56 個。

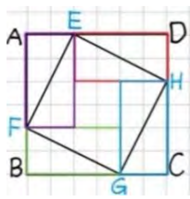


圖 5-2-6 圖形旋轉對稱原理

在處理完這個問題之後，我們又發現如果調整 E、F 兩點的位置，就可以改變$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的大小，而形成網格上的新正方形 EFGH，於是我們把$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段從原有的 2 單位、4 單位改成 3 單位、3 單位，如圖 5-2-7 所示，並開始研究其中所形成的合法直角三角形。

圖 5-2-7 $\overline{AE}$與$\overline{AF}$線段從 2 單位、4 單位改成 3 單位、3 單位

我們發現在這一個新的正方形 EFGH(如圖 5-2-7 的右圖)中，第一類型的直角三角形，也就是斜邊落在正方形 EFGH 邊上的直角三角形個數，與原題目相同，一邊上的直角三角形的個數皆為 12 個，總個數皆為 48 個，如圖 5-2-8 所示，但是在計算第二類型的直角三角形時，也就是直角落在正方形 EFGH 的∠E 上的直角三角形，發現由於每個角皆可找到 3 個直角三角形，四個角總個數會增加為 12 個，如圖 5-2-9 所示，最後將第一類型與第二類型的直角三角形數量相加，總數是 60 個，居然比原題目還要多個！這讓我們非常驚訝，我們想知道為何調整正方形 EFGH 中 E、F 兩點的位置會產生合法直角三角形的數量變化？是否只要$\overline{AE}$與$\overline{AF}$線段相等，在網格中可找到的合法直角三角形數量就是最多的？如果把正方形 ABCD 網格的邊長變大，在其他的偶數網格中，也有這樣的現象嗎？

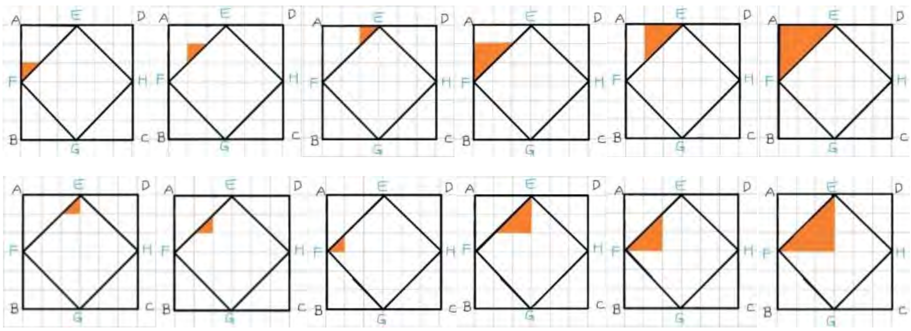


圖 5-2-8 斜邊在正方形 EFGH 上的合法直角三角形(第一類型)

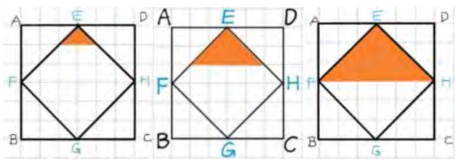


圖 5-2-9 斜邊在網格格線上，且直角落在正方形 EFGH 的∠E 的合法直角三角形(第二類型)

3.猜測：

透過觀察及尋找關係，我們猜測只要調整正方形 EFGH 中 E、F 兩點的位置，其中所形成的合法直角三角形的數量就會產生變化，以 6×6 的正方形網格 ABCD 為例，透過調整正方形 EFGH 中 E、F 兩點的位置，就可以產生 3 種不同類型的正方形 EFGH，如圖 5-2-10 所示。為了研究這個問題，我們發現如果繼續土法煉鋼，並用圖形表示每一個找到的直角三角形，雖然因為圖形旋轉對稱的關係，只要數出正方形

EFGH 的一邊或一角的直角三角形，就可以得知直角三角形的總個數，但之後隨著正方形變大，也會因數量繁多而造成計數困難，而且必須畫很多圖。

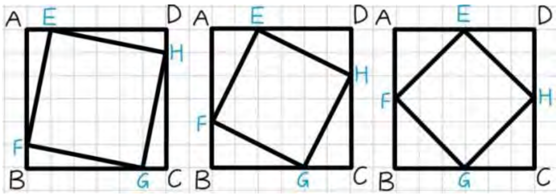


圖 5-2-10 調整正方形 EFGH 中 E、F 兩點的位置所產生不同類型的正方形

這個難題令我們非常困擾，於是我們跟老師一起討論研究後，老師建議我們利用插旗法來處理圖形表示的問題，所以，我們將第一類型的直角三角形，也就是斜邊在正方形 EFGH 邊上的直角三角形，用插旗法表示，如此一來，我們就能更快速的表示圖形，利用一個點表示一個圖，如圖 5-2-11 所示。依此類推，我們可以將其他斜邊落在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形以插旗法標示出來，如圖 5-2-12 所示

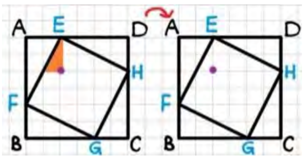


圖 5-2-11 以插旗法表示圖形的方法

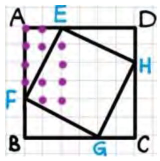


圖 5-2-12 將所有斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形以插旗法表示

4.檢驗：

我們在了解了插旗法的好處之後，開始透過插旗法檢驗 6×6 的正方形網格 ABCD 邊上網點構成正方形 EFGH 所生成的相似合法直角三角形數量，我們將$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為 1 單位、5 單位和 2 單位、4 單位和 3 單位、3 單位的正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形數量以插旗法標出，如圖 5-2-13 所示，在運用插旗法的過程中，我們發現由於正方形 ABCD 及正方形 EFGH 皆為旋轉對稱圖形，所以只要將正方形網格 ABCD 內四個直角中的一個直角上的節點標出，再扣掉$\overline{EF}$線段上的所有節點個數，因為這些節點已經位於$\overline{EF}$線段上，無法形成斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形，就可快速地算出其中一個斜邊在正方形 EFGH 邊上的合法直角三角形個數，又因為正方形 EFGH 有四個邊，所以再乘以 4，就可以得出正方形 EFGH 邊上所有第一類型的合法直角三角形的總個數。

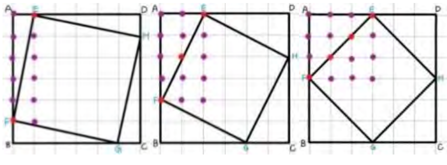


圖 5-2-13 以插旗法標示出不同類型的正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形數量

此外，針對直角落在正方形 EFGH 上的合法直角三角形，我們觀察到這一類的合法直角三角形的個數，與$\overline{AE}$線段或$\overline{AF}$線段兩個線段中較短邊的長度有關，如圖 5-2-14 所示，舉例來說，如果$\overline{AE}$線段及$\overline{AF}$線段分別為 1 單位、5 單位，其中最短的邊為 1 單位，所以它所形成的第二類型合法直角三角形共有 1 個；如果$\overline{AE}$線段及$\overline{AF}$線段皆為 3 單位，其中的最短邊也是 3 單位，所以它所形成的第二類型合法直角三角形共有 3 個。

所以只要運用插旗法以及觀察$\overline{AE}$線段或$\overline{AF}$線段兩個線段中較短邊的長度，就可以算出不同類型的正方形 EFGH 所形成的所有合法直角三角形數量。

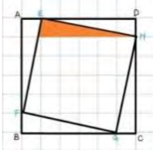
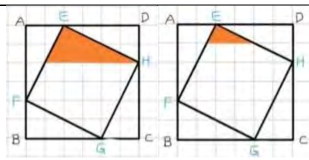
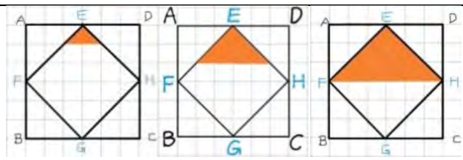
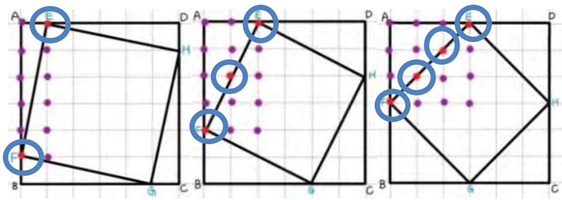
$\overline{AE}$及$\overline{AF}$的長度為	合法直角三角形	數量
1 單位、5 單位		1
2 單位、4 單位		2
3 單位、3 單位		3

圖 5-2-14 不同類型的正方形 EFGH 所形成的第二類型合法直角三角形數量。

5.論證：

我們在計算所有斜邊在正方形 EFGH 上的合法直角三角形個數時，發現還有一個麻煩的問題尚未解決，就是如何找出通過$\overline{EF}$線段上的所有節點個數，因為這些節點已經位於$\overline{\mathrm{EF}}$線段上，無法形成斜邊線段在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形，而不同類型的正方形 EFGH 其$\overline{EF}$線段上的所有節點個數不同。像是在 6×6 的正方形網格 ABCD 中，不同類型的正方形 EFGH，如圖 5-2-15 中的 A 圖、B 圖及 C 圖，其$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點分別 2 個、3 個以及 4 個，如圖 5-2-15 圈起的紅色點所示，我們想知道為何會這樣？如何快速得知不同類型的正方形 EFGH 其$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數並扣除，而非只能看圖形一一點數? 而且每一個圖形必須扣掉的節點都不一樣，在更大的圖形中，我們該如何準確地算出必須扣掉的節點數？



A 圖　　　　B 圖　　　　C 圖

圖 5-2-15 不同類型的正方形 EFGH 其$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點

為了探討這個問題，我們將圖 5-2-15 的 B 圖加以分析，發現在 6×6 的正方形網格 ABCD 中，因為$\overline{JK}$線段與$\overline{AF}$線段平行，所以三角形 AEF 與三角形 JEK 三組對應角相等，因此可以推得三角形 AEF 與三角形 JEK 相似，如圖 5-2-16 所示。在圖 5-2-16 中，我們可推論$\overline{EJ}$：$\overline{EA}$=$\overline{JK}$：$\overline{AF}$=1：2，因此，我們推論出 K 點不只落在$\overline{EF}$線段上，也會落在網格的節點上，所以在計算所有斜邊在正方形 EFGH 上的合法直角三角形個數時，因為 K 點已經位於線段$\overline{EF}$線段上，無法形成斜邊線段在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形，所以要扣除的點除了原有的 E 點與 F 點，還要再扣除兩者之間的 K 點，總共 3 點。

此外，我們也將圖 5-2-15 的 C 圖加以分析，發現在 6×6 的正方形網格 ABCD 中，因為$\overline{JK}$線段、$\overline{LM}$線段與$\overline{AF}$線段平行，所以三角形 JEK、三角形 LEM 與三角形 AEF 三組對應角相等，因此可以推得三角形 JEK、三角形 LEM 與三角形 AEF 相似，如圖 5-2-17 所示。在圖 5-2-17 中，我們可推論$\overline{EJ}$：$\overline{EA}$ = $\overline{\mathrm{JK}}$：$\overline{\mathrm{AF}}$ =1：3，且$\overline{EL}$：$\overline{EA}$ = $\overline{LM}$：$\overline{\mathrm{AF}}$ =2：3，因此，我們推論出 K 點與 M 點不只落在$\overline{EF}$線段上，也會落在網格的節點上，所以在計算所有斜邊在正方形 EFGH 上的合法直角三角形個數時，因為 K 點與 M 點已經位於$\overline{EF}$線段上，無法形成斜邊線段在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形，所以要扣除的點除了原有的 E 點與 F 點，還要再扣除兩者之間的 K 點與 M 點，總共 4 點。

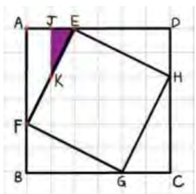


圖 5-2-16 B 圖中的兩個相似三角形

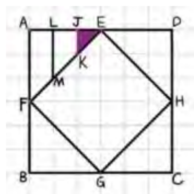


圖 5-2-17 C 圖中的三個相似三角形

由以上論證可得知，透過觀察與三角形 AEF 相似，且兩個直角邊落在網格線上而斜邊落在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數，就可以推知$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數，因為這些節點已經位於$\overline{EF}$線段上，無法形成斜邊線段在$\overline{EF}$線段上的合法直

角三角形，所以在使用插旗法計算斜邊線段在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數時，我們就可以根據上述作法，找出$\overline{EF}$線段上須要扣除的網格節點個數，並再扣除 E 點與 F 點。

(二) 探討 2×2、4×4、6×6⋯n × n(n 為偶數)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值。

1.觀察：

我們在了解了 2×2、3×3、4×4、5×5、6×6…n × n正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之計數方法後，接下來我們想知道偶數正方形網格中，哪一種邊上網點構成正方形所形成的合法直角三角形個數會是最大值？我們先把 6×6 正方形網格 ABCD 裡正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數算出來，我們發現當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 1 單位及 5 單位時，小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數有 44 個，當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 2 單位及 4 單位時，小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數有 56 個，當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 3 單位及 3 單位時，小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數有 60 個，我們觀察到當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等的時候，小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數會是最大值，因此，我們很好奇在其他規格的正方形網格中，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等的時候，是否所形成的合法直角三角形個數就會是最大值？

我們從 2×2 與 4×4 的正方形網格開始研究，發現由 2×2 正方形網格 ABCD 邊上網點所構成的小正方形 EFGH 只有一種類型，其形成的$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度相等，分別為 1 單位及 1 單位，而其中所形成的合法直角三角形個數有 12 個，是正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數之最大值，計算過程如圖 5-2-18 所示；此外，我們也觀察了 4×4 的正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數，當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 1 單位及 3 單位時，小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數有 28 個，當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 2 單位及 2 單位時，小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數有 32 個。

我們發現: 2×2 與 4×4 的正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數之最大值，也跟 6×6 正方形網格相同，即當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等時，小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數會是最大值，計算過程如圖 5-2-18 及圖 5-2-19 所示。

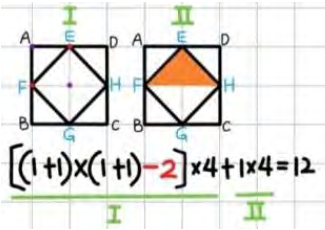


圖 5-2-18 2×2 的計數過程

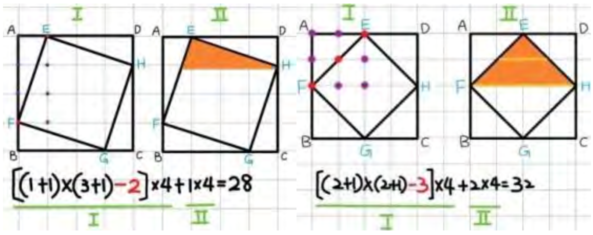


圖 5-2-19 4×4 的計數過程

2.尋找關係與樣式：

接著，我們繼續研究由 8×8 的正方形網格 ABCD 邊上網點所構成的不同類型小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數。當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 1 單位及 7 單位時，小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數有 60 個，當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 2 單位及 6 單位時，小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數有 80 個，當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 3 單位及 5 單位時，小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數有 100 個，當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 4 單位及 4 單位時，小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數有 96 個，計數過程如圖 5-2-20 所示。

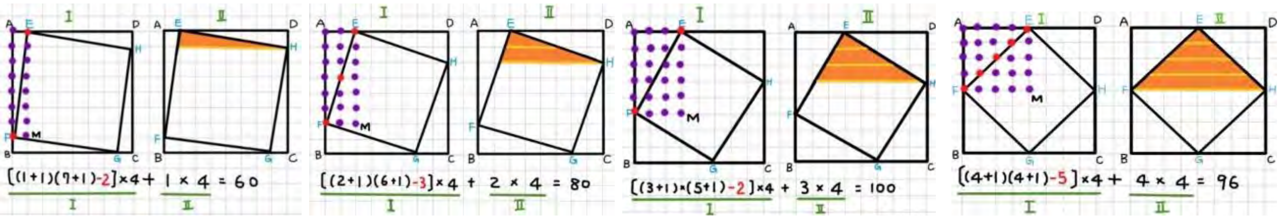


圖 5-2-20 8×8 的正方形網格 ABCD 邊上網點所構成不同類型小正方形 EFGH 所形成的直角三角形的計數過程

我們發現：在 8×8 的正方形網格 ABCD 中，當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等時(即 4 單位及 4 單位)，所形成的合法直角三角形數量會比 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 3 單位及 5 單位時還來的少，如表 5-2-1 所示，與上述在計數 2×2、4×4 和 6×6(2k×2k，k=1，2，3 時)的正方形網格 ABCD 邊上網點所構成不同類型小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數時所發現的現象不同，在 8×8 的正方形網格 ABCD 中，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等時，所形成的合法直角三角形數量並非最大值，8×8 的正方形網格 ABCD 中所形成的合法直角三角形數量最大值，會出現在$\overline{AE}$線段、$\overline{AF}$線段的長度為 3 單位及 5 單位的正方形類型中。

表 5-2-1 8×8 的正方形網格 ABCD 邊上網點所構成不同類型小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數及$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數

$\overline{AE}$線段	$\overline{AF}$線段	不同類型的正方形 EFGH 所形成的直角三角形數量	線段$\overline{EF}$上的所有節點個數	$\overline{EF}$線段上需扣除的節點個數
1	7	60	2	2
2	6	80	3	3
3	5	100	2	2
4	4	96	5	5

這個發現讓我們很驚訝，其推翻了之前所觀察的現象，為了研究這個問題，我們將偶數正方形網格 ABCD 的邊長以 2k 表示，並將正方形網格 ABCD 邊長對半分後的長度設為 k，由於 E 點及 F 點的移動會產生不同類型的正方形，以 8×8 的正方形網格為例，邊長為 8 單位， k 為 4 單位，此時，$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度可能皆為 k 單位，也可能是 (k-1) 單位和 (k+1) 單位、(k-2) 單位和 (k+2) 單位或 (k-3) 單位和 (k+3) 單位，如表 5-2-2 所示。

透過研究表 5-2-2 我們發現，不同類型的正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形數量最大值，必定不會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為 (k-2) 單位和 (k+2) 單位或 (k-3) 單位和 (k+3) 單位的圖形中。因為在計算斜邊線段在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數時，算式為[(矩形 AFME 上的網格節點)− ($\overline{EF}$線段上的網格節點)]×4，由表 5-2-2 可得知，8×8 的正方形網格 ABCD 中所形成的合法直角三角形數量最大值為當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為 (k-1) 單位和 (k+1) 單位時，其斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數為$\{[(k-1)+1] \times [(k+1)+1] - 2\} \times 4$，即$[(k^2+2k)-2] \times 4$，共有 88 個；當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為(k-2) 單位 和 (k+2) 單位，其斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數為$\{[(k-2)+1] \times [(k+2)+1] - 3\} \times 4$，即$[(k^2+2k)-6] \times 4$，共有 72 個，其斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數必定比$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為 (k-1) 單位和 (k+1) 單位時還要少；而當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為 (k-3) 單位 和 (k+3) 單位時，斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數為$\{[(k-3)+1] \times [(k+3)+1] - 2\} \times 4$，即$[(k^2+2k)-10] \times 4$，共有 56 個，其斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數亦必定比$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為 (k-1) 單位和 (k+1) 單位時還要少。因此，由表 5-2-2 第一類型合法直角三角形算式簡化、第二類型合法直角三角形算式及個數、合法直角三角形總數算式簡化，我們知道在觀察不同類型的正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形數量最大值時，只要考慮$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段皆為 k 單位，以及$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為(k-1) 單位和(k+1) 單位的情況，其餘類型的$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段就可以不用

列入討論。

表 5-2-2 8×8 的正方形網格 ABCD 邊上網點所構成不同類型小正方形 EFGH 所形成斜邊在 $\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數之計數過程(k＝4)

$\overline{AE}$線段	$\overline{AF}$線段	第一類型合法直角三角形:斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數的算式	第一類型合法直角三角形:算式簡化	第一類型合法直角三角形個數	第二類型合法直角三角形算式及個數	合法直角三角形總數:算式簡化	合法直角三角形總數
k-3	k+3	{[(k-3)+1] ×[(k+3)+1]-2}×4 ＝[(k^2+2k-8)-2]×4	(k^2+2k-10)×4	56	4 (算式：(k-3)×4)	(k^2+2k) ×4-36	60
k-2	k+2	{[(k-2)+1] ×[(k+2)+1]-3}×4 ＝[(k^2+2k-3)-3]×4	(k^2+2k-6)×4	72	8 (算式：(k-2)×4)	(k^2+2k) ×4-16	80
k-1	k+1	{[(k-1)+1] ×[(k+1)+1]-2}×4 ＝[(k^2+2k)-2]×4	(k^2+2k-2)×4	88	12 (算式：(k-1)×4)	(k^2+2k) ×4+4	100
k	k	{[(k)+1] ×[(k)+1]-5}×4 ＝[(k^2+2k+1)-5]×4	(k^2+2k-4)×4	80	16 (算式：k × 4)	(k^2+2k) ×4	96

接著，我們繼續探討 10×10、12×12 的正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數，觀察是否會跟 8×8 正方形網格的結果一樣？在 10×10 的正方形網格 ABCD 邊上網點所構成不同類型小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數中，當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 4 單位及 6 單位時，小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數有 144 個，當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 5 單位及 5 單位時，小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數有 140 個，計數過程如圖 5-2-21 所示。

我們發現：在 10×10 的正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數中，當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 4 單位及 6 單位時，所形成的合法直角三角形數量會比 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等時(即 5 單位及 5 單位)還來的多。

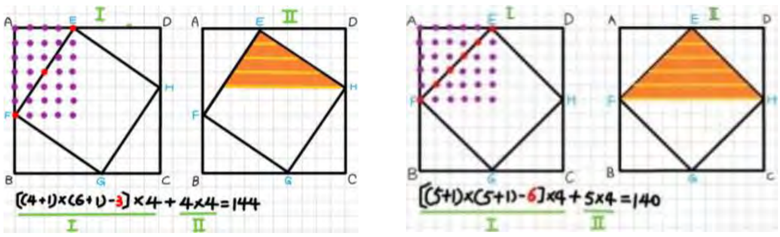


圖 5-2-21 10×10 的正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形的計數過程

在 12×12 的正方形網格 ABCD 邊上網點所構成不同類型小正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形個數中，當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 5 單位及 7 單位時，小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數有 204 個，當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 6 單位及 6 單位時，小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數有 192 個，計算過程如圖 5-2-22 所示。

我們也發現：在 12×12 的正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數中，當 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為 5 單位及 7 單位時，所形成的合法直角三角形數量會比 $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等時(即 6 單位及 6 單位)還來的多。

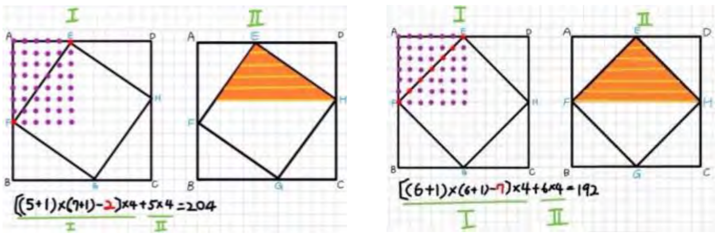


圖 5-2-22 12×12 的正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形的計數過程

此外，我們在研究 12×12 的正方形網格 ABCD 邊上網點所構成不同類型小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數的最大值時，也發現$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數，和 8×8 的正方形網格中的情形一樣，都是扣除兩個點，即 E 點和 F 點，但是我們是如何確認$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數除了 E 點及 F 點 2 個點以外，沒有通過其他的網格節點呢？在前述研究中我們都是透過觀察來計數通過$\overline{EF}$線段的網格節點個數，但是當網格變大時，若是持續以觀察法來計數，就會不小心把沒通過$\overline{EF}$線段的網格節點誤判為有通過$\overline{EF}$線段，讓我們很困擾。以 12×12 的正方形網格為例，如果用觀察法來計數，就會以為$\overline{EF}$線段上的 P 點位於網格節點上，如圖 5-2-23 所示。因此，我們透過觀察三角形的相似性質來解決這個問題，在圖 5-2-23 中，三角形 FPQ 及三角 FEM 為相似三角形，且$\overline{FQ}$：$\overline{FM}$=$\overline{PQ}$：$\overline{EM}$ =$\overline{FP}$：$\overline{FE}$ =3：5，已知$\overline{PQ}$：$\overline{EM}$ = 3：5，當$\overline{EM}$線段長度為 7 單位，$\overline{PQ}$線段的長度應為4.2(即 $7 \times \frac{3}{5}$)，正因為網格上的每個節點都為整數，所以可以得知：P 點雖然位於$\overline{EF}$線段上，但卻沒有通過任何

的網格節點，由此可證明$\overline{EF}$線段通過的網格節點個數只有 E 點及 F 點 2 個點。

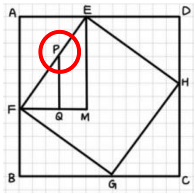


圖 5-2-23 $\overline{EF}$線段與 P 點的關係圖

透過上述探究過程，我們確認在 10×10、12×12 的正方形網格 ABCD 中，在計算小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數時，與 8×8 的正方形網格 ABCD+有同樣的現象，即最大值皆會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為 $(\mathrm{k}-1)$ 單位和 $(\mathrm{k}+1)$單位的圖形中。

3.猜測：

透過觀察、尋找關係與樣式後，對於偶數×偶數(2k×2k)正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數之最大值，依據正方形 ABCD 的邊長長度，分為兩類，第一類為 2×2、4×4 和 6×6(2k×2k，k=1，2，3 時)的正方形網格 ABCD，而第二類為 8×8 以上(2k×2k，k≥ 4)的正方形偶數網格 ABCD。我們發現在第一類 2×2、4×4 和 6×6(2k×2k，k=1，2，3 時)的正方形網格 ABCD 中，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為正方形網格 ABCD 邊長對半分時(即 k 單位)，可在圖形上找到所形成的合法直角三角形個數之最大值。而在第二類 8×8 以上(2k×2k，k≥ 4)的正方形偶數網格 ABCD 中，我們猜測：正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數最大值，則會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為 $(\mathrm{k}-1)$ 單位和 $(\mathrm{k}+1)$ 單位時。

為了確認我們的猜測是成立的，我們又繼續探討了 14×14 與 16×16 的正方形網格 ABCD 內正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數的最大值，如圖 5-2-24、圖 5-2-25 所示，發現也符合我們的猜測，正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數的最大值皆會出現在：$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為 $(\mathrm{k}-1)$ 單位和 $(\mathrm{k}+1)$ 單位的圖形中。

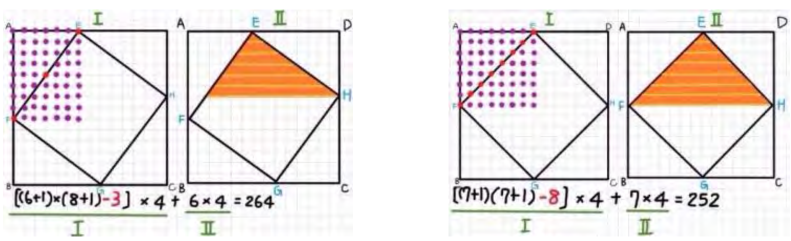


圖 5-2-24 14×14 的正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形的計數過程

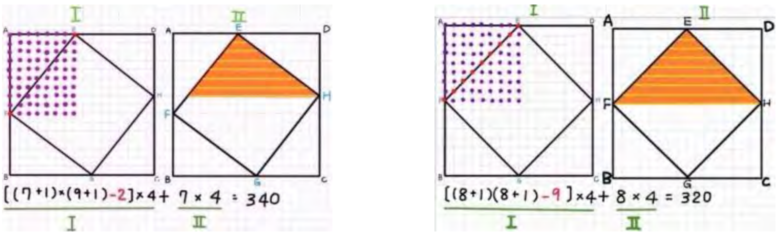


圖 5-2-25 16×16 的正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形的計數過程

4.檢驗：

而在探究 8×8 以上的偶數×偶數(2k×2k，k≥ 4)正方形網格 ABCD 邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數之最大值的過程中，我們了解到最大值皆會出現在：$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為$(k-1)$ 單位和$(k+1)$單位的圖形中。同時，我們也發現一個特殊的現象：當我們運用插旗法進行最大值的計數時，由於$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數不同，所要扣除的網格節點個數也不同，但是似乎有其規律，在$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數上不是 2 個就是 3 個，所以要扣除的網格節點個數也同樣不是 2 個就是 3 個，如表 5-2-6 所示，但為何會這樣呢？

表 5-2-6 8×8~16×16 的正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數的最大值

規格 $(2k \times 2k)$	$\overline{AE}$ 線段 $(k-1)$	$\overline{AF}$ 線段 $(k+1)$	正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形數量	$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數
8×8	3	5	100	2
10×10	4	6	144	3
12×12	5	7	204	2
14×14	6	8	264	3
16×16	7	9	340	2

我們發現當 k 為奇數時，$(k-1)$及$(k+1)$就會是偶數，且在三角形 AEF 中就會有另一個相似三角形 JEK，由於$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的比值與$\overline{JK}$線段與$\overline{JE}$線段比值相同，兩者為等值分數，因此，$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數除了 E 點及 F 點以外還會多一個 K 點，總共會有 3 個點，在進行最大值的計數時所要扣除的網格節點個數也就是這 3 個點。以 14×14 正方形網格 ABCD 為例，其圖形中正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數的最大值，會出現在$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段分別為 6 單位及 8 單位時，此時，我們觀察到三角形 AEF 會有一個相似三角形 JEK，$\overline{JE}$線段與$\overline{JK}$線段分別為 3 單位與 4 單位，$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的比值與$\overline{JK}$線段與$\overline{JE}$線段比值相同，為等值分數，所以造成通過$\overline{EF}$線段上除了 E 點與 F 點以外，還會多一個 K 點，因此要扣除的點有 3 個，如圖 5-2-25 所示。

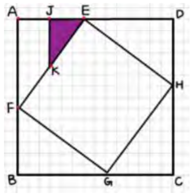


圖 5-2-25 14×14 正方形網格 ABCD 中$\overline{\mathrm{EF}}$線段上所通過的網格節點個數有三個(E、K、F 點)

而當 k 為偶數時，我們發現$(\mathrm{k}-1)$及$(\mathrm{k}+1)$就會是奇數，在三角形 AEF 中就不會有另一個相似三角形，因此$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數除了 E 點及 F 點 2 個點以外，沒有其他的點，在進行最大值的計數時所要扣除的網格節點個數也就只有這 2 個點。以 16×16 正方形網格 ABCD 為例，其正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數的最大值，會出現在$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段分別為 7 單位及 9 單位時，此時，三角形 AEF 會有相似三角形，但是，其與∠F 對應的頂點，不是$\overline{EF}$線段上的網點，所以，要扣除的點僅有兩個，即 E 點與 F 點，如圖 5-2-26 所示。

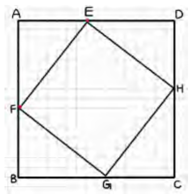


圖 5-2-26 16×16 正方形網格 ABCD 中$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數有兩個(E、F 點)

綜上所述，我們發現在探究偶數×偶數(2k×2k)正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數之最大值時，可依據 k 的奇偶性，分成兩類作探討。當 k 為奇數時，$(\mathrm{k}-1)$及$(\mathrm{k}+1)$就會是偶數，且在三角形 AEF 中就會有另一個相似三角形 JEK，由於$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的比值與$\overline{JK}$線段與$\overline{JE}$線段比值相同，兩者為等值分數，因此，$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數除了 E 點及 F 點以外還會多一個 K 點，總共會有 3 個點，在進行最大值的計數時所要扣除的網格節點個數也就是這 3 個點。當 k 為偶數時，我們發現$(\mathrm{k}-1)$及$(\mathrm{k}+1)$就會是奇數，且在三角形 AEF 中就不會有另一個相似三角形，因此$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數除了 E 點及 F 點 2 個點以外，沒有其他的點，在進行最大值的計數時所要扣除的網格節點個數也就只有這 2 個點。

為了檢驗上述論點，我們打算在更大的網格中進行探討，以 30×30(2k，k 為奇數)及 40×40(2k，k 為偶數)的正方形網格 ABCD 進行研究，並將其中所含的正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數中列表，以找出最大值。但在列表的過程中，由於網格變大，正方形網格邊上網點構成正方形類型 EFGH 數量

變多，我們也發現要逐一畫圖檢驗、觀察及計數$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數，會非常困擾，我們開始想知道要如何才能精準且快速算出$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數？

為了解決這個問題，我們跟老師一起討論研究後，老師建議我們可透過觀察$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的比值有幾個等值分數，去找出判斷正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 中的三角形 AEF 含有幾個相似三角形，即可得知$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數。以 30×30 為例，當$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的長度分別為 13 單位與 17 單位時，由於$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段互質，最大公因數為 1，比值為$\frac{13}{17}$，在三角形 AEF 中，就沒有其他的等值分數，也沒有其他相似三角形，因此在計算$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數只要扣掉 2 個點，即為 E 點及 F 點，如圖 5-2-27 中的 A 圖所示。當$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的長度分別為 14 單位與 16 單位時，由於$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的最大公因數為 2，比值為$\frac{14}{16}$，$\frac{14}{16}$的等值最簡分數為$\frac{7}{8}$，在三角形 AEF 中就會有 1 個相似三角形，因此在計算$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數要扣掉 3 個點，如圖 5-2-27 中的 B 圖所示。當$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的長度分別為 15 單位與 15 單位時，由於$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的最大公因數為 15，比值為$\frac{15}{15}$，$\frac{15}{15}$的等值分數為$\frac{14}{14}$、$\frac{13}{13}$、$\frac{12}{12}$、$\frac{11}{11}$、$\frac{10}{10}$、$\frac{9}{9}$、$\frac{8}{8}$、$\frac{7}{7}$、$\frac{6}{6}$、$\frac{5}{5}$、$\frac{4}{4}$、$\frac{3}{3}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{1}{1}$，在三角形 AEF 中就會有 14 個相似三角形，因此在計算$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數要扣掉 16 個點，如圖 5-2-27 中的 C 圖所示。

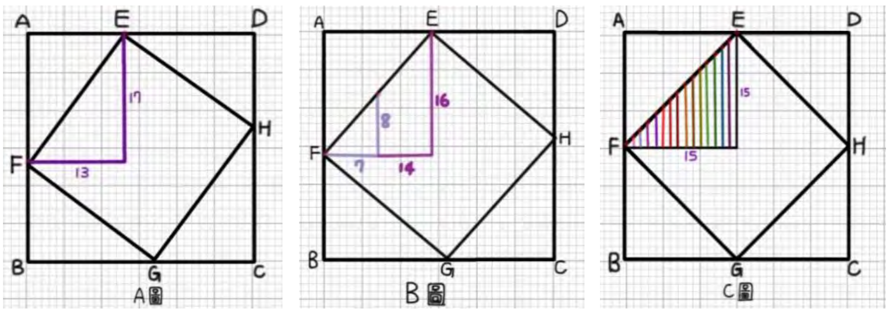


圖 5-2-27 在 30×30 的正方形網格 ABCD 裡觀察$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的比值有幾個等值分數

依此類推，我們透過上述方法，將 30×30(2k × 2k，k 為奇數)的正方形網格 ABCD 中正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數及$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數列表整理，如表 5-2-7 所示。透過此表，我們發現正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數之最大值，跟前述研究一樣，都會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為 $(k-1)$、$(k+1)$單位時，此外，我們也發現一個有趣的現象，就是$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數，都與最大公

因數有關連，皆為$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的最大公因數+1。接著，我們持續在 40×40(2k，k 為偶數)的正方形網格 ABCD 中正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數及$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數進行研究並列表整理，如表 5-2-8 所示，也發現有同樣的現象，即$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數，都與最大公因數有關連，皆為$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的最大公因數+1。

表 5-2-7 30×30 的正方形網格邊上網點構成小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數及$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數

$\overline{AE}$線段	$\overline{AF}$線段	不同類型的正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形數量	$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的最大公因數	$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數
1	29	236	1	2
2	28	344	2	3
3	27	444	3	4
4	26	544	2	3
5	25	620	5	6
6	24	696	6	7
7	23	788	1	2
8	22	848	2	3
9	21	900	3	4
10	20	920	10	11
11	19	996	1	2
12	18	1008	6	7
13	17	1052	1	2
14	16	1064	2	3
15	15	1020	15	16

表 5-2-8 40×40 的正方形網格邊上網點構成小正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數及$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數

$\overline{AE}$線段	$\overline{AF}$線段	不同類型的正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形數量	$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的最大公因數	$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數
1	39	316	1	2
2	38	464	2	3
3	37	604	3	4
4	36	736	4	5
5	35	860	5	6
6	34	992	2	3
7	33	1108	1	2
8	32	1184	8	9
9	31	1308	1	2
10	30	1360	10	11
11	29	1476	1	2
12	28	1536	4	5
13	27	1612	1	2

14	26	1664	2	3
15	25	1700	5	6
16	24	1728	8	9
17	23	1788	1	2
18	22	1808	2	3
19	21	1828	1	2
20	20	1760	20	21

5.論證：

透過觀察、尋找關係與樣式、猜測及檢驗，我們發現在 8×8 以上偶數(2k)正方形網格中正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數之最大值，都會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為$(\mathrm{k}-1)$及$(\mathrm{k}+1)$單位時，但為什麼最大值一定是出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為$(\mathrm{k}-1)$及$(\mathrm{k}+1)$單位時，有沒有可能因為網格變大，這個論點就會被推翻呢？且為何$(\mathrm{k}-1)$及$(\mathrm{k}+1)$的最大公因數不是 1(當 k 為偶數)就是 2(當 k 為奇數)，有沒有可能大於 2？

這個問題困擾了我們許久，於是我們跟老師一起討論研究後，老師建議我們用反證法來研究，我們的論證如下：

命題：**當 k 為偶數時，$(\mathbf{k}-\mathbf{1})$及$(\mathbf{k}+\mathbf{1})$的最大公因數就是 1，當 k 為奇數時，$(\mathbf{k}-\mathbf{1})$及$(\mathbf{k}+\mathbf{1})$的最大公因數就是 2。**

論證：

將$\overline{AE}$線段$(\mathrm{k}-1)$的長度設為S，$\overline{AF}$線段$(\mathrm{k}+1)$的長度即為$\mathrm{S}+2$ 。

假設S 與 $\mathrm{S}+2$最大公因數為a，且$\mathrm{a}\geq 3$，即S 為 at，$\mathrm{S}+2$ 為 au，且 $\mathrm{u}>\mathrm{t}$，此時，可推得a 可以整除$[(S+2)-S]$，也就是a 可以整除 2，如此一來，與原先的假設$\mathrm{a}\geq 3$互相矛盾，因為當$\mathrm{a}\geq 3$時就無法整除 2，因此可以透過反證法得知，$(\mathrm{k}-1)$及$(\mathrm{k}+1)$的最大公因數不是 1(當 k 為偶數)就是 2(當 k 為奇數)。

在經過一系列觀察、尋找關係與樣式、猜測及檢驗的研究過程後，我們又將偶數×偶數(2k×2k)正方形網格 ABCD 中正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形個數之最大值公式化，依據前述研究結果，我們將計數偶數×偶數(2k×2k)正方形網格 ABCD 中正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形個數之最大值的公式分為以下三類：第一類為 2×2、4×4 和 6×6(2k×2k，k=1，2，3 時)的正方形網格 ABCD；第二類為 8×8 以上(2k×2k，且 k 為奇數)的正方形網格 ABCD；第三類為 8×8 以上(2k×2k，且 k 為偶數)的正方形網格 ABCD。

(1)命題：**當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等的時候，2×2、4×4 和 6×6(2k×2k，k=1，2，3 時)的正方形網格邊上網點構成小正方形 EFGH 所形成合法直角三角形個數會有最大值：$[(\mathbf{k}+\mathbf{1})\times(\mathbf{k}+\mathbf{1})-(\mathbf{k}+\mathbf{1})]\times\mathbf{4}+\mathbf{k}\times\mathbf{4}$。**

論證：

2×2、4×4 和 6×6(2k×2k，k=1，2，3 時)的正方形網格邊上網點構成小正方形 EFGH 所形成合法直角三角形個數可分為兩種類型：第一類型是斜邊在正方形 EFGH 上的直角三角形，當直角三角形的斜邊落在$\overline{EF}$線段上，會形成許多直角落在網格節點上的直角三角形，如圖 5-2-28 所示；第二類型是直角三角形的斜邊在網格格線上，且直角落在正方形 EFGH 的角上的直角三角形。透過插旗法，我們得知算出第一類型的方法為：先算出矩形 AFME 上的網點，再扣除通過$\overline{EF}$線段上的網格節點，接著，如圖 5-2-29 所示，根據圖形旋轉對稱的原理，再乘以 4，就可以得知斜邊在正方形 EFGH 上的直角三角形個數，計數的公式即為：$\left[(\text{矩形 AFME 上的網點})-(\overline{EF}\text{線段上的網點})\right]\times 4$。

我們將偶數正方形網格 ABCD 的邊長設為$2k$，由前述研究得知，2×2、4×4 和6×6(2k×2k，k=1，2，3 時)的正方形網格邊上網點構成小正方形 EFGH 所形成合法直角三角形個數，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為正方形網格 ABCD 邊長對半分時，可在圖形上找到所形成的直角三角形個數之最大值，因此，我們將正方形網格 ABCD 邊長對半分後的長度設為 k，即 $\overline{AE}$線段＝$\overline{AF}$線段＝k，透過圖 5-2-28 可得知，第一類型的合法直角三角形的計算公式為：

$[(k+1)\times(k+1)-(k+1)]\times 4$。

而第二種類型是斜邊在網格格線上，且直角落在正方形 EFGH 的角上的直角三角形，透過圖 5-2-29 可得知，直角落在正方形 EFGH 的∠E 上的個數即為$\overline{DH}$線段的長度，也等同$\overline{AE}$線段的長度，即為 k，接著，根據圖形旋轉對稱的原理再乘以 4，就可以得知斜邊在網格格線上且直角落在正方形 EFGH 各角上的直角三角形總數為：$k\times 4$。

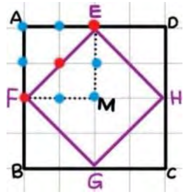


圖 5-2-28 4×4 的第一類型的合法直角三角形

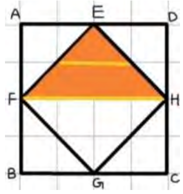


圖 5-2-29 4×4 的第二類型的合法直角三角形

綜合上述，2×2、4×4 和 6×6(2k×2k，k=1，2，3)的正方形網格邊上網點構成小正方形 EFGH 所形成合法直角三角形個數之最大值為：

$[(k+1)\times(k+1)-(k+1)]\times 4+k\times 4$。

(2)命題：**當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為 (k-1) 單位和 (k+1) 單位時，8×8 以上(2k×2k，且 k 為偶數)的正方形偶數網格 ABCD 與其中的正方形 EFGH 所形成合法直角三角形個數會有最大值：**

$\{[(\mathbf{k}-\mathbf{1})+\mathbf{1}]\times[(\mathbf{k}+\mathbf{1})+\mathbf{1}]-\mathbf{2}\}\times\mathbf{4}+(\mathbf{k}-\mathbf{1})\times\mathbf{4}$。

論證：

8×8 以上(2k×2k，且 k 為偶數)的正方形網格邊上網點構成小正方形 EFGH 所形成合法直角三角形個數可分為兩種類型：第一類型是斜邊在正方形 EFGH 上的直角三角形，當直角三角形的斜邊落在$\overline{EF}$線段上，會形成許多直角落在網格節點上的直角三角形，如圖 5-2-30 所示；第二類型是直角三角形的斜邊在網格格線上，且直角落在正方形 EFGH 的角上的直角三角形，如圖 5-2-31 所示。透過插旗法，我們得知算出第一類型的方法為：先算出矩形 AFME 上的網點，再扣除通過$\overline{EF}$線段上的網格節點，接著，根據圖形旋轉對稱的原理，再乘以 4，就可以得知斜邊在正方形 EFGH 上的直角三角形個數，計數的公式即為：

$[(\text{矩形 AFME 上的網點})-(\overline{EF}\text{線段上的網點})]\times 4$。

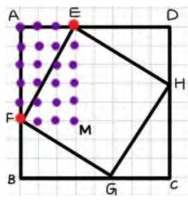


圖 5-2-30 8×8 的第一類型合法直角三角形

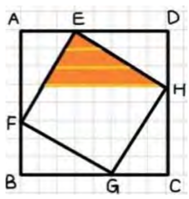


圖 5-2-31 8×8 的第二類型合法直角三角形

我們將偶數正方形網格 ABCD 的邊長設為 2k，由前述研究得知，8×8 以上(2k×2k，且 k 為偶數)的正方形網格邊上網點構成小正方形 EFGH 所形成合法直角三角形個數，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為 (k-1) 單位和 (k+1) 單位時，由前述論證可知，當 k 為偶數時，(k-1)及(k+1)的最大公因數就是 1，因此在計算通過$\overline{EF}$線段上的網格節點時，為最大公因數+1，即為 2，透過圖 5-2-30 可得知，第一類型的合法直角三角形的計算公式為：

$\{[(k-1)+1]\times[(k+1)+1]-2\}\times 4$。

而第二類型是斜邊在網格格線上，且直角落在正方形 EFGH 的角上的直角三角形，透過圖 5-2-31 可推知，直角落在正方形 EFGH 的∠E 上的個數即為$\overline{DH}$線段的長度，也等同$\overline{AF}$線段的長度，即為(k-1) 單位，接著，根據圖形旋轉對稱的原理再乘以 4，就可以得知斜邊在網格格線上且直角落在正方形 EFGH 各角上的直角三角形總數為：$(k-1) \times 4$。

綜合上述，8×8 以上(2k×2k，且 k 為偶數)的正方形網格邊上網點構成小正方形 EFGH 所形成合法直角三角形個數之最大值為：

$\{[(k-1)+1] \times [(k+1)+1] - 2\} \times 4 + (k-1) \times 4$。

(3) 命題：**當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為 (k-1) 單位和 (k+1) 單位時，8×8 以上(2k×2k，且 k 為奇數)的正方形偶數網格 ABCD 與其中的正方形 EFGH 所形成合法直角三角形個數會有最大值：**

$\{[(k-1)+1] \times [(k+1)+1] - 3\} \times 4 + (k-1) \times 4$。

論證：

8x8 以上(2kx2k，且 k 為奇數)的正方形網格邊上網點構成小正方形 EFGH 所形成合法直角三角形個數可分為兩種類型：第一類型是斜邊在正方形 EFGH 邊上的直角三角形，當直角三角形的斜邊落在$\overline{EF}$線段上，會形成許多直角落在網格節點上的直角三角形，如圖 5-2-32 所示；第二類型是直角三角形的斜邊在網格格線上，且直角落在正方形 EFGH 的角上的直角三角形。透過插旗法，我們得知算出第一類型的方法為：先算出矩形 AFME 上的網點，再扣除通過$\overline{EF}$線段上的網格節點，如圖 5-2-33 所示，接著，根據圖形旋轉對稱的原理，再乘以 4，就可以得知斜邊在正方形 EFGH 上的直角三角形個數，計數的公式為：

$[(\text{矩形 AFME 上的網點}) - (\overline{EF}\text{線段上的網點})] \times 4$。

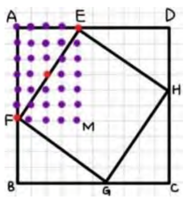


圖 5-2-32 10×10 的第一類型合法直角三角形

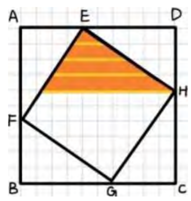


圖 5-2-33 10×10 的第二類型合法直角三角形

我們將偶數正方形網格 ABCD 的邊長設為 2k，由前述研究得知，8x8 以上(2kx2k，且 k 為奇數)的正方形網格邊上網點構成小正方形 EFGH 所形成合法直角三角形，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度分別為 (k-1) 單位和 (k+1) 單位時，由前述論證可知，k 為奇數時，(k-1)及(k+1)的最大公因數就是 2，因此在計算通過$\overline{EF}$線

段上的網格節點時為最大公因數+1，即為 3，透過圖 5-2-32 可得知，第一類型的合法直角三角形的計算公式為：

$\{[(k-1)+1] \times [(k+1)+1]-3\} \times 4$。

而第二種類型是斜邊在網格格線上，且直角落在正方形 EFGH 的角上的直角三角形，透過圖 5-2-33 可推知，直角落在正方形 EFGH 的∠E 上的個數即為 $\overline{DH}$線段的長度，也等同$\overline{AF}$線段的長度，即為(k-1) 單位，接著，根據圖形旋轉對稱的原理再乘以 4，就可以得知斜邊在網格格線上且直角落在正方形 EFGH 各角上的直角三角形總數為：$(k-1) \times 4$。

綜合上述，8x8 以上(2kx2k，且 k 為奇數)的正方形網格邊上網點構成小正方形 EFGH 所形成合法直角三角形個數之最大值為：

$\{[(k-1)+1] \times [(k+1)+1]-3\} \times 4+(k-1) \times 4$。

(三) 探討 3x3、5x5、7x7⋯n×n(n 為奇數)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值。

1. 觀察：

我們在了解偶數×偶數(2k×2k)正方形網格邊上網點構成小正方形所形成合法的直角三角形個數會是最大值後，接下來我們想知道奇數× 奇數((2k+1) × (2k+1))正方形網格中哪一種正方形網格邊上網點構成小正方形所形成合法的直角三角形個數會是最大值？透過研究目的一，我們已知 2×2、3×3、4×4、5×5、6×6…n×n 正方形網格 ABCD 邊上網點構成小正方形所形成合法的直角三角形個數之計數方法，也就是只要算出斜邊在小正方形 EFGH 上的合法直角三角形個數，再加上斜邊在網格格線上且直角落在正方形 EFGH 各角上的直角三角形總數，就可以算出不同類型的正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形數量。由於在奇數× 奇數((2k+1) × (2k+1))正方形網格 ABCD 中，$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度不可能對半分(皆為 k 單位，k 為整數)，因此，我們可從$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度為 k 單位與(k+1)單位開始進行研究。

2. 尋找關係與樣式：

我們透過將 3x3、5x5、7x7 正方形網格 ABCD 中正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形個數之最大值的計數過程列表，以尋找關係與樣式，如表 5-2-9 所示，我們發現，在 3x3、5x5、7x7 正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形數量最大值，都會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為 k 單位和 (k+1) 單位的圖形中。因為在計算第一類型合法的直角三角形個數時，即斜

邊線段在$\overline{\mathrm{EF}}$上的直角三角形個數，算式為[(矩形 AFME 上的網格節點)$-$ ($\overline{EF}$線段上的網格節點)]×4，由表 5-2-9 可得知，我們以 7×7 為例，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為 k 單位 和 (k+1) 單位時，其斜邊在$\overline{EF}$線段上的直角三角形個數為$\{(\mathrm{k}+1)\times[(\mathrm{k}+1)+1]-2\}\times 4$，即$[(\mathrm{k}^2+3k+2)-2]\times 4$；當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為(k-1) 單位 和 (k+2) 單位，其斜邊線段在$\overline{\mathrm{EF}}$上的直角三角形個數為$\{[(\mathrm{k}-1)+1]\ \times[(\mathrm{k}+2)+1]-2\}\times 4$，即$[(\mathrm{k}^2+3\mathrm{k})-2]\times 4$；而當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為 (k-2) 單位和 (k+3) 單位時，斜邊線段在$\overline{\mathrm{EF}}$上的直角三角形個數為$\{[(\mathrm{k}-2)+1]\times[(\mathrm{k}+3)+1-2]\}\times 4$，即$[(\mathrm{k}^2+3\mathrm{k}-4)-2]\times 4$，由以上計數結果可得知，斜邊在$\overline{EF}$線段上的直角三角形個數之最大值，必定出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為 k 單位 和 (k+1) 單位時。

此外，在計算第二類型合法的直角三角形個數時，即直角落在正方形 EFGH 角上的直角三角形個數，計數方法為$\overline{AE}$線段或$\overline{AF}$線段之短邊的長度乘以四，我們也發現直角落在正方形 EFGH 角上的直角三角形個數之最大值，也必定出現於$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為 k 單位 和 (k+1) 單位時。

因此，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為 k 單位 和 (k+1) 單位時，我們把兩種類型的直角三角形個數相加，就可得知不同類型的正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形數量最大值。

表 5-2-9 3×3、5×5 與 7×7 正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形個數之計數過程

3×3 正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形個數(k=1)						
$\overline{AE}$線段	$\overline{AF}$線段	斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數的算式	算式簡化	第一類型直角三角形個數	第二類型直角三角形個數	總數
k	k+1	{(k+1) ×[(k+1)+1]-2}×4 ＝[(k^2+3k+2)-2]×4	(k^2+3k)×4	16	4 (算式：k × 4)	20
5×5 正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形個數(k=2)						
$\overline{AE}$線段	$\overline{AF}$線段	斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數的算式	算式簡化	第一類型直角三角形個數	第二類型直角三角形個數	總數
k-1	k+2	{[(k-1)+1] ×[(k+2)+1]-2}×4 ＝[(k^2+3k)-2]×4	[(k^2+3k)-2]×4	32	4 (算式：(k-1)×4)	36
k	k+1	{(k+1) ×[(k+1)+1]-2}×4 ＝[(k^2+3k+2)-2]×4	(k^2+3k)×4	40	8 (算式：k × 4)	48

7×7 正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形個數(k=3)						
$\overline{AE}$ 線段	$\overline{AF}$ 線段	斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數的算式	算式簡化	第一類型直角三角形個數	第二類型直角三角形個數	總數
k-2	k+3	{[(k-2)+1] ×[(k+3)+1]-2}×4 ＝[(k^2+3k-4)-2]×4	[(k^2+3k)-6]×4	48	4 (算式：(k-2)×4)	52
k-1	k+2	{[(k-1)+1] ×[(k+2)+1]-2}×4 ＝[(k^2+3k)-2]×4	[(k^2+3k)-2]×4	64	8 (算式：(k-1)×4)	72
k	k+1	{(k+1)×[(k+1)+1]-2}×4 ＝[(k^2+3k+2)-2]×4	(k^2+3k)×4	72	12 (算式：k × 4)	84

3. 猜測：

透過觀察、尋找關係與樣式，我們發現， 3x3、5x5 與 7x7 奇數正方形網格 ABCD 中正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形個數之最大值時，都會出現在當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度為 k 單位與(k+1)單位時，並沒有隨著正方形網格的邊長變大而有所改變，因此我們猜測，在更大的奇數正方形網格 ABCD 中，只要$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度為 k 單位與(k+1)單位，其正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形數量都會是最大值。

4. 檢驗：

為了檢驗我們的猜測，我們繼續列表觀察 9×9 與 11×11 的正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成的合法直角三角形個數之最大值，透過表 5-2-10，發現也符合我們猜測的結果，隨著正方形網格 ABCD 的邊長變大，其正方形網格邊上網點構成的正方形 EFGH 的類型也隨著變多，但是，在計數第一類型的合法直角三角形個數(即斜邊在$\overline{EF}$線段上的直角三角形個數)與第二類型的合法直角三角形個數(即直角落在正方形 EFGH 角上的直角三角形個數)，最大值皆出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度分別為皆為 k 單位與(k+1)單位時，因此，將上述兩類的合法直角三角形個數相加後，就可得知正方形網格邊上網點構成正方形所形成的合法直角三角形數量最大值。由此可知，最大值只會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度分別為皆為 k 單位與(k+1)單位時，其餘類型的正方形網格邊上網點構成正方形所形成的合法直角三角形個數，皆會小於當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度分別為 k 單位與$(k+1)$單位時。

表 5-2-10 9×9 與 11×11 正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形個數之計數過程

9×9 正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形個數(k=4)						
$\overline{AE}$ 線段	$\overline{AF}$ 線段	斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數的算式	算式簡化	第一類型直角三角形個數	第二類型直角三角形個數	總數
k-3	k+4	{[(k-3)+1] ×[(k+4)+1]-2}×4 ＝[(k^2+3k-10) -2]×4	[(k^2+3k)-12]×4	64	4 (算式：(k-3)×4)	68
k-2	k+3	{[(k-2)+1] ×[(k+3)+1]-2}×4 ＝[(k^2+3k-4)-2]×4	[(k^2+3k)-6]×4	88	8 (算式：(k-2)×4)	96
k-1	k+2	{[(k-1)+1] ×[(k+2)+1]-2}×4 ＝[(k^2+3k)-2]×4	[(k^2+3k)-2]×4	104	12 (算式：(k-1)×4)	116
k	k+1	{(k+1) ×[(k+1)+1]-2}×4 ＝[(k^2+3k+2)-2]×4	(k^2+3k)×4	112	16 (算式：k × 4)	128
11×11 正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形個數(k=5)						
$\overline{AE}$ 線段	$\overline{AF}$ 線段	斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數的算式	算式簡化	第一類型直角三角形個數	第二類型直角三角形個數	總數
k-4	K+5	{[(k-4)+1] ×[(k+5)+1]-2}×4 ＝[(k^2+3k-18) -2]×4	[(k^2+3k)-20]×4	80	4 (算式：(k-4)×4)	84
k-3	k+4	{[(k-3)+1] ×[(k+4)+1]-2}×4 ＝[(k^2+3k-10) -2]×4	[(k^2+3k)-12]×4	112	8 (算式：(k-3)×4)	120
k-2	k+3	{[(k-2)+1] ×[(k+3)+1]-2}×4 ＝[(k^2+3k-4)-2]×4	[(k^2+3k)-6]×4	136	12 (算式：(k-2)×4)	148
k-1	k+2	{[(k-1)+1] ×[(k+2)+1]-2}×4 ＝[(k^2+3k)-2]×4	[(k^2+3k)-2]×4	152	16 (算式：(k-1)×4)	168
k	k+1	{(k+1) ×[(k+1)+1]-2}×4 ＝[(k^2+3k+2)-2]×4	(k^2+3k)×4	160	20 (算式：k × 4)	180

5. 論證：

透過觀察、尋找關係與樣式、猜測及檢驗，我們將奇數× 奇數((2k+1) × (2k+1))正方形網格 ABCD 中正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形個數之最大值公式化，依據前述研究結果，我們發現奇數正方形網格 ABCD 中正方形網格邊上網點構成正方形 EFGH 所形成合法的直角三角形個數，最大值只會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度分別為皆為 k 單位與(k + 1)單位時。

命題：奇數正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量最大值之計數公式為：$\{(k+1)\times[(k+1)+1]-2\}\times 4+k\times 4$。

論證：

當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為 k 單位和 $(k+1)$ 單位時，奇數正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量會有最大值。我們將奇數 × 奇數正方形網格 ABCD 的邊長設為 2k+1，在計算第一類型合法的直角三角形個數時，即斜邊在$\overline{EF}$線段上的直角三角形個數，算式為[(矩形 AFME 上的網格節點) − ($\overline{EF}$線段上的網格節點)] × 4，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為 k 單位和 (k+1) 單位，矩形 AFME 上的網格節點個數為$[k+1]\times[(k+1)+1]$，又因為 k 及$(k+1)$的最大公因數為 1，因此$\overline{EF}$線段上的網格節點個數為最大公因數+1，即為 2，則第一類型的合法直角三角形的個數為：

$\{(k+1)\times[(k+1)+1]-2\}\times 4$

而在計算第二類型合法的直角三角形個數時，即直角落在正方形 EFGH 角上的直角三角形個數，計數方法為$\overline{AE}$線段或$\overline{AF}$線段中短邊的長度乘以四，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為 k 單位和 $(k+1)$ 單位，斜邊在網格格線上且直角落在正方形 EFGH 各角上的直角三角形總數為：$k\times 4$。

綜合上述，奇數× 奇數((2k+1) × (2k+1))正方形網格邊上網點構成正方形所形成合法直角三角形個數之最大值為:$\{(k+1)\times[(k+1)+1]-2\}\times 4+k\times 4$。

陸、研究結果

一、 2×2、3×3、4×4、5×5、6×6…n × n正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之計數方法。

2×2、3×3、4×4、5×5、6×6⋯n × n正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量可分為兩種類型進行探討：第一種類型是斜邊在正方形 EFGH 上的直角三角形，當直角三角形的斜邊落在$\overline{EF}$線段上，會形成許多直角落在網格節點上的直角三角形，我們透過插旗法可算出其個數為：[(矩形 AFME 上的網點) − ($\overline{EF}$線段上的網點)] × 4，且$\overline{EF}$線段上的網點數量=($\overline{AE}$線段、$\overline{AF}$線段的最大公因數) +1；第二種類型則是直角三角形的斜邊在網格格線上，且直角落在正方形 EFGH 的角上的直角三角形，其個數會等於($\overline{DH}$線段的長度) × 4，因此將上述兩種類型的直角三角形個數相加，即可得知所有的合法的直角三角形的個數，圖例及圖形代號如 6-1-1 所示。

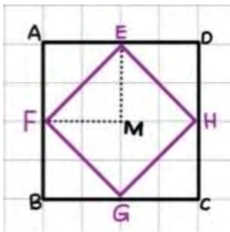


圖 6-1-1 正方形網格邊上網點所構成的正方形及圖形代號

二、 2×2、4×4、6×6…$n \times n$(n為偶數)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值。

偶數×偶數(2k×2k)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量，依據正方形網格邊長長度可分成三類，分別為：第一類為 2x2、4x4 和 6x6 (2k×2k，k=1，2，3 時)的正方形網格；第二類為 8×8 以上(2k×2k，且 k 為奇數)的正方形網格；第三類為 8×8 以上(2k×2k，且 k 為偶數)的正方形網格。其計數公式分別如下：

1. 2x2、4x4 和 6x6(2kx2k，k=1，2，3 時)的正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值：

   $[(k+1)\times(k+1)-(k+1)]\times 4+k\times 4$。

2. 8x8 以上(2kx2k，且 k 為偶數)的正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值：

   $\{[(k-1)+1]\times[(k+1)+1]-2\}\times 4+(k-1)\times 4$。

3. 8x8 以上(2kx2k，且 k 為奇數)的正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值：

   $\{[(k-1)+1]\times[(k+1)+1]-3\}\times 4+(k-1)\times 4$。

三、 3×3、5×5、7×7…$n \times n$($n=2k+1$，$k=1，2，3$ ...)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值：

$\{(k+1)\times[(k+1)+1]-2\}\times 4+k\times 4$。

柒、結論

本研究在探討正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值及計數方法。我們透過觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗與論證的探究過程，獲得主要研究結果如下：

一、 在探討2×2、3×3、4×4、5×5、6×6…$n \times n$正方形網格邊上網點構成正方形所生成相似合法直角三角形數量之最大值時，我們運用插旗法及相似三角形的性質，找到了計數

方法及公式。

二、 找到在2×2、4×4、6×6…n × n(n為偶數)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量最大值之圖形類形及計數公式(如：陸、研究結果-二)。

三、 找到在3×3、5×5、7×7…n × n(n為奇數)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量最大值之圖形類形及計數公式(如：陸、研究結果-三)。

捌、參考資料

一、國民小學課本南一版第 9 冊第 5 單元—認識線對稱圖形及對稱軸。

二、 國民小學課本南一版第 12 冊第 4 單元—縮圖和放大圖。

三、 2015/2016 國際中小學數學能力檢測-小學高年級組第二輪檢測試題-第 11 題。

【評語】080403

本作品主要在探討 nxn 方格邊上網點構成正方形所生成之相似直角三角形的最大數量。作者藉由圖形表徵的觀察來尋找規律，並發展出「插旗法」來計數，成功完成相似直角三角形的最大數量的計算公式。

整體而言，作者有系統的將問題分析、逐步探討、提出合理的猜測並經檢驗與論證，最後提出最大值之計數公式；研究過程符合探究精神且方法適切，是一件討論完整的作品。

作品海報

壹、 研究動機

有一天，我們發現一個有趣的數學題目，題目是：在6×6的方格表中，正方形EFGH的位置如圖1-1-1所示，請問圖中總共有多少個直角三角形的三邊都落在格線或正方形EFGH的邊上，且與圖上陰影的直角三角形對應內角相等？(圖中塗上陰影的三角形也算其中一個)。

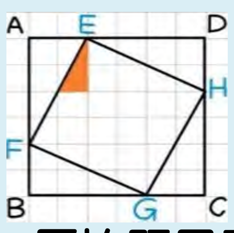


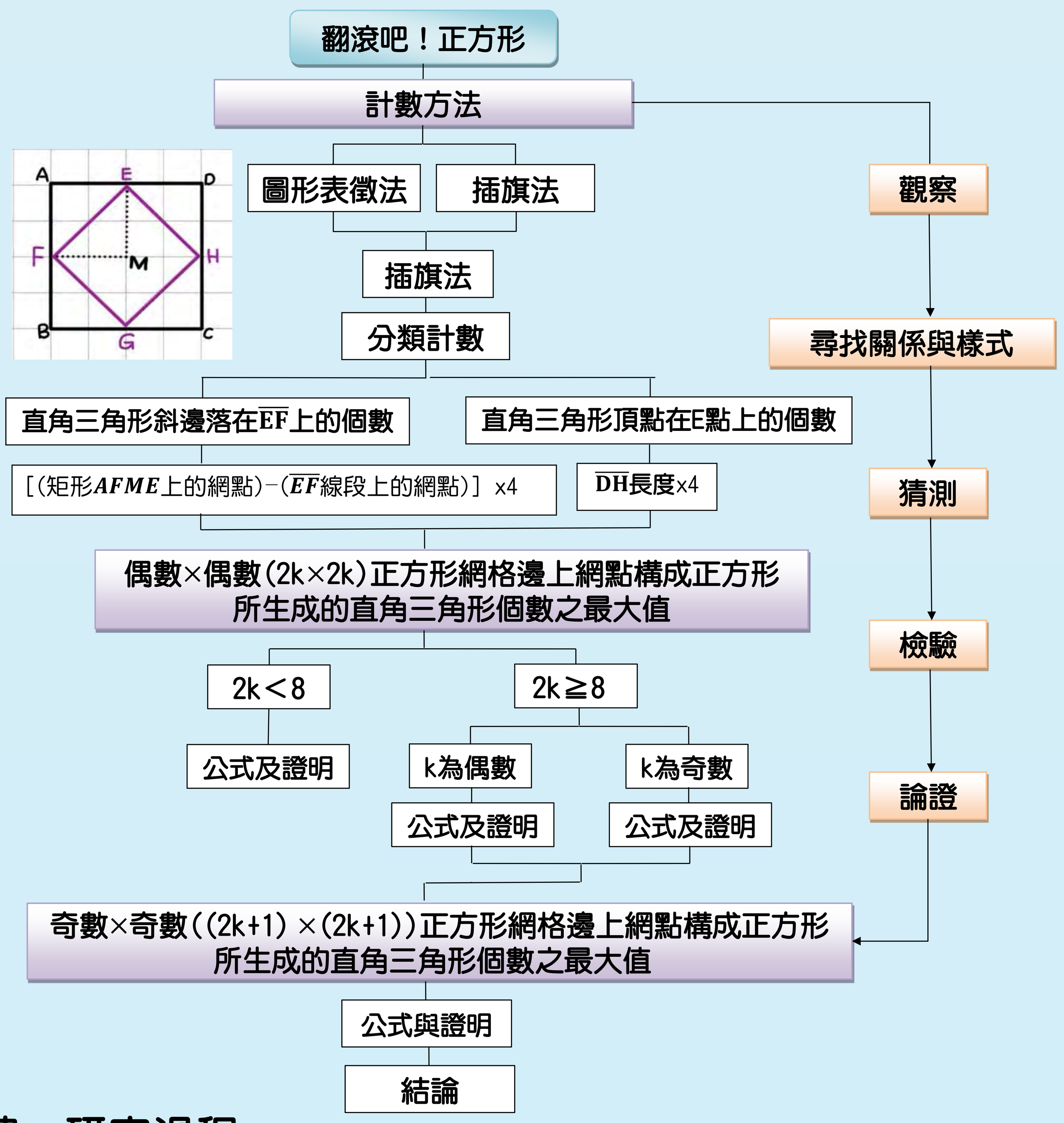
圖1-1-1 原始題目示意圖

我們開開心心的算出了此題目的答案，卻想出可以再把它擴大延伸，這個數學問題引發了我們的注意，於是，我開始進行「翻滾吧！正方形」的研究，決定深入探討，以了解其奧秘。

貳、 研究目的

一、發展2×2、3×3、4×4、5×5、6×6...n × n正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值之計數方法。
二、探討2×2、4×4、6×6...n × n(n為偶數)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值。
三、探討3×3、5×5、7×7...n × n(n為奇數)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值。

參、研究架構與流程圖



肆、研究過程

(一) 發展2×2、3×3、4×4、5×5、6×6...n × n正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量最大值之計數方法。

1. 觀察：

原始題目的敘述是：在6×6的網格中，正方形EFGH的位置如圖4-2-1所示，請問圖中總共有多少個小直角三角形的三邊都落在格線或正方形EFGH的邊上，且與圖上陰影的小三角形對應內角相等？(圖中塗上陰影的小三角形也算其中一個)。

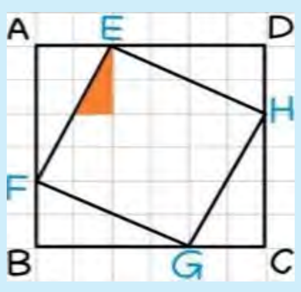


圖4-2-1 原始題目示意圖

2. 尋找關係與樣式：

了解題目的要求之後，我們嘗試在6×6的網格中，找出符合題目要求的合法直角三角形，發現這些直角三角形的類型可分為兩種類型進行探討，第一類型是斜邊落在正方形EFGH邊上的直角三角形，當直角三角形的斜邊落在$\overline{EF}$線段上，會形成許多直角落在網格節點上的直角三角形，其兩股邊長會分別與$\overline{AF}$線段及$\overline{AE}$線段平行，且其角的角度都與∠A、∠E、∠F相等，而這些三角形就是與三角形AEF相似的合法直角三角形，因此在第一類型中總共可以找到12個相似合法直角三角形，第二種類型是直角三角形的斜邊在網格格線上，且直角落在正方形EFGH的∠E上，就會再形成了2個相似的直角三角形。

此外，根據我們在五下數學課本中所學到的圖形旋轉對稱(即中心對稱)原理，如圖4-2-2所示，我們發現在計算第一類型的直角三角形時，只要把正方形EFGH其中一邊上的直角三角形的個數算出來後，再乘以四，就可得知四個邊的直角三角形總個數，也就是12×4=48，而第二類型是直角落在正方形EFGH的∠E上的直角三角形，只要把正方形EFGH其中一角上的直角三角形的個數算出來後，再乘以四，就可得知四個角的直角三角形總個數，也就是2×4=8，最後將第一類型與第二類型的直角三角形數量相加，所以總數是56個。

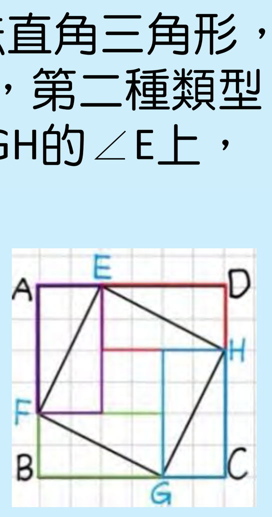


圖4-2-2 圖形旋轉對稱原理

3. 猜測：

透過觀察及尋找關係，我們猜測只要調整正方形EFGH中E、F兩點的位置，其中所形成的合法直角三角形的數量就會產生變化，但之後隨著正方形變大，也會因數量繁多而造成計數困難，而且必須畫很多圖。我們跟老師討論後，老師建議我們利用插旗法來處理圖形表示的問題，所以，我們將第一類型的直角三角形，也就是斜邊在正方形EFGH邊上的直角三角形，用插旗法表示，如此一來，我們就能更快速的表示圖形，利用一個點表示一個，如圖4-2-3所示。依此類推，我們可以將其他斜邊落在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形以插旗法標示出來，如圖4-2-4所示。

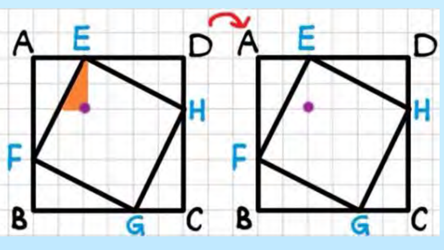


圖4-2-3以插旗法表示圖形的方法

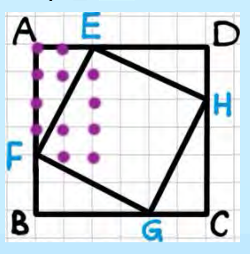


圖4-2-4將所有斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形以插旗法表示

4. 檢驗：

我們在了解了插旗法的好處之後，我們只要將正方形網格ABCD內四個直角中的一個直角上的節點標出，再扣掉$\overline{EF}$線段上的所有節點個數，因為這些節點已經位於$\overline{EF}$線段上，無法形成斜邊落在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形，就可快速地算出其中一個斜邊在正方形EFGH邊上的合法直角三角形個數，又因為正方形EFGH有四個邊，所以再乘以4，就可以得出正方形EFGH邊上所有第一類型的合法直角三角形的總個數。

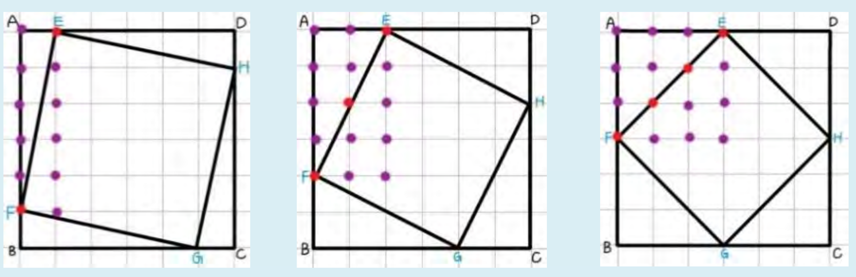


圖4-2-5 以插旗法標示出不同類型的正方形EFGH所形成的合法直角三角形數量

此外，針對直角落在正方形EFGH上的合法直角三角形，我們觀察到這一類的合法直角三角形的個數，與$\overline{AE}$線段或$\overline{AF}$線段兩個線段中較短邊的長度有關，舉例來說，如果$\overline{AE}$線段及$\overline{AF}$線段分別為1單位、5單位，其中最短的邊為1單位，所以它所形成的第二類型合法直角三角形共有1個；如果$\overline{AE}$線段及$\overline{AF}$線段皆為3單位，其中的最短邊也是3單位，所以它所形成的第二類型合法直角三角形共有3個。

所以只要運用插旗法以及觀察$\overline{AE}$線段或$\overline{AF}$線段兩個線段中較短邊的長度，就可以算出不同類型的正方形EFGH所形成的所有合法直角三角形數量。

5. 論證：

我們在計算所有斜邊在正方形EFGH上的合法直角三角形個數時，發現還有一個麻煩的問題尚未解決，就是如何找出通過$\overline{EF}$線段上的所有節點個數，因為這些節點已經位於$\overline{EF}$線段上，無法形成斜邊線段在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形，而不同類型的正方形EFGH其$\overline{EF}$線段上的所有節點個數不同。像是在6×6的正方形網格ABCD中，不同類型的正方形EFGH，如圖4-2-6，其$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點分別2個、3個以及4個，如圖4-2-6圈起的紅色點所示，我們想知道為何會這樣？如何快速得知不同類型的正方形EFGH其$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數並扣除，而非只能看圖形一一點數? 而且每一個圖形必須扣掉的節點都不一樣，在更大的圖形中，我們該如何準確地算出必須扣掉的節點數？

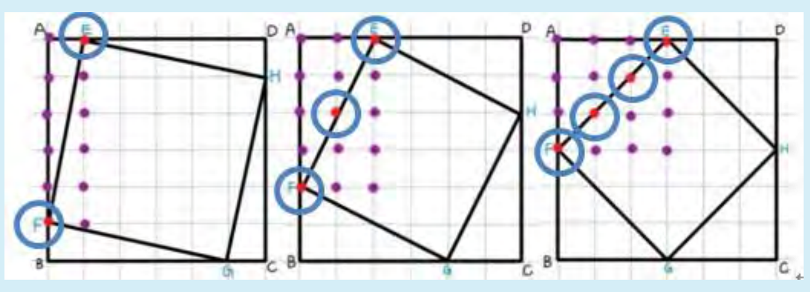


圖4-2-6不同類型的正方形EFGH其$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點

我們發現，只要透過觀察與三角形AEF相似，且兩個直角邊落在網格線上而斜邊落在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數，就可以推知$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數，因為這些節點已經位於$\overline{EF}$線段上，無法形成斜邊線段在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形，所以在使用插旗法計算斜邊線段在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數時，我們就可以先找出$\overline{EF}$線段上須要扣除的網格節點個數，並再扣除E點與F點。

(二) 探討2×2、4×4、6×6...n × n(n為偶數)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值。

1. 觀察：

我們在了解了2×2、3×3、4×4、5×5、6×6...n × n正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之計數方法後，接下來我們想知道偶數正方形網格中，哪一種邊上網點構成正方形所形成的合法直角三角形個數會是最大值？我們先把6×6正方形網格ABCD裡正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數算出來，我們發現當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為1單位及5單位時，小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數有44個，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為2單位及4單位時，小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數有56個，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為3單位及3單位時，小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數有60個，我們觀察到當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等的時候，小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數會是最大值，我們很好奇在其他規格的正方形網格中，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等的時候，是否所形成的合法直角三角形個數就會是最大值？

我們從2×2與4×4的正方形網格開始研究，發現在2×2正方形網格ABCD邊上網點所構成的小正方形EFGH只有一種類型，其形成的$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度相等，分別為1單位及1單位，而其中所形成的合法直角三角形個數有12個，是正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數之最大值，計算過程如圖4-2-7所示；此外，我們也觀察了4×4的正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為1單位及3單位時，小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數有28個，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為2單位及2單位時，小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數有32個。

發現當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等時，小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數會是最大值，計算過程如圖4-2-8所示。

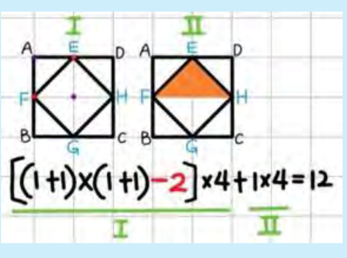


圖4-2-7 2×2 的計數過程

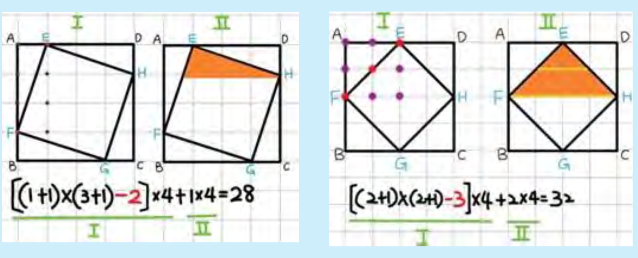


圖4-2-8 4×4的計數過程

2. 尋找關係與樣式：

接著，我們繼續研究由8×8的正方形網格ABCD邊上網點所構成的不同類型小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數。當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為1單位及7單位時，小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數有60個，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為2單位及6單位時，小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數有80個，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為3單位及5單位時，小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數有100個，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為4單位及4單位時，小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數有96個，計數過程如圖4-2-9所示。

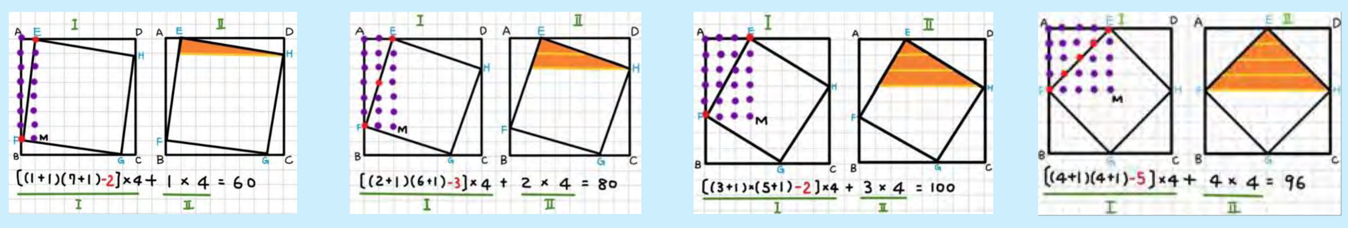


圖4-2-9 8×8的正方形網格ABCD邊上網點所構成不同類型小正方形EFGH所形成的直角三角形的計數過程

我們發現：在8×8的正方形網格ABCD中，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等時(即4單位及4單位)，所形成的合法直角三角形數量會比$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為3單位及5單位時還來的少，如表4-2-1所示，與上述在計數2×2、4×4、6×6(2k×2k，k=1，2，3時)的正方形網格ABCD邊上網點所構成不同類型小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數時所發現的現象不同，在8×8的正方形網格ABCD中，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等時，所形成的合法直角三角形數量並非最大值，8×8的正方形網格ABCD中所形成的合法直角三角形數量最大值，會出現在$\overline{AE}$線段、$\overline{AF}$線段的長度為3單位及5單位的正方形類型中。

表4-2-1 8×8的正方形網格ABCD邊上網點所構成不同類型小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數及$\overline{EF}$ 線段上所要扣除的網格節點個數

$\overline{AE}$線段	$\overline{AF}$線段	不同類型的正方形EFGH所形成的直角三角形數量	線段$\overline{EF}$上的所有節點個數	$\overline{EF}$線段上需扣除的節點個數
1	7	60	2	2
2	6	80	3	3
3	5	100	2	2
4	4	96	5	5

這個發現讓我們很驚訝，其推翻了之前所觀察的現象，為了研究這個問題，我們將偶數正方形網格ABCD的邊長以2k表示，並將正方形網格ABCD邊長對半分後的長度設為k，由於 E點及F點的移動會產生不同類型的正方形，以8×8的正方形網格為例，邊長為8單位，k為4單位，此時， $\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度可能皆為k單位，也可能是(k-1)單位和(k+1)單位、(k-2)單位和(k+2)單位或(k-3)單位和(k+3)單位，如表4-2-2所示。

透過研究表4-2-2我們發現，不同類型的正方形EFGH所形成的合法直角三角形數量最大值，必定不會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為(k-2)單位和(k+2)單位或 (k-3)單位和(k+3)單位的圖形中。因為在計算斜邊線段在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數時，算式為[(矩形AFME上的網格節點)－($\overline{EF}$線段上的網格節點)]×4，由表4-2-2可得知，8×8的正方形網格ABCD中所形成的合法直角三角形數量最大值為當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為(k-1)單位和(k+1)單位時，其斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數為$\{[(k-1)+1] \times [(k+1)+1] - 2\} \times 4$，即$[(k^2+2k)-2] \times 4$，共有88個；當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為(k-2)單位和(k+2)單位，其斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數為$\{[(k-2)+1] \times [(k+2)+1] - 3\} \times 4$，即$[(k^2+2k)-6] \times 4$，共有72個，其斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數必定比$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為(k-1)單位和(k+1)單位時還要少；而當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為(k-3)單位和(k+3)單位時，斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數為$\{[(k-3)+1] \times [(k+3)+1] - 2\} \times 4$，即$[(k^2+2k)-10] \times 4$，共有56個，其斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數亦必定比$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為(k-1)單位和(k+1)單位時還要少。因此，我們知道在觀察不同類型的正方形EFGH所形成的合法直角三角形數量最大值時，只要考慮$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段皆為k單位，以及$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為(k-1)單位和(k+1)單位的情況，其餘類型的$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段就可以不用列入討論。

表4-2-2 8×8的正方形網格ABCD邊上網點所構成不同類型小正方形EFGH所形成斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數之計數過程(k＝4)

$\overline{AE}$線段	$\overline{AF}$線段	第一類型合法直角三角形:斜邊在$\overline{EF}$線段上的合法直角三角形個數的算式	第一類型合法直角三角形:算式簡化	第一類型合法直角三角形:個數	第二類型合法直角三角形:算式及個數	合法直角三角形總數:算式簡化	合法直角三角形總數
k-3	k+3	{[(k-3)+1] ×[(k+3)+1]-2}×4 ＝[(k^2+2k-8)-2]×4	(k^2+2k-10)×4	56	4 (算式：(k-3)×4)	(k^2+2k) ×4-36	60
k-2	k+2	{[(k-2)+1] ×[(k+2)+1]-3}×4 ＝[(k^2+2k-3)-3]×4	(k^2+2k-6)×4	72	8 (算式：(k-2)×4)	(k^2+2k) ×4-16	80
k-1	k+1	{[(k-1)+1] ×[(k+1)+1]-2}×4 ＝[(k^2+2k)-2]×4	(k^2+2k-2)×4	88	12 (算式：(k-1)×4)	(k^2+2k) ×4+4	100
k	k	{[(k)+1] ×[(k)+1]-5}×4 ＝[(k^2+2k+1)-5]×4	(k^2+2k-4)×4	80	16 (算式：k × 4)	(k^2+2k) ×4	96

接著，我們繼續探討10×10、12×12的正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數，觀察是否會跟8×8正方形網格的結果一樣？在10×10的正方形網格ABCD邊上網點所構成不同類型小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數中，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為4單位及6單位時，小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數有144個，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為5單位及5單位時，小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數有140個，計算過程，如圖4-2-10所示。

我們發現：在10×10的正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數中，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為4單位及6單位時，所形成的合法直角三角形數量會比$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等時(即5單位及5單位)還來的多。

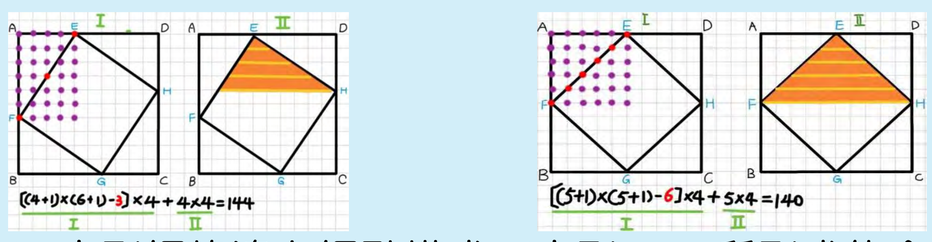


圖4-2-10 10×10的正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形的計數過程

在12×12的正方形網格ABCD邊上網點所構成不同類型小正方形EFGH所形成合法的直角三角形個數中，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為5單位及7單位時，小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數有204個，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為6單位及6單位時，小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數有192個，計算過程如圖4-2-11所示。

我們也發現：在12×12的正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數中，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段為5單位及7單位時，所形成的合法直角三角形數量會比$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等時(即6單位及6單位)還來的多。

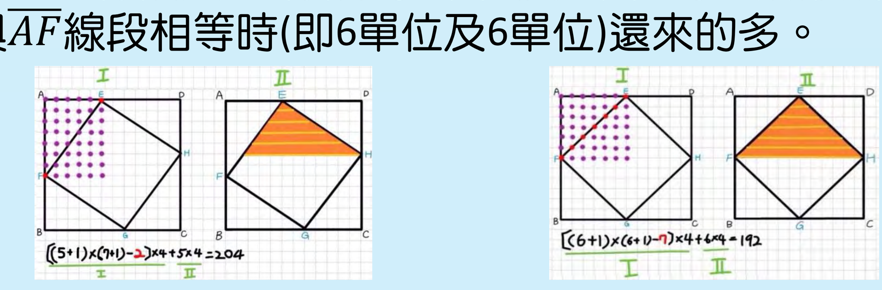


圖4-2-11 12×12的正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形的計數過程

此外，我們在研究12×12的正方形網格ABCD邊上網點所構成不同類型小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數的最大值時，也發現$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數，和8×8的正方形網格中的情形一樣，都是扣除兩個點，即E點和F點，但是我們是如何確認$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數除了E點及F點2個點以外，沒有通過其他的網格節點呢？在前述研究中我們都是透過觀察來計數通過$\overline{EF}$線段的網格節點個數，但是當網格變大時，若是持續以觀察法來計數，就會不小心把沒通過$\overline{EF}$線段的網格節點誤判為有通過$\overline{EF}$線段，讓我們很困擾。以12×12的正方形網格為例，如果用觀察法來計數，就會以為$\overline{EF}$線段上的P點位於網格節點上，如圖5-2-23所示。因此，我們透過觀察三角形的相似性質來解決這個問題，在圖4-2-12中，三角形FPQ及三角FEM為相似三角形，且$\overline{FQ}:\overline{FM}=\overline{PQ}:\overline{EM}=\overline{FP}:\overline{FE}$=3：5，已知$\overline{PQ}:\overline{EM}=3:5$，當$\overline{EM}$線段長度為7單位，$\overline{PQ}$線段的長度應為4.2(即$7 \times \frac{3}{5}$)，正因為網格上的每個節點都為整數，所以可以得知：P點雖然位於$\overline{EF}$線段上，但卻沒有通過任何的網格節點，由此可證明$\overline{EF}$線段通過的網格節點個數只有E點及F點2個點。

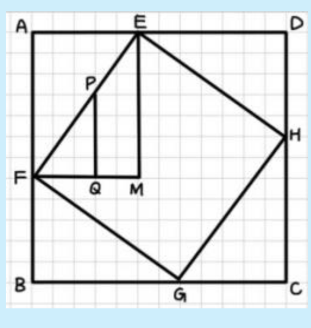


圖4-2-12 $\overline{EF}$線段與P點的關係圖

透過上述探究過程，我們確認在10×10、12×12的正方形網格ABCD中，在計算小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數時，與8×8的正方形網格ABCD+有同樣的現象，即最大值皆會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為$(k-1)$單位和$(k+1)$ 單位的圖形中。

3. 猜測：

透過觀察、尋找關係與樣式後，對於偶數×偶數(2k×2k)正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數之最大值，依據正方形ABCD的邊長長度，分為兩類，第一類為2×2、4×4和6×6(2k×2k，k=1，2，3時)的正方形網格ABCD，而第二類為8×8以上(2k×2k，k≥ 4)的正方形偶數網格ABCD。我們發現在第一類2×2、4×4和6×6(2k×2k，k=1，2，3時)的正方形網格ABCD中，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為正方形網格ABCD邊長對半分時(即k單位)，可在圖形上找到所形成的合法直角三角形個數之最大值。而在第二類8×8以上(2k×2k，k≥ 4)的正方形偶數網格ABCD中，我們猜測：正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數最大值，則會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為$(k-1)$單位和$(k+1)$單位時。

為了確認我們的猜測是成立的，我們又繼續探討了14×14與16×16的正方形網格ABCD內正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數的最大值，如圖4-2-13、圖4-2-14所示，發現也符合我們的猜測，正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數的最大值皆會出現在：$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為$(k-1)$單位和$(k+1)$單位的圖形中。

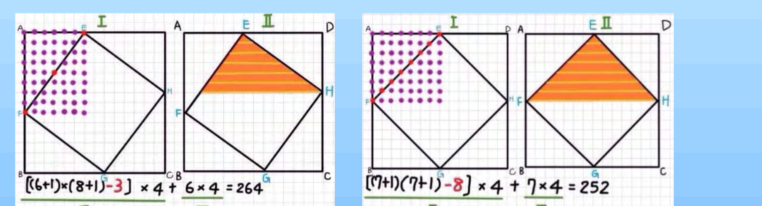


圖4-2-13 14×14的正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形的計數過程

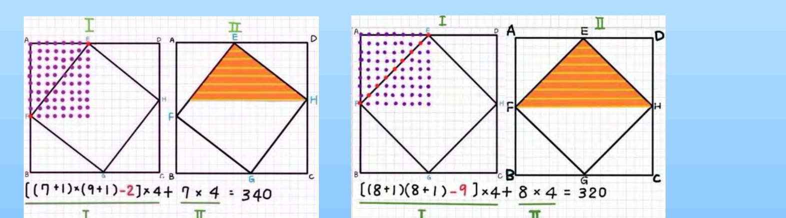


圖4-2-14 16×16的正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形的計數過程

4. 檢驗：

而在探究8×8以上的偶數×偶數(2k×2k，k≥ 4)正方形網格ABCD邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數之最大值的過程中，我們了解到最大值皆會出現在：$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為$(k-1)$單位和$(k+1)$單位的圖形中。同時，我們也發現一個特殊的現象：當我們運用插旗法進行最大值的計數時，由於$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數不同，所要扣除的網格節點個數也不同，但是似乎有其規律，在$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數上不是2個就是3個，所以要扣除的網格節點個數也同樣不是2個就是3個，如表4-2-3所示，但為何會這樣呢？

表4-2-3 8×8~16×16的正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數的最大值

規格 $(2k \times 2k)$	$\overline{AE}$ 線段 $(k-1)$	$\overline{AF}$ 線段 $(k+1)$	正方形EFGH所形成的合法直角三角形數量	$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數
8×8	3	5	100	2
10×10	4	6	144	3
12×12	5	7	204	2
14×14	6	8	264	3
16×16	7	9	340	2

我們發現當k為奇數時，(k-1)及(k+1)就會是偶數，且在三角形AEF中就會有另一個相似三角形JEK，由於$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的比值與$\overline{JK}$線段與$\overline{JE}$線段比值相同，為等值分數，因此，$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數除了E點及F點以外還會多一個K點，總共會有3個點，在進行最大值的計數時所要扣除的網格節點個數也就是這3個點。以14×14正方形網格ABCD為例，其圖形中正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數的最大值，會出現在$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段分別為6單位及8單位時，此時，我們觀察到三角形AEF會有一個相似三角形JEK，$\overline{JE}$線段與$\overline{JK}$段分別為3單位與4單位，$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的比值與$\overline{JK}$線段與$\overline{JE}$線段相同，為等值分數，所以造成通過$\overline{EF}$線段與$\overline{AE}$線段線段上除了E點與F點以外，還會多一個K點，因此要扣除的點有3個，如圖4-2-15所示。

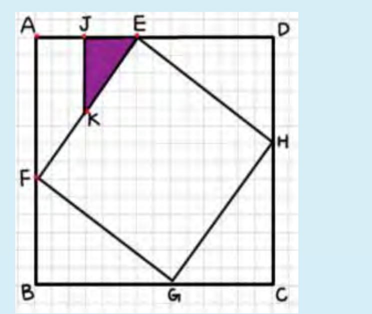


圖4-2-15 14×14正方形網格ABCD中$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數有三個(E、K、F點)

而當k為偶數時，我們發現(k-1)及(k+1)就會是奇數，在三角形AEF中就不會有另一個相似三角形，因此$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數除了E點及F點2個點以外，沒有其他的點，在進行最大值的計數時所要扣除的網格節點個數也就只有這2個點。以16×16正方形網格ABCD為例，其正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數的最大值，會出現在$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段分別為7單位及9單位時，此時，三角形AEF會有相似三角形，但是，其與∠F對應的頂點，不是$\overline{EF}$線段上的網點，所以，要扣除的點僅有兩個，即E點與F點，如圖4-2-16所示。

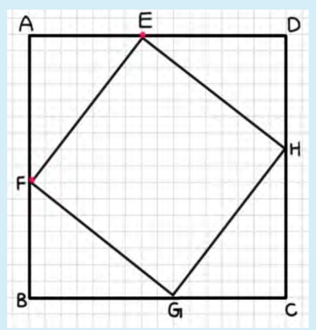


圖4-2-16 16×16正方形網格ABCD中$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數有兩個(E、F點)

綜上所述，我們發現在探究偶數×偶數(2k×2k)正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數之最大值時，可依據k的奇偶性，分成兩類作探討。當k為奇數時，$(k-1)$及$(k+1)$就會是偶數，且在三角形AEF中就會有另一個相似三角形JEK，由於$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的比值與$\overline{JK}$線段與$\overline{JE}$線段比值相同，兩者為等值分數，因此，$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數除了E點及F點以外還會多一個K點，總共會有3個點，在進行最大值的計數時所要扣除的網格節點個數也就是這3個點。當k為偶數時，我們發現$(k-1)$及$(k+1)$就會是奇數，且在三角形AEF中就不會有另一個相似三角形，因此$\overline{EF}$線段上所通過的網格節點個數除了E點及F點2個點以外，沒有其他的點，在進行最大值的計數時所要扣除的網格節點個數也就只有這2個點。

為了檢驗上述論點，我們打算在更大的網格中進行探討，以30×30(2k，k為奇數)及40×40(2k，k為偶數)的正方形網格ABCD進行研究，並將其中所含的正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數中列表，以找出最大值。但在列表的過程中，由於網格變大，正方形網格邊上網點構成正方形類型EFGH數量變多，我們也發現要逐一畫圖檢驗、觀察及計數$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數，會非常困擾，我們開始想知道要如何才能精準且快速算出$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數？

為了解決這個問題，我們跟老師一起討論過後，老師建議我們可透過觀察$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的比值有幾個等值分數，去找出判斷正方形網格邊上網點構成正方形EFGH中的三角形AEF含有幾個相似三角形，即可得知$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數。以30×30為例，當$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的長度分別為13單位與17單位時，由於$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段互質，最大公因數為1，比值為$\frac{13}{17}$，在三角形AEF中，就沒有其他的等值分數，也沒有其他相似三角形，因此在計算$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數只要扣掉2個點，即為E點及F點，如圖5-2-27 中的A圖所示。當$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的長度分別為14單位與16單位時，由於$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的最大公因數為2，比值為$\frac{14}{16}$，$\frac{14}{16}$的等值最簡分數為$\frac{7}{8}$，在三角形AEF中就會有1個相似三角形，因此在計算$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數要扣掉3個點，如圖5-2-27 中的B圖所示。當$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的長度分別為15單位與15單位時，由於$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的最大公因數為15，比值為$\frac{15}{15}$，$\frac{15}{15}$的等值分數為$\frac{14}{14}$、$\frac{13}{13}$、$\frac{12}{12}$、$\frac{11}{11}$、$\frac{10}{10}$、$\frac{9}{9}$、$\frac{8}{8}$、$\frac{7}{7}$、$\frac{6}{6}$、$\frac{5}{5}$、$\frac{4}{4}$、$\frac{3}{3}$、$\frac{2}{2}$、$\frac{1}{1}$，在三角形AEF中就會有14個相似三角形，因此在計算$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數要扣掉16個點，如圖4-2-17中的C圖所示。

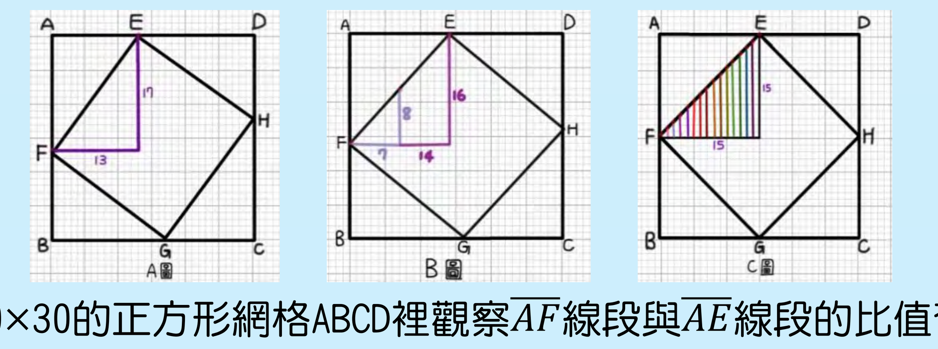


圖4-2-17在30×30的正方形網格ABCD裡觀察$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的比值有幾個等值分數

依此類推，我們透過上述方法，將30×30$(2k \times 2k$，k為奇數)的正方形網格ABCD中正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數及$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數列表整理，如表4-2-4所示。透過此表，我們發現正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數之最大值，跟前述研究一樣，都會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為 $(k-1)$、$(k+1)$單位時，此外，我們也發現一個有趣的現象，就是$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數，都與最大公因數有關連，皆為$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的最大公因數+1。接著，我們持續在40×40(2k，k為偶數)的正方形網格ABCD中正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數及$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數進行研究並列表整理，如表5-2-5所示，也發現有同樣的現象，即$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數，都與最大公因數有關連，皆為$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的最大公因數+1。

表4-2-4 30×30的正方形網格邊上網點構成小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數及$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數。

$\overline{AE}$線段	$\overline{AF}$線段	不同類型的正方形EFGH所形成的合法直角三角形數量	$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的最大公因數	$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數
1	29	236	1	2
2	28	344	2	3
3	27	444	3	4
4	26	544	2	3
5	25	620	5	6
6	24	696	6	7
7	23	788	1	2
8	22	848	2	3
9	21	900	3	4
10	20	920	10	11
11	19	996	1	2
12	18	1008	6	7
13	17	1052	1	2
14	16	1064	2	3
15	15	1020	15	16

表4-2-5 40x40的正方形網格邊上網點構成小正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數及$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數。

$\overline{AE}$線段	$\overline{AF}$線段	不同類型的正方形EFGH所形成的合法直角三角形數量	$\overline{AF}$線段與$\overline{AE}$線段的最大公因數	$\overline{EF}$線段上所要扣除的網格節點個數
1	39	316	1	2
2	38	464	2	3
3	37	604	3	4
4	36	736	4	5
5	35	860	5	6
6	34	992	2	3
7	33	1108	1	2
8	32	1184	8	9
9	31	1308	1	2
10	30	1360	10	11
11	29	1476	1	2
12	28	1536	4	5
13	27	1612	1	2
14	26	1664	2	3
15	25	1700	5	6
16	24	1728	8	9
17	23	1788	1	2
18	22	1808	2	3
19	21	1828	1	2
20	20	1760	20	21

5. 論證

透過觀察、尋找關係與樣式、猜測及檢驗，我們發現在8×8以上偶數(2k)正方形網格中正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數之最大值，都會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為$(k-1)$及$(k+1)$單位時，但為什麼最大值一定是出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為$(k-1)$及$(k+1)$單位時，有沒有可能因為網格變大，這個論點就會被推翻呢？且為何$(k-1)$及$(k+1)$的最大公因數不是1(當k為偶數)就是2(當k為奇數)，有沒有可能大於2？

這個問題困擾了我們許久，於是我們跟老師一起討論過後，老師建議我們用反證法來研究，我們的論證如下：

命題：當k為偶數時，$(k-1)$及$(k+1)$的最大公因數就是1，當k為奇數時，$(k-1)$及$(k+1)$的最大公因數就是2。

論證：

將$\overline{AE}$線段$(k-1)$的長度設為S，$\overline{AF}$線段$(k+1)$的長度即為$S+2$。假設S與$S+2$最大公因數為a，且$a \geq 3$，即S為at，$S+2$為au，且$u>t$，此時，可推得a可以整除$[(S+2)-S]$，也就是a可以整除2，與原先的假設$a \geq 3$互相矛盾，因為當$a \geq 3$時就無法整除2，因此可以透過反證法得知，$(k-1)$及$(k+1)$的最大公因數不是1(當k為偶數)就是2(當k為奇數)。

依據前述研究結果，我們將計數偶數×偶數(2k×2k)正方形網格ABCD中正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成合法的直角三角形個數之最大值的公式分為以下三類：第一類為2×2、4×4和6×6(2k×2k，k=1，2，3時)的正方形網格ABCD；第二類為8×8以上(2k×2k，且k為奇數)的正方形網格ABCD；第三類為8×8以上(2k×2k，且k為偶數)的正方形網格ABCD。

(1)命題：當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段相等的時候，2×2、4×4和6×6(2k×2k，k=1，2，3時)的正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成合法直角三角形個數會有最大值：$[(k+1)\times(k+1)-(k+1)]\times 4+k\times 4$。

論證：

我們將偶數正方形網格ABCD的邊長設為2k，由前述研究得知，2×2、4×4和6×6(2k×2k，k=1，2，3時)的正方形網格邊上網點構成小正方形EFGH所形成合法直角三角形個數，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為正方形網格ABCD邊長對半分時，可在圖形上找到所形成的直角三角形個數之最大值，因此，我們將正方形網格ABCD邊長對半分後的長度設為k，即$\overline{AE}$線段$=\overline{AF}$線段$=$k，第一類型的合法直角三角形的計算公式為：

$[(k+1)\times(k+1)-(k+1)]\times 4$。

而第二種類型是斜邊在網格格線上，且直角落在正方形EFGH的角上的直角三角形，直角落在正方形EFGH的∠E上的個數即為$\overline{DH}$線段的長度，也等同$\overline{AE}$線段的長度，即為k，接著，根據圖形旋轉對稱的原理再乘以4，就可以得知斜邊在網格格線上且直角落在正方形EFGH各角上的直角三角形總數為：$k\times 4$。

綜合上述，2×2、4×4和6×6(2k×2k，k=1，2，3)的正方形網格邊上網點構成小正方形EFGH所形成合法直角三角形個數之最大值為：

$[(k+1)\times(k+1)-(k+1)]\times 4+k\times 4$。

(2)命題：當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為(k-1)單位和(k+1)單位時，8×8以上(2k×2k，且k為偶數)的正方形偶數網格ABCD與其中的正方形EFGH所形成合法直角三角形個數會有最大值：

$\{[(k-1)+1]\times[(k+1)+1]-2\}\times 4+(k-1)\times 4$

論證：

我們將偶數正方形網格ABCD的邊長設為2k，由前述研究得知，8×8以上(2k×2k，且k為偶數)的正方形網格邊上網點構成小正方形EFGH所形成合法直角三角形個數，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為(k-1)單位和(k+1)單位時，由前述論證可知，當k為偶數時，(k-1)及(k+1)的最大公因數就是1，因此在計算通過$\overline{EF}$線段上的網格節點時，為最大公因數+1，即為2，第一類型的合法直角三角形的計算公式為：

$\{[(k-1)+1]\times[(k+1)+1]-2\}\times 4$

而第二類型是斜邊在網格格線上，且直角落在正方形EFGH的角上的直角三角形，直角落在正方形EFGH的∠E上的個數即為$\overline{DH}$線段的長度，也等同$\overline{AF}$線段的長度，即為(k-1)單位，接著，根據圖形旋轉對稱的原理再乘以4，就可以得知斜邊在網格格線上且直角落在正方形EFGH各角上的直角三角形總數為：$(k-1)\times 4$。

綜合上述，8×8以上(2k×2k，且k為偶數)的正方形網格邊上網點構成小正方形EFGH所形成合法直角三角形個數之最大值為：

$\{[(k-1)+1]\times[(k+1)+1]-2\}\times 4+(k-1)\times 4$。

(3)命題：當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為(k-1)單位和(k+1)單位時，8×8以上(2k×2k，且k為奇數)的正方形偶數網格ABCD與其中的正方形EFGH所形成合法直角三角形個數會有最大值：

論證：

我們將偶數正方形網格ABCD的邊長設為2k，由前述研究得知，8×8以上(2k×2k，且k為奇數)的正方形網格邊上網點構成小正方形EFGH所形成合法直角三角形，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為(k-1)單位和(k+1)單位時，由前述論證可知，k為奇數時，(k-1)及(k+1)的最大公因數就是2，因此在計算通過$\overline{EF}$線段上的網格節點時為最大公因數+1，即為3，第一類型的合法直角三角形的計算公式為：

$\{[(k-1)+1]\times[(k+1)+1]-3\}\times 4$。

而第二種類型是斜邊在網格格線上，且直角落在正方形EFGH的角上的直角三角形，直角落在正方形EFGH的∠E上的個數即為$\overline{DH}$線段的長度，也等同$\overline{AF}$線段的長度，即為(k-1)單位，接著，根據圖形旋轉對稱的原理再乘以4，就可以得知斜邊在網格格線上且直角落在正方形EFGH各角上的直角三角形總數為：$(k-1)\times 4$。

綜合上述，8×8以上(2k×2k，且k為奇數)的正方形網格邊上網點構成小正方形EFGH所形成合法直角三角形個數之最大值為：

$\{[(k-1)+1]\times[(k+1)+1]-3\}\times 4+(k-1)\times 4$。

(三) 探討3×3、5×5、7×7…n×n(n為奇數)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值。

1. 觀察

透過研究目的一，我們已知2×2、3×3、4×4、5×5、6×6…n×n正方形網格ABCD邊上網點構成小正方形所形成合法直角三角形個數之計數方法，也就是只要算出斜邊在小正方形EFGH上的合法直角三角形個數，再加上斜邊在網格格線上且直角落在正方形EFGH各角上的直角三角形總數，就可以算出不同類型的正方形EFGH所形成合法的直角三角形數量。由於在奇數×奇數((2k+1)×(2k+1))正方形網格ABCD中，$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度不可能對半分(皆為k單位，k為整數)，因此，我們可從$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度為k單位與(k+1)單位開始進行研究。

2. 尋找關係與樣式：

我們透過將3×3、5×5、7×7正方形網格ABCD中正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成合法的直角三角形個數之最大值的計數過程列表，以尋找關係與樣式，我們發現，在3×3、5×5、7×7正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成合法的直角三角形數量最大值，都會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為k單位和(k+1)單位的圖形中。因為在計算第一類型合法的直角三角形個數時，即斜邊線段在EF上的直角三角形個數，算式為[(矩形AFME上的網格節點)−(EF線段上的網格節點)]×4，我們以7×7為例，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為k單位和(k+1)單位時，其斜邊在$\overline{EF}$線段上的直角三角形個數為$\{(k+1)\times[(k+1)+1]-2\}\times 4$，即$[(k^2+3k+2)-2]\times 4$；當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為(k-1)單位和(k+2)單位，其斜邊線段在EF上的直角三角形個數為$\{[(k-1)+1]\times[(k+2)+1]-2\}\times 4$，即$[(k^2+3k)-2]\times 4$；而當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段分別為(k-2)單位和(k+3單位時，斜邊線段在$\overline{EF}$上的直角三角形個數為$\{[(k-2)+1]\times[(k+3)+1-2]\}\times 4$，即$[(k^2+3k-4)-2]\times 4$，由以上計數結果可得知，斜邊在$\overline{EF}$線段上的直角三角形個數之最大值，必定出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為k單位和(k+1)單位時。

此外，在計算第二類型合法的直角三角形個數時，即直角落在正方形EFGH角上的直角三角形個數，計數方法為$\overline{AE}$線段或$\overline{AF}$線段之短邊的長度乘以四，我們也發現直角落在正方形EFGH角上的直角三角形個數之最大值，也必定出現於$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為k單位和(k+1)單位時。

因此，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度為k單位和(k+1)單位時，我們把兩種類型的直角三角形個數相加，就可得知不同類型的正方形EFGH所形成合法的直角三角形數量最大值。

3. 猜測：

透過觀察、尋找關係與樣式，我們發現，3×3、5×5與7×7奇數正方形網格ABCD中正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成合法的直角三角形個數之最大值時，都會出現在當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度為k單位與(k+1)單位時，沒有隨著正方形網格的邊長變大而有所改變，因此我們猜測，在更大的奇數正方形網格ABCD中，只要$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度為k單位與(k+1)單位，其正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成合法的直角三角形數量都會是最大值。

4. 檢驗：

為了檢驗我們的猜測，我們繼續列表觀察9×9與11×11的正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成的合法直角三角形個數之最大值，發現也符合我們猜測的結果，最大值只會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度分別為皆為k單位與(k+1)單位時，其餘類型的正方形網格邊上網點構成正方形所形成的合法直角三角形個數，皆會小於當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度分別為k單位與$(k+1)$單位時。

5. 論證：

透過觀察、尋找關係與樣式、猜測及檢驗，我們將奇數×奇數((2k+1)×(2k+1))正方形網格ABCD中正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成合法的直角三角形個數之最大值公式化，依據前述研究結果，我們發現奇數正方形網格ABCD中正方形網格邊上網點構成正方形EFGH所形成合法的直角三角形個數，最大值只會出現在$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段長度分別為皆為k單位與$(k+1)$單位時。

命題：

奇數正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量最大值之計數公式為：$\{(k+1)\times[(k+1)+1]-2\}\times 4+k\times 4$。

論證：

當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為k單位和 (k+1) 單位時，奇數正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量會有最大值。我們將奇數×奇數正方形網格ABCD的邊長設為2k+1，在計算第一類型合法的直角三角形個數時，即斜邊在EF線段上的直角三角形個數，算式為[(矩形AFME上的網格節點)−(EF線段上的網格節點)]×4，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為 k單位和 (k+1) 單位，矩形AFME上的網格節點個數為$[k+1]\times[(k+1)+1]$，又因為k及$(k+1)$的最大公因數為1，因此$\overline{EF}$線段上的網格節點個數為最大公因數+1，即為2，則第一類型的合法直角三角形的個數為：$\{(k+1)\times[(k+1)+1]-2\}\times 4$

而在計算第二類型合法的直角三角形個數時，即直角落在正方形EFGH角上的直角三角形個數，計數方法為$\overline{AE}$線段或$\overline{AF}$線段中短邊的長度乘以四，當$\overline{AE}$線段與$\overline{AF}$線段的長度分別為 k單位和 $(k+1)$ 單位，斜邊在網格格線上且直角落在正方形EFGH各角上的直角三角形總數為：$k\times 4$。

綜合上述，奇數×奇數((2k+1)×(2k+1))正方形網格邊上網點構成正方形所形成合法直角三角形個數之最大值為:$\{(k+1)\times[(k+1)+1]-2\}\times 4+k\times 4$。

伍、研究結果

一、2×2、3×3、4×4、5×5、6×6…n×n正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之計數方法。

2×2、3×3、4×4、5×5、6×6…n×n正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量可分為兩種類型進行探討：第一種類型是斜邊在正方形EFGH上的直角三角形，當直角三角形的斜邊落在EF線段上，會形成許多直角落在網格節點上的直角三角形，我們透過插旗法可算出其個數為：[(矩形AFME上的網點)−(EF線段上的網點)]×4，且EF線段上的網點數量=(AE線段、AF線段的最大公因數)+1；第二種類型則是直角三角形的斜邊在網格格線上，且直角落在正方形EFGH的角上的直角三角形，其個數會等於($\overline{DH}$線段的長度)×4，因此將上述兩種類型的直角三角形個數相加，即可得知所有的合法的直角三角形的個數，圖例及圖形代號如5-1-1所示。

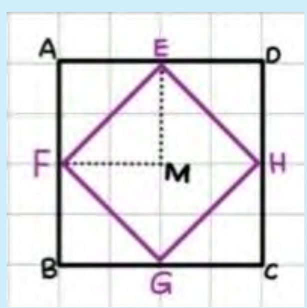


圖5-1-1 正方形網格邊上網點所構成的正方形及圖形代號

二、2×2、4×4、6×6…n×n(n為偶數)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值。

偶數×偶數(2k×2k)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量，依據正方形網格邊長長度可分成三類，分別為：第一類為2×2、4×4和6×6 (2k×2k，k=1，2，3時)的正方形網格；第二類為8×8以上(2k×2k，且k為奇數)的正方形網格；第三類為8×8以上(2k×2k，且k為偶數)的正方形網格。其計數公式分別如下：

1. 2×2、4×4和6×6(2k×2k，k=1，2，3時)的正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值：
   $[(k+1)\times(k+1)-(k+1)]\times 4+k\times 4$。
2. 8×8以上(2k×2k，且k為偶數)的正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值：
   $\{[(k-1)+1]\times[(k+1)+1]-2\}\times 4+(k-1)\times 4$。
3. 8×8以上(2k×2k，且k為奇數)的正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值：
   $\{[(k-1)+1]\times[(k+1)+1]-3\}\times 4+(k-1)\times 4$。

三、3×3、5×5、7×7…n×n(n為奇數)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值。

$\{(k+1)\times[(k+1)+1]-2\}\times 4+k\times 4$。

陸、結論

我們透過觀察、尋找關係與樣式、猜測、檢驗與論證的探究過程，獲得主要研究結果如下：

一、在探討2×2、3×3、4×4、5×5、6×6…n×n正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量之最大值時，我們運用插旗法及相似三角形的性質，找到了計數方法及公式。

二、找到在2×2、4×4、6×6…n×n(n為偶數)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量最大值之圖形類形及計數公式。

三、找到在3×3、5×5、7×7…n×n(n為奇數)正方形網格邊上網點構成正方形所生成的相似合法直角三角形數量最大值之圖形類形及計數公式。

柒、參考資料

一、國民小學課本南一版第9冊第5單元—認識線對稱圖形及對稱軸。
二、國民小學課本南一版第12冊第4單元—縮圖和放大圖。
三、2015/2016國際中小學數學能力檢測-小學高年級組第二輪檢測試題-第11題