

# 中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

國小組 數學科

080402

大展鴻圖

學校名稱：雲林縣北港鎮南陽國民小學

作者： 小六 蔡思筠 小六 黃順德 小六 陳鈺蓁	指導老師： 蔡銘峻 吳美瑤
-----------------------------------	---------------------

關鍵詞：正方體展開圖、排列組合、對稱

## 摘要

國小五年級數學曾經介紹過正方體的展開圖，對國小學生而言，想要將三維空間的立體形體轉換為二維的平面圖形是較為困難的。本研究採用「玩數學」的理念為出發，讓學生透過有趣的、具體的實物操作，找出可組成正方體的平面圖形，並從中觀察與歸納出可組成正方體展開圖的規則。

## 壹、研究動機

長方體的物品在生活中隨處可見，如：電腦主機、面紙盒、鉛筆盒或是櫃子，而每邊都等長的正方體物品也所在都有，如：積木、骰子、方糖、紙箱。但是應該很少人會去思考這些立體物品的表面展開攤平之後的圖形會是如何？只有一種嗎？還是有其他不同的排列組合呢？如果有，有幾種呢？

上數學課時，老師讓我們全班分組利用六個全等的正方形（正方體的六個面）排列出各種六連正方形。班上五組共二十八位同學，做出了許多不同的六連正方形，但是只有某些同學的六連正方形可以組成正方體，有些則不行。我們很好奇六連正方形能夠成為正方體展開圖的必備條件是什麼呢？正方體有哪些展開圖呢？

## 貳、研究目的

- 一、利用正方形紙卡排列出 35 種六連正方形的組合。
- 二、從 35 種六連正方形的組合中再找出 11 種正方體的展開圖。
- 三、將 11 種正方體展開圖歸納分類。
- 四、將 24 種無法構成正方體的六連正方形歸納分類。
- 五、應用正方體的研究方法與結果，找出正四面體與正八面體的展開圖。

## 參、研究設備及器材

- 一、排列六連正方形：正方體積木。
- 二、裁切正方形紙卡：名片紙卡、直尺、美工刀、切割板。
- 三、黏貼六連正方形：透明膠帶。
- 四、繪製六連正方形：鉛筆、正方形規板（以透明塑膠片自製）、筆記本。

五、排列正四面體及正八面體的展開圖：正三角形智慧片。

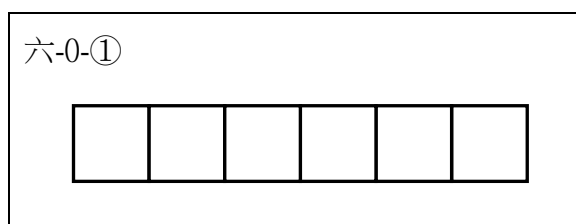
## 肆、研究過程與方法

一、想得到正方體的展開圖最直接的方式就是：拿一個正方體來將它的幾個邊剪開後攤平。

但是，問題又來了：該剪幾個邊？要剪哪些邊？而且要取得能夠剪開邊又能把六個面攤平的正方體似乎不太容易。因此，反過來思考，既然正方體共有六個全等的面（正方形），所以它的展開圖自然是由此六個全等的正方形相連而成（六連正方形）。

二、為了方便操作，我們先用六個正方體積木有規律的排出六連正方形，並用正方形規板畫下六連正方形。其中，排列的規律性為：首先是六個正方形排成一列、再來是五個先排一列、接著是四個先排一列，以此類推。並將六連正方形編號，如：五-1-①，第一碼中文數字代表五個先排一列，第二碼：0 代表零側、1 代表一側、2 代表兩側，第三碼為流水號。另外，只要排出的六連正方形會左右（或上下）對稱或旋轉某個角度會重疊（或對稱）者，都視為相同的組合。最後，我們共找到 35 種六連正方形的組合，如下圖：

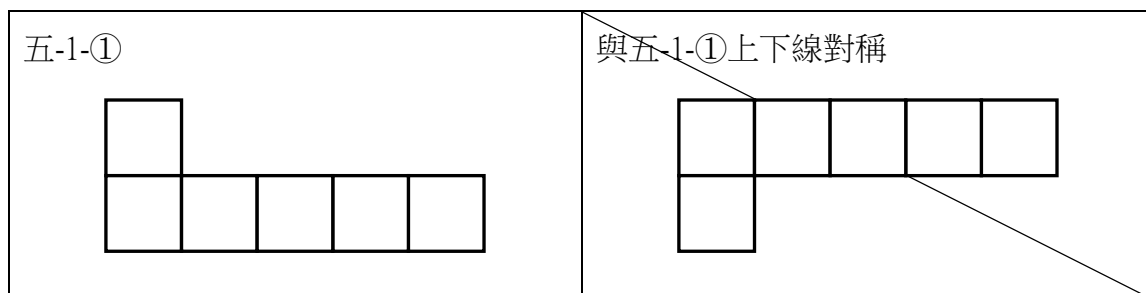
(一)、六-0-\*：可排列出 1 種組合方式

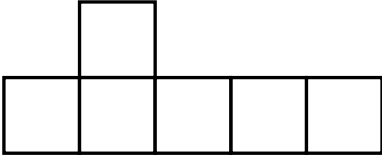
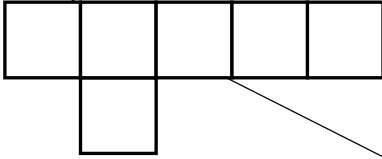
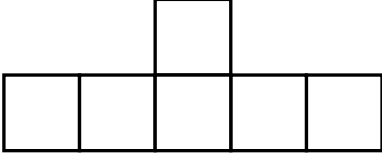
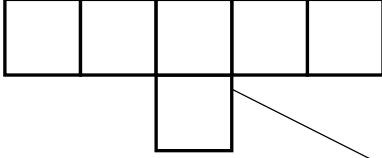
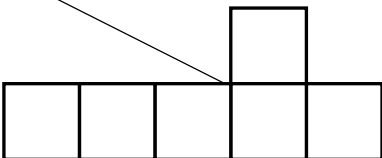
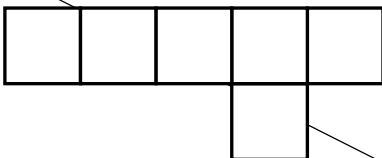
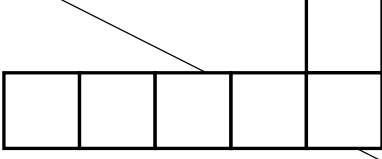
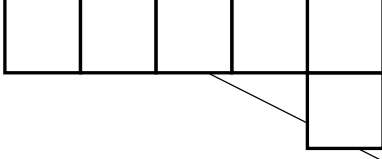


(二)、五-1-\*：可排列出 3 種組合方式

先排一列五連正方形，另一個正方形擺在上、下兩側，各有 5 種擺法，共  $5 \times 2 = 10$  種。扣除上下對調，會剩  $\lfloor 10/2 \rfloor = 5$  種；再扣除左右鏡射，最後剩下  $\lfloor 5/2 \rfloor = 3$  種。

如下圖：

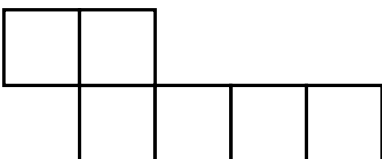
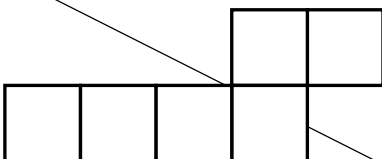


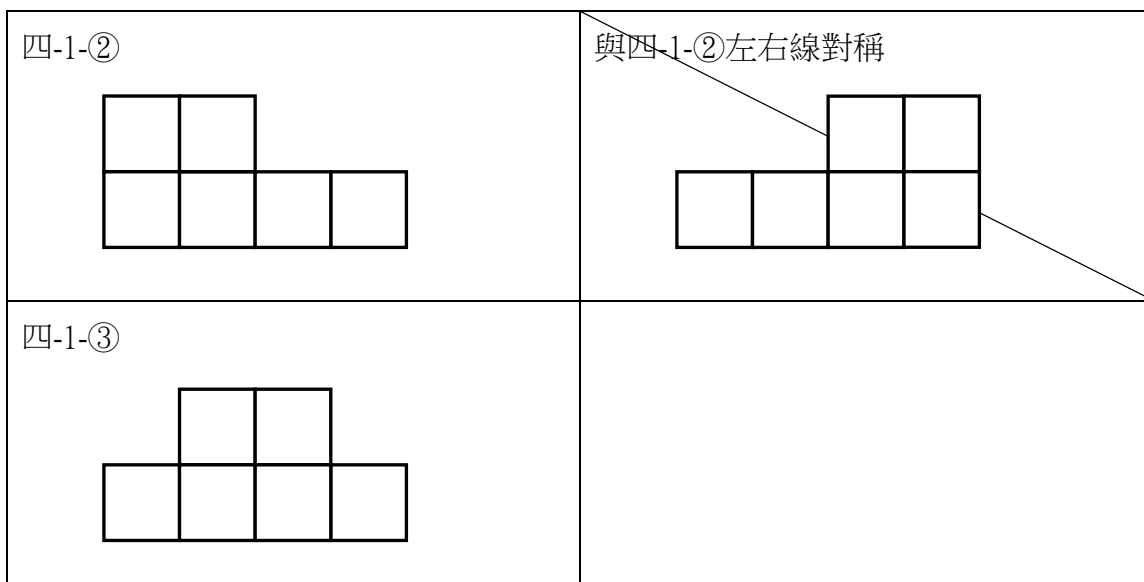
<p>五-1-②</p> 	<p>與五-1-②上下線對稱</p> 
<p>五-1-③</p> 	<p>與五-1-③上下線對稱</p> 
<p>與五-1-②左右線對稱</p> 	<p>由五-1-②旋轉 180° (點對稱)</p> 
<p>與五-1-①左右線對稱</p> 	<p>由五-1-①旋轉 180° (點對稱)</p> 

【說明】當先排一列五連正方形時，還有一個正方形，我們發現這個正方形擺在上側的會和擺在下側的對應位置者互相上下線對稱，像這種情形則視為同一種組合方式。當先排一列四連正方形或三連正方形時，也會有這種上下線對稱的情形，因此我們只需排上側即可，上下對調者就不需再重複排列了。

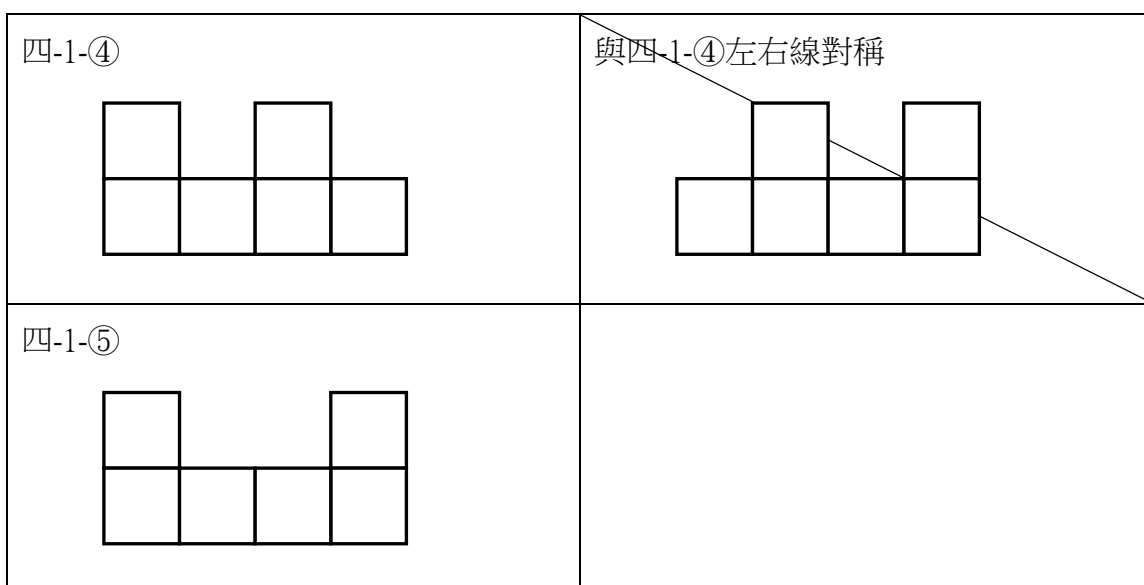
(三)、四-1-\*：可排列出 7 種組合方式

1.先排一列四連正方形，另一個平躺的二連正方形擺在上側，有 5 種擺法。扣除左右鏡射，最後剩下  $\lfloor 5/2 \rfloor = 3$  種。如下圖：

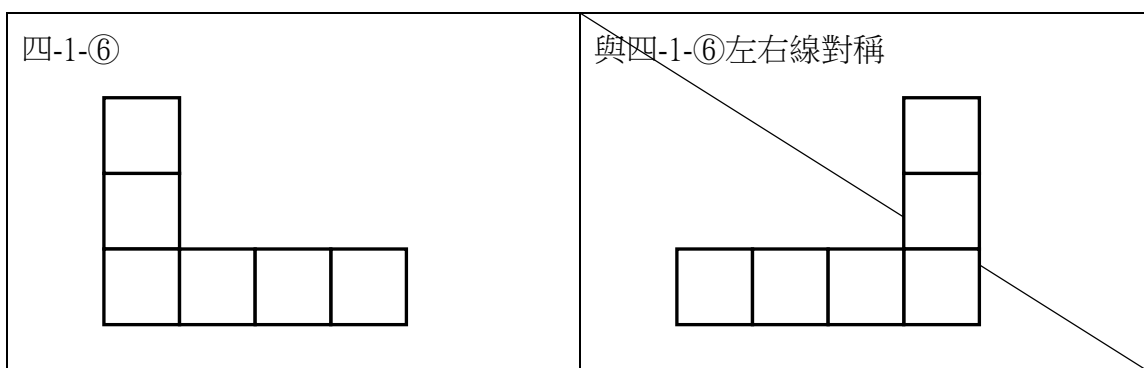
<p>四-1-①</p> 	<p>與四-1-①左右線對稱</p> 
--	---

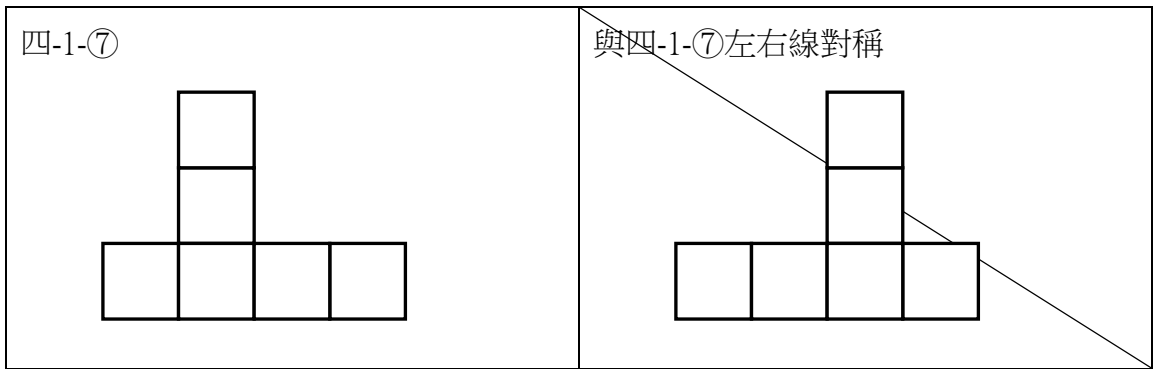


2.先排一列四連正方形，另外兩個不相連的單一正方形擺在上側，有 3 種擺法。扣除左右鏡射，會剩下  $\lfloor 3/2 \rfloor = 2$  種。如下圖：



3.先排一列四連正方形，另一個直立的二連正方形擺在上側，有 4 種擺法。扣除左右鏡射，最後剩下  $\lfloor 4/2 \rfloor = 2$  種。如下圖：

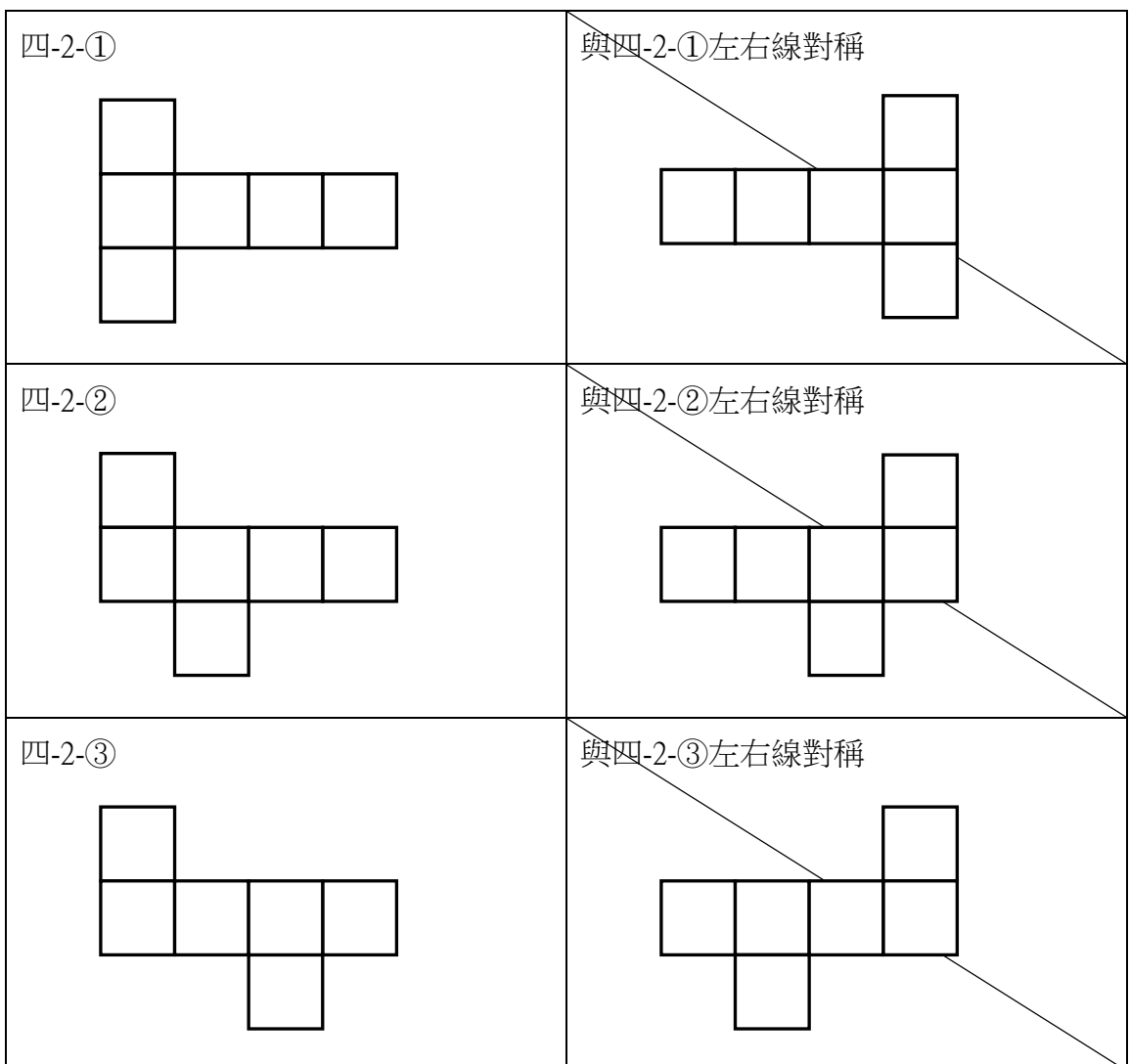




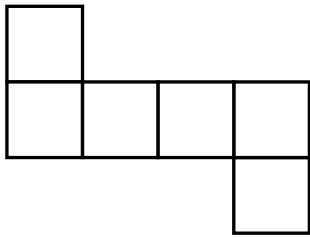
(四)、四-2-\*：可排列出 6 種組合方式

先排一列四連正方形，另兩個單一正方形分別擺在上、下兩側，共  $4 \times 4 = 16$  種擺法。

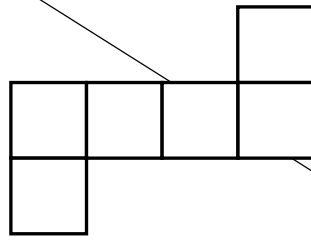
扣除上下、左右以及旋轉對稱，最後剩下 6 種。如下圖：



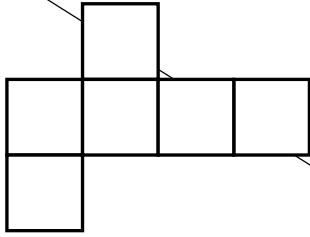
四-2-④



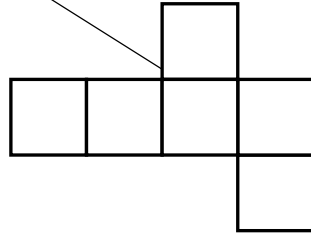
與四-2-④左右線對稱



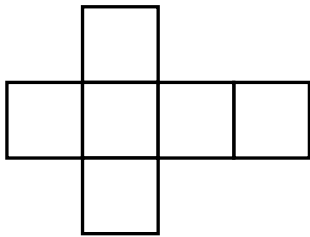
與四-2-②上下線對稱



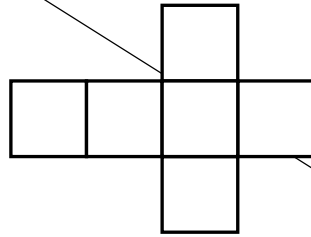
由四-2-②旋轉 180° (點對稱)



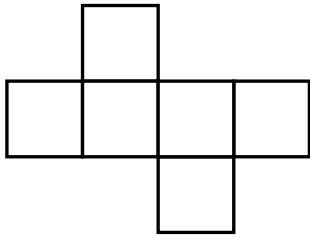
四-2-⑤



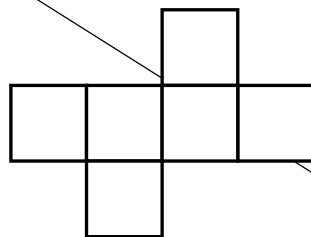
與四-2-⑤左右線對稱



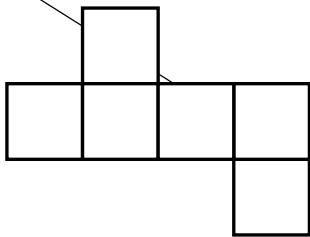
四-2-⑥



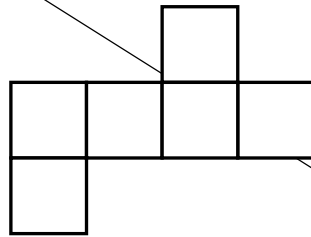
與四-2-⑥左右線對稱



由四-2-③旋轉 180° (點對稱)

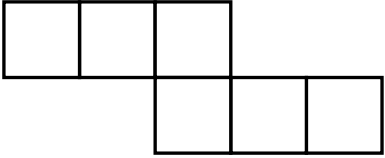
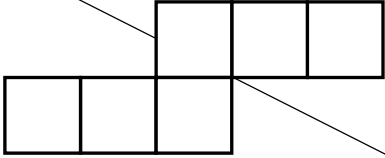
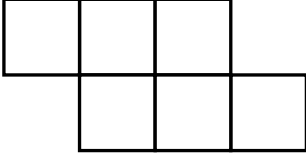
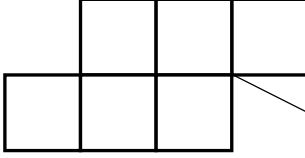
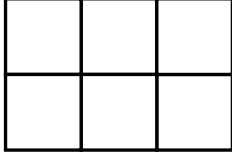
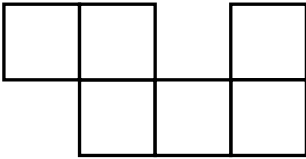
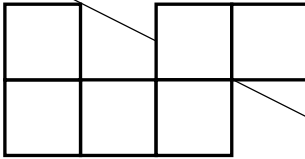
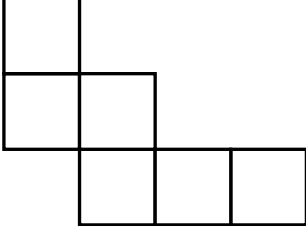
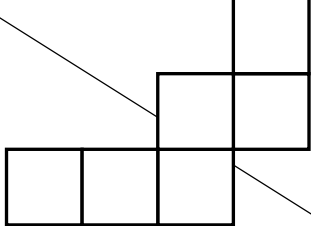


與四-2-③上下線對稱

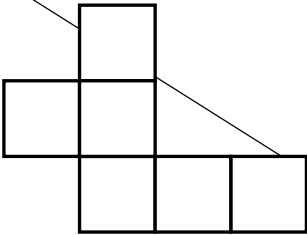
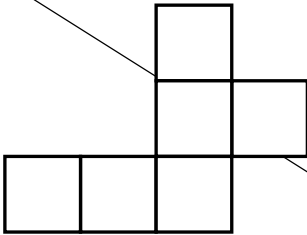
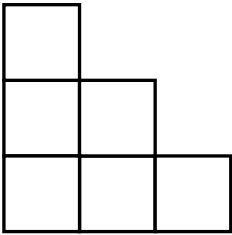
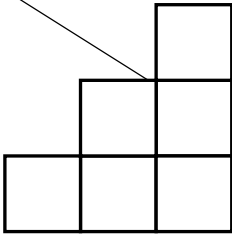
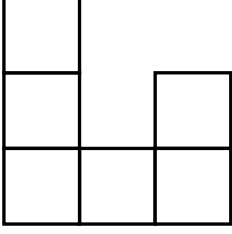
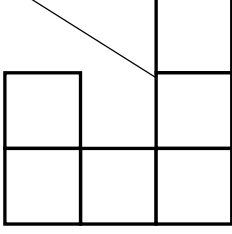
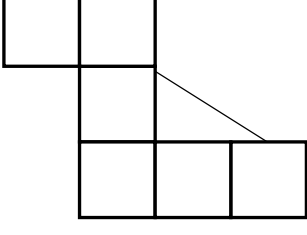
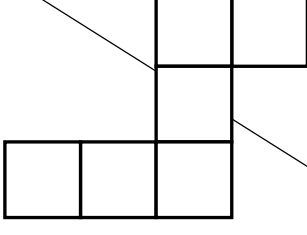
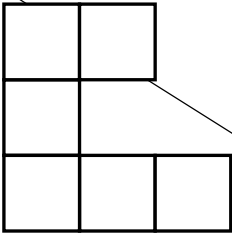
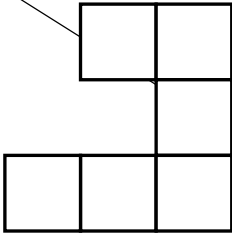


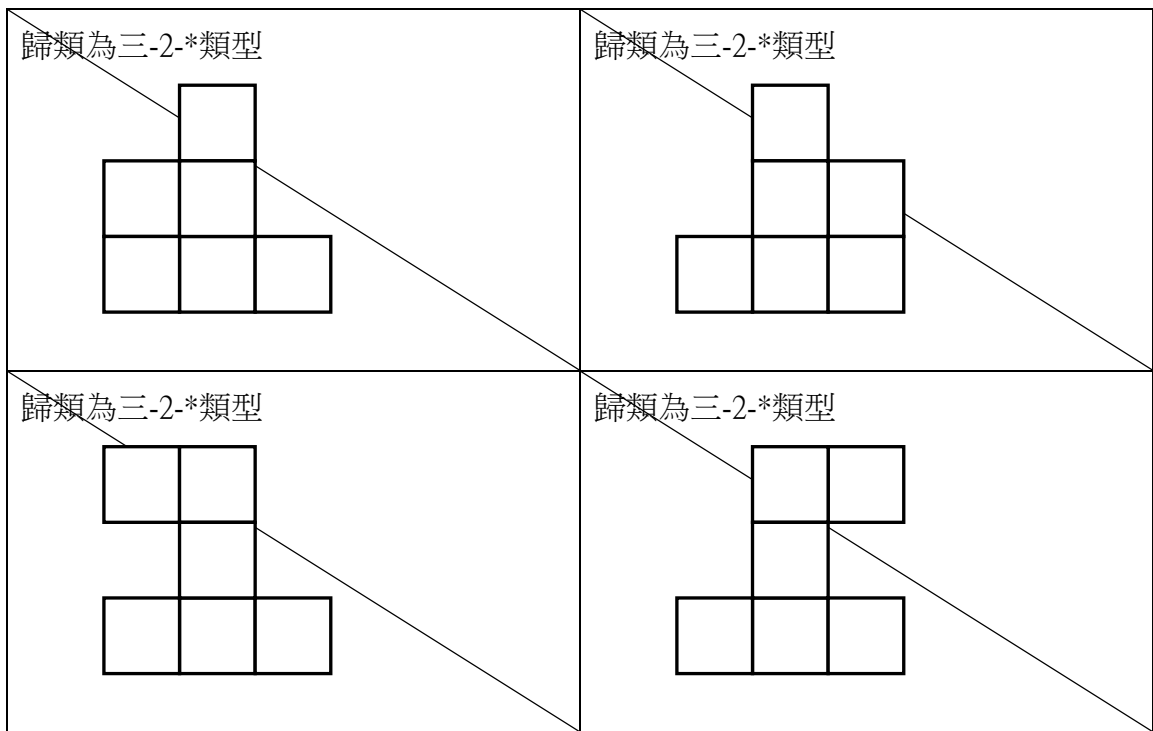
(五)、三-1-\*：可排列出 7 種組合方式

先排一列三連正方形，另三個正方形擺在上側，此種排列組合雖然較為複雜，不過，累積前面之經驗，我們仍然可依循規律找出 23 種擺法。扣除左右和旋轉對稱，以及重複歸類為三-2-\*者，最後剩下 7 種。如下圖：

<p>三-1-①</p> 	<p>與三-1-①左右線對稱</p> 
<p>三-1-②</p> 	<p>與三-1-②左右線對稱</p> 
<p>三-1-③</p> 	
<p>三-1-④</p> 	<p>與三-1-④左右線對稱</p> 
<p>三-1-⑤</p> 	<p>與三-1-⑤左右線對稱</p> 

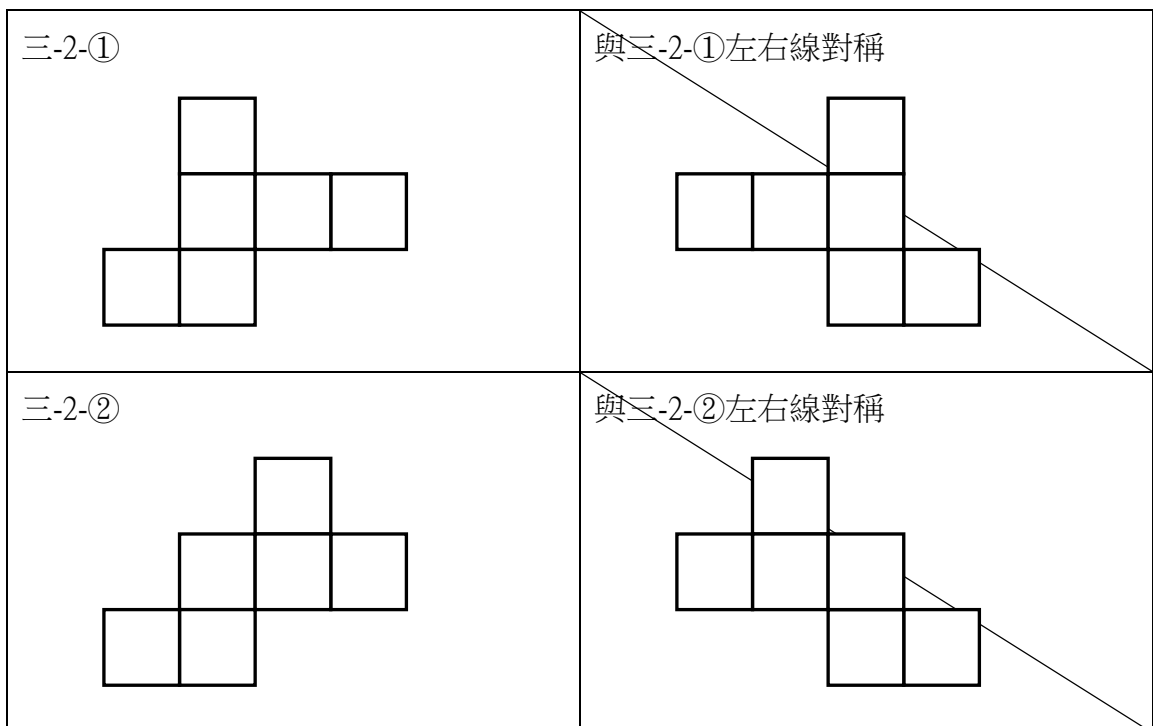


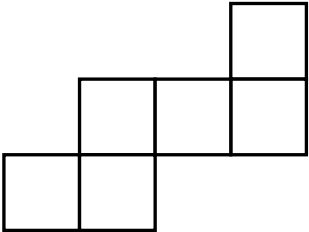
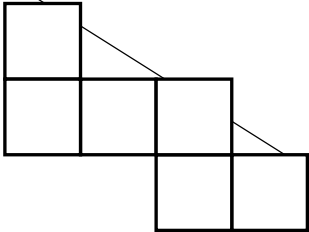
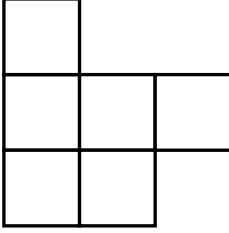
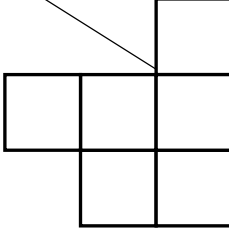
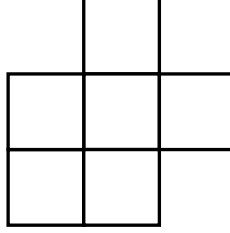
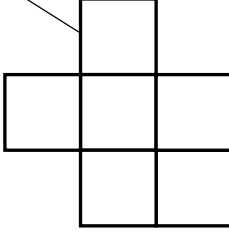
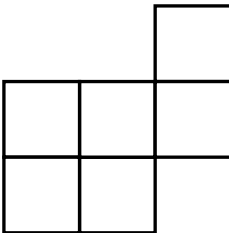
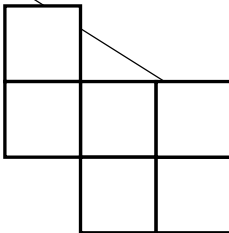
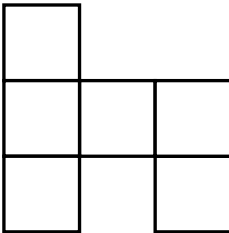
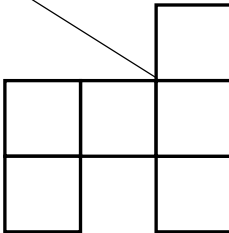
<p>歸類為三-2-*類型</p> 	<p>歸類為三-2-*類型</p> 
<p>三-1-⑥</p> 	<p>與三-1-⑥左右線對稱</p> 
<p>三-1-⑦</p> 	<p>與三-1-⑦左右線對稱</p> 
<p>歸類為三-2-*類型</p> 	<p>歸類為三-2-*類型</p> 
<p>由三-1-⑦逆時針旋轉 90°+左右線對稱</p> 	<p>由三-1-⑦逆時針旋轉 90°</p> 

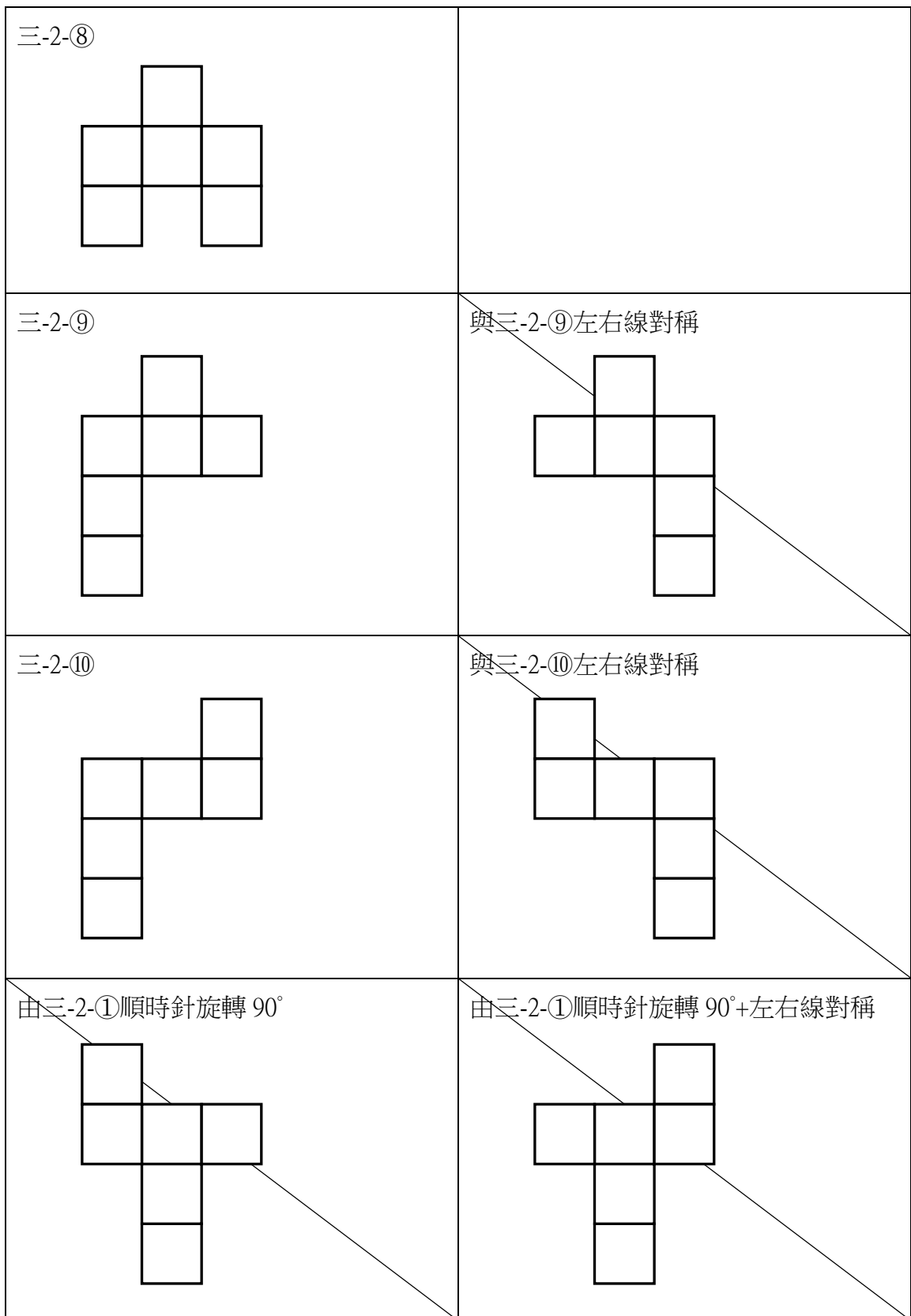


(六)、三-2-\*：可排列出 10 種組合方式

先排一列三連正方形，剩三個正方形，其中一個擺在上側，另外兩個擺在下側，共 21 種擺法。扣除左右和旋轉對稱，剩下 10 種。如下圖：

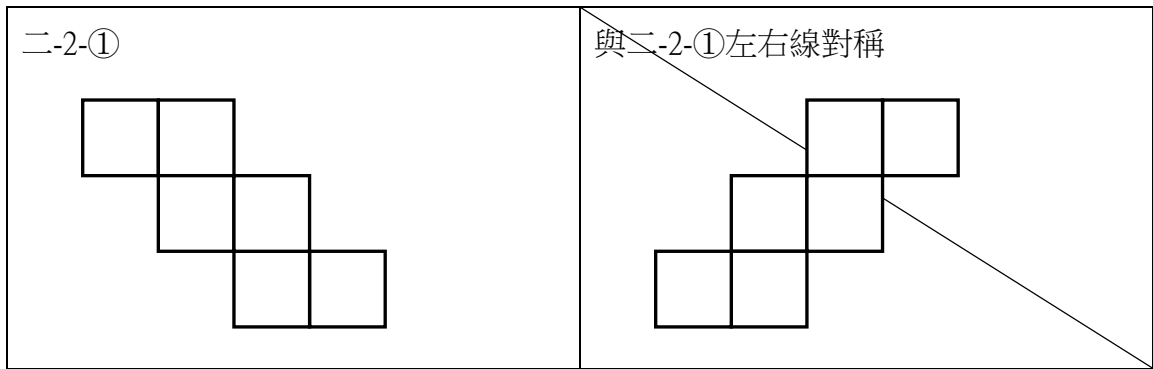


<p>三-2-③</p> 	<p>與三-2-③左右線對稱</p> 
<p>三-2-④</p> 	<p>與三-2-④左右線對稱</p> 
<p>三-2-⑤</p> 	<p>與三-2-⑤左右線對稱</p> 
<p>三-2-⑥</p> 	<p>與三-2-⑥左右線對稱</p> 
<p>三-2-⑦</p> 	<p>與三-2-⑦左右線對稱</p> 



(七)、二-2-\*：可排列出 1 種組合方式

先排一列二連正方形，剩四個正方形，再分成兩個二連正方形，其中一個擺在上側，另外一個擺在下側，共 2 種擺法。扣除左右對稱，剩下 1 種。如下圖：



三、經過以上六連正方形的實際排列組合操作後，老師進一步說明上述(一)~(七)的排列組合規律，其理論基礎與「6」這個整數的分割 (Partition of an integer) 有關，「6」的分割方式有：6、5+1、4+2、3+3、4+1+1、3+2+1、2+2+2、3+1+1+1、2+2+1+1、2+1+1+1+1、1+1+1+1+1+1，共 11 種，其中的 7 種對應我們的排列組合規律，另外 4 種則是重複的，分別說明如下表：

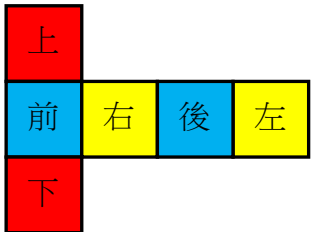
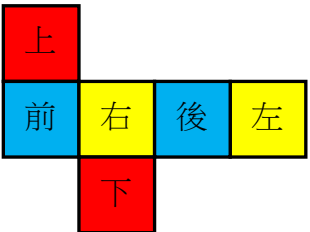
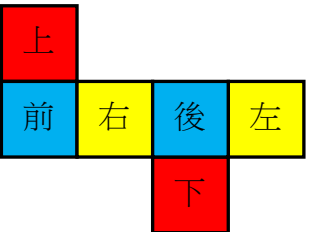
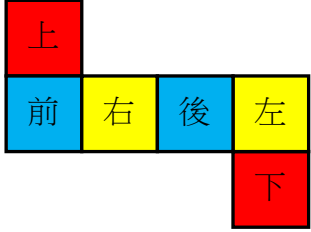
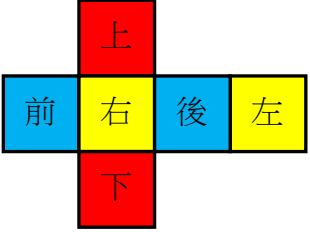
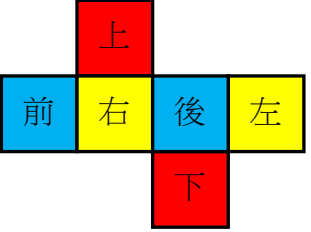
6 的分割	六連正方形圖例	對應我們的排列組合規律	備註
6		(一)、六-0-*	
5+1		(二)、五-1-*	
4+2		(三)、四-1-*	
3+3		(五)、三-1-*	
4+1+1		(四)、四-2-*	
3+2+1		(六)、三-2-*	
2+2+2		(七)、二-2-*	
3+1+1+1		重複	逆時針旋轉 90°+左右線對稱後同「4+2」
2+2+1+1		重複	逆時針旋轉 90°+左右線對稱後同「4+1+1」
2+1+1+1+1		重複	逆時針旋轉 90°+左右線對稱後同「5+1」
1+1+1+1+1+1		重複	逆時針旋轉 90°後同「6」

四、裁切正方形紙卡並用透明膠帶黏貼出上述 35 種六連正方形，再利用正方體每個面恰有唯一「對面」與之平行的性質一個一個檢查是否可以摺成正方體，若可以摺成正方體，表示該六連正方形是正方體的一種展開圖。最後，我們共找出 35 種六連正方形中，只有 11 種可以摺成正方體，有 24 種無法摺成正方體。

## 伍、研究結果

一、由以上的摺疊操作可以得知：正方體的展開圖共有 11 種，歸納為四大類，再把相對應的面塗上相同顏色，並註記剪開的 7 個邊（加方框者）及未剪開的 5 個邊（未加方框者）：

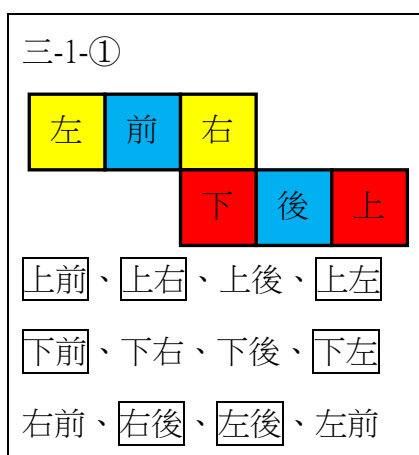
(一)、1-4-1 型：6 種

<p>四-2-①</p>  <p>上前、<u>上右</u>、<u>上後</u>、<u>上左</u>            下前、<u>下右</u>、<u>下後</u>、<u>下左</u>            右前、右後、左後、<u>左前</u></p>	<p>四-2-②</p>  <p>上前、<u>上右</u>、<u>上後</u>、<u>上左</u>            下前、<u>下右</u>、<u>下後</u>、<u>下左</u>            右前、右後、左後、<u>左前</u></p>	<p>四-2-③</p>  <p>上前、<u>上右</u>、<u>上後</u>、<u>上左</u>            下前、<u>下右</u>、<u>下後</u>、<u>下左</u>            右前、右後、左後、<u>左前</u></p>
<p>四-2-④</p>  <p>上前、<u>上右</u>、<u>上後</u>、<u>上左</u>  <u>下前</u>、<u>下右</u>、<u>下後</u>、<u>下左</u>            右前、右後、左後、<u>左前</u></p>	<p>四-2-⑤</p>  <p>上前、<u>上右</u>、<u>上後</u>、<u>上左</u>  <u>下前</u>、<u>下右</u>、<u>下後</u>、<u>下左</u>            右前、右後、左後、<u>左前</u></p>	<p>四-2-⑥</p>  <p>上前、<u>上右</u>、<u>上後</u>、<u>上左</u>  <u>下前</u>、<u>下右</u>、<u>下後</u>、<u>下左</u>            右前、右後、左後、<u>左前</u></p>

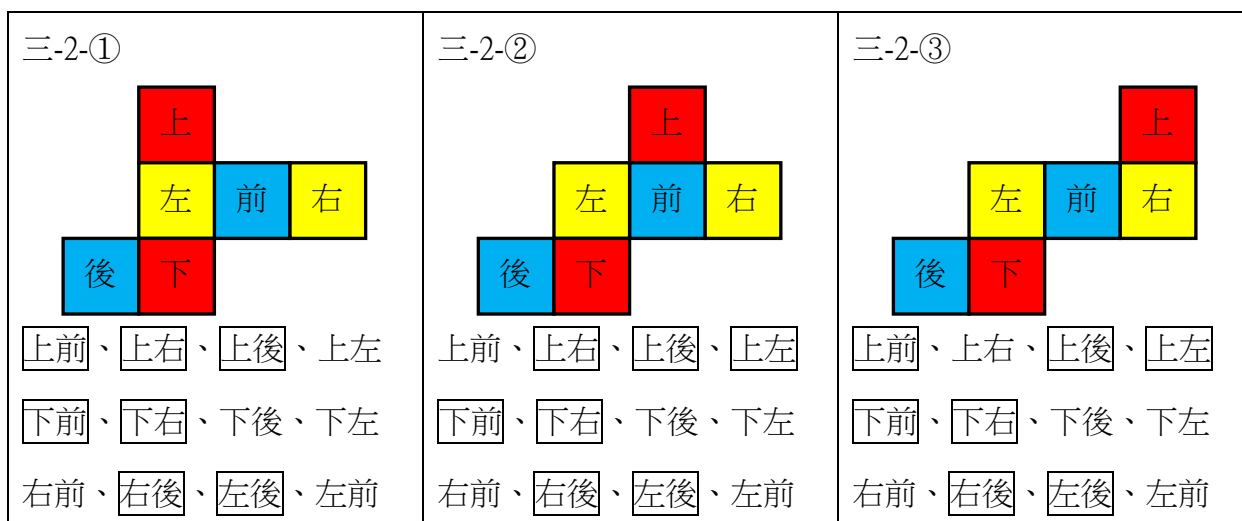
正方體有 8 個頂點、12 個邊及 6 個面。其中，6 個面兩兩相對，共 3 組。6 個面相交出 12 個邊，在攤開形成展開圖前，這 12 個邊必須先剪開 7 個邊，換言之，有  $12 - 7 = 5$  個邊未被切開（6 面需有 5 邊連結），例如：1-4-1 型的 6 種展開圖就是將正方體的下上底面各剪開三個邊，外加一刀用於剪開並攤平四個側面，所以共剪開  $3 + 3 + 1 = 7$  個邊。

其中，四-2-①及四-2-⑤的兩個底面(上、下)皆附著在同一個側面，四-2-①附著在前面，四-2-⑤附著在右面。另外，四-2-②、四-2-③、四-2-④及四-2-⑥的兩個底面(上、下)則是附著在不同的側面。

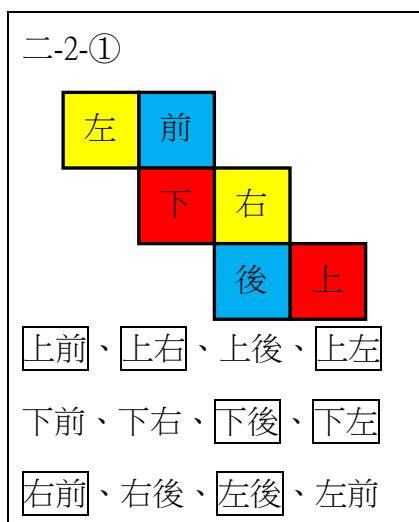
(二)、3-3 型：1 種



(三)、1-3-2 型：3 種

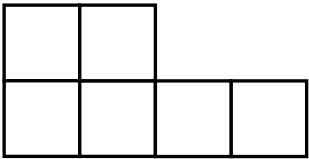
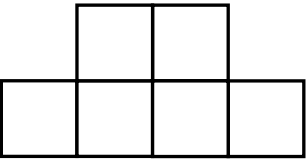
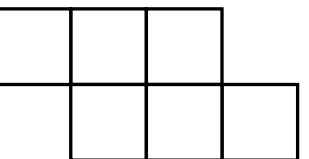
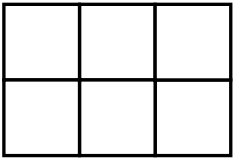
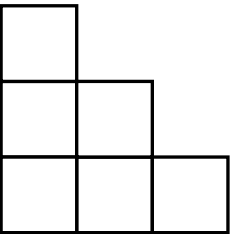
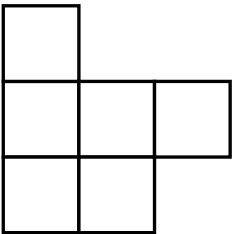
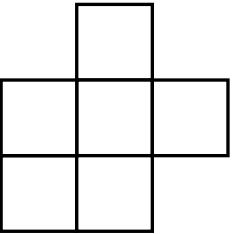
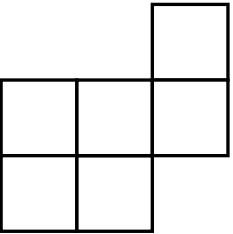


(四)、2-2-2 型：1 種



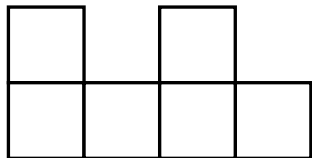
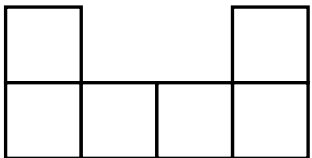
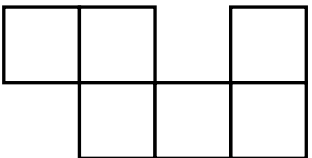
二、35 種六連正方形中只有 11 種能夠摺成正方體，換言之，有  $35-11=24$  種六連正方形無法摺成正方體，我們再將這 24 種無法摺成正方體的六連正方形歸納為五大類，並分別說明其無法摺成正方體的原因：

(一)、「田」字型：8 種

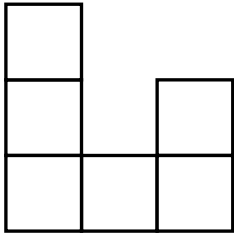
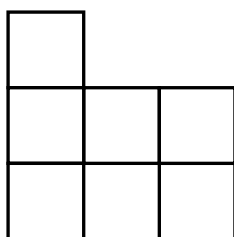
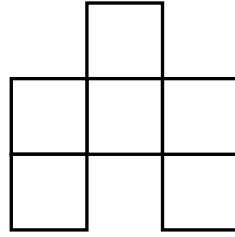
<p>四-1-②</p>  <p>缺 2 個面 (2 個面無法摺)</p>	<p>四-1-③</p>  <p>缺 2 個面 (2 個面無法摺)</p>	<p>三-1-②</p>  <p>缺 3 個面 (3 個面無法摺)</p>
<p>三-1-③</p>  <p>缺 3 個面 (3 個面無法摺)</p>	<p>三-1-⑥</p>  <p>缺 3 個面 (3 個面無法摺)</p>	<p>三-2-④</p>  <p>缺 2 個面 (2 個面無法摺)</p>
<p>三-2-⑤</p>  <p>缺 2 個面 (2 個面無法摺)</p>	<p>三-2-⑥</p>  <p>缺 2 個面 (2 個面無法摺)</p>	

此類型的六連正方形不能成為展開圖的關鍵問題在於「田」字的部分，而且它們被剪開的邊只有 6 個（四-1-②、四-1-③、三-1-②、三-1-⑥、三-2-④、三-2-⑤、三-2-⑥）或 5 個（三-1-③），都少於前面所討論的正方體必須剪開 7 個邊才能攤平 6 個面的條件。

(二)、「凹」字型：6 種

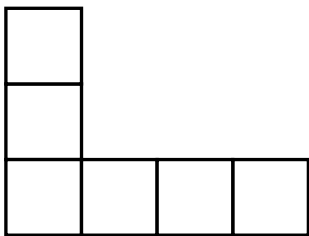
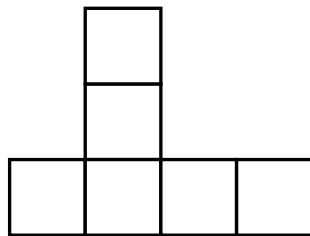
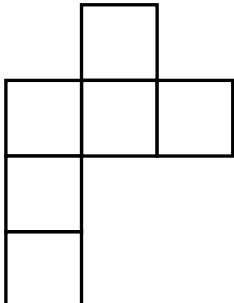
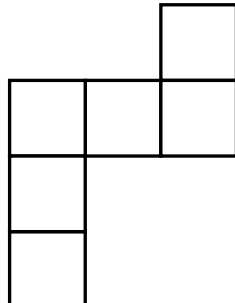
<p>四-1-④</p>  <p>缺 1 個面 (1 個面重疊)</p>	<p>四-1-⑤</p>  <p>缺 1 個面 (1 個面重疊)</p>	<p>三-1-④</p>  <p>缺 1 個面 (1 個面重疊)</p>
---	---	---



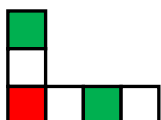
<p>三-1-⑦</p>  <p>缺 2 個面 (2 個面重疊)</p>	<p>三-2-⑦</p>  <p>缺 1 個面 (1 個面重疊)</p>	<p>三-2-⑧</p>  <p>缺 1 個面 (1 個面重疊)</p>
---	---	---

此類型中的四-1-④、四-1-⑤、三-1-④、三-2-⑦、三-2-⑧摺疊後有 1 個面開天窗，另 1 個面有兩塊重疊的情形。另外，三-1-⑦摺疊後有 2 個面開天窗，另 2 個面有兩塊重疊的現象。


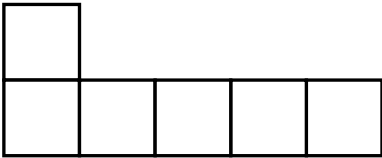
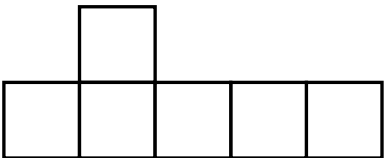
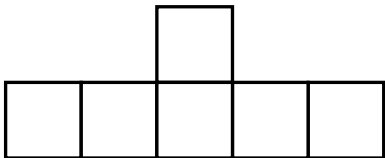
(三)、「L」字型：4 種

<p>四-1-⑥</p>  <p>缺 1 個面 (1 個面重疊)</p>	<p>四-1-⑦</p>  <p>缺 1 個面 (1 個面重疊)</p>
<p>三-2-⑨</p>  <p>缺 1 個面 (1 個面重疊)</p>	<p>三-2-⑩</p>  <p>缺 1 個面 (1 個面重疊)</p>

「L」字型摺疊後都有 1 個面開天窗，而另 1 個面有兩塊重疊的情形。以四-1-⑥為例說明，在 L 型角落的面(紅色)會有 2 個對面(綠色)，如左下圖所示，顯然已經不符合正方體每個面恰有唯一「對面」的性質，而且摺疊後這兩塊綠色面也確實是重疊的。

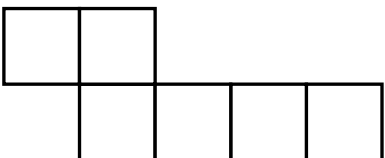
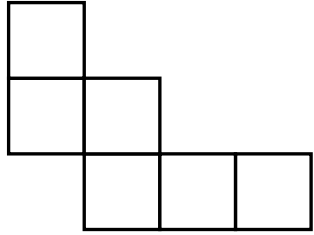


(四)、「一」字型：4種

<p>六-0-①</p>  <p>缺 2 個面（有 2 個面與其他重疊）</p>	<p>五-1-①</p>  <p>缺 1 個面（有 1 個面與其他重疊）</p>
<p>五-1-②</p>  <p>缺 1 個面（有 1 個面與其他重疊）</p>	<p>五-1-③</p>  <p>缺 1 個面（有 1 個面與其他重疊）</p>

六連正方形排一列或五連正方形排一列者皆歸類為「一」字型。六連正方形排一列者（六-0-①）摺疊後有 2 個面開天窗，另 2 個面兩塊重疊；五連正方形排一列者（五-1-①、五-1-②、五-1-③）摺疊後有 1 個面開天窗，另 1 個面兩塊重疊。

(五)、「階梯」型：2種

<p>四-1-①</p>  <p>缺 1 個面（1 個面重疊）</p>	<p>三-1-⑤</p>  <p>缺 1 個面（1 個面重疊）</p>
--	---

「階梯」型包括 2-4 兩層（四-1-①）及 1-2-3 三層（三-1-⑤），摺疊後都是有 1 個面開天窗，另 1 個面兩塊重疊。

## 陸、討論

上述研究的正方體又稱正六面體，是正多面體的一種。正多面體又稱柏拉圖多面體，共有五種，包括正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體及正二十面體。生活中有許多正多面體，舉凡「肉粽」和「立體茶包」的造形為正四面體，「骰子」和「方糖」是正六面體，「洗衣球」為正八面體的變形，「古銅錢串成的龍珠」為正十二面體的變化，臺中科博館的招

牌上有個正二十面體的裝置藝術。正多面體有一些共通的性質，例如：

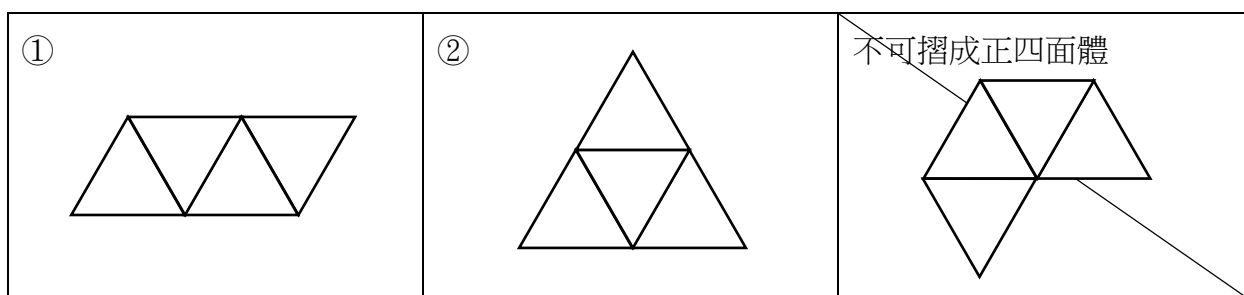
1. 每個面都是由全等的正多邊形所組成的凸多面體。
2. 每個頂點連接一樣多的邊數，一樣多的面數，且每個頂點在同一球面上。
3. 面與面之間的夾角相等。
4. 符合尤拉公式：「頂點數  $V$  - 邊數  $E$  + 面數  $F = 2$ 」

正多面體	頂點數, $V$	邊數, $E$	面數, $F$	$V - E + F$	面的形狀
正四面體	4	6	4	2	正三角形
正六面體	8	12	6	2	正方形
正八面體	6	12	8	2	正三角形
正十二面體	20	30	12	2	正五邊形
正二十面體	12	30	20	2	正三角形

正多面體中除了正四面體外，每一個面都有唯一「對面」與之平行。國小五下數學課本的「柱體、錐體和球體」單元中介紹過正四面體（三角錐的一種）及正六面體（正方體，四角柱的一種），而正八面體則是由 2 個四角錐（金字塔）組合而成，所以對我們國小學生而言正八面體並不困難。因此，我們可以運用前面正方體展開圖的研究方法及結果來探討正四面體及正八面體的展開圖。

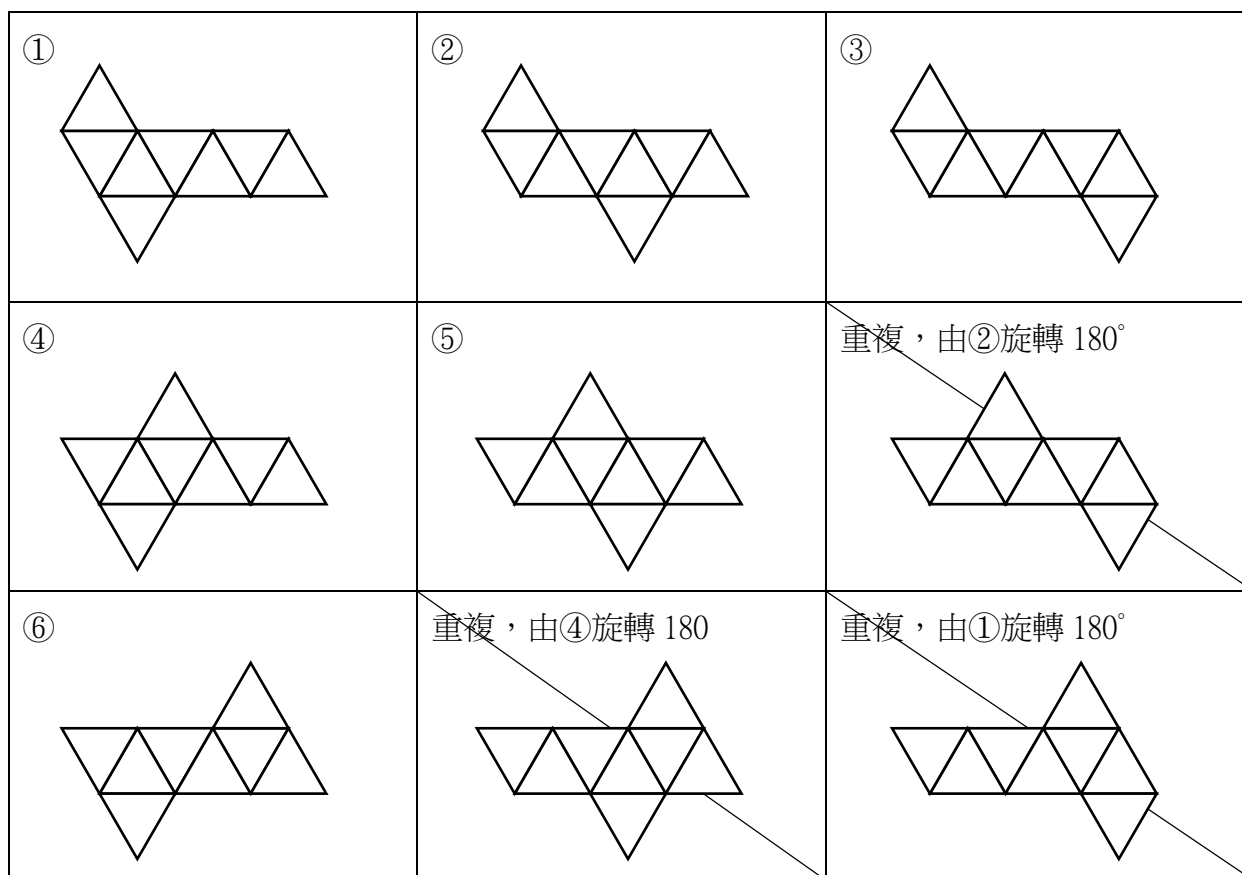
#### 一、正四面體的展開圖：共有 2 種

正四面體有 4 個全等的面，每個面都是正三角形，所以正四面體的展開圖自然也是由這 4 個正三角形相連而成（四連正三角形），而四連正三角形的組合有 3 種，如下圖，其中最右圖不可摺成正四面體（有 1 個面開天窗，另 1 個面兩塊重疊）。因此正四面體的展開圖只有 2 種，如下圖①及圖②。正四面體的 4 個面相交出 6 個邊，在攤開形成展開圖前，這 6 個邊必須先剪開 3 個邊，換言之，有  $6 - 3 = 3$  個邊未被切開（4 面需有 3 邊連結）。



二、正八面體的展開圖：共有 11 種，分成四大類

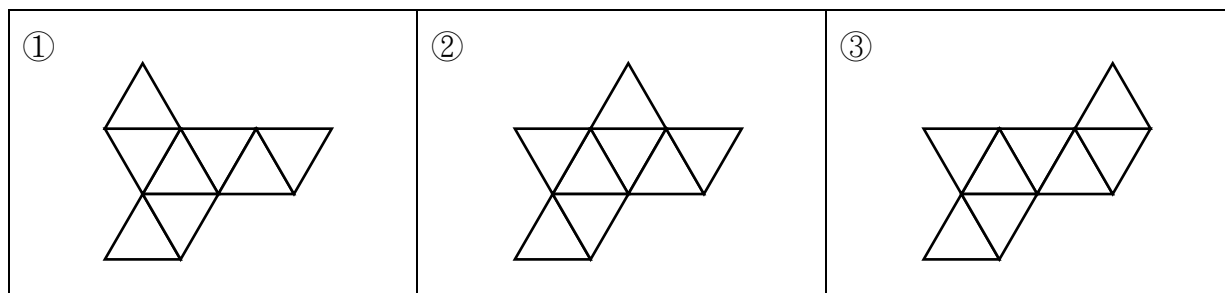
(一)、1-6-1 型：6 種



為了方便記憶，我們可以將 1-6-1 型的正八面體展開圖視為對應於 1-4-1 型的正方體展開圖，也就是，先排一列六連正三角形，另兩個單一正三角形分別擺在上、下兩側，共  $3 \times 3 = 9$  種擺法。扣除旋轉對稱，最後剩下 6 種。

正八面體的每個面也都是正三角形，8 個面相交出 12 個邊，在攤開形成展開圖前，這 12 個邊必須先剪開 5 個邊，換言之，有  $12 - 5 = 7$  個邊未被切開（8 面需有 7 邊連結）。

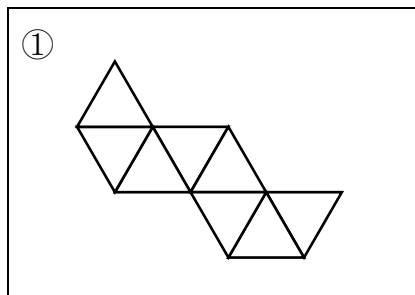
(二)、1-5-2 型：3 種



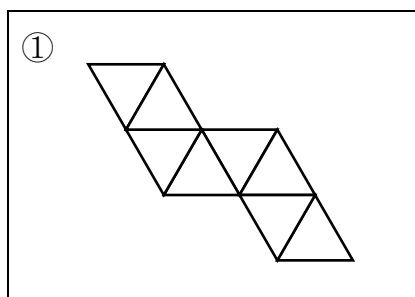
將 1-5-2 型的正八面體展開圖視為對應於 1-3-2 型的正方體展開圖，先排一列五連正三角形，再於上側擺一個單一正三角形，下側擺一個二連正三角形，共  $3 \times 2 = 6$  種擺法。

扣除旋轉對稱，最後剩下 3 種。

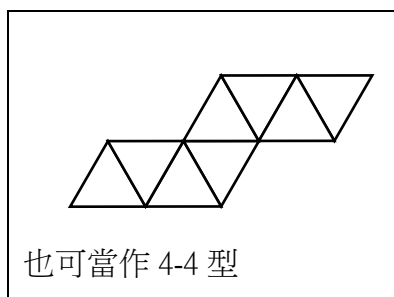
(三)、1-4-3 型：1 種



(四)、2-4-2 型 (或 4-4 型)：1 種



→  
逆時針  
旋轉 60°

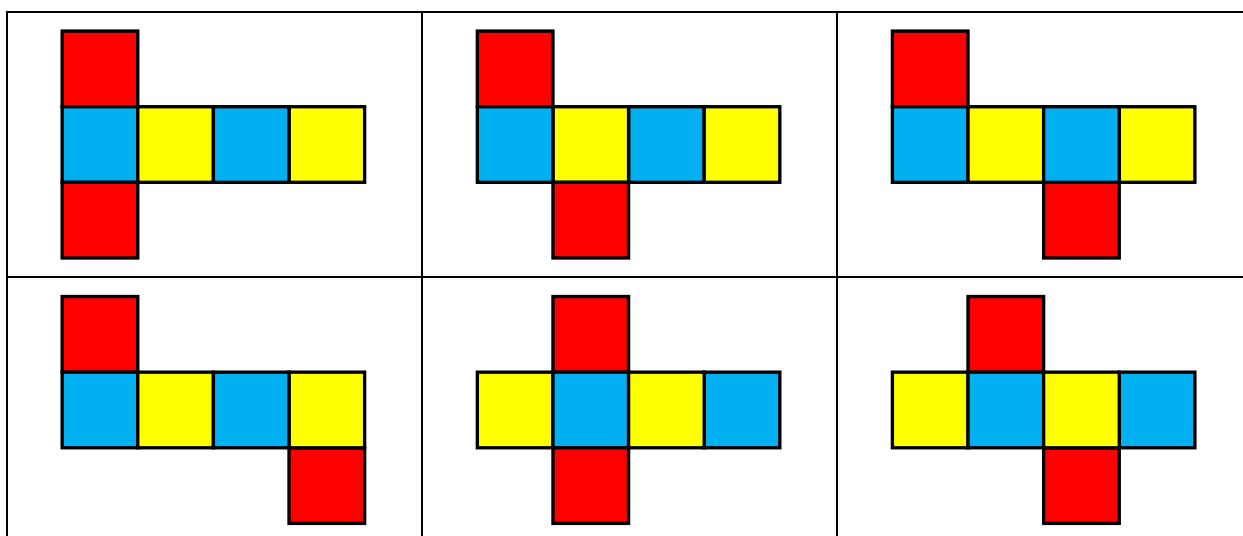


## 柒、結論

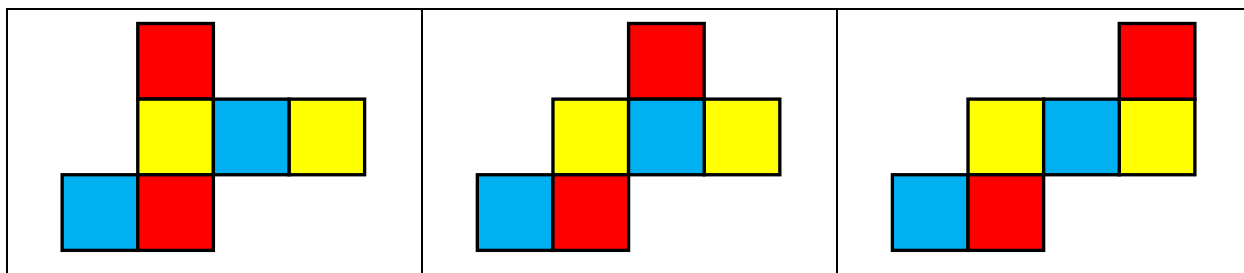
總結以上之研究與討論，可以得到幾點結論：

一、正方體（正六面體）的展開圖有 11 種，分成四類：

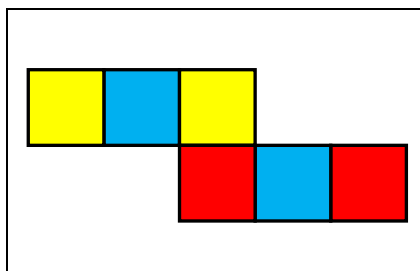
(一)、1-4-1 型：6 種



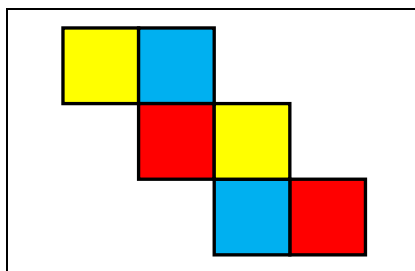
(二)、1-3-2 型：3 種



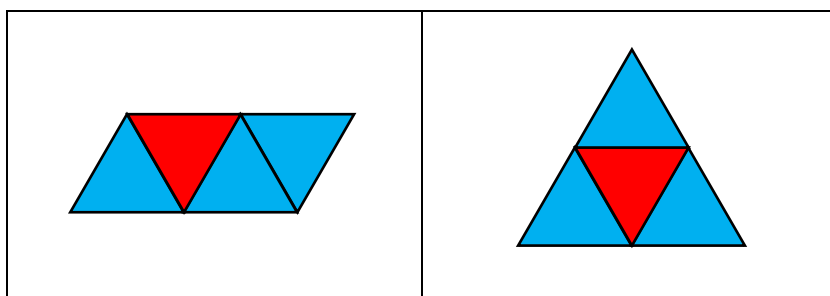
(三)、3-3 型：1 種



(四)、2-2-2 型：1 種

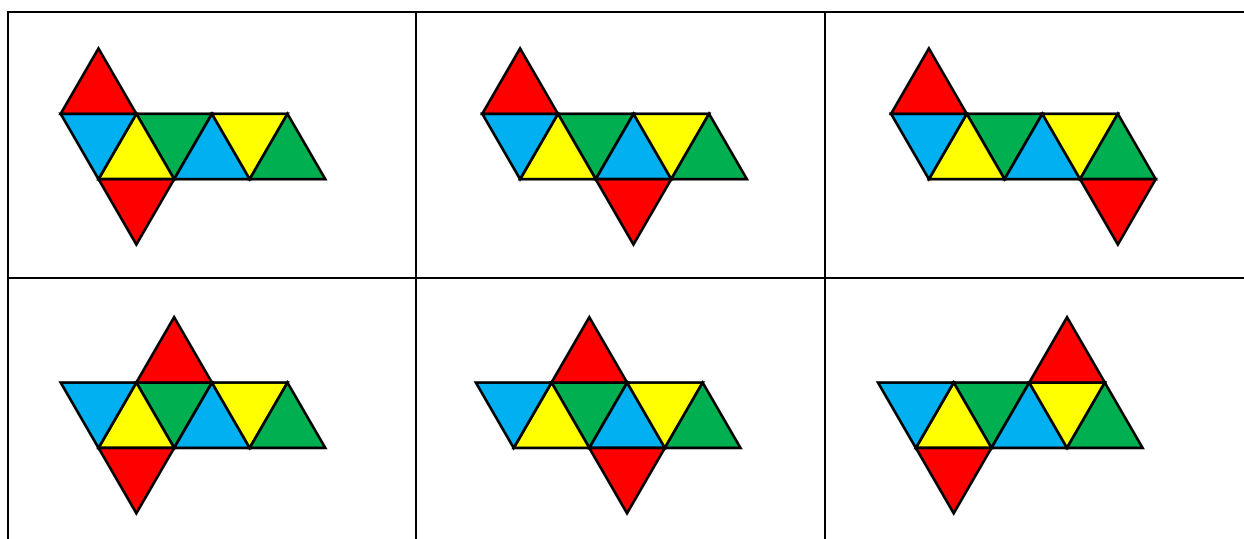


二、正四面體的展開圖：只有 2 種

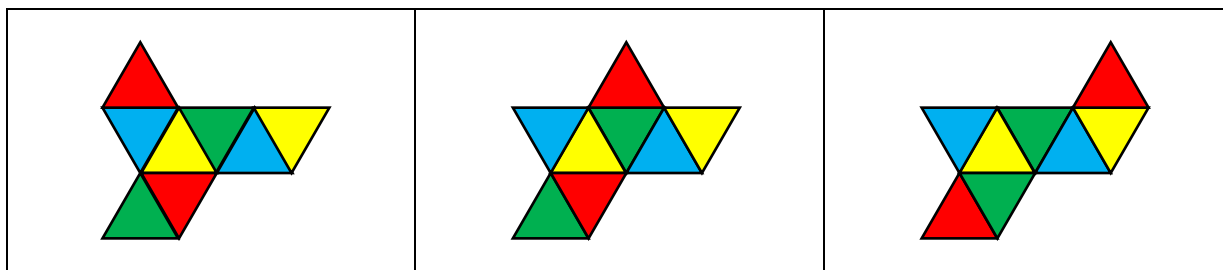


三、正八面體的展開圖有 11 種，分成四類：

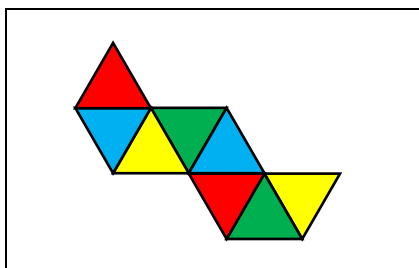
(一)、1-6-1 型：6 種



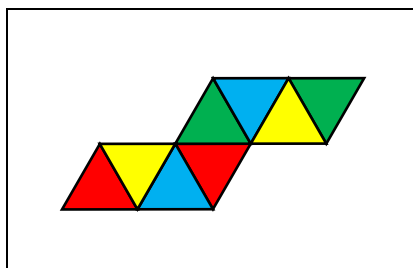
(二)、1-5-2 型：3 種



(三)、1-4-3 型：1 種



(四)、4-4 型：1 種



## 捌、參考資料及其他

- 一、南一書局企業股份有限公司。國民小學數學五下第十冊第四單元「正方體和長方體」及第七單元「柱體、錐體和球體」(2018年2月再版)。
- 二、南一書局企業股份有限公司。國民小學數學六上第十一冊第九單元「形體關係和柱體表面積」(2018年8月再版)。
- 三、彭君智，3D 立體變變變，「數學傳播季刊」25 卷，第 3 期，68~80，90 年 9 月。
- 四、國立台灣科學教育館歷屆優勝作品：<https://twsf.ntsec.gov.tw/Article.aspx?a=41&lang=1>

## 【評語】 080402

本作品由正立方體的展開圖發想，討論所有六連正方形的組合。作者從「玩數學」的概念出發，透過觀察與歸納，循序漸進的探尋出可組成正方體展開圖的規則，再推廣至正四面體與正八面體。數學的難度雖不高，但研究過程符合科學探究的精神，是有趣味的作品。



## 摘要

國小五年級數學曾經介紹過正方體的展開圖，對國小學生而言，想要將三維空間的立體形體轉換為二維的平面圖形是較為困難的。本研究採用「玩數學」的理念出發，讓學生透過有趣的具體實物操作，找出可組成正方體的平面圖形，並從中觀察與歸納出可組成正方體展開圖的規則。

## 壹、研究動機

長方體物品在生活中隨處可見，如：電腦主機、面紙盒、鉛筆盒或是櫃子，而每邊都等長的正方體物品也所在都有，如：積木、骰子、方糖、紙箱。但是應該很少人會去思考這些立體物品的表面展開攤平之後的圖形會是如何？只有一種嗎？還是有其他不同的排列組合呢？如果有，有幾種呢？

上數學課時，老師讓我們全班分組利用六個全等的正方形（正方體的六個面）排列出各種六連正方形。班上五組共二十八位同學，做出了許多不同的六連正方形，但是只有某些同學的六連正方形可以組成正方體，有些則不行。我們很好奇六連正方形能夠成為正方體展開圖的必備條件是什麼呢？正方體有哪些展開圖呢？

## 貳、研究目的

- 一、利用正方形紙卡排列出 **35** 種六連正方形的組合。
- 二、從 **35** 種六連正方形的組合中再找出 **11** 種正方體的展開圖。
- 三、將 **11** 種正方體展開圖歸納分類。
- 四、將 **24** 種無法構成正方體的六連正方形歸納分類。
- 五、應用正方體的研究方法與結果，找出正四面體與正八面體的展開圖。



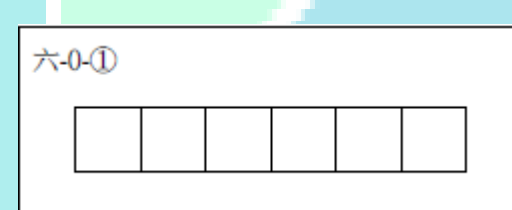
## 參、研究設備及器材

- 一、排列六連正方形：正方體積木。
- 二、裁切正方形紙卡：名片紙卡、直尺、美工刀、切割板。
- 三、黏貼六連正方形：透明膠帶。
- 四、繪製六連正方形：鉛筆、正方形規板（以透明塑膠片自製）、筆記本。
- 五、排列正四面體及正八面體的展開圖：正三角形智慧片。

## 肆、研究過程或方法

- 一、想得到正方體的展開圖最直接的方式就是：拿一個正方體來將它的幾個邊剪開後攤平。但是，問題又來了：該剪幾個邊？要剪哪些邊？而且要取得能夠剪開邊又能把六個面攤平的正方體似乎不太容易。因此，反過來思考，既然正方體共有六個全等的面（正方形），所以它的展開圖自然是由此六個全等的正方形相連而成（六連正方形）。
- 二、為了方便操作，我們先用六個正方體積木有規律的排出六連正方形，並用正方形規板畫下六連正方形。其中，排列的規律性為：首先是六個正方形排成一列、再來是五個先排一列、接著是四個先排一列，以此類推。並將六連正方形編號，如：五-1-①，第一碼中文數字代表五個先排一列，第二碼：**0**代表零側、**1**代表一側、**2**代表兩側，第三碼為流水號。另外，只要排出的六連正方形會左右（或上下）對稱或旋轉某個角度會重疊（或對稱）者，都視為相同的組合。最後，我們共找到 **35** 種六連正方形的組合，如下圖：

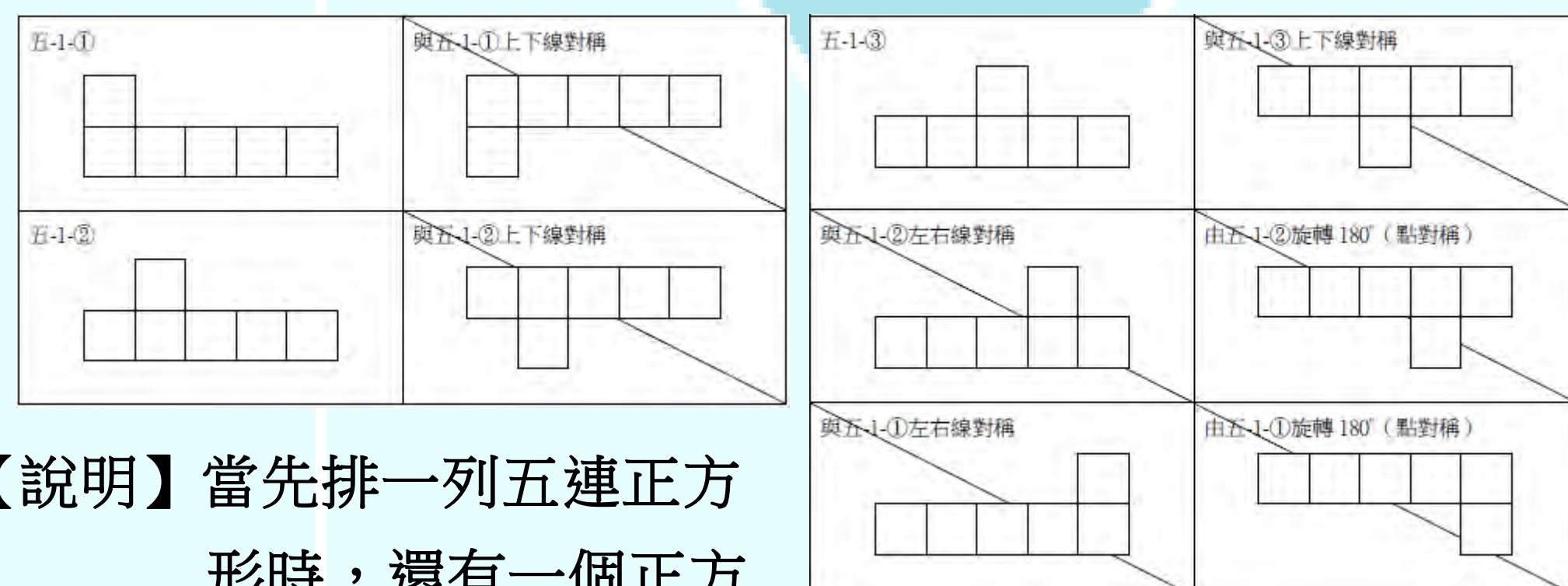
### (一)、六-0-\*：可排列出 1 種組合方式



### (二)、五-1-\*：可排列出 3 種組合方式

先排一列五連正方形，另一個正方形擺在上、下兩側，各有 **5** 種擺法，共  $5 \times 2 = 10$  種。扣除上下對調，會剩  $\lfloor 10/2 \rfloor = 5$  種；再扣除左右鏡射，最後剩下  $\lfloor 5/2 \rfloor = 3$  種。

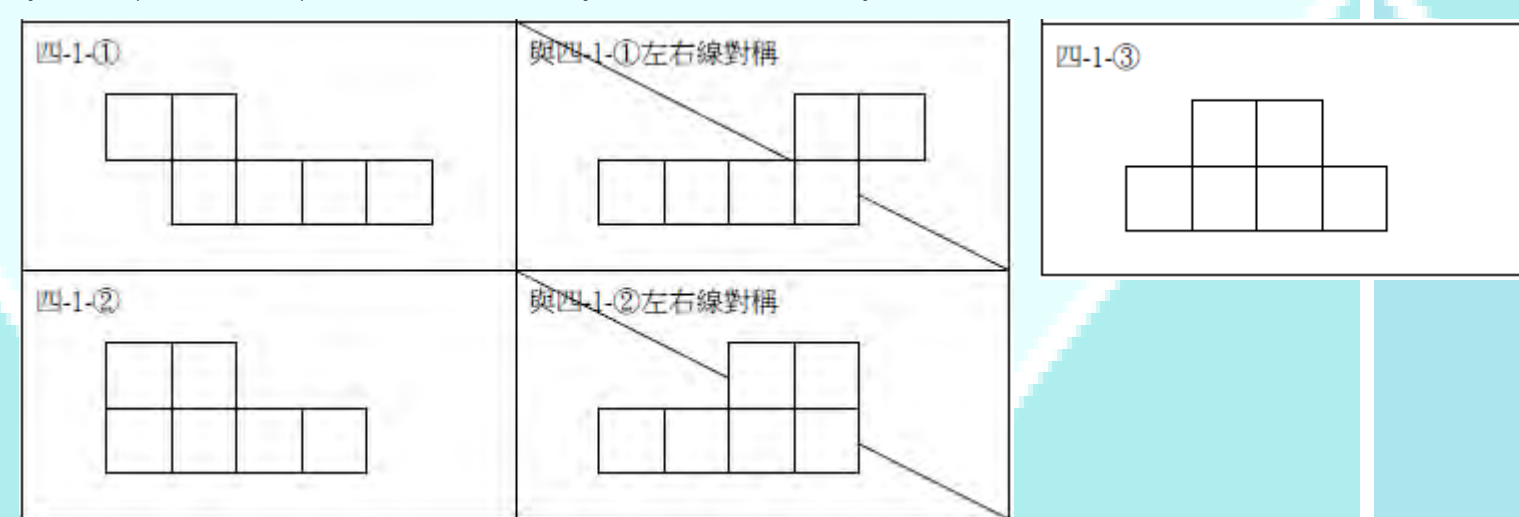
如下圖：



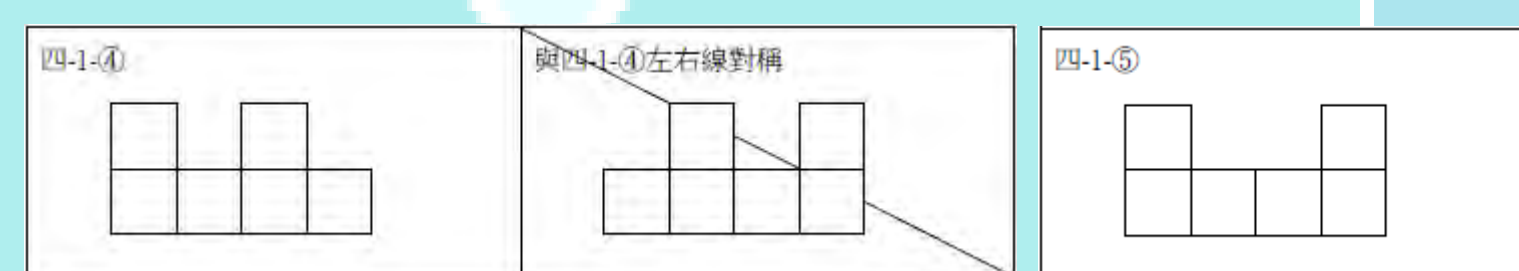
【說明】當先排一列五連正方形時，還有一個正方形，我們發現這個正方形擺在上側的會和擺在下側的對應位置者互相上下線對稱，像這種情形則視為同一種組合方式。當先排一列四連正方形或三連正方形時，也會有這種上下線對稱的情形，因此我們只需排上側即可，上下對調者就不需再重複排列了。

### (三)、四-1-\*：可排列出 7 種組合方式

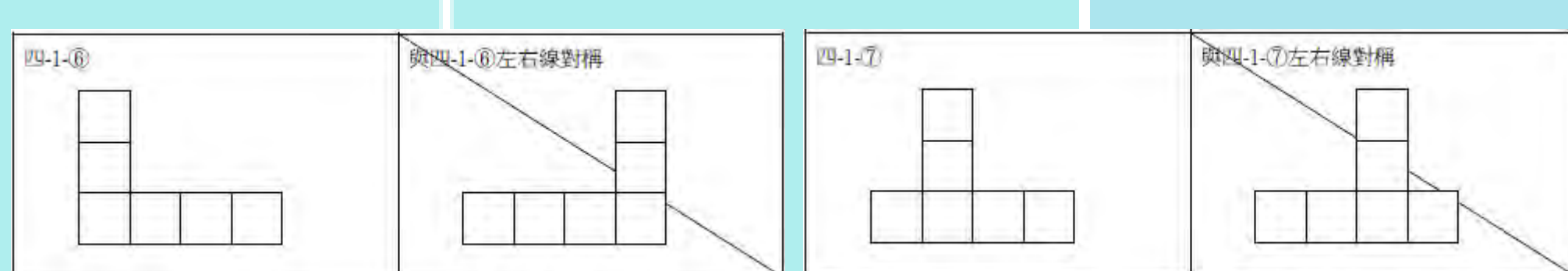
1. 先排一列四連正方形，另一個平躺的二連正方形擺在上側，有 **5** 種擺法。扣除左右鏡射，最後剩下  $\lfloor 5/2 \rfloor = 3$  種。如下圖：



2. 先排一列四連正方形，另外兩個不相連的單一正方形擺在上側，有 **3** 種擺法。扣除左右鏡射，會剩下  $\lfloor 3/2 \rfloor = 2$  種。如下圖：

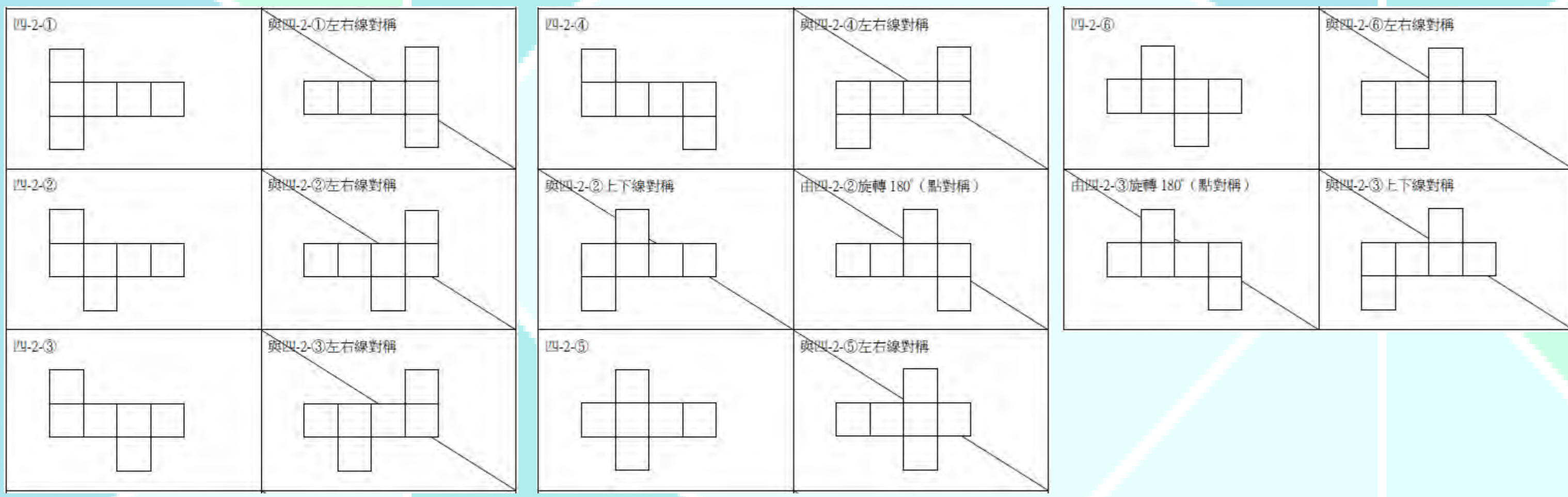


3. 先排一列四連正方形，另一個直立的二連正方形擺在上側，有 **4** 種擺法。扣除左右鏡射，最後剩下  $\lfloor 4/2 \rfloor = 2$  種。如下圖：



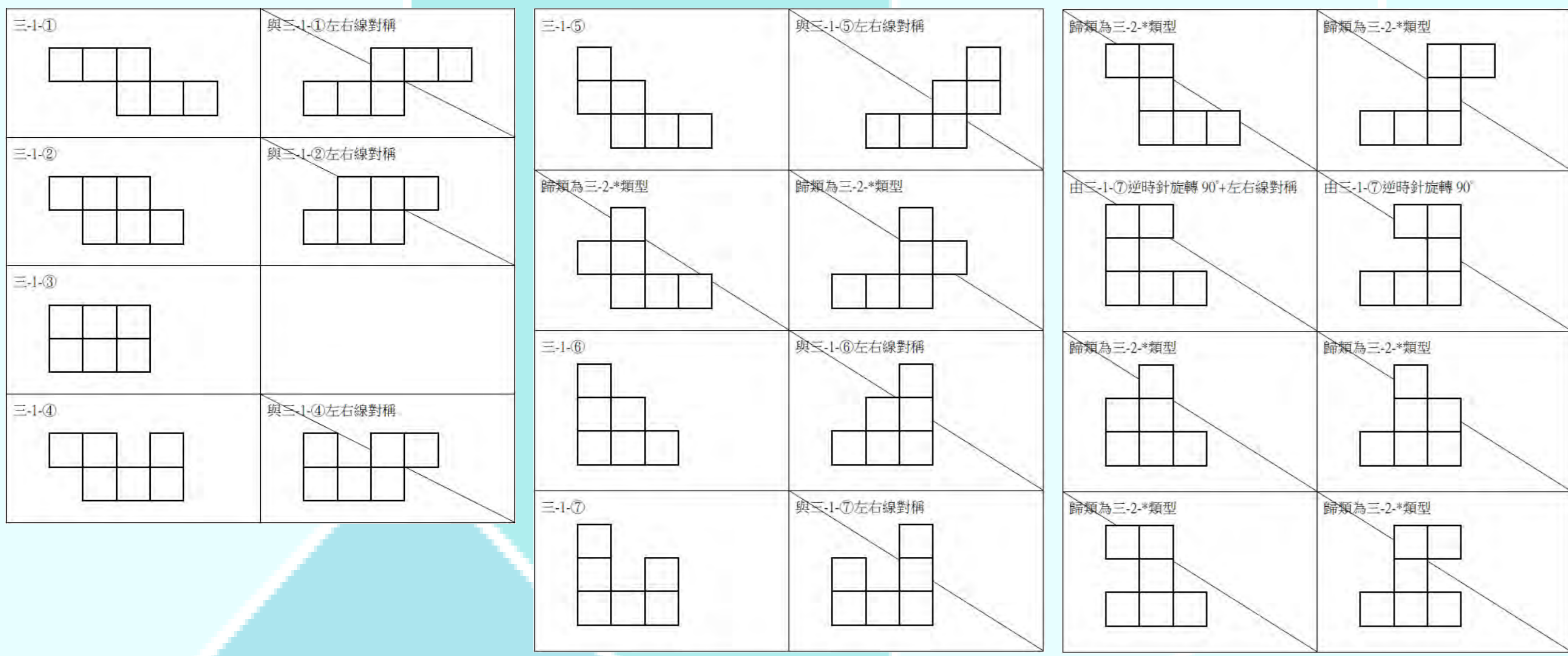
### (四)、四-2-\*：可排列出 6 種組合方式

先排一列四連正方形，另兩個單一正方形分別擺在上、下兩側，共  $4 \times 4 = 16$  種擺法。扣除上下、左右以及旋轉對稱，最後剩下 6 種。如下圖：



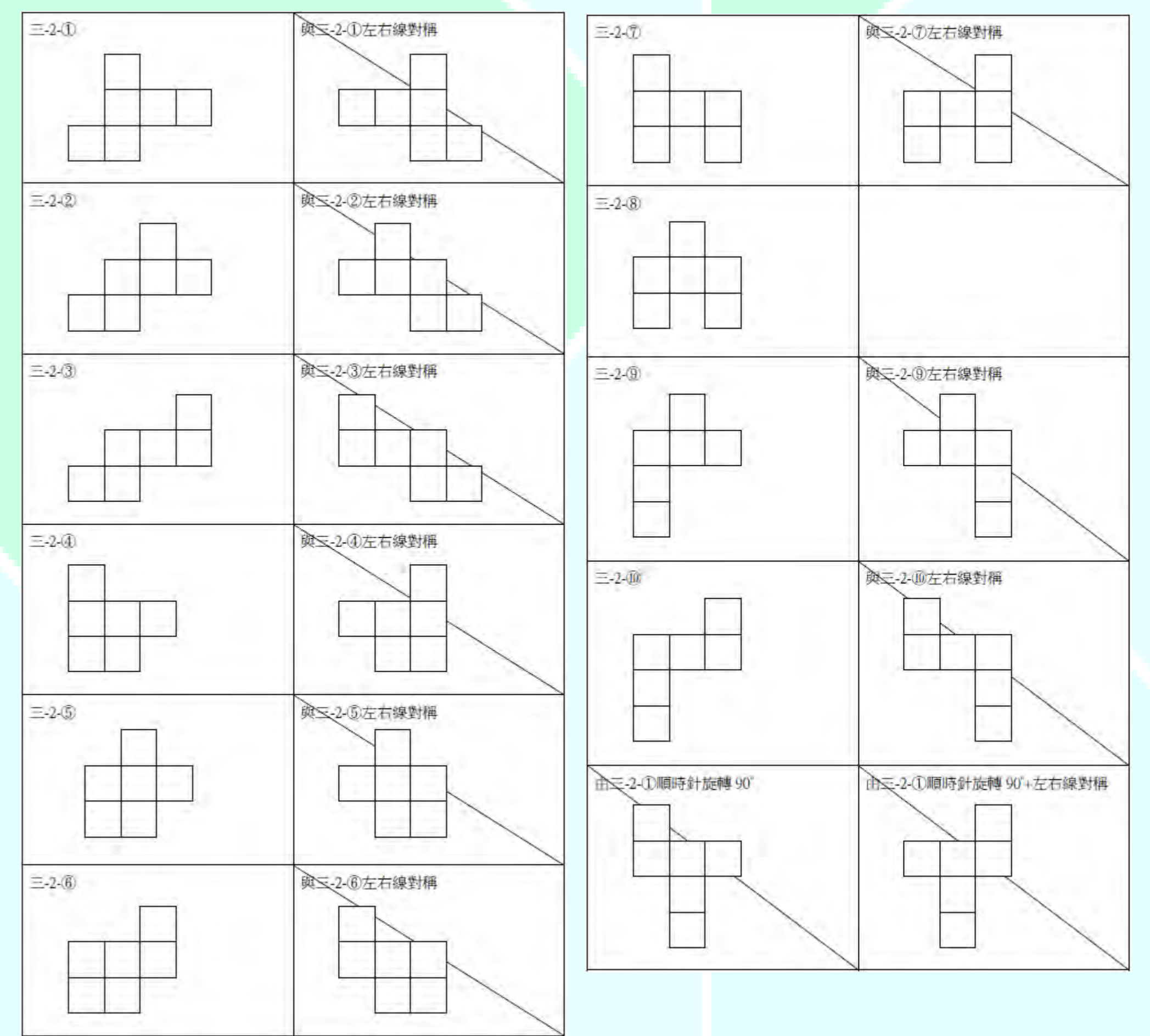
### (五)、三-1-\*：可排列出 7 種組合方式

先排一列三連正方形，另三個正方形擺在上側，此種排列組合雖然較為複雜，不過，累積前面之經驗，我們仍然可以依循規律找出 23 種擺法。扣除左右和旋轉對稱，以及重複歸類為三-2-\*者，最後剩下 7 種。如下圖：



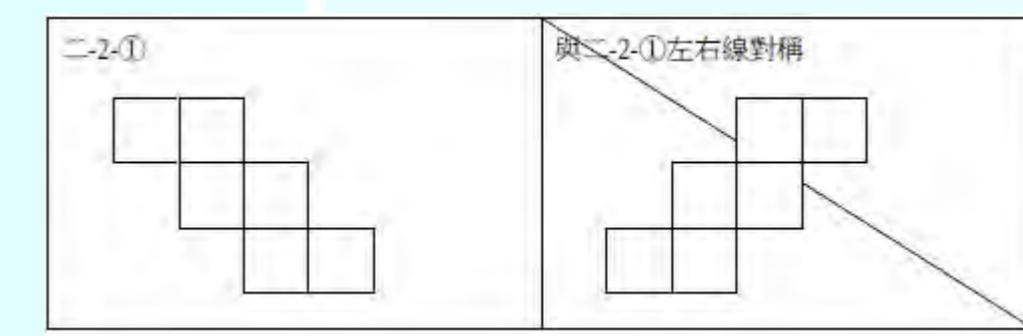
### (六)、三-2-\*：可排列出 10 種組合方式

先排一列三連正方形，剩三個正方形，其中一個擺在上側，另外兩個擺在下側，共 21 種擺法。扣除左右和旋轉對稱，剩下 10 種。如下圖：



### (七)、二-2-\*：可排列出 1 種組合方式

先排一列二連正方形，剩四個正方形，再分成兩個二連正方形，其中一個擺在上側，另外一個擺在下側，共 2 種擺法。扣除左右對稱，剩下 1 種。如下圖：



三、經過以上六連正方形的實際排列組合操作後，老師進一步說明上述(一)~(七)的排列組合規律，其理論基礎與「6」這個整數的分割(Partition)有關，6 的分割方式有：6、5+1、4+2、3+3、4+1+1、3+2+1、2+2+2、3+1+1+1、2+2+1+1、2+1+1+1+1、1+1+1+1+1+1，共 11 種，其中的 7 種對應我們的排列組合規律，另外 4 種則是重複的，分別說明如右表。

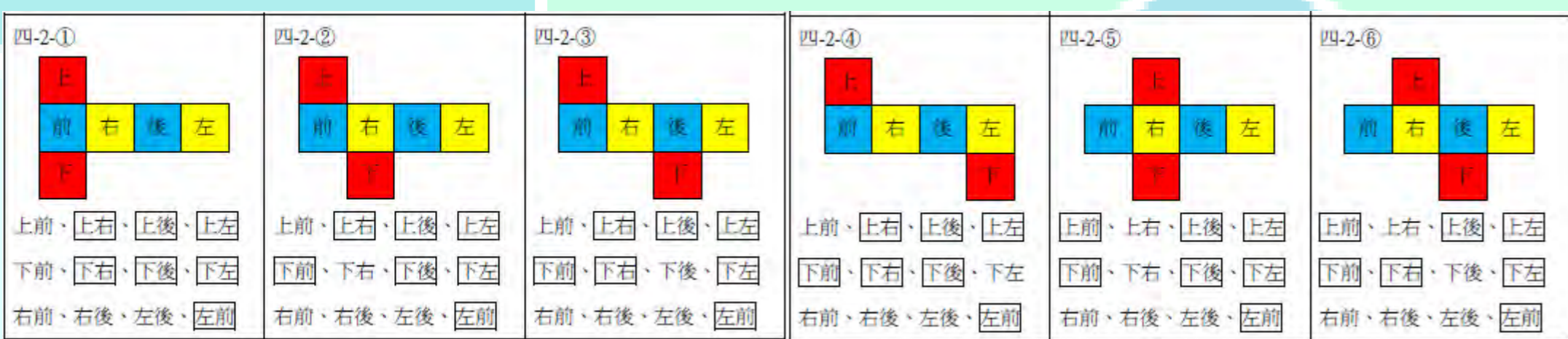
四、裁切正方形紙卡並用透明膠帶黏貼出上述 35 種六連正方形，再利用**正方體每個面恰有唯一「對面」與之平行的性質**一個一個檢查是否可以摺成正方體，若可以摺成正方體，表示該六連正方形是正方體的一種展開圖。最後，我們共找出 35 種六連正方形中，只有 11 種可以摺成正方體，有 24 種無法摺成正方體。

6 的分割	六連正方形圖例	對應我們的排列組合規律	備註
6		(一)、六-0-*	
5+1		(二)、五-1-*	
4+2		(三)、四-1-*	
3+3		(五)、三-1-*	
4+1+1		(四)、四-2-*	
3+2+1		(六)、三-2-*	
2+2+2		(七)、二-2-*	
3+1+1+1		重複	逆時針旋轉 90°+左右線對稱後同「4+2」
2+2+1+1		重複	逆時針旋轉 90°+左右線對稱後同「4+1+1」
2+1+1+1+1		重複	逆時針旋轉 90°+左右線對稱後同「5+1」
1+1+1+1+1+1		重複	逆時針旋轉 90°後同「6」

## 伍、研究結果

一、由以上的摺疊操作可以得知：正方體的展開圖共有 11 種，歸納為四大類，再把相對應的面塗上相同顏色，並註記剪開的 7 個邊（加方框者）及未剪開的 5 個邊（未加方框者）：

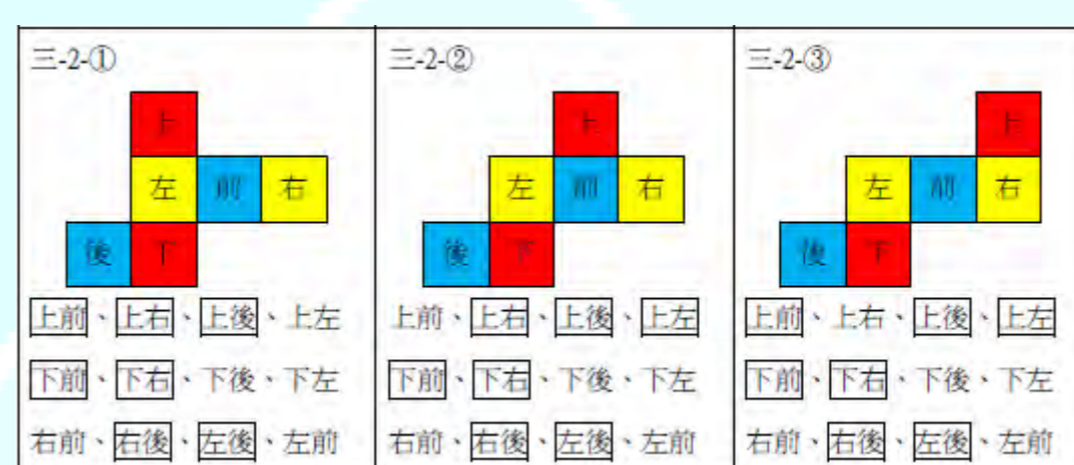
#### (一)、1-4-1型：6 種



#### (二)、3-3型：1 種



#### (三)、1-3-2型：3 種



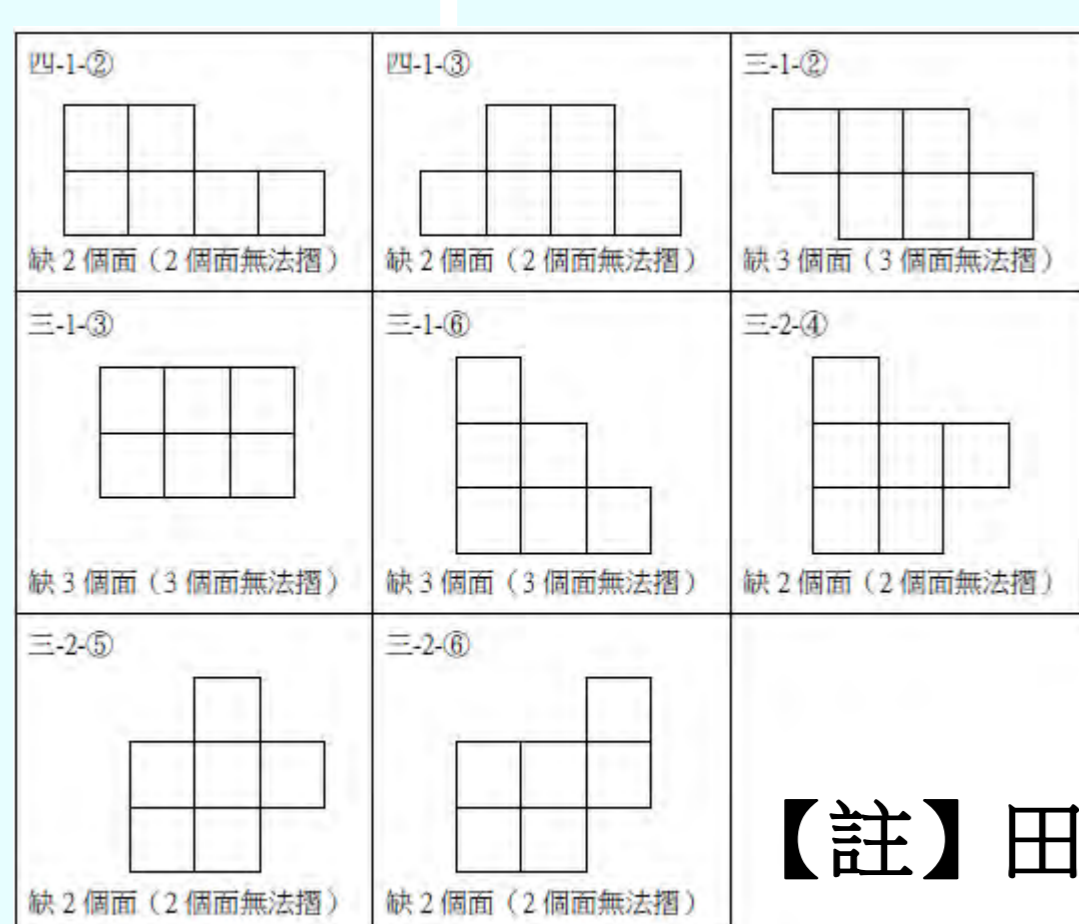
#### (四)、2-2-2型：1 種



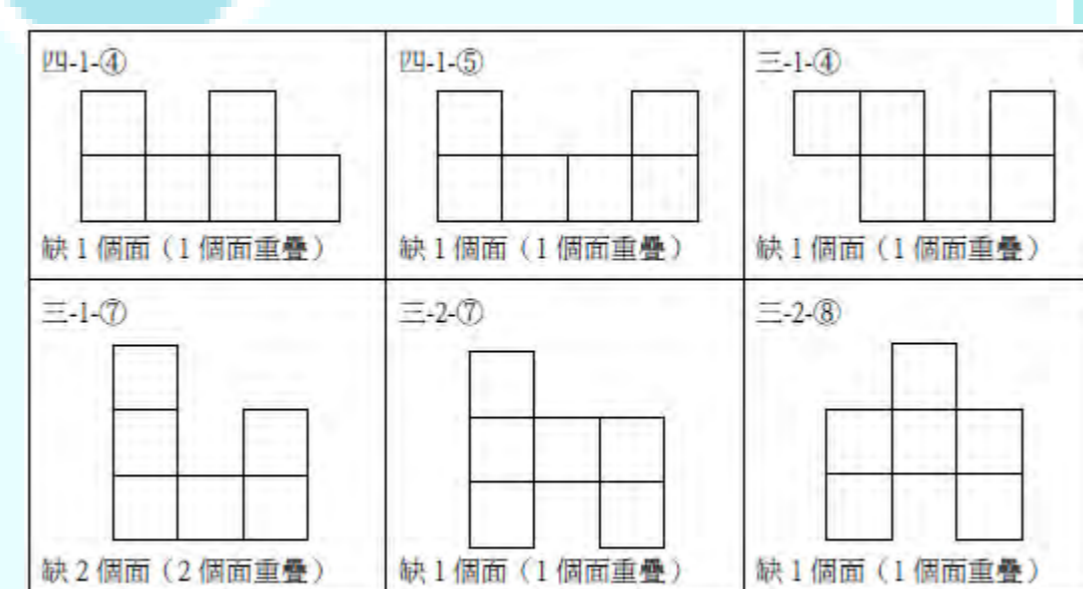
正方體有 8 個頂點、12 個邊及 6 個面。其中，6 個面兩兩相對，共 3 組。6 個面相交出 12 個邊，在攤開形成展開圖前，這 12 個邊必須先剪開 7 個邊，換言之，有  $12 - 7 = 5$  個邊未被切開（6 面需有 5 邊連結），例如：1-4-1 型的 6 種展開圖就是將正方體的上下底面各剪開三個邊，外加一刀用於剪開並攤平四個側面，所以共剪開  $3 + 3 + 1 = 7$  個邊。其中，四-2-① 及四-2-⑤ 的兩個底面皆附著在同一個側面，四-2-① 附著在前面，四-2-⑤ 附著在右面。另外，四-2-②、四-2-③、四-2-④ 及四-2-⑥ 的兩個底面則是附著在不同的側面。

二、35 種六連正方形中只有 11 種能夠摺成正方體，換言之，有  $35 - 11 = 24$  種六連正方形無法摺成正方體，我們再將這 24 種無法摺成正方體的六連正方形歸納為五大類：

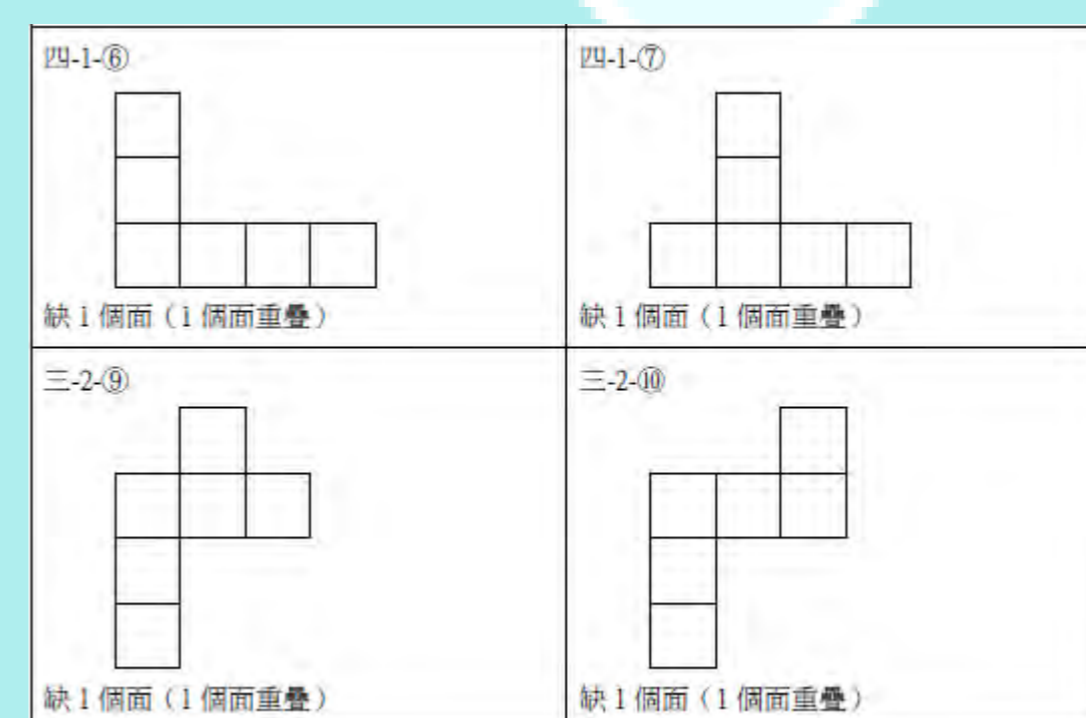
#### (一)、「田」字型：8 種



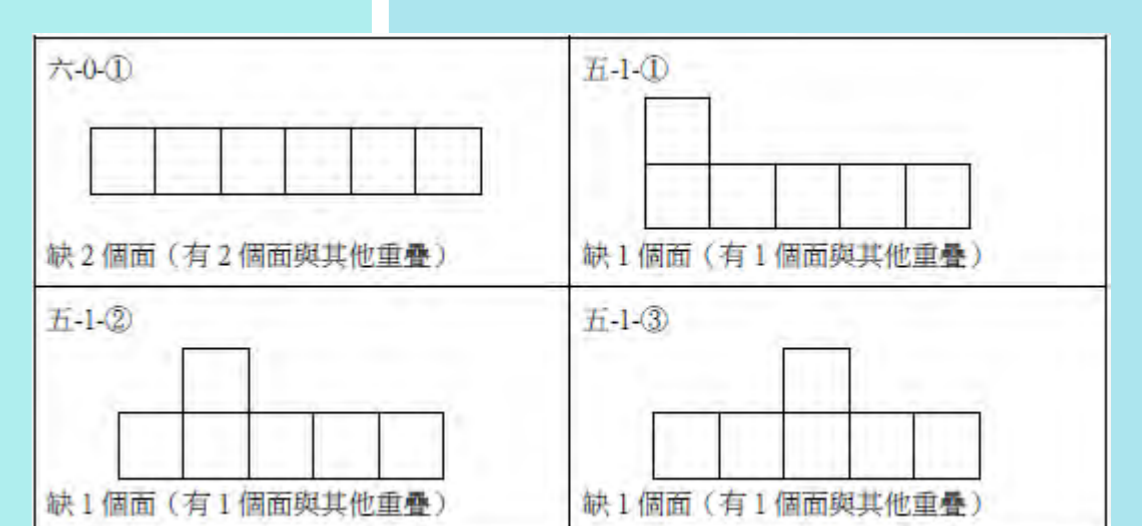
#### (二)、「冂」字型：6 種



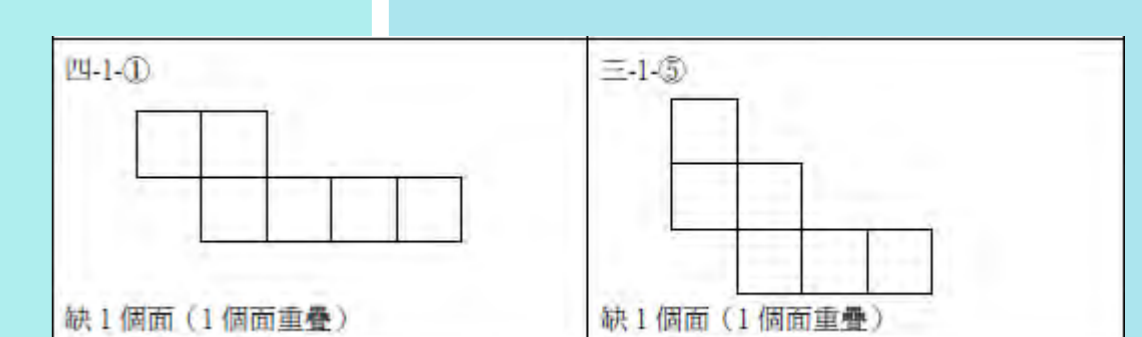
#### (三)、「L」字型：4 種



#### (四)、「一」字型：4 種



#### (五)、「階梯」型：2 種



【註】田字型剪開的邊只有 6 或 5 個，不符合正方體須剪開 7 邊才能攤平 6 面的條件。

【註】L 字型在 L 角落的面會有 2 個對面，不符合正方體每面恰有唯一對面的性質。

上述研究的正方體又稱正六面體，是正多面體的一種。正多面體又稱柏拉圖多面體，共有五種，包括正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體及正二十面體。生活中有許多正多面體，舉凡「肉粽」和「立體茶包」的造形為正四面體，「骰子」和「方糖」是正六面體，「洗衣球」為正八面體的變形，「古銅錢串成的龍珠」為正十二面體的變化，臺中科博館的招牌上有個正二十面體的裝置藝術。正多面體有一些共通的性質，例如：

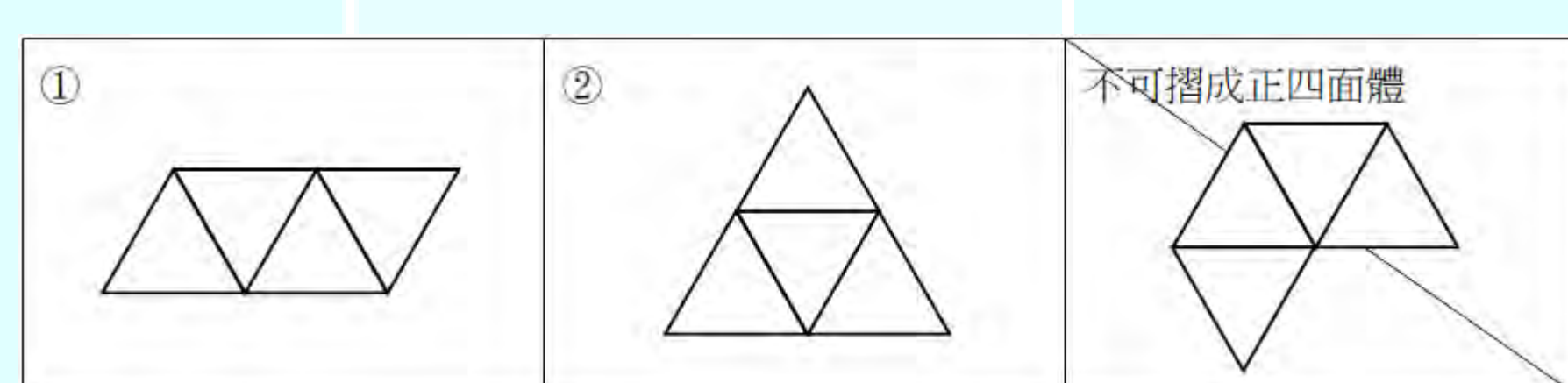
1. 每個面都是由全等的正多邊形所組成的凸多面體。
2. 每個頂點連接一樣多的邊數，一樣多的面數，且每個頂點在同一球面上。
3. 面與面之間的夾角相等。
4. 符合尤拉公式：「頂點數  $V$  - 邊數  $E$  + 面數  $F = 2$ 」

正多面體	頂點數, V	邊數, E	面數, F	$V - E + F$	面的形狀
正四面體	4	6	4	2	正三角形
正六面體	8	12	6	2	正方形
正八面體	6	12	8	2	正三角形
正十二面體	20	30	12	2	正五邊形
正二十面體	12	30	20	2	正三角形

正多面體中除了正四面體外，每一個面都有唯一「對面」與之平行。國小五下數學課本的「柱體、錐體和球體」單元中介紹過正四面體（三角錐的一種）及正六面體（正方體，四角柱的一種），而正八面體則是由 2 個四角錐（金字塔）組合而成，所以對我們國小學生而言正八面體並不困難。因此，我們可以運用前面正方體展開圖的研究方法及結果來探討正四面體及正八面體的展開圖。

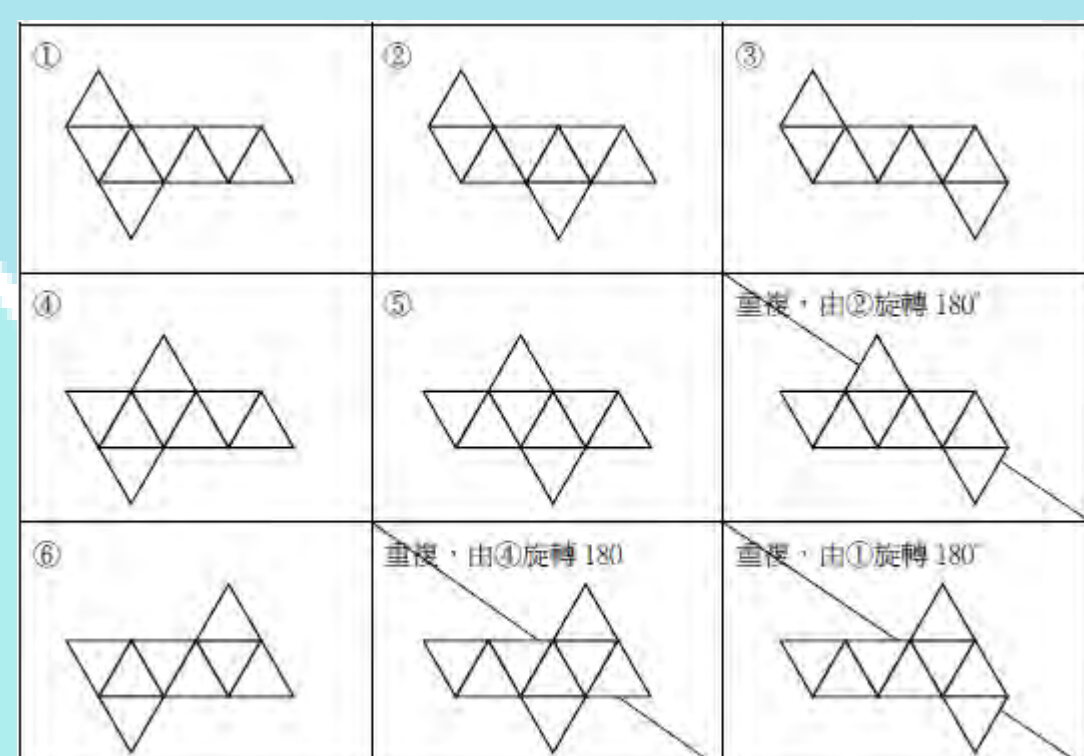
### 一、正四面體的展開圖：共有 2 種

正四面體有 4 個全等的面，每個面都是正三角形，所以正四面體的展開圖自然也是由這 4 個正三角形相連而成（四連正三角形），而四連正三角形的組合有 3 種，如右圖，其中最右圖不可摺成正四面體（有 1 個面開天窗，另 1 個面兩塊重疊）。因此正四面體的展開圖只有 2 種，如右圖①及圖②。正四面體的 4 個面相交出 6 個邊，在攤開形成展開圖前，這 6 個邊必須先剪開 3 個邊，換言之，有  $6 - 3 = 3$  個邊未被切開（4 面需有 3 邊連結）。



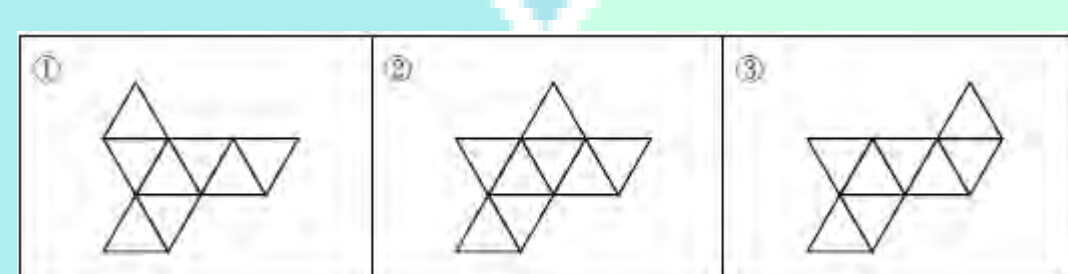
### 二、正八面體的展開圖：共有 11 種，分成四大類

#### (一)、1-6-1型：6 種



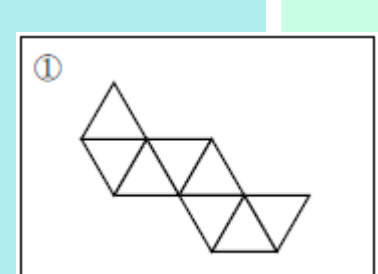
為了方便記憶，我們可以將 1-6-1 型的正八面體展開圖視為對應於 1-4-1 型的正方體展開圖，也就是，先排一列六連正三角形，另外兩個單一正三角形分別擺在上、下兩側，共  $3 \times 3 = 9$  種擺法。扣除旋轉對稱，最後剩下 6 種。正八面體的每個面也都是正三角形，8 個面相交出 12 個邊，在攤開形成展開圖前，這 12 個邊必須先剪開 5 個邊，換言之，有  $12 - 5 = 7$  個邊未被切開（8 面需有 7 邊連結）。

#### (二)、1-5-2型：3 種

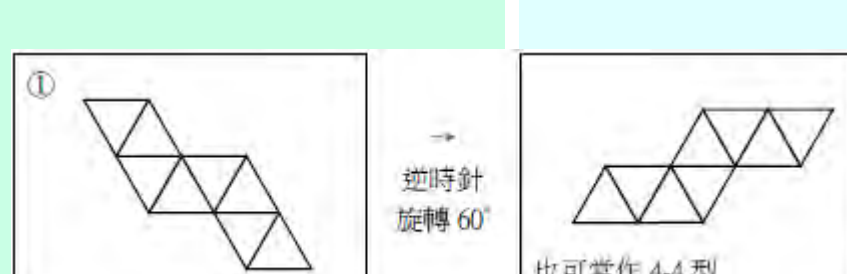


將 1-5-2 型的正八面體展開圖視為對應於 1-3-2 型的正方體展開圖，先排一列五連正三角形，再於上側擺一個單一正三角形，下側擺一個二連正三角形，共  $3 \times 2 = 6$  種擺法。扣除旋轉對稱，最後剩下 3 種。

#### (三)、1-4-3型：1 種



#### (四)、2-4-2型（或4-4型）：1 種

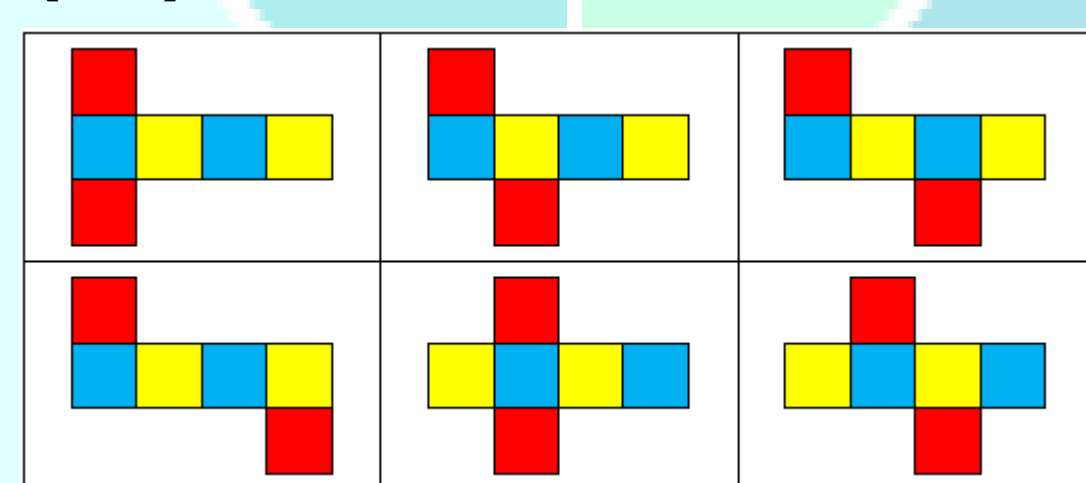


# 柒、結論

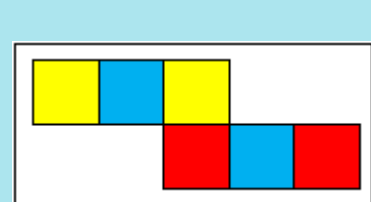
總結以上之研究與討論，可以得到幾點結論：

### 一、正方體（正六面體）的展開圖有 11 種，分成四類：

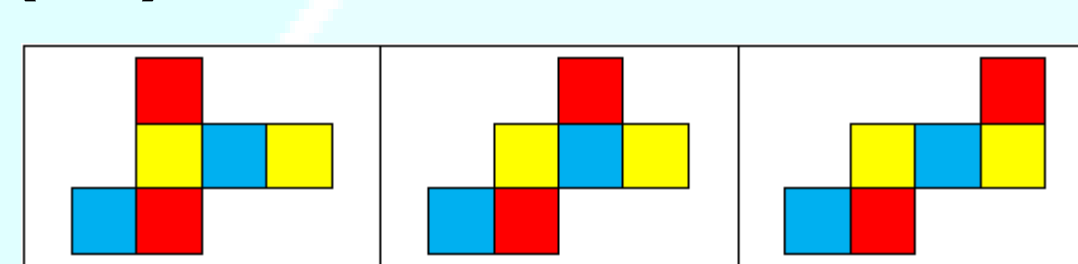
#### (一)、1-4-1型：6 種



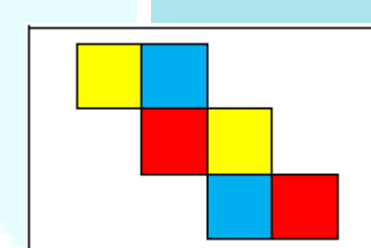
#### (二)、3-3型：1 種



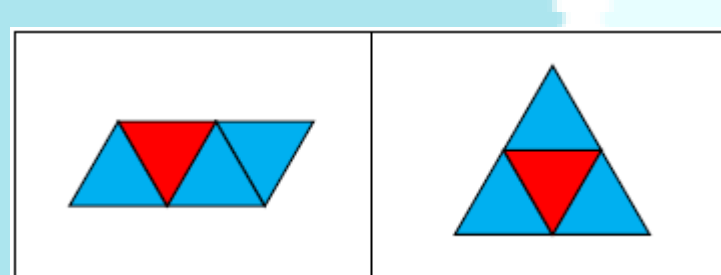
#### (三)、1-3-2型：3 種



#### (四)、2-2-2型：1 種

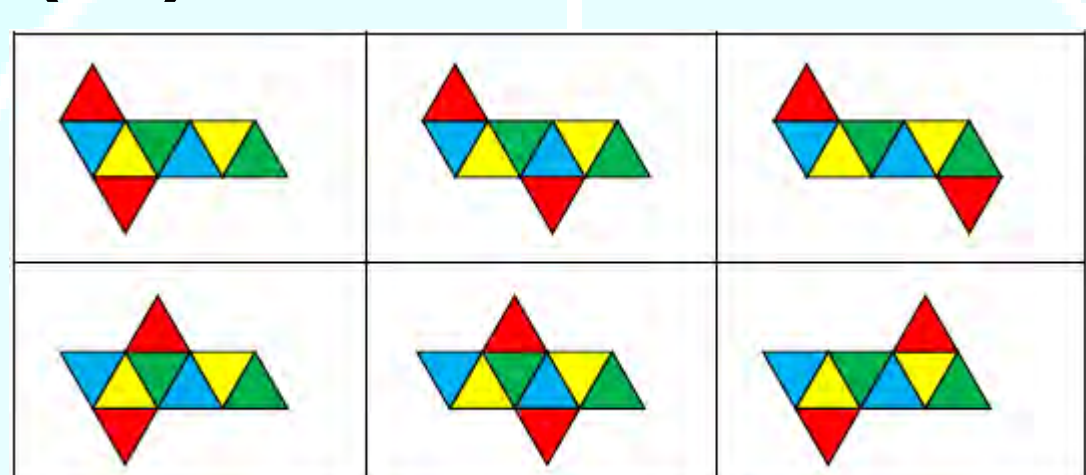


### 二、正四面體的展開圖：只有 2 種

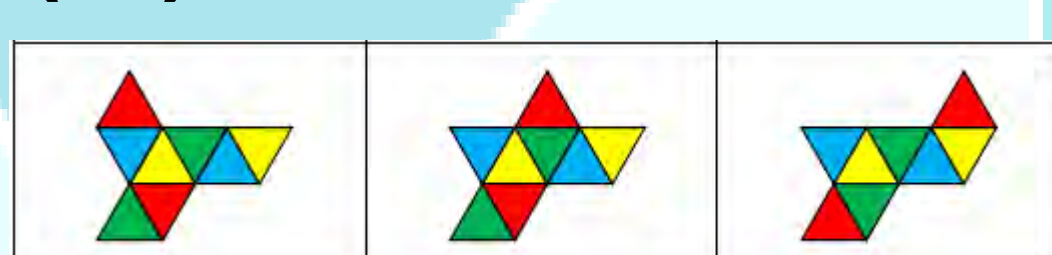


### 三、正八面體的展開圖有 11 種，分成四類：

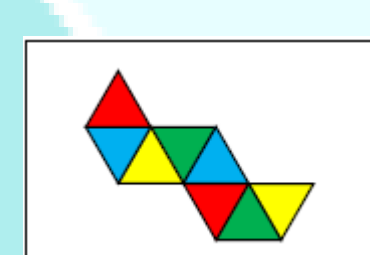
#### (一)、1-6-1型：6 種



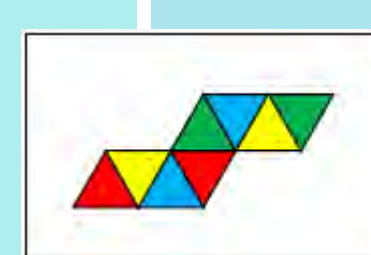
#### (二)、1-5-2型：3 種



#### (三)、1-4-3型：1 種



#### (四)、4-4型：1 種



# 捌、參考資料

- 一、南一書局。國民小學數學五下第十冊第四單元正方體和長方體（2018年2月再版）
- 二、南一書局。國民小學數學六上第十一冊第九單元形體關係和柱體表面積（2018年8月再版）
- 三、彭君智，3D立體變變變，「數學傳播季刊」25卷，第3期，68~80，90年9月
- 四、國立台灣科學教育館歷屆優勝作品：<https://twsf.ntsec.gov.tw/Article.aspx?a=41&lang=1>