中華民國第 59 屆中小學科學展覽會

作品說明書

國小組　數學科

080401

標好標滿

學校名稱：新竹市私立康橋雙語中小學國小部

作者：	指導老師：
小六 邱心柔	李正同

關鍵詞：拉丁方陣、*Banayai`s threorem*、

二分圖和三分圖

摘要

探討平面上n條直線，每兩條相交出一個交點，但不三線共點，並在每個交點上標上數字 1 至 n-1，使任何一條直線上恰好出現 1 至 n-1 各一次。得到奇數條直線無法、偶數條直線可以。

推廣至三維空間，探討n個平面，每三個相交出一個交點，但不四面共點，發現到三維空間有兩種推廣方式：

一、在每個交點上標上數字，使每條直線上的數字都不重複

二、在每個交點上標上數字，使每個平面上的數字都不重複

在此兩種情況下，可見當有三個平面時皆可以。

探討第二種推廣後發現在六個平面時亦可以給出構造。而後又發現其等價於 *Baranyai's theorem* 故得到平面個數為三的倍數皆可以，再根據文獻構造出三維度空間 9 個平面的一種方法。

壹、前言

一、研究動機

科學研習月刊第 57 卷第 5 期第 58 頁，台灣科學教育館網站，篇名【標好標滿】[4,2018 年 5 月]。如題目 1.1.1.。

題目 1.1.1. 桌上畫著四條直線，兩兩相交。小志想在每個交點上標一個數字，讓沿著任何一條直線上的三個交點都剛好出現 1、2、3 各一次。小志想了一下就成功了。

聰明的讀者知道小志怎麼做的嗎？

小定接著想:「如果五條直線兩兩相交，能不能也做同樣的事？」也就是說，在每個交 點上標一個數字，讓任何一條線上的四個點都出現 1、2、3、4 ，剛好各一次？

請問聰明的讀者，你能幫幫小定嗎？如果直線有更多條，結果又是如何呢？

二、研究目的

研究目的 1.2.1. 平面上有n條直線，每兩條直線相交出一個交點且不三線共點，並在每個交點上標上數字$1 \sim n-1$，使得沿著任何一條直線上的$n-1$個交點都剛好出現 $1 \sim n-1$ 各一次。

研究目的 1.2.2. 三維度空間中有n個平面，每兩個平面相交出一條直線、每三個平面相交出一個交點，每三個平面相交出一個交點且不四個平面共點。在每個交點上標上數字$1 \sim n-2$，使沿著任何一條直線上的$n-2$個交點都剛好出現 $1 \sim n-2$ 各一次。

研究目的 1.2.3. 三維度空間中有n個平面，每兩個平面相交出一條直線、每三個平面相交出一個交點，每三個平面相交出一個交點且不四個平面共點。在每個交點上標上數字$1 \sim C_2^{n-1}$，使沿著任何一個平面上的C_2^{n-1}個交點都剛好出現 $1 \sim C_2^{n-1}$ 各一次。

三、研究器材

紙、筆和電腦(Microsoft Word、Microsoft Excel、Microsoft Powerpoint)

四、符號與名詞定義

符號 1.4.1. L_n: 空間中的第n條直線。

符號 1.4.2. P_n: 空間中的第n個點。

符號 1.4.3. $P_{m,n}$: L_m和L_n的交點。

符號 1.4.4. R_n^2: 2維空間，n條直線兩兩相交，且不三線共點。

定義 1.4.5. 將R_n^2的每個交點給予標號。若每條直線，均有1至$n-1$的連續自然數，則稱為**標好標滿**。

符號 1.4.6. E_n: 將直線分群後，其中的第n群。

五、簡單的圖形

二維空間，一條直線沒有交點，一條直線本身無法標好標滿。

考慮R_2^2，為二條不平行直線，如圖 1.5.1.。平面上，若2條直線平行則沒有交點，如圖 1.5.2.。

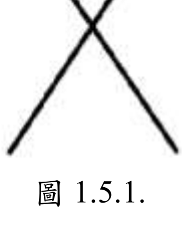


圖 1.5.1.

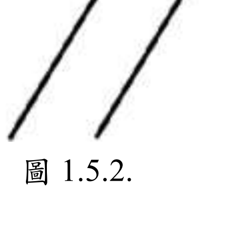


圖 1.5.2.

事實 1.5.3. 依題目 1.1.1.的規定，平面上有n條相異直線，直線兩兩相交，則交點個數為

$$c_2^n = \frac{n \times (n-1)}{2}.$$

此時，c_2^n為組合數，n個相異物任取2個方法數。

貳、文獻探討與預備知識

一、拉丁方陣

本研究所稱的拉丁方陣填法如下。

例子 2.1.1. 將數字1~8填入一個8×8的宮格中使每一行每一列數字都不重複，如圖 2.1.2.。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

圖 2.1.2.

例子 2.1.3. 將數字1~9填入一個9×9的宮格中使每一行每一列數字都不重複，如圖 2.1.4.。

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

圖 2.1.4.

如此，

圖 2.1.2.的一般式如圖 2.1.5.。

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 2k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2k & \cdots & 2k-1 \end{bmatrix}$$

圖 2.1.5.

圖 2.1.4.的一般式如圖 2.1.6.。

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 2k+1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2k+1 & \cdots & 2k \end{bmatrix}$$

圖 2.1.6.

因此，

性質 2.1.7. $n \times n$拉丁方陣宮格(x,y)中的數字為$[(x+y-2) mod\, n]+1$，如圖 2.1.8.為偶數 8×8示意圖。

[證明] $F(x,y)=[(x+y-2) mod\, n]+1$，則$F(1,1)=1$成立。我利用數學歸納法，假設$F(i,j)$成立。則宮格$(i\,，j+1)$中的數為

$$\begin{aligned} & [F(i,j) mod\, n]+1 \\ &= [[(i+j-2) mod\, n]+1\ mod\, n]+1 \\ &= [i+(j+1)-2] mod\, n+1 \\ &= F(i,j+1)\text{。} \end{aligned}$$

同理，宮格$(i+1\,，j)$中的數為

$$\begin{aligned} & [F(i,j)\ mod\, n]+1 \\ &= \big[[(i+j-2) mod\, n]+1\ mod\, n\big]+1 \\ &= [[(i+1)+j-2] mod\, n]+1 \\ &= F(i+1,j)\text{。} \end{aligned}$$

Q.E.D.

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \end{array}
\quad
\begin{matrix} (8,1)=(8+1-2) mod\, 8+1=8 \\ (7,2)=(7+2-2) mod\, 8+1=8 \\ (6,3)=(6+3-2) mod\, 8+1=8 \\ (5,4)=(5+4-2) mod\, 8+1=8 \\ (4,5)=(4+5-2) mod\, 8+1=8 \\ (3,6)=(3+6-2) mod\, 8+1=8 \\ (2,7)=(2+7-2) mod\, 8+1=8 \\ (1,8)=(1+8-2) mod\, 8+1=8 \end{matrix}$$

圖 2.1.8.

參、二維度空間奇數直線

一、二維度空間奇數直線

例子 3.1.1. 如圖 3.1.2.及 3.1.3.，平面上三條線的結構圖與標法，設$P_{1,3}$填入a。而a無法被數字 1、2 替代，因此無法標好標滿。

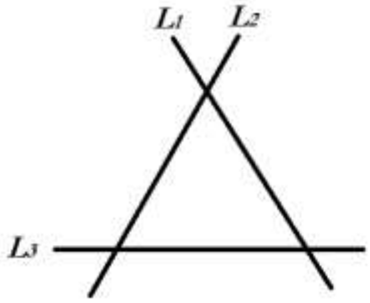


圖 3.1.2.

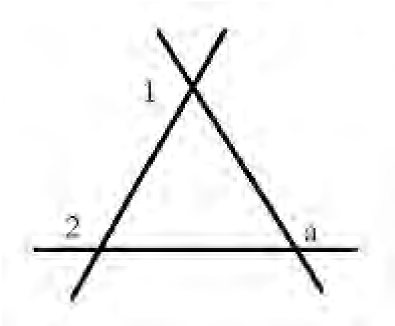


圖 3.1.3.

性質 3.1.4. 平面上奇數條線無法標好標滿。

[證明] 任意兩條線必有一個交點。不妨假設該交點標號為1。如此，我們可以從平面上移除這兩條線。經過有限次的移除，會留下一條線，無法和別條線產生交點標號為1。如此，奇數條線無法標好標滿。如示意圖 3.1.5.。

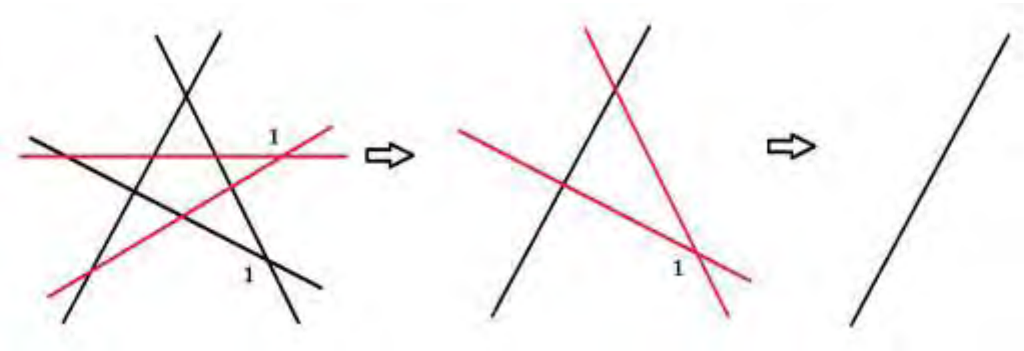


圖 3.1.5.

Q.E.D.

肆、二維度空間偶數直線

一、標好標滿表格

為了完成R_n^2的標好標滿，我設計出一個標好標滿的表格。

例子 4.1.1. 將R_4^2的C_2^4個點，從第一條線上的點開始依序列出，如圖 4.1.2.，可以發現它的形狀呈現為倒三角形。若複製兩個倒三角形，則會呈現出圖 4.1.3.，這時表格中的座標(L_x, L_y)和(L_y, L_x)都代表的是L_x和L_y的交點。

$$\begin{array}{llll} L_1: & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ L_2: & & (2,3) & (2,4) \\ L_3: & & & (3,4) \\ L_4: & & & \end{array}$$

圖 4.1.2.

$$\begin{bmatrix} 點 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ L_1 & & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ L_2 & (1,2) & & (2,3) & (2,4) \\ L_3 & (1,3) & (2,3) & & (3,4) \\ L_4 & (1,4) & (2,4) & (3,4) & \end{bmatrix}$$

圖 4.1.3.

得到，

事實 4.1.4. 標好標滿的表格畫法為，先列出$n \times n$的表格並標上L_1~L_n，如圖 4.1.5.。因為同一條直線不會和自己產生交點，因此將主對角線上的宮格鋪上灰色網底，如圖 4.1.6.。L_a和L_b的交點與L_b和L_a的交點是一樣的，因此(L_a，L_b)和(L_b，L_a) 需填入相同數字，接著只要讓表格每行每列數字不重複即可標好標滿。

$$\begin{bmatrix} 點 & L_1 & \cdots & L_n \\ L_1 & & & \\ \vdots & & & \\ L_n & & & \end{bmatrix}$$

圖 4.1.5.

$$\begin{bmatrix} 點 & L_1 & \cdots & L_n \\ L_1 & & & \\ \vdots & & \ddots & \\ L_n & & & \end{bmatrix}$$

圖 4.1.6.

二、二維度空間偶數直線

事實 4.2.1. 在二維度空間中，當n等於偶數$(2k)$時，才可能符和條件標數。

例子 4.2.2. R_4^2，先填入3×3的拉丁方陣，使的每行每列數字都不重複。再將對稱線上(L_r, L_r)的數移至(L_r, L_n)及(L_n, L_r)，如圖 4.2.3.。

$$\begin{bmatrix} 點 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ L_1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ L_2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ L_3 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ L_4 & 1 & 3 & 2 & \end{bmatrix}$$

圖 4.2.3.

事實 4.2.4. R_n^2的標法為，先填入$(n-1) \times (n-1)$的拉丁方陣，使每行每列數字都不重復，再將主對角線上(L_r, L_r)的數移至(L_r, L_n)及(L_n, L_r)。則主對角線上的數字都會被移至同一條直線，因此必須證明他們不會重複。

三、主對角線上的數不會重複

事實 4.3.1. 拉丁方陣宮格$(x,\ y)$中的數為$[(x+y-2)mod\ (n-1)]+1$

性質 4.3.2. 在偶數條直線R^2_{2k}的標好標滿中，會有奇數$(2k-1)$個數。利用反證法，假設主對角線上有兩個數$(x_1,\ x_1)$和$(x_2,\ x_2)$重複。則兩數相減的值$|(2\times x_1)-(2\times x_2)|=|2(x_1-x_2)|$必須等於奇數$(2k-1)$。

[證明] 若表格中兩個數字重複，則經由公式$\mathrm{F}(x,y)=[(x+y-2)mod\ n]+1$證明$2(x1)$和$2(x2)$同餘於$n$但非同數，因此$|(2\times x1)-(2\times x2)|$為$n$的倍數。接著將對角線上最大及最小的數，即是座標$(1\ ,1)$及$(2k-1\ ,2k-1)$帶入上式，得到$|2[1-(2k-1)]|=2(2k-2)<2(2k-1)$。因此主對角線上任選兩數帶入上式皆$<2(2k-1)$。因此，$|2(x1-x2)|$必須等於$2k-1$。

Q.E.D.

得到，

事實 4.3.3. 經由上述說明，$|2(x_1-x_2)|$是偶數、$2k-1$是奇數，矛盾。因此$2k-1\neq|2(x_1-x_2)|$，R^2_{2k}可以標好標滿。

四、二分圖

事實 4.4.1. 利用二分圖的方法，可以找到另一種將$R^2_{2^k}$標好標滿的標號方法。

性質 4.4.2. $n=2^k$條直線$\{l_1\sim l_{2^k}\}$，平分成 $L_1=\{l_1\sim l_{2^{k-1}}\}$和$L_2=\{l_{2^{k-1}+1}\sim l_{2^k}\}$兩群，則$L_1$中的任一直線$l_i$與$L_2$中的任一直線$l_j$產生的交點$P_{i,j}$可以用下列方式標號,使得不會有某一條直線上的某兩個交點標號相同。

設$i=0\sim2^{k-1}-1$，

將所有的交點$P_{1+i,\ 2^{k-1}+1+i}$都標上"1"；

將所有的交點$P_{1+i,\ 2^{k-1}+1+[(i+1)mod\ 2^{k-1}]}$都標上 "2"；

將所有的交點$P_{1+i,\ 2^{k-1}+1+[(i+2)mod\ 2^{k-1}]}$都標上 "3"；

… …

將所有的交點$P_{1+i,\ 2^{k-1}+1+[(i+2^{k-1}-1)mod\ 2^{k-1}]}$都標上 "$2^{k-1}$"；

[證明] 所有被標上"1"的交點,為L_1中的第 i 條直線與為L_2中的第 i 條直線的交點,如圖 4.4.3.。所有被標上"2"的交點，為L_1中的第 i 條直線與為L_2中的第$[(i+1)\mathrm{mod}\ \ 2^{k-1}]$條直線的交點，如圖 4.4.4.。依此類推，所有被標上"2^{k-1}"的交點，為L_1中的第 i 條直線與為L_2中的第

$[(i + 2^{k-1} - 1) mod\ 2^{k-1}]$條直線的交點，如圖 4.4.5.。

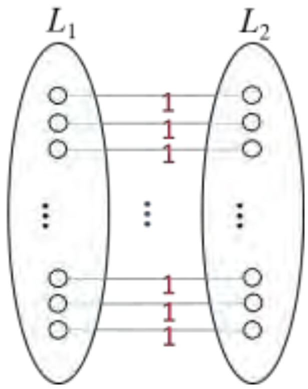


圖 4.4.3.

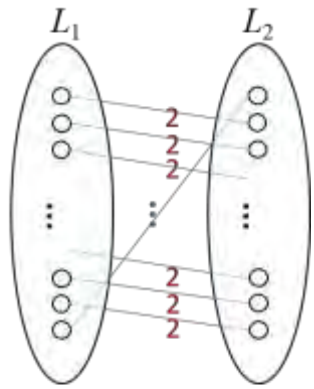


圖 4.4.4.

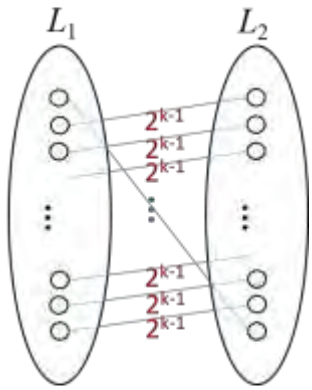


圖 4.4.5.

由上述標號方法可知，L_1中的任何一條直線l_i，其與L_2中任何一條直線的交點標號皆不相同。以l_1為例子，其與L_2中所有直線的交點標號如圖 4.4.6.。同樣的L_2中的任何一條直線l_j，其與L_1中任何一條直線的交點標號也皆不相同。以$l_{2^{k-1}+1}$為例子，其與L_1中所有直線的交點標號如圖 4.4.7.。

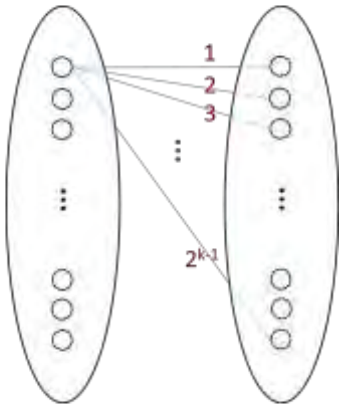


圖 4.4.6.

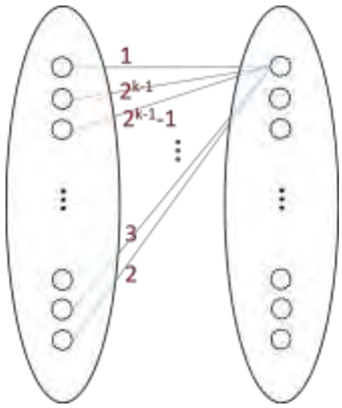


圖 4.4.7.

Q.E.D.

性質 4.4.8. $n = 2^k$條直線$\{l_1 \sim l_{2^k}\}$，依性質 4.4.2.平分成 L_1和L_2兩群並完成標號後，$L_1 = \{l_1 \sim l_{2^{k-1}}\}$的$2^{k-1}$條直線和$L_2 = \{l_{2^{k-1}+1} \sim l_{2^k}\}$$2^{k-1}$條直線可繼續依性質 4.4.2.各自平分成$L_{1,1}$、$L_{1,2}$和$L_{2,1}$、$L_{2,2}$兩群並完成標號。

[證明] L_1和L_2兩群的直線個數仍為偶數，所以可以繼續平分成兩群。另外分成L_1和L_2兩群後只有對L_1中的任一直線l_i與L_2中的任一直線l_j產生的交點$P_{i,j}$標號。所有L_1中任兩條直線的交點都尚未標號。同樣的L_2中任兩條直線的交點也都尚未標號。因此仍可繼續依性質 4.4.2.各自平分成$L_{1,1}$、$L_{1,2}$和$L_{2,1}$、$L_{2,2}$兩群並完成標號。

Q.E.D.

性質 4.4.9. 重複性質 4.4.8.的步驟直到無法再分群為止，如此總共對$\frac{2^k\times(2^k-1)}{2}=\frac{n\times(n-1)}{2}$個交點完成標號，共標了$2^k-1=n-1$個號碼。

[證明] 第一次分成L_1和L_2兩群時共對$(2^{k-1})\times(2^{k-1})$個交點完成標號，標了2^{k-1}個號碼。第二次各自分成$L_{1,1}$、$L_{1,2}$和$L_{2,1}$、$L_{2,2}$兩群時共對$2\times(2^{k-2})\times(2^{k-2})$個交點完成標號，標了$2^{k-2}$個號碼。第三次分群時共對$2^2\times(2^{k-3})\times(2^{k-3})$個交點完成標號，標了$2^{k-3}$個號碼。依此類推，第$k$次分群時共對$2^{k-1}\times(2^0)\times(2^0)$個交點完成標號，標了$2^0$個號碼。因此總共對
$2^{2(k-1)}+2(2^{2(k-2)})+2^2(2^{2(k-3)})+\cdots+2^{k-1}(2^{2(0)})=2^{k-1}(2^{k-1}+2^{k-2}+2^{k-3}+\cdots+2^0)=2^{k-1}\times\frac{2^k-1}{2-1}=\frac{2^k\times(2^k-1)}{2}=\frac{n\times(n-1)}{2}$個交點完成標號，共標了$2^{k-1}+2^{k-2}+2^{k-3}+\cdots+2^0=2^k-1=n-1$個號碼。

Q.E.D.

性質 4.4.10. 利用二分圖找到的$R^2_{2^k}$標好標滿的標號方法不同於利用拉丁方陣找到的$R^2_{2^k}$標好標滿的標號方法。

[證明] 以$R^2_{2^3}$為例，利用拉丁方陣找到的標號方法如圖 4.4.11.。其中$P_{1,8}$、$P_{2,7}$、$P_{3,6}$、$P_{4,5}$被標上號碼 1。因此將l_1、l_2、l_3、l_4分成一群，l_8、l_7、l_6、l_5分成另一群，利用二分圖法繼續標號。雖然發現二分圖法中$P_{1,7}$、$P_{2,6}$、$P_{3,5}$、$P_{4,8}$會被標上相同號碼，如圖 4.4.12.，與拉丁方陣找到的標號方法相同。但是二分圖法中$P_{1,6}$、$P_{2,5}$、$P_{3,8}$、$P_{4,7}$也會被標上相同號碼，如圖 4.4.13.，與拉丁方陣找到的標號方法不同。

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	1
2	2	3	4	5	6	7	1	3
3	3	4	5	6	7	1	2	5
4	4	5	6	7	1	2	3	7
5	5	6	7	1	2	3	4	2
6	6	7	1	2	3	4	5	4
7	7	1	2	3	4	5	6	6
8	1	3	5	7	2	4	6	

圖 4.4.11.

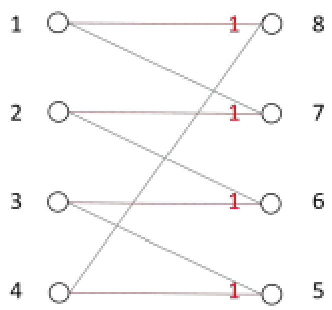


圖 4.4.12.

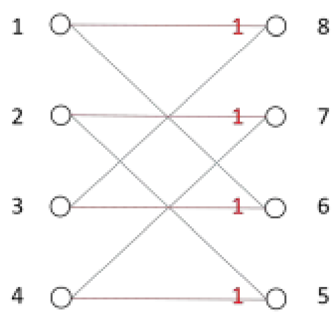


圖 4.4.13.

Q.E.D.

伍、三維度空間的標法一

三維度空間中，

對於任意三個平面，存在共點；
對於任意四個平面，不存在共點。

本研究對於三維度空間有兩種類型的標法。

第一種標法，針對每條線上的數字不重複。將在第伍章討論。

第二種標法，針對每個平面上的數字不重複。將在第陸章討論。

一、題目分析

題目 5.1.1. 有n個平面，每兩個相交成一條直線、每三個相交成一個點、每四個不存在共點，在點上標上連續的自然數由1到$n-2$，使得每條線上數字不重複，則稱為標好標滿。

二、符號與名詞定義

定義 5.2.1. 3維度空間中，對於任意2個平面相交出1條直線、任意3個平面相交出1個點，在每個點上給予標號。若每條直線，均有1至$n-2$的連續自然數，則稱為標好標滿。

符號 5.2.2. F_n: 空間中的第n個平面。

符號 5.2.3. $L_{m,n}$: F_m和F_n的交線。

符號 5.2.4. $P_{i,j,k}$: F_i和F_j和F_k的交點。

符號 5.2.5. R_n^3: 3維度空間，有n個平面，每2個平面相交成一條直線、每3個平面相交成一個交點、每4個平面不存在共點。

三、三維度偶數個平面的例子

例子 5.3.1. R_2^3，不會產生交點，無須標好標滿。

例子 5.3.2. R_4^3，其中一個平面上呈現的是R_3^2。但R_3^2無法標好標滿，因此R_4^3也就無法標好標滿。F_1上，$L_{1,2}$、$L_{1,3}$、$L_{1,4}$分別是與F_2、F_3、F_4相交出的線，但若在$P_{1,2,3}$上填1、$P_{1,2,4}$上填2，則$P_{1,3,4}$就無法填上數字1或2。

例子 5.3.4. R_6^3，其中一個平面上呈現的是R_5^2。但R_5^2無法標好標滿，而R_6^3就也無法標好標滿。

因此，

事實 5.3.5. R_{2k}^3，其中一個平面上呈現的是R_{2k+1}^2，但R_{2k+1}^2無法標好標滿，而R_{2k}^3就也無法標好標滿。

四、三維度的三個平面問題

事實 5.4.1. R_{2k+1}^3，交點數量為$C_3^n = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3\times2}$，而$\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3\times2}$個點要再平分給$n-2$個數，每個數會出現$\frac{\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3\times2}}{n-2} = \frac{n\times(n-1)}{6}$次。

其中$(n-1)$一定要能整除2，因此n或$n-1$一定要是3的倍數，$\frac{n\times(n-1)}{3\times(n-2)} \in \mathbb{Z}^+$。

例子 5.4.2. R_3^3，會產生$C_3^3 = \frac{3\times2}{3\times2} = 1$個交點，而我們只能在此點標上數字1。如圖 5.4.3.。

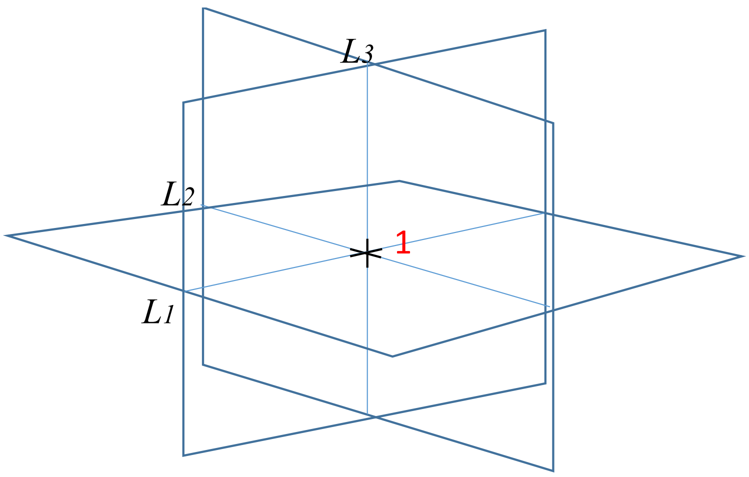


圖 5.4.3.

事實 5.4.4. 三維度空間，只有一個交點，可以標好標滿，如圖 5.4.3.。

也就是，

事實 5.4.5. R_3^3，3個平面交於一點時，可以標好標滿。

事實 5.4.6. 我試了R_4^3的例子，$\frac{4\times3}{6}=2\in\mathbb{Z}^+$、

R_6^3的例子，$\frac{6\times5}{6}=5\in\mathbb{Z}^+$、

R_7^3的例子，$\frac{7\times6}{6}=7\in\mathbb{Z}^+$、

R_9^3的例子，$\frac{9\times8}{6}=12\in\mathbb{Z}^+$。

都符合事實 5.4.1.的條件，但我無法將它們標好標滿。

因此，

猜想 5.5.9. R_n^3，$n\neq3$時，無法標好標滿。

陸、三維度空間標法二

一、題目分析

題目 6.1.1. 有n個平面，每兩個相交成一條直線、每三個相交成一個點、每四個不存在共點，若我們在點上標上連續的自然數由1到C_2^{n-1}，使得每個平面上數字不重複，則稱為標好標滿。

[說明] 任意三個平面相交出一個交點，因此總交點數量是$C_3^n=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)}{6}$，將此數乘以$3$後再平分給$n$個平面，就是$\frac{(n-1)\times(n-2)}{2}=C_2^{n-1}$。

Q.E.D.

經由維基百科 *Graph factorization*[7]我發現，

性質 6.1.2. *Baranyai's theorem* 證明出一個 *complete k-uniform hypergraph* 可以被拆成C_{k-1}^{n-1}個 *1-factor* 的條件為n可以整除k。此證明相當於題目 6.1.1.能標好標滿的條件為n可以整除3。

[證明] *Complete 3-uniform hypergraph* 中，每個點相當於標好標滿R_n^3中的一個平面、每條 *hyperedge* 相當於標好標滿R_n^3中的一個交點。如此，每一個 *1-factor* 為被標上相同數字的點，而總共有C_2^{n-1}個數字也就是C_{k-1}^{n-1}個 *1-factor*。

Q.E.D.

二、符號與名詞定義

名詞 6.2.1. *Hypergraph*: 一種廣義上的圖，他的一條邊可以連接任意數量的頂點。

名詞 6.2.2. *Hyperedge*: *Hypergraph* 中的邊。

名詞 6.2.3. *Complete graph*: n個點，任意2個點之間都有一條邊。

名詞 6.2.4. *Complete k-uniform hypergraph*: n個點，任意k個點之間都有一條 *hyperedge*。

名詞 6.2.5. *Subgraph*: 子圖$G' = (V', E')$，其中V'為原圖$G = (V, E)$中點集合V的子集合，E'為原圖中邊集合E的子集合。

名詞 6.2.6. *1-factor*: 一種 *Subgraph*，恰好包含原圖中所有的點且只與一條邊相連。

符號 6.2.7. $T_{i,j,k}$: P_i、P_j和P_k連成的三角形。

符號 6.2.8. $\mathrm{A}_{R_n^3}$: R_n^3的點集合。

符號 6.2.9. b_x: $\mathrm{A}_{R_n^3}$的子集合。

符號 6.2.10. E_n: 將平面分群後，其中的第n+1 群。

符號 6.2.11. $E_{i,j}$: 第$i + 1$群中的第$j + 1$個平面。

符號 6.2.12. $V(E_{i,j}, E_{k,l}, E_{m,n})$: $E_{i,j}$、$E_{k,l}$和$E_{m,n}$的交點。

符號 6.2.13. R_n^k: k度空間中，有n個$k - 1$度超立方體，每k個相交成一個交點、每$k + 1$個不存在共點

二、三個平面和六個平面

例子 6.2.1. 如圖 6.2.2.、圖 6.2.3.、圖 6.2.4.，為R_3^3的標法。

例子 6.2.5. 如圖 6.2.6.、圖 6.2.7.、圖 6.2.8.、圖 6.2.9.、圖 6.2.10.、圖 6.2.11.，為R_6^3的標法。

平面1	F_1	F_2	F_3
F_1			
F_2			1
F_3		1	

圖 6.2.2.

平面2	F_1	F_2	F_3
F_1			1
F_2			
F_3	1		

圖 6.2.3.

平面3	F_1	F_2	F_3
F_1		1	
F_2	1		
F_3			

圖 6.2.4.

平面1	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
F_1						
F_2			1	2	3	4
F_3		1		5	6	7
F_4		2	5		8	9
F_5		3	6	8		10
F_6		4	7	9	10	

圖 6.2.6.

平面2	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
F_1			1	2	3	4
F_2						
F_3	1			10	9	8
F_4	2		10		7	6
F_5	3		9	7		5
F_6	4		8	6	5	

圖 6.2.7.

平面3	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
F_1		1		5	6	7
F_2	1			10	9	8
F_3						
F_4	5	10			4	3
F_5	6	9		4		2
F_6	7	8		3	2	

圖 6.2.8.

平面4	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
F_1		2	5		8	9
F_2	2		10		7	6
F_3	5	10			4	3
F_4						
F_5	8	7	4			1
F_6	9	6	3		1	

圖 6.2.9.

平面5	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
F_1		3	6	8		10
F_2	3		9	7		5
F_3	6	9		4		2
F_4	8	7	4			1
F_5						
F_6	10	5	2	1		

圖 6.2.10.

平面6	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
F_1		4	7	9	10	
F_2	4		8	6	5	
F_3	7	8		3	2	
F_4	9	6	3		1	
F_5	10	5	2	1		
F_6						

圖 6.2.11.

也就是，

我們可以使用一種標法，滿足題目 6.1.1.的規定。

性質 6.2.12. 對於三維空間，相異平面的個數不是3的倍數無法標好標滿。

[證明]任意三個相異平面必有一個交點。不妨假設該交點標號為1。如此，我們可以從三維空間移除這三個平面。經過有限次的移除，會留下一個平面或兩個平面，無法和別的平面產生交點標號為1。如此，非$3k$個平面無法標好標滿。

Q.E.D.

三、九個平面的標法

Narsingh Deo and Paulius Micikevicius [7]示範了一種將 9 個頂點的 *complete 3-uniform hypergraph* 做 *one-factorization* 的方法。也就是對所有的 *hyperedges* 分群，每一群中的 *hyperedges* 恰好連到 *complete 3-uniform hypergraph* 中所有的頂點一次。每一群中的 *hyperedges* 集合稱做 *1-factor*。透過性質 6.1.2.可得知，

事實 6.3.1. 將一個 *complete 3-uniform hypergraph* 的頂點P_1~P_9依序編號並順時針方向排列，如圖 6.3.2.。每個頂點P_n相當於標好標滿R_9^3中的一個平面F_n。任意 3 個點P_i、P_j、P_k之間都有一條 *hyperedge* 相連，相當於標好標滿R_9^3中 3 個平面F_i、F_j、F_k的交點$P_{i,j,k}$。對 *complete 3-uniform hypergraph* 做 *one-factorization* 產生的每一個 *1-factor*，即為R_9^3中可以被標上相同數字的點集合

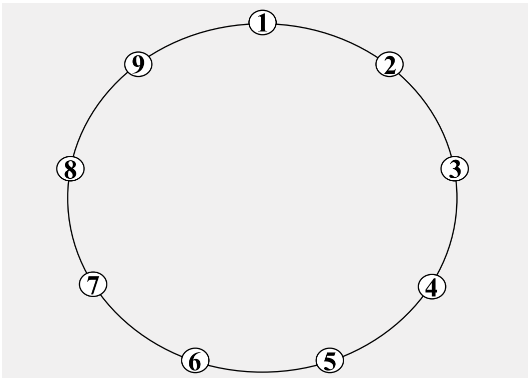


圖 6.3.2.

透過事實 6.3.2.的轉換和[7]示範的方法，可得知，

事實 6.3.3. R_9^3中的C_3^9=84 個交點可以分成 10 種類型，分別是$a_{1,1,7}$、$a_{1,2,6}$、$a_{1,3,5}$、$a_{1,4,4}$、$a_{1,5,3}$、$a_{1,6,2}$、$a_{2,2,5}$、$a_{2,3,4}$、$a_{2,4,3}$和$a_{3,3,3}$。對某一種類型$a_{l,m,n}$，其中的l, m, n分別代表屬於此類型的交點其相交的三個平面在圖 6.3.2.中的順時鐘方向編號距離，且$l < m,\ l < n$。

[說明] 以$a_{1,1,7}$為例，若交點$P_{i,j,k} \in a_{1,1,7}$且$i \le j \le k$，則$(k-j)$mod 9、$(j-i)$mod 9 和$(i-k)$mod 9 中最小的值等於 1，且順時鐘方向的下一個編號距離也等於 1。例如$P_{1,2,3}$、$P_{2,3,4}$、$P_{3,4,5}$、$P_{4,5,6}$、$P_{5,6,7}$、$P_{6,7,8}$、$P_{7,8,9}$、$P_{1,8,9}$、$P_{1,2,9}$等 9 個交點都屬於$a_{1,1,7}$。相同的可以知道$P_{1,2,4}$、$P_{2,3,5}$、$P_{3,4,6}$、$P_{4,5,7}$、$P_{5,6,8}$、$P_{6,7,9}$、$P_{1,7,8}$、$P_{2,8,9}$、$P_{1,3,9}$等 9 個交點都屬於$a_{1,2,6}$。

Q.E.D.

事實 6.3.4. $\mathrm{A}_{R_9^3} = a_{1,1,7} \cup a_{1,2,6} \cup a_{1,3,5} \cup a_{1,4,4} \cup a_{1,5,3} \cup a_{1,6,2} \cup a_{2,2,5} \cup a_{2,3,4} \cup a_{2,4,3} \cup a_{3,3,3}$。在除了點集合$a_{3,3,3}$以外的每個$\mathrm{A}_{R_9^3}$的子集合中各挑選一個交點。若能找到將它們分成每$9 \div 3 = 3$個一組，設每組有$P_{i,j,k}$、$P_{l,m,n}$、$P_{o,p,q}$且$i \ne j \ne k \ne l \ne m \ne n \ne o \ne p \ne q$則可標好標

滿。

[說明] $A_{R_n^3}$共會有$1+n\times(\frac{n}{3}-1)\div 2$個子集合，點集合$a_{\frac{n}{3},\frac{n}{3},\frac{n}{3}}$會包含著$\frac{n}{3}$個交點、其他的點集合則會包含$n$個交點。在$R_9^3$的情況下，28個數字，每個數字會被標在$84\div 28=3$個交點上。點集合$a_{3,3,3}=P_{1,4,7},P_{2,5,8},P_{3,6,9}$的交點可湊出一個圓，如圖 6.3.5.，因此$P_{1,4,7},P_{2,5,8},P_{3,6,9}$會被標上同一個數字。若找到$P_{i,j,k}$、$P_{l,m,n}$、$P_{o,p,q}$且$i\neq j\neq k\neq l\neq m\neq n\neq o\neq p\neq q$，可湊出一個圓，則

$P_{(i\ mod\ 9)+1,(j\ mod\ 9)+1,(k\ mod\ 9)+1}$、$P_{(l\ mod\ 9)+1,(m\ mod\ 9)+1,(n\ mod\ 9)+1}$、
$P_{(o\ mod\ 9)+1,(p\ mod\ 9)+1,(q\ mod\ 9)+1}$ 也可以湊出一個圓；

$P_{[(i+1)\ mod\ 9]+1,[(j+1)\ mod\ 9]+1,[(k+1)\ mod\ 9]+1}$、$P_{[(l+1)\ mod\ 9]+1,[(m+1)\ mod\ 9]+1,[(n+1)\ mod\ 9]+1}$、
$P_{[(o+1)\ mod\ 9]+1,[(p+1)\ mod\ 9]+1,[(q+1)\ mod\ 9]+1}$ 也可以湊出一個圓；

$P_{[(i+2)\ mod\ 9]+1,[(j+2)\ mod\ 9]+1,[(k+2)\ mod\ 9]+1}$、$P_{[(l+2)\ mod\ 9]+1,[(m+2)\ mod\ 9]+1,[(n+2)\ mod\ 9]+1}$、
$P_{[(o+2)\ mod\ 9]+1,[(p+2)\ mod\ 9]+1,[(q+2)\ mod\ 9]+1}$ 也可以湊出一個圓；

$\dots\dots$

$P_{[(i+7)\ mod\ 9]+1,[(j+7)\ mod\ 9]+1,[(k+7)\ mod\ 9]+1}$、$P_{[(l+7)\ mod\ 9]+1,[(m+7)\ mod\ 9]+1,[(n+7)\ mod\ 9]+1}$、
$P_{[(o+7)\ mod\ 9]+1,[(p+7)\ mod\ 9]+1,[(q+7)\ mod\ 9]+1}$ 也都可以湊出一個圓。

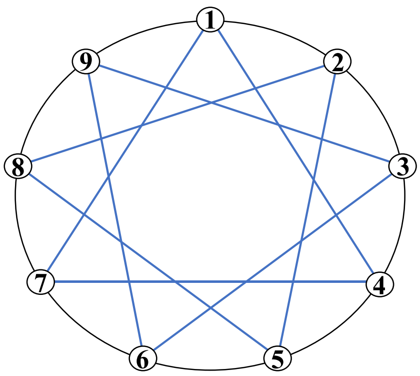


圖 6.3.5.

Q.E.D.

例子 6.3.6. 如圖 6.3.7.，$a_{1,1,7}$、$a_{1,3,5}$和$a_{1,2,6}$中的$P_{1,2,9}$、$P_{3,4,7}$、$P_{5,6,8}$可以湊出一個圓。則$a_{1,1,7}$、$a_{1,3,5}$和$a_{1,2,6}$中的其他交點也可以湊出一個圓，共可湊出 9 個圓。湊出一個圓中的三個交點即是R_9^3中可以被標上相同數字的三個交點。此外如圖 6.3.8.，$a_{1,4,4}$、$a_{1,5,3}$和$a_{1,6,2}$中的$P_{1,5,9}$、$P_{2,3,8}$、$P_{4,6,7}$可以湊出一個圓。因此$a_{1,4,4}$、$a_{1,5,3}$和$a_{1,6,2}$中的其他交點也可以湊出一個圓，共可湊出 9 個圓。最後如圖 6.3.9.，$a_{2,2,5}$、$a_{2,3,4}$和$a_{2,4,3}$中的$P_{5,7,9}$、$P_{1,3,6}$、$P_{2,4,8}$可以湊出一個圓。因此$a_{2,2,5}$、$a_{2,3,4}$和$a_{2,4,3}$中的其他交點也可以湊出一個圓，共可湊出 9 個圓。加上$a_{3,3,3}$中的三個交點$P_{1,4,7},P_{2,5,8},P_{3,6,9}$恰好可湊出一個圓，如圖 6.3.5.，總共湊出 28 個圓，即是R_9^3中標好標滿時需要的28個數字。

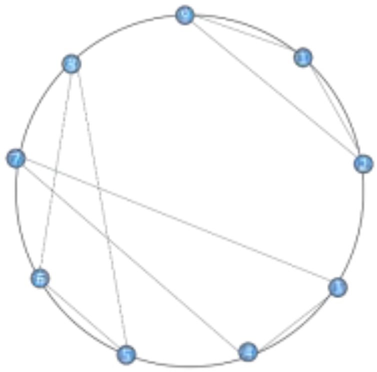


圖 6.3.7.

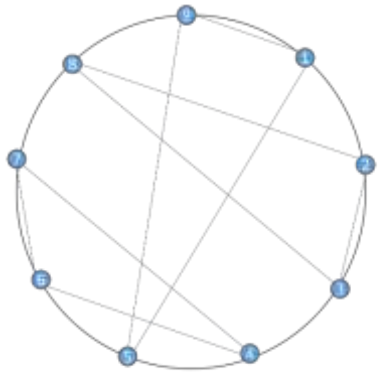


圖 6.3.8.

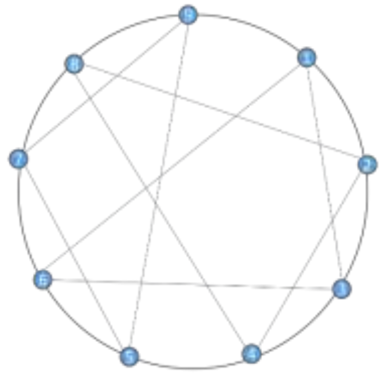


圖 6.3.9.

在[7]中並沒有提出一個通用的方法，說明如何對$A_{R_n^3}$中的$n\times(\frac{n}{3}-1)\div 2$個類型，每$\frac{n}{3}$個類型湊出一個圓。明顯的並非所有可以整除 3 的 n 其類型個數都能剛好整除$\frac{n}{3}$，只有當$\frac{n-3}{2}$為整數時才可以。也就是說，只有當 $n = 6k+3$ 時，$A_{R_n^3}$中的$k\times(6k+3)$個類型才可以整除$\frac{n}{3}$。

猜想 6.3.10. R_n^3，$n=6k+3$時，可以用事實 6.3.4.的方式標好標滿。

四、$R_{3^n}^3$的標好標滿

事實 6.4.1. 利用三分圖的方法，可以將$R_{3^n}^3$標好標滿。

事實 6.4.2. 3^n個平面，平分成E_0、E_1和E_2三群。則交點可分為三種類型，

類型一: $P_{i,j,k}$，其中相交的三個平面F_i、F_j、F_k恰好分別屬於E_0、E_1和E_2。

類型二: $P_{i,j,k}$，其中相交的三個平面F_i、F_j、F_k中恰好有兩個屬於E_0、E_1、E_2中的其中一群。另一個平面則與其他平面屬於不同群。

類型三: $P_{i,j,k}$，其中相交的三個平面F_i、F_j、F_k恰好同屬於E_0、E_1和E_2中的其中一群。

性質 6.4.3. $R_{3^2}^3$，類型一的交點標號方法為，交點$V(E_{0,k},E_{1,(k+i)mod3},E_{2,(k+j)mod3})$標上$3i+j+1$，$i=\{0,1,2\},j=\{0,1,2\},k=\{0,1,2\}$。

[證明] 當$(i,j,k)=(0,0,k)$時，交點$V(E_{0,k},E_{1,k},E_{2,k})$被標上號碼 1，$k=\{0,1,2\}$，如圖 6.4.4.。當$(i,j,k)=(0,1,k)$時，交點$V(E_{0,k},E_{1,k},E_{2,(k+1)mod3})$被標上號碼 2，$k=\{0,1,2\}$。依此類推，所有類型一的交點標號方法如圖 6.4.5.，總共對 27 個交點用了 9 個標號。

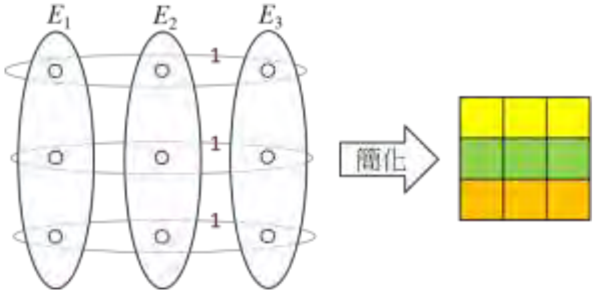


圖 6.4.4.

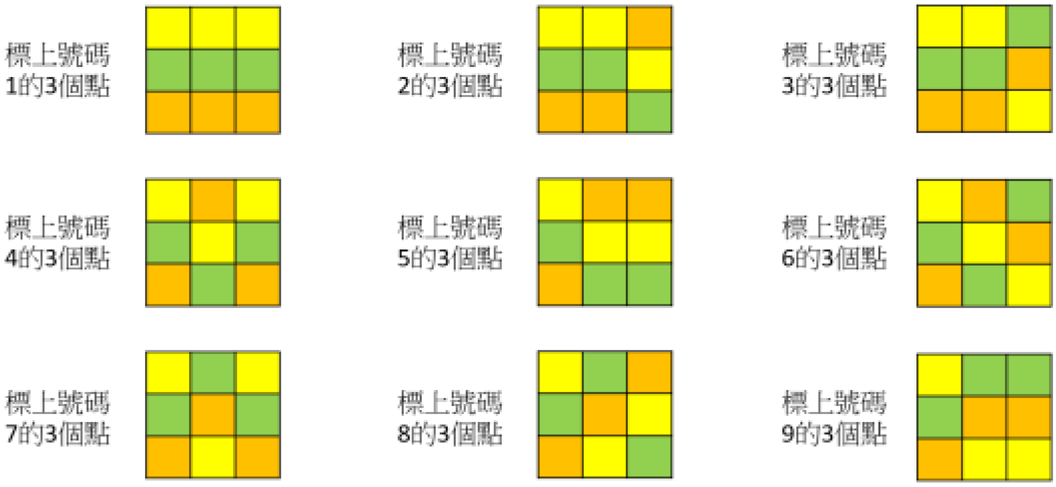


圖 6.4.5.

Q.E.D.

性質 6.4.6. $R_{3^2}^3$，類型二的交點標號方法為，交點
$V(E_{k,(i+k)mod3}, E_{k,(i+k+1)mod3}, E_{(k+1)mod3,(i+k)mod3})$標上$i+10$；
$V(E_{k,(i-k)mod3}, E_{k,(i-k+1)mod3}, E_{(k+1)mod3,(i-k+1)mod3})$標上$i+13$；
$V(E_{k,i}, E_{k,(i+1)mod3}, E_{(k+1)mod3,(i+2)mod3})$標上$i+16$；
$V(E_{(0-k)mod3,(i+k)mod3}, E_{(0-k)mod3,(i+k+1)mod3}, E_{(2-k)mod3,(i+k)mod3})$標上$i+19$；
$V(E_{(0-k)mod3,(i-k)mod3}, E_{(0-k)mod3,(i-k+1)mod3}, E_{(2-k)mod3,(i-k+1)mod3})$標上$i+22$；
$V(E_{k,i}, E_{k,(i+1)mod3}, E_{(2+k)mod3,(i+2)mod3})$標上$i+25$，
$i=\{0,1,2\}, k=\{0,1,2\}$。

[證明] 當$(i,k)=(0,0)$時，交點$V(E_{0,0},E_{0,1},E_{1,0})$、$V(E_{0,0},E_{0,1},E_{1,1})$、$V(E_{0,0},E_{0,1},E_{1,2})$、$V(E_{0,0},E_{0,1},E_{2,0})$、$V(E_{0,0},E_{0,1},E_{2,1})$、$V(E_{0,0},E_{0,1},E_{2,2})$分別被標上 10、13、16、19、22、25，如圖 6.4.7.。當$(i,k)=(1,0)$時，交點$V(E_{0,1},E_{0,2},E_{1,1})$、$V(E_{0,1},E_{0,2},E_{1,2})$、$V(E_{0,1},E_{0,2},E_{1,0})$、$V(E_{0,1},E_{0,2},E_{2,1})$、$V(E_{0,1},E_{0,2},E_{2,2})$、$V(E_{0,1},E_{0,2},E_{2,0})$分別被標上 11、14、17、20、23、26，如圖 6.4.8.。依此類推，所有類型二的交點標號方法如圖 6.4.9.，總共對 54 個交點用了 18 個標號。

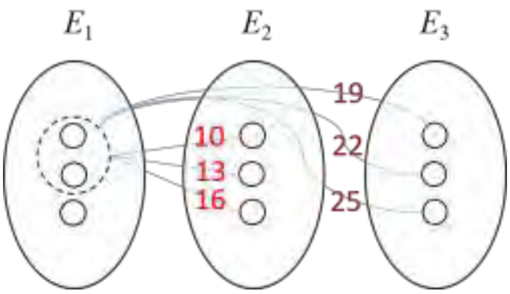


圖 6.4.7.

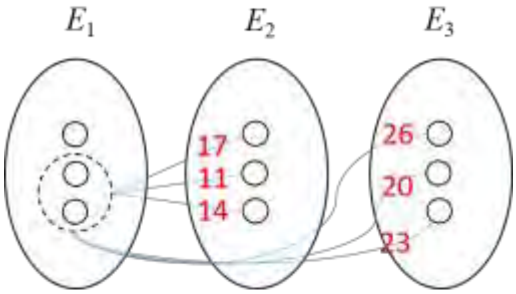


圖 6.4.8.

圖 6.4.9.

Q.E.D.

性質 6.4.10. $R^3_{3^2}$，類型三的交點標號方法為，交點$V(E_{k,0},E_{k,1},E_{k,2})$標上28，$k=\{0,1,2\}$。

[證明] 因為$R^3_{3^2}$只有 9 個平面，平分成三群後每群內恰好只有 3 個平面，並形成一個類型三交點。因此對每個類型三的交點標上 28，總共對 3 個交點用了 1 個標號。

Q.E.D.

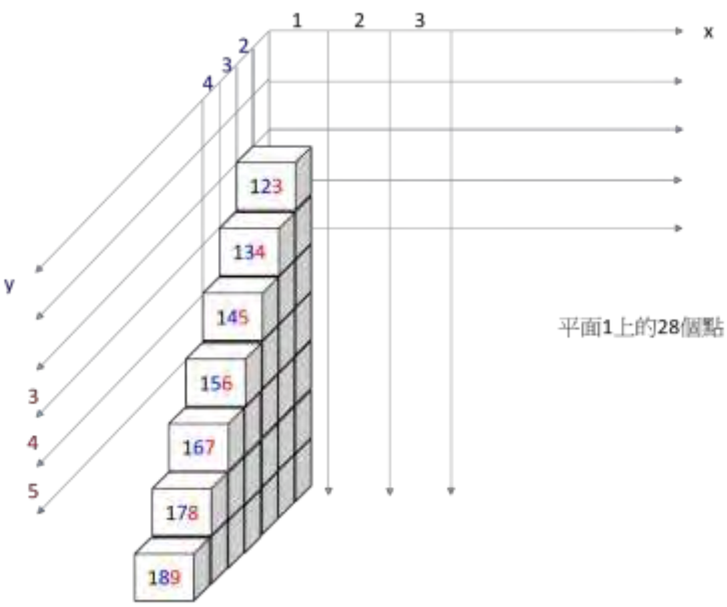
性質 6.4.11. $R^3_{3^2}$，透過性質 6.4.3.、性質 6.4.6.和性質 6.4.10.的標號方法，一個號碼在每個平面只會出現一次。

[證明] 透過圖 6.4.5.和圖 6.4.9.可得知，被標成相同號碼的三個交點，其相交的平面都彼此互斥。因此，一個號碼在每個平面只會出現一次。

Q.E.D.

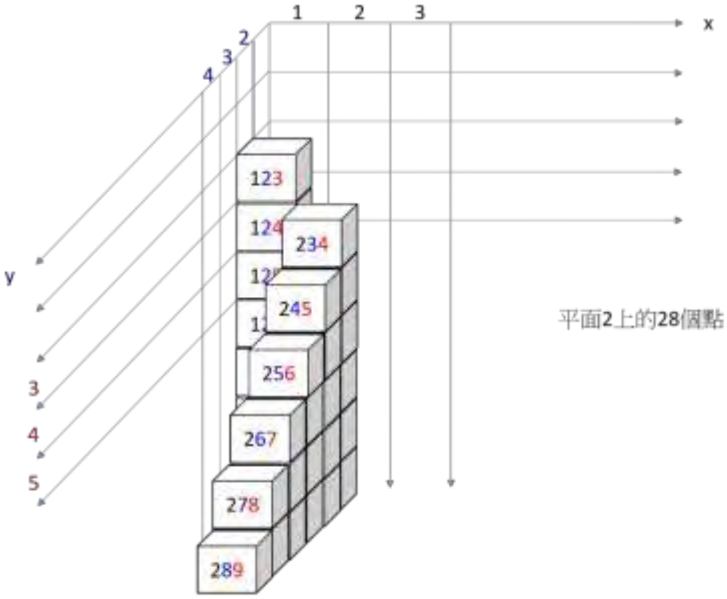
事實 6.4.12. $R^3_{3^2}$，透過性質 6.4.3.、性質 6.4.6.和性質 6.4.10.的標號方法，每一個交點只會被標號一次。

[說明] 我們將上面標號方法所得到交點標號填入三維宮格中，以驗證恰好每一個交點只會被標號一次。為表達方便，我們將平面$E_{i,j}$記作平面$3i + j + 1$。結果如圖 6.4.13.、圖 6.4.14.、圖 6.4.15.、圖 6.4.16.、圖 6.4.17.、圖 6.4.18.、圖 6.4.19.、圖 6.4.20.、圖 6.4.21.。



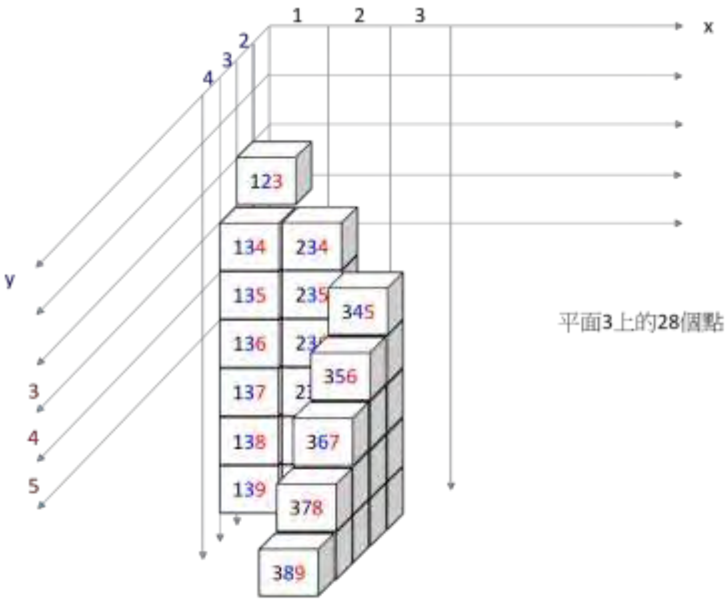
交點	標號	交點	標號
123	28	146	23
124	10	147	1
125	13	148	2
126	16	149	3
127	19	156	26
128	22	157	4
129	25	158	5
134	15	159	6
135	18	167	7
136	12	168	8
137	24	169	9
138	27	178	11
139	21	179	14
145	20	189	17

圖 6.4.13.



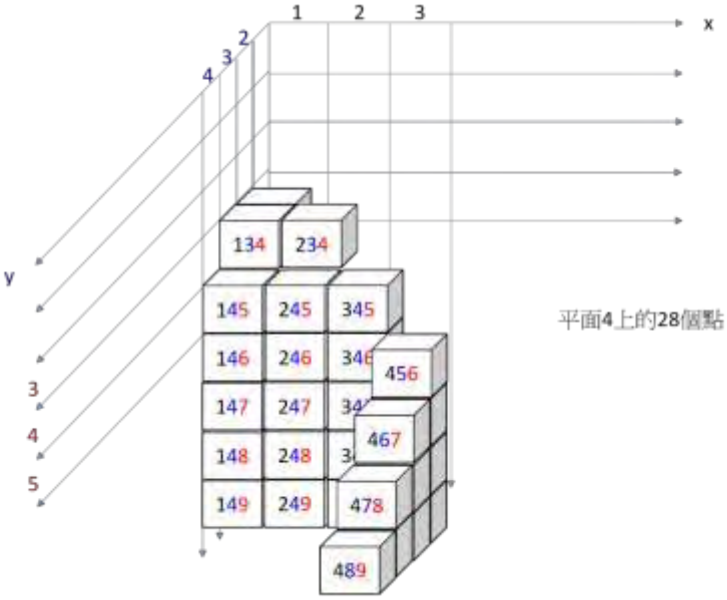
交點	標號	交點	標號
123	28	246	27
124	10	247	9
125	13	248	7
126	16	249	8
127	19	256	21
128	22	257	3
129	25	258	1
234	17	259	2
235	11	267	6
236	14	268	4
237	26	269	5
238	20	278	15
239	23	279	18
245	24	289	12

圖 6.4.14.



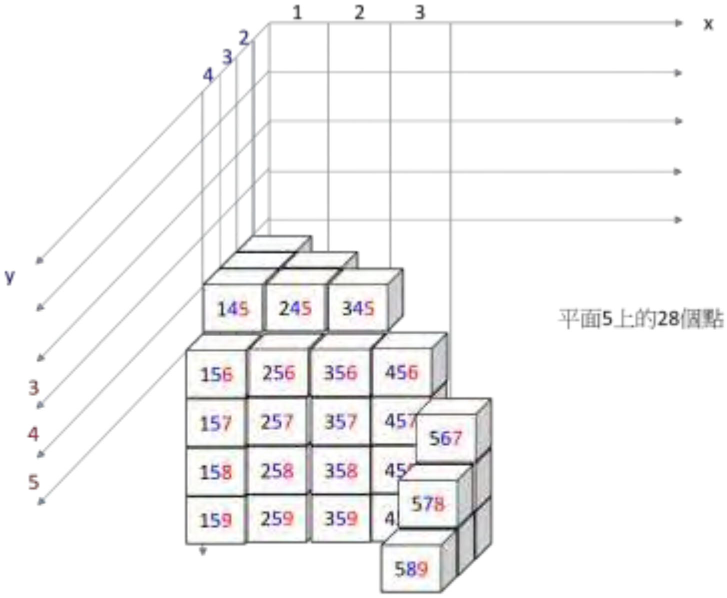
交點	標號	交點	標號
123	28	346	19
134	15	347	5
135	18	348	6
136	12	349	4
137	24	356	22
138	27	357	8
139	21	358	9
234	17	359	7
235	11	367	2
236	14	368	3
237	26	369	1
238	20	378	16
239	23	379	10
345	25	389	13

圖 6.4.15.



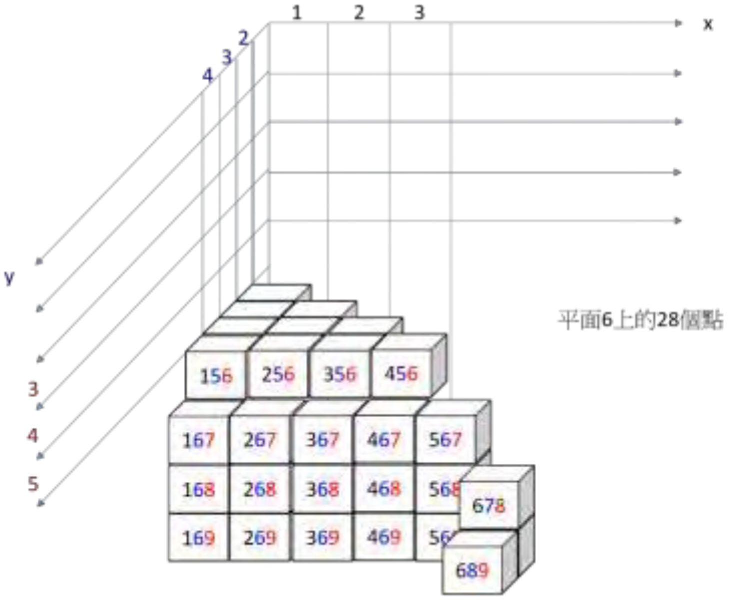
交點	標號	交點	標號
124	10	346	19
134	15	347	5
145	20	348	6
146	23	349	4
147	1	456	28
148	2	457	12
149	3	458	14
234	17	459	16
245	24	467	13
246	27	468	18
247	9	469	11
248	7	478	21
249	8	479	22
345	25	489	26

圖 6.4.16.



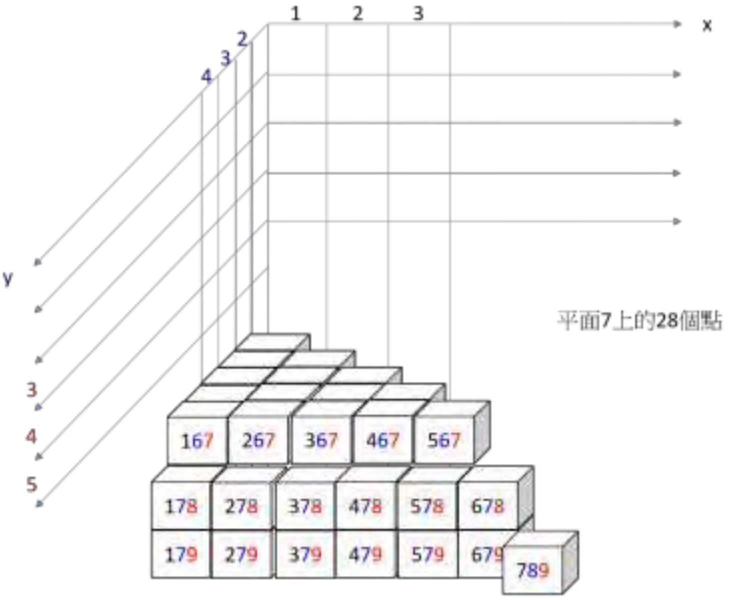
交點	標號	交點	標號
125	13	356	22
135	18	357	8
145	20	358	9
156	26	359	7
157	4	456	28
158	5	457	12
159	6	458	14
235	11	459	16
245	24	567	17
256	21	568	10
257	3	569	15
258	1	578	23
259	2	579	27
345	25	589	19

圖 6.4.17.



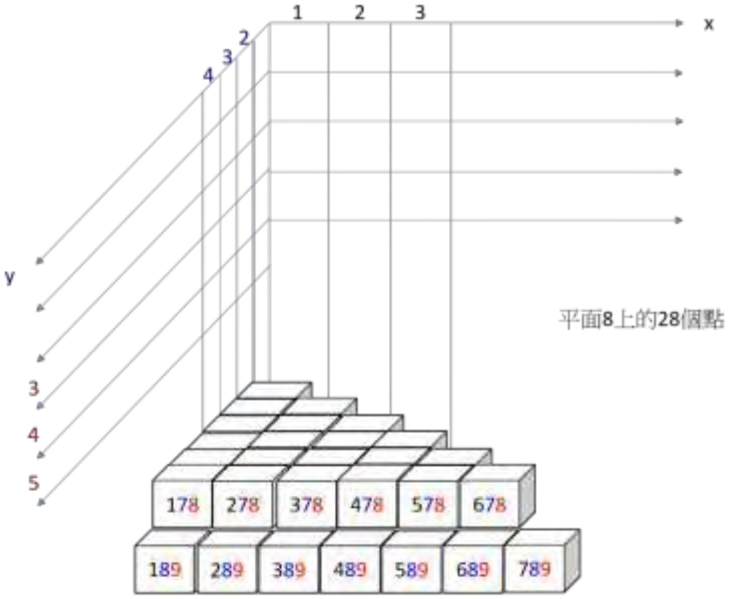
交點	標號	交點	標號
126	16	356	22
136	12	367	2
146	23	368	3
156	26	369	1
167	7	456	28
168	8	467	13
169	9	468	18
236	14	469	11
246	27	567	17
256	21	568	10
267	6	569	15
268	4	678	25
269	5	679	20
346	19	689	24

圖 6.4.18.



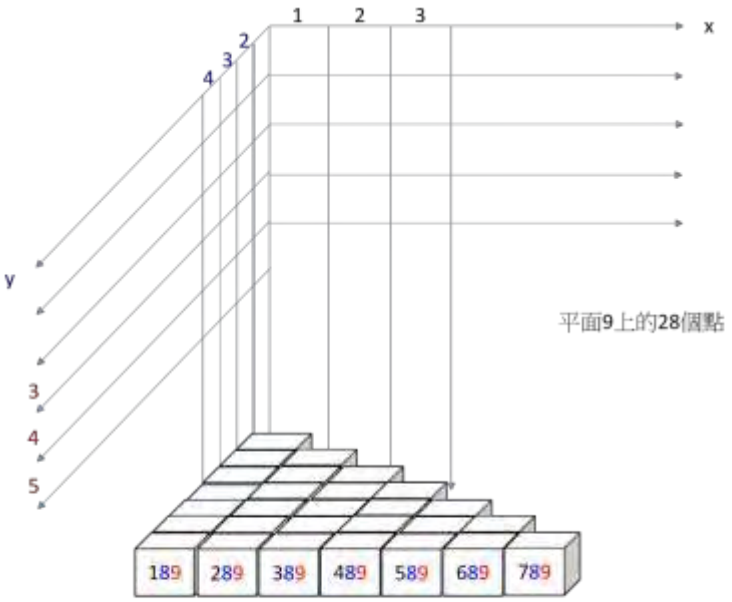
交點	標號	交點	標號
127	19	357	8
137	24	367	2
147	1	378	16
157	4	379	10
167	7	457	12
178	11	467	13
179	14	478	21
237	26	479	22
247	9	567	17
257	3	578	23
267	6	579	27
278	15	678	25
279	18	679	20
347	5	789	28

圖 6.4.19.



交點	標號	交點	標號
128	22	358	9
138	27	368	3
148	2	378	16
158	5	389	13
168	8	458	14
178	11	468	18
189	17	478	21
238	20	489	26
248	7	568	10
258	1	578	23
268	4	589	19
278	15	678	25
289	12	689	24
348	6	789	28

圖 6.4.20.



交點	標號	交點	標號
129	25	359	7
139	21	369	1
149	3	379	10
159	6	389	13
169	9	459	16
179	14	469	11
189	17	479	22
239	23	489	26
249	8	569	15
259	2	579	27
269	5	589	19
279	18	679	20
289	12	689	24
349	4	789	28

圖 6.4.21.

Q.E.D.

性質 6.4.14. $R^3_{3^3}$，可以利用三分圖的方法，以性質 6.4.3.、性質 6.4.6.和性質 6.4.10.的$R^3_{3^2}$標號方法為基礎，將$R^3_{3^3}$標好標滿。

性質 6.4.15. $R^3_{3^n}$，可以利用三分圖的方法，以$R^3_{3^{(n-1)}}$標號方法為基礎，將$R^3_{3^n}$標好標滿。

柒、Banayai`s theorem

一、四維度空間

題目 7.1.1. 有n個立方體，每兩個相交成一個平面、每三個相交成一條直線、每四個相交成一個交點、每五個不存在共點，若我們在點上標上連續的自然數由1到C_3^{n-1}，使得每個平面上數字不重複，則稱為標好標滿。

[說明] 任意四個平面相交出一個交點，因此總交點數量是$C_4^n = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)}{24}$，將此數乘以4後再平分給$n$個立方體，就是$\frac{(n-1)\times(n-2)\times(n-3)}{6} = C_3^{n-1}$。

Q.E.D.

性質 7.1.2. *Complete 4-uniform hypergraph* 相當於標好標滿的R_n^4，因此R_{4k}^4可以標好標滿。

[證明] *Complete 3-uniform hypergraph* 中，每個點相當於標好標滿R_n^4中的一個平面、每條 *hyperedge* 相當於標好標滿R_n^4中的一個交點。如此，每一個 *1-factor* 為被標上相同數字的點，而總共有C_3^{n-1}個數字也就是C_{k-1}^{n-1}個 *1-factor*。

Q.E.D.

二、多維度空間

題目 7.2.1. 有n個$k-1$度超立方體，每k個相交成一個交點、每$k+1$個不存在共點，若我們在點上標上連續的自然數由1到C_{k-1}^{n-1}，使得每個k度超立方體上數字不重複，則稱為標好標滿。

[說明] 任意k個平面相交出一個交點，因此總交點數量是$C_k^n = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\ldots\times(n-k+1)}{k!}$，將此數乘以$k$後再平分給$n$個超立方體，就是$\frac{(n-1)\times(n-2)\times\ldots\ldots\times(n-k+1)}{(k-1)!} = C_{k-1}^{n-1}$。

Q.E.D.

性質 7.2.2. *Complete k-uniform hypergraph* 相當於標好標滿的R_n^k，因此$R_{k\times n}^k$可以標好標滿。

[證明] *Complete k-uniform hypergraph* 中，每個點相當於標好標滿R_n^k中的一個k度超立方體、每條 *hyperedge* 相當於標好標滿R_n^k中的一個交點。如此，每一個 *1-factor* 為被標上相同數字的點，而總共有C_{k-1}^{n-1}個數字也就是C_{k-1}^{n-1}個 *1-factor*。

Q.E.D.

捌、結論

我發現: (一)R_{2k}^2可以用拉丁方陣標好標滿。

$R_{2^n}^2$可以用二分圖標好標滿。

R_{2k+1}^2無法標好標滿。

(二)延伸一的針對每條直線標好標滿，R_3^3可以標好標滿。

延伸二的針對每個平面標好標滿，R_{3k}^3可以用Banayai`s theorem標好標滿。

延伸二的針對每個平面標好標滿，$R_{3^n}^3$可以用三分圖標好標滿。

(三)$R_{k\times n}^k$可以用Banayai`s theorem標好標滿。

玖、參考資料

[1]第 56 屆全國科展國小數學，【神算】。台灣科學教育館網站，2016 年 7 月。

[2]第 57 屆全國科展國小數學，【一直乘以 2】。台灣科學教育館網站，2017 年 7 月。

[3]第 58 屆全國科展國小數學，【狡兔八窟】。台灣科學教育館網站，2018 年 7 月。

[4]游森棚，科學研習月刊第 57 卷第 5 期第 58 頁，台灣科學教育館網站，2018 年 5 月。

[5]維基百科，幾何原本，第五公設， 2018 年 12 月 2 日下載。
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B9%B3%E8%A1%8C%E5%85%AC%E8%A8%AD

[6]維基百科，排序演算法，2019 年 1 月 20 日下載。
https://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8E%92%E5%BA%8F%E7%AE%97%E6%B3%95

[7]維基百科，Graph factorization，2019 年 6 月 2 日下載。
https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_factorization

[8]維基百科，Hypergraph，2019 年 6 月 2 日下載。
https://en.wikipedia.org/wiki/Hypergraph

[9]維基百科，Complete graph，2019 年 6 月 2 日下載。
https://en.wikipedia.org/wiki/Complete_graph

[10]維基百科，Banayai`s theorem，2019 年 6 月 2 日下載。
https://en.wikipedia.org/wiki/Baranyai%27s_theorem

[11]Narsingh Deo and Paulius Micikevicius，On One-factorization of Complete 3-Uniform。
Hypergraphshttps://pdfs.semanticscholar.org/7b3c/a95518252fe89e3346345e1192c884aceedf.pdf

【評語】080401

本作品在探討平面上的 n 條直線，在任兩直線不平行，任三直線不共點的情況下，要在每個交點上標上一個介於 1 到 n-1 的數字，使任意一條直線上的交點恰巧出現 1~n-1 的標號各一次的「標好標滿」問題。作者提出了有別於其他文獻的作法，使用了對稱的拉丁方陣，成功地給了這個問題一個可行的標號方法。此外，作者也試圖將這個問題推廣到三度空間平面交點的標號問題，並對特殊情況給了部分的解答。

整體而言，作者以簡潔的符號、清晰的圖示，清楚而具體的呈現了整個研究內容，對小學生而言，是一個很好的研究經驗。

作品海報

摘要

本研究探討平面上n條直線，每兩條相交出一個交點，但不三線共點，並在每個交點上標上數字1至$n-1$，使任何一條直線上恰好出現1至$n-1$各一次，是否有解？得到奇數條直線無法、偶數條直線可以。

推廣至三維空間，探討n個平面，每三個相交出一個交點，但不四面共點，發現到三維空間有兩種推廣方式：

- 在每個交點上標上數字，使每條直線上的數字都不重複
- 在每個交點上標上數字，使每個平面上的數字都不重複

在此兩種情況下，可見當有三個平面時皆可以。

探討第二種推廣後發現在六個平面時亦可以給出構造。而後又發現其等價於$Baranyai's\ theorem$故得到平面個數為三的倍數皆可以，再根據文獻構造出三維度空間9個平面的一種方法。

01 前言

題目、符號與定義

題目1.1. 平面上 n 條直線，每兩條相交出一個交點，但不三線共點，在每個交點上標上數字1至 $n-1$ ，使任何一條直線上恰好出現1至$n-1$各一次。

符號1.2. P_n: 空間中的第n個點。$P_{m,n}$: L_m和L_n的交點。$P_{i,j,k}$: F_i和F_j和F_k的交點。

符號1.3. L_n: 空間中的第n條直線。$L_{m,n}$: F_m和F_n的交線。

符號1.4. R_n^2: 2維空間，n條直線兩兩相交，且不三線共點。R_n^3: 3維度空間，有n個平面，每三個相交出一個交點但不四面共點。

定義1.5. 將R_n^2的每個交點給予標號。若每條直線，均有1至$n-1$的連續自然數，則稱為標好標滿。

定義1.6. 將R_n^3的每個交點給予標號。若每條直線，均有1至$n-2$的連續自然數，則稱為在直線上標好標滿。

定義1.7. 將R_n^3的每個交點給予標號。若每個平面，均有1至$C_2^{n-1}n-2$的連續自然數，則稱為在平面上標好標滿。

符號1.8. F_n: 空間中的第n個平面。

研究目的及架構

研究目的1.9. 將R_n^2標好標滿。將R_n^3在直線上標好標滿。將R_n^3在平面上標好標滿。
如圖1.10. ，為本研究的流程圖。

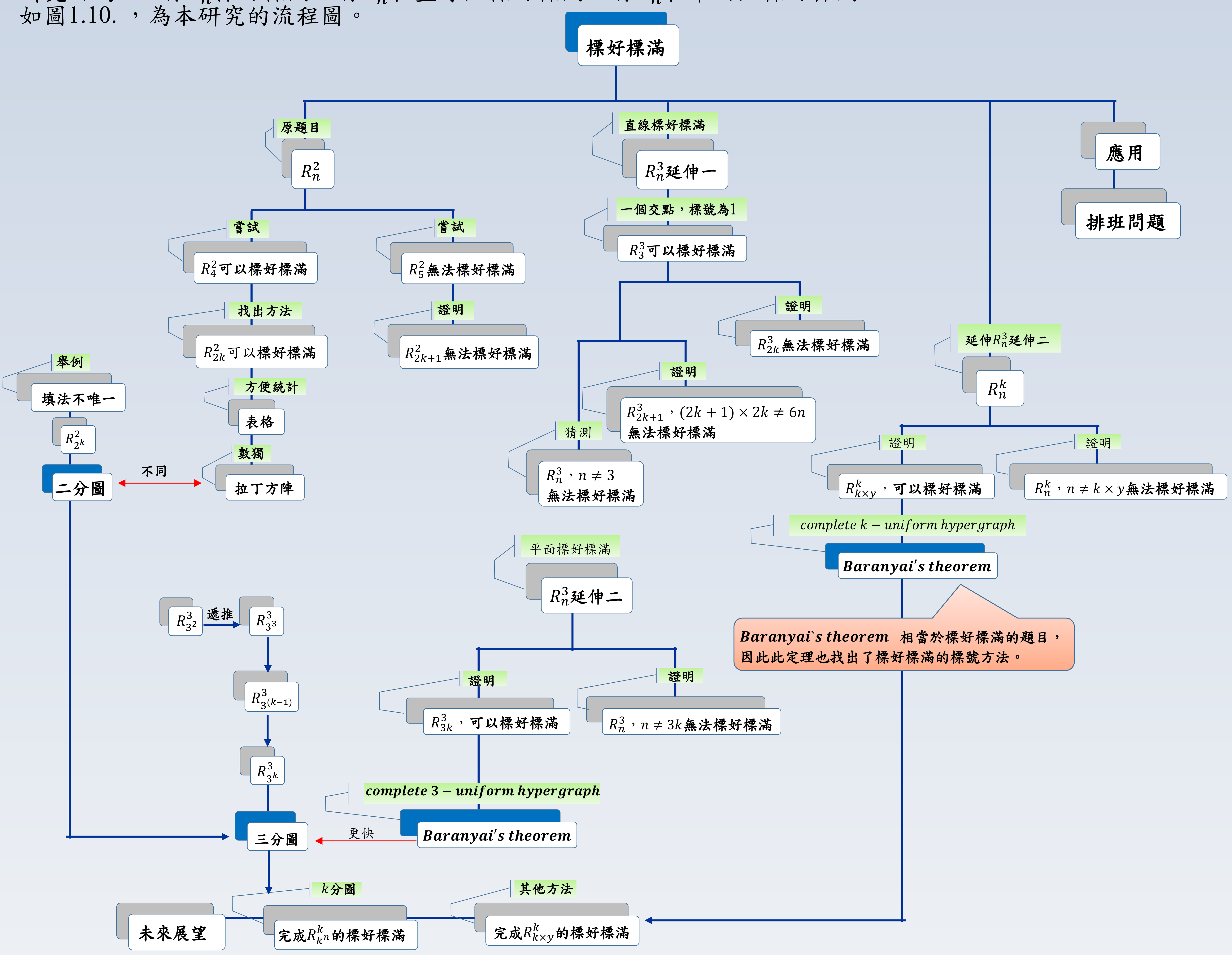


圖1.10.

02 二維度空間

奇數條直線

性質2.1. 平面上奇數條線無法標好標滿，如示意圖3.2.。

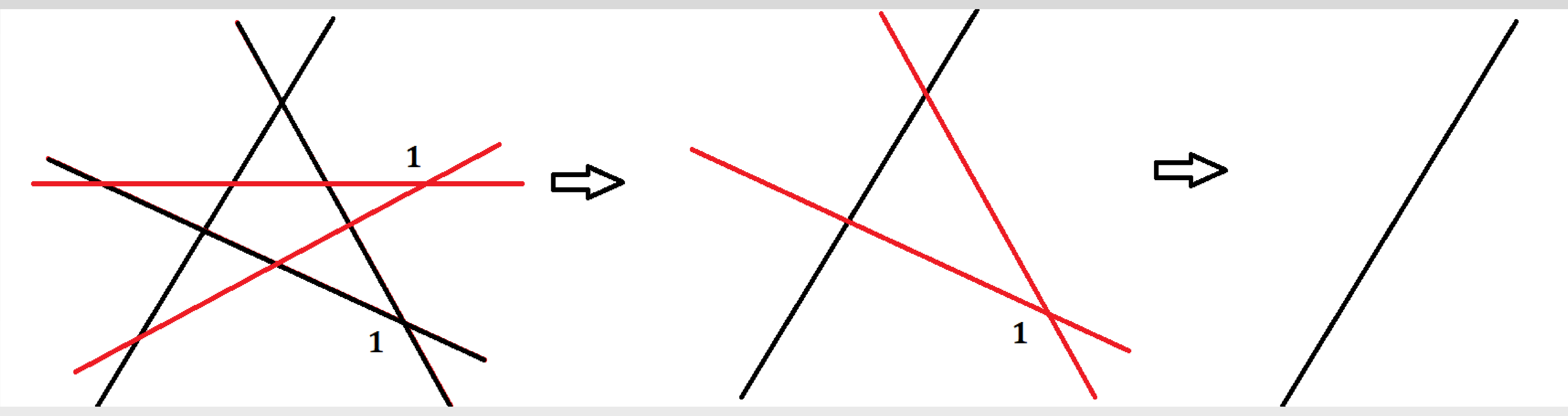


圖2.2.

偶數條直線

性質2. 3. $n \times n$拉丁方陣宮格(x, y)中的數字為$[(x+y-2) mod\ n]+1$，如圖2.4.為偶數8×8示意圖。

事實2.5. 標好標滿的表格畫法為，先列出$n \times n$的表格並標上$L_1 \sim L_n$，如圖3.6.。因同一條直線不會和自己產生交點，因此將主對角線上的宮格鋪上灰色網底，如圖3.7.。L_a和L_b的交點與L_b和L_a的交點一樣，因此$(L_a，L_b)$和$(L_b，L_a)$需填入相同數字，只要讓表格每行每列數字不重複即可標好標滿。

$$\begin{bmatrix} & L_1 & \cdots & L_n \\ L_1 & & & \\ \vdots & & & \\ L_n & & & \end{bmatrix}$$

圖2.6.

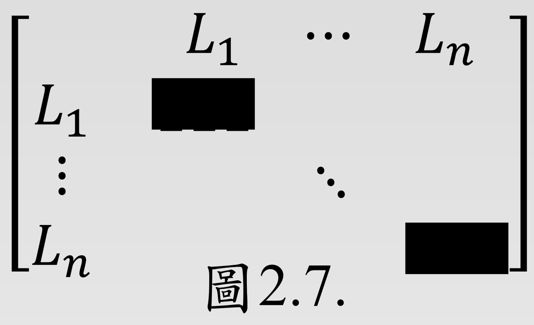


圖2.7.

$$\begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 8 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

$(8,1)=(8+1-2) mod\ 8+1=8$
$(7,2)=(7+2-2) mod\ 8+1=8$
$(6,3)=(6+3-2) mod\ 8+1=8$
$(5,4)=(5+4-2) mod\ 8+1=8$
$(4,5)=(4+5-2) mod\ 8+1=8$
$(3,6)=(3+6-2) mod\ 8+1=8$
$(2,7)=(2+7-2) mod\ 8+1=8$
$(1,8)=(1+8-2) mod\ 8+1=8$

圖2.4.

事實2. 8. R_n^2的標法為，先填入$(n-1) \times (n-1)$的拉丁方陣，使每行每列數字都不重複，再將主對角線上(L_r, L_r)的數移至(L_r, L_n)及(L_n, L_r)。則主對角線上的數字都會被移至同一條直線，因此必須證明他們不會重複。

性質2.9. 利用反證法，假設$(2k-1) \times (2k-1)$的拉丁陣主對角線上有兩個數$(x_1，x_1)$和$(x_2，x_2)$重複。則兩數相減的值$|(2 \times x_1) -$

二分圖

性質2. 10. $n=2^k$條直線$\{L_1 \sim L_{2^k}\}$，平分成$l_1=\{L_1 \sim L_{2^{k-1}}\}$和$l_2=\{L_{2^{k-1}+1} \sim L_{2^k}\}$兩群，則$l_1$中的任一直線$L_i$與$l_2$中的任一直線$L_j$產生的交點$P_{i,j}$可以用下列方式標號。設$i=0 \sim 2^{k-1}-1$，將所有的交點$P_{1+i,\, 2^{k-1}+1+i}$都標上"1"；將所有的交點$P_{1+i,\, 2^{k-1}+1+[(i+1) mod\ 2^{k-1}]}$都標上"2"；將所有的交點$P_{1+i,\, 2^{k-1}+1+[(i+2) mod\ 2^{k-1}]}$都標上"3"；……；將所有的交點$P_{1+i,\, 2^{k-1}+1+[(i+2^{k-1}-1) mod\ 2^{k-1}]}$都標上"$2^{k-1}$"，如圖3.11.、圖3.12.、圖3.13.。

由上述標號方法可知，l_1中的任何一條直線L_i，其與l_2中任何一條直線的交點標號皆不相同。以L_1為例子，其與l_2中所有直線的交點標號如圖2.14.。同樣的l_2中的任何一條直線L_j，其與l_1中任何一條直線的交點標號也皆不相同。以$L_{2^{k-1}+1}$為例子，其與l_1中所有直線的交點標號如圖2.15.。

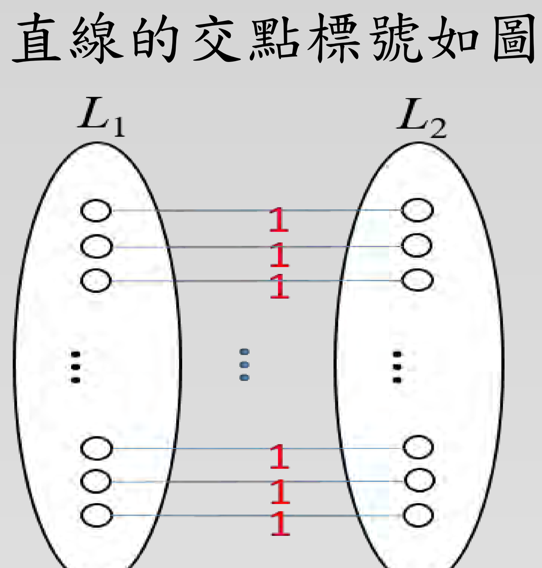


圖2.11.

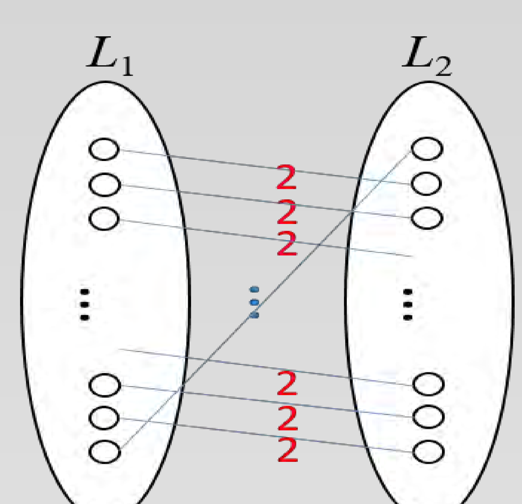


圖2.12.

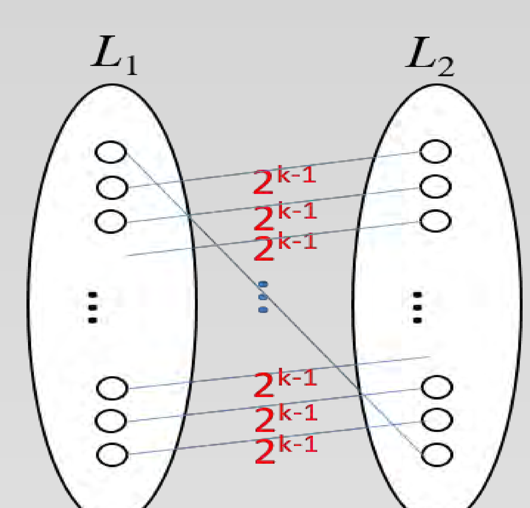


圖2.13.

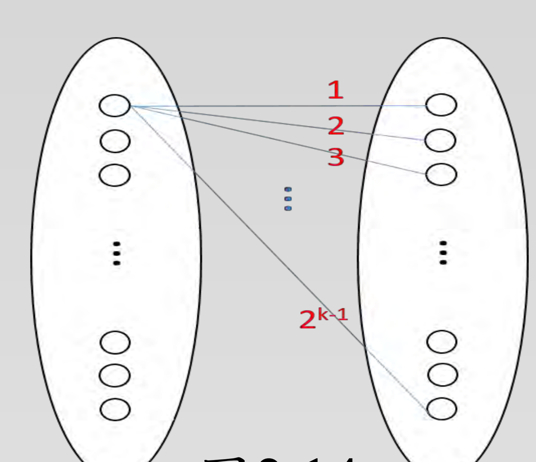


圖2.14.

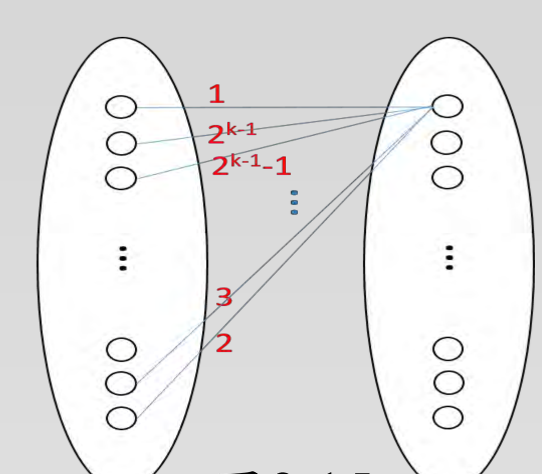


圖2.15.

性質2.16. $n=2^k$條直線$\{l_1 \sim l_{2^k}\}$，平分成L_1和L_2兩群並完成標號後，$L_1=\{l_1 \sim l_{2^{k-1}}\}$的$2^{k-1}$條直線和$L_2=\{l_{2^{k-1}+1} \sim l_{2^k}\}2^{k-1}$條直線可繼續依性質2.10.各自平分成$L_{1,1}$、$L_{1,2}$和$L_{2,1}$、$L_{2,2}$兩群並完成標號。

性質2.17. 重複性質2.16. 直到無法再分群為止，如此總共對$\frac{2^k \times (2^k-1)}{2}=\frac{n \times (n-1)}{2}$個交點完成標號，共標了$2^k-1=n-1$個號碼。

性質2.18. 利用二分圖找到的標好標滿的標號方法不同於利用拉丁方陣找到的標好標滿的標號方法，如圖2.19.、圖2.20.和圖2.21.。

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	1
2	2	3	4	5	6	7	1	3
3	3	4	5	6	7	1	2	5
4	4	5	6	7	1	2	3	7
5	5	6	7	1	2	3	4	2
6	6	7	1	2	3	4	5	4
7	7	1	2	3	4	5	6	6
8	1	3	5	7	2	4	6	

圖2.19.

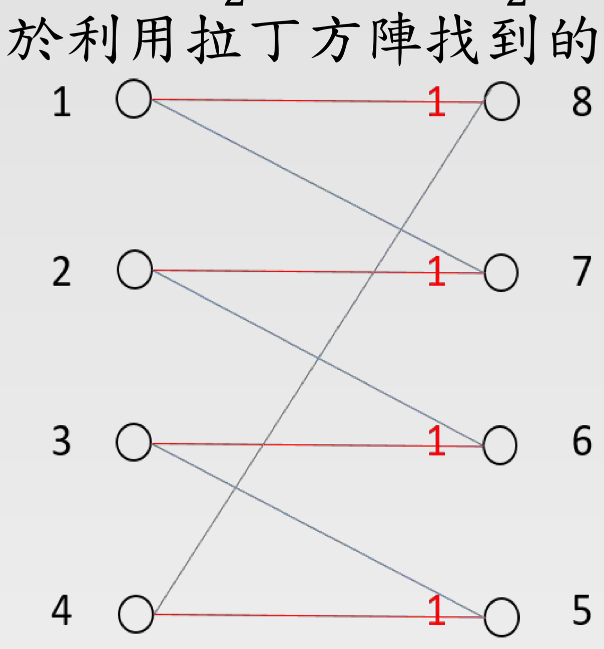


圖2.20.

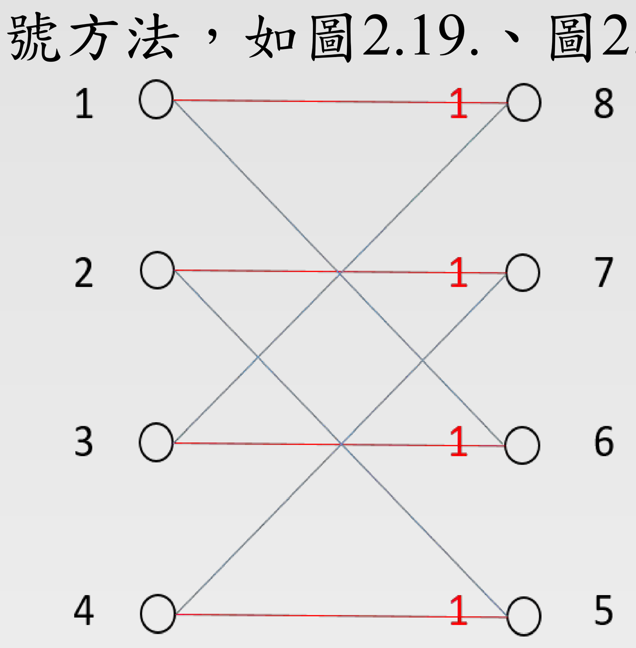


圖2.21.

03 三維度空間

性質3.1. *Baranyai's theorem*證明出一個*complete k-uniform hypergraph*可以被拆成C_{k-1}^{n-1}個*1-factor*的條件為n可以整除k。此證明相當於此題目能標好標滿的條件為n可以整除3。

[證明] *Complete 3-uniform hypergraph*中，每個點相當於標好標滿R_n^3中的一個平面、每條*hyperedge*相當於標好標滿R_n^3中的一個交點。如此，每一個*1-factor*為被標上相同數字的點，而總共有C_2^{n-1}個數字也就是C_{k-1}^{n-1}個*1-factor*。 Q.E.D.

三分圖

事實3.2. 3^k個平面，平分成E_0、E_1和E_2三群。則交點可分為三種類型，

類型一: $P_{i,j,k}$，其中相交的三個平面F_i、F_j、F_k恰好分別屬於E_0、E_1和E_2。

類型二: $P_{i,j,k}$，其中相交的三個平面F_i、F_j、F_k中恰好有兩個屬於E_0、E_1、E_2中的其中一群。另一個平面則與其他平面屬於不同群。

類型三: $P_{i,j,k}$，其中相交的三個平面F_i、F_j、F_k恰好同屬於E_0、E_1和E_2中的其中一群。

性質3.3. $R_{3^2}^3$，類型一的交點標號方法為，交點$V(E_{0,k}, E_{1,(k+i) mod 3}, E_{2,(k+j) mod 3})$標上$3i+j+1$，$i=\{0,1,2\}, j=\{0,1,2\}, k=\{0,1,2\}$。

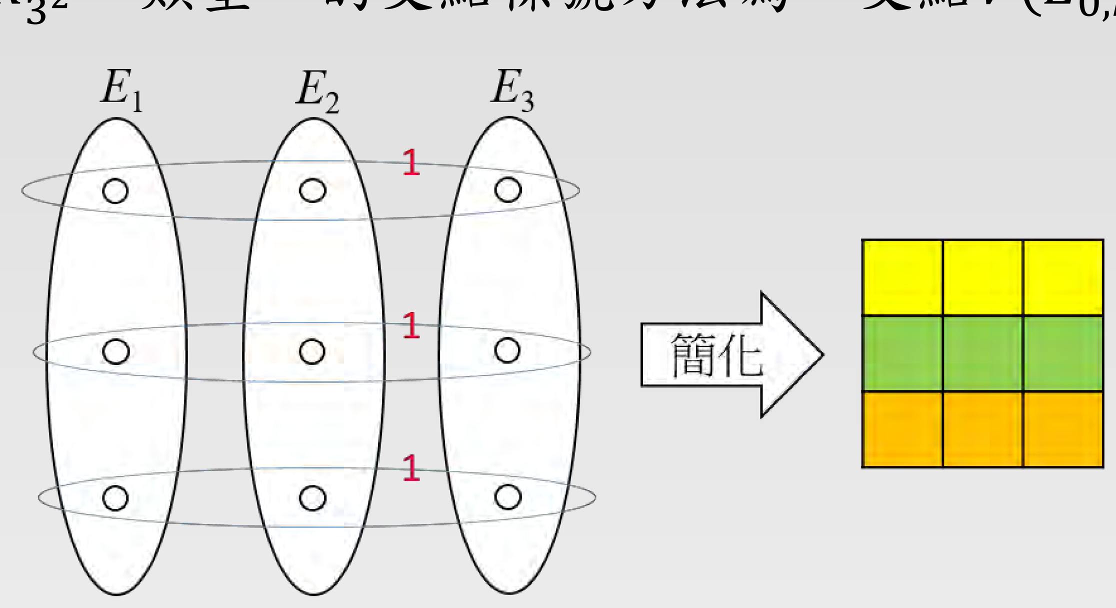


圖3.4.

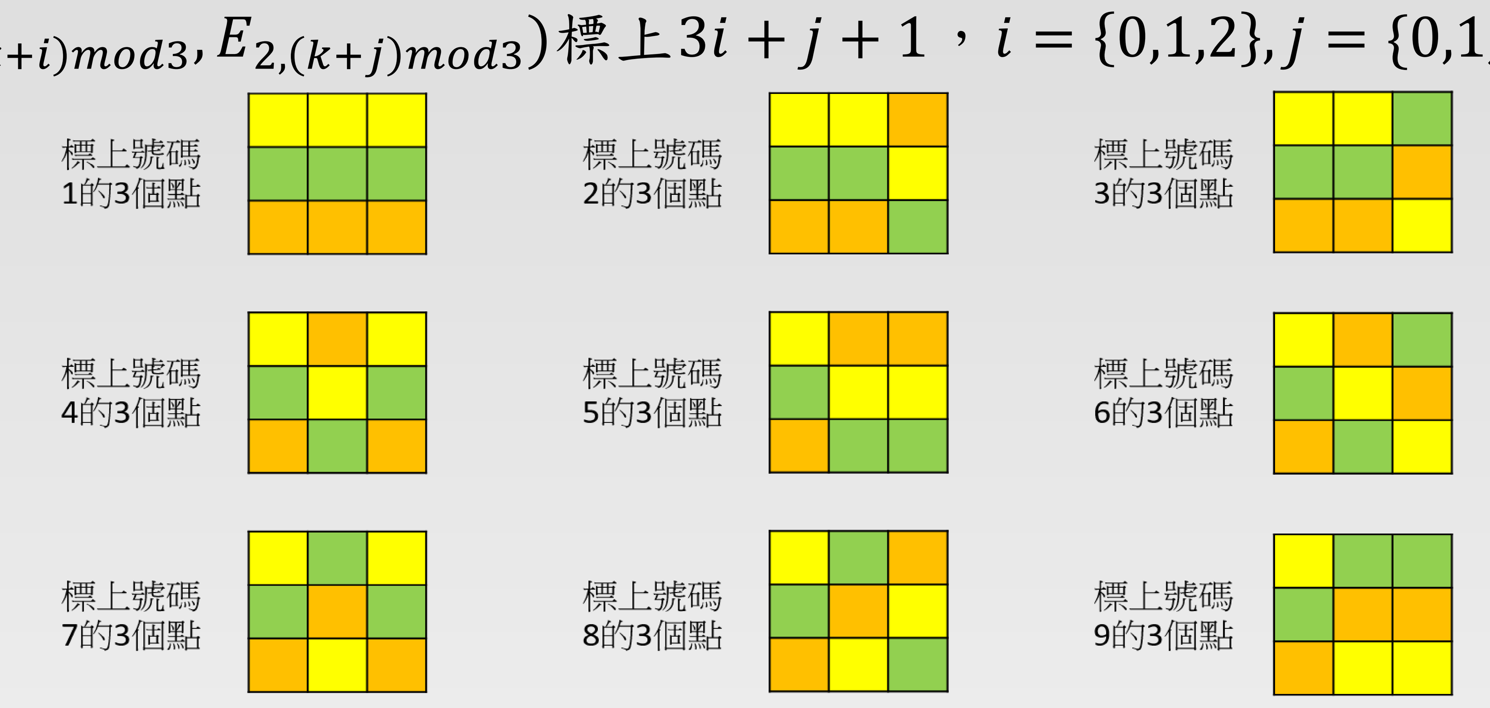


圖3.5.

Q.E.D.

性質3.6. R_{32}^3，類型二的交點標號方法為，交點
$V(E_{k,(i+k)mod3},E_{k,(i+k+1)mod3},E_{(k+1)mod3,(i+k)mod3})$標上$i+10$；
$V(E_{k,(i-k)mod3},E_{k,(i-k+1)mod3},E_{(k+1)mod3,(i-k+1)mod3})$標上$i+13$；
$V(E_{k,i},E_{k,(i+1)mod3},E_{(k+1)mod3,(i+2)mod3})$標上$i+16$；
$V(E_{(0-k)mod3,(i+k)mod3},E_{(0-k)mod3,(i+k+1)mod3},E_{(2-k)mod3,(i+k)mod3})$標上$i+19$；
$V(E_{(0-k)mod3,(i-k)mod3},E_{(0-k)mod3,(i-k+1)mod3},E_{(2-k)mod3,(i-k+1)mod3})$標上$i+22$；
$V(E_{k,i},E_{k,(i+1)mod3},E_{(2+k)mod3,(i+2)mod3})$標上$i+25$，
$i=\{0,1,2\},k=\{0,1,2\}$。

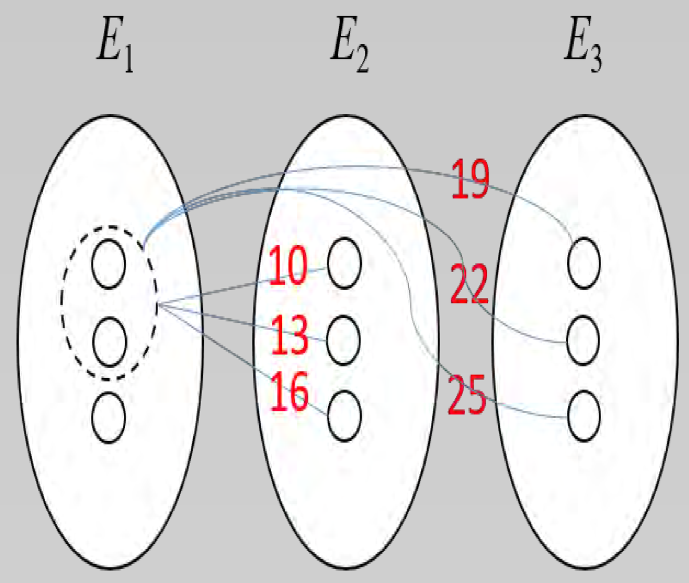


圖3.7.

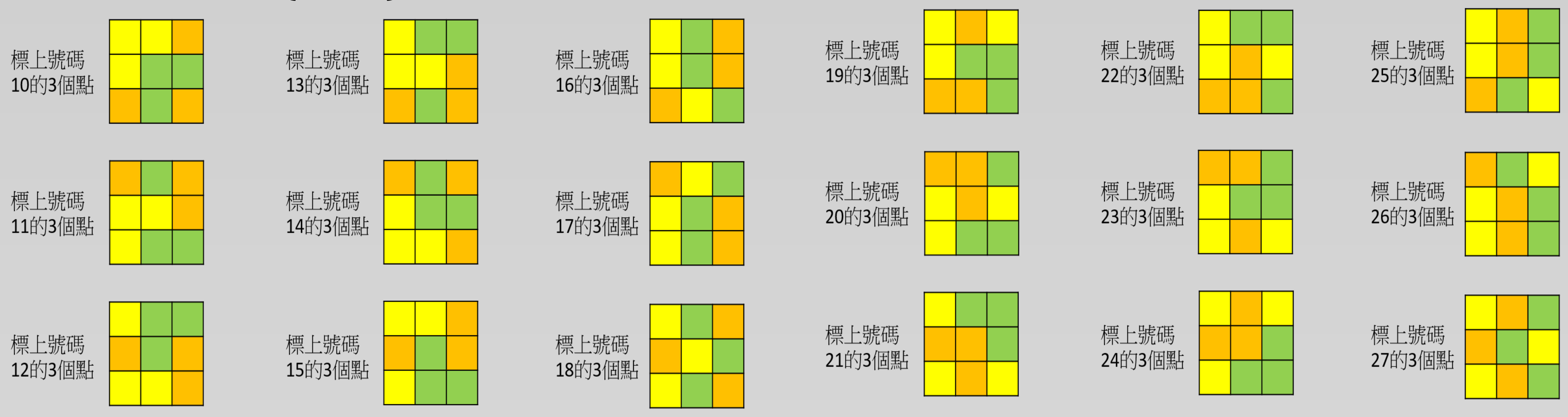


圖3.9.

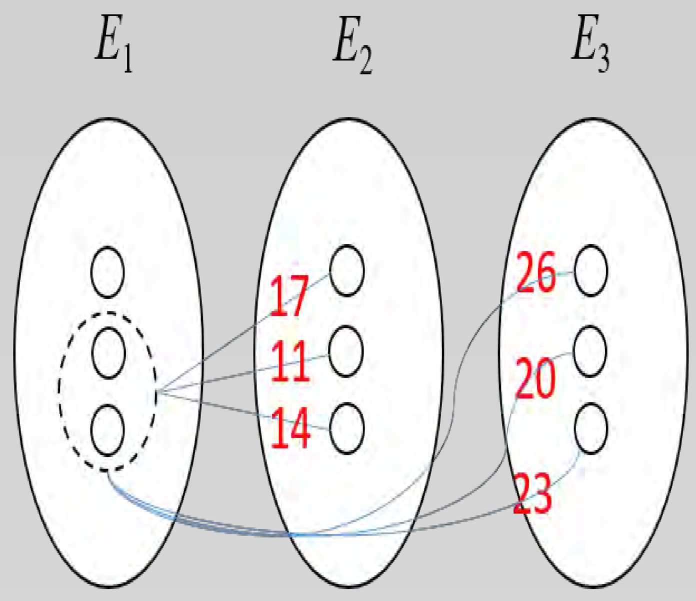


圖3.8.

性質3.10. R_{32}^3，類型三的交點標號方法為，交點$V(E_{k,0},E_{k,1},E_{k,2})$標上28，$k=\{0,1,2\}$。

事實3.11. R_{33}^3的標法可從R_{32}^3的標法遞推。從R_{32}^3類型一的9個標號、類型二的18個標號、類型三的1個標號，到R_{33}^3類型一的81個標號、類型二的216個標號、類型三的28個標號，我可以利用這點將R_{33}^3標好標滿。

事實3.12. R_{3k}^3的標法可從R_{3k-1}^3的標法遞推，因此可以把R_{3k}^3標好標滿。

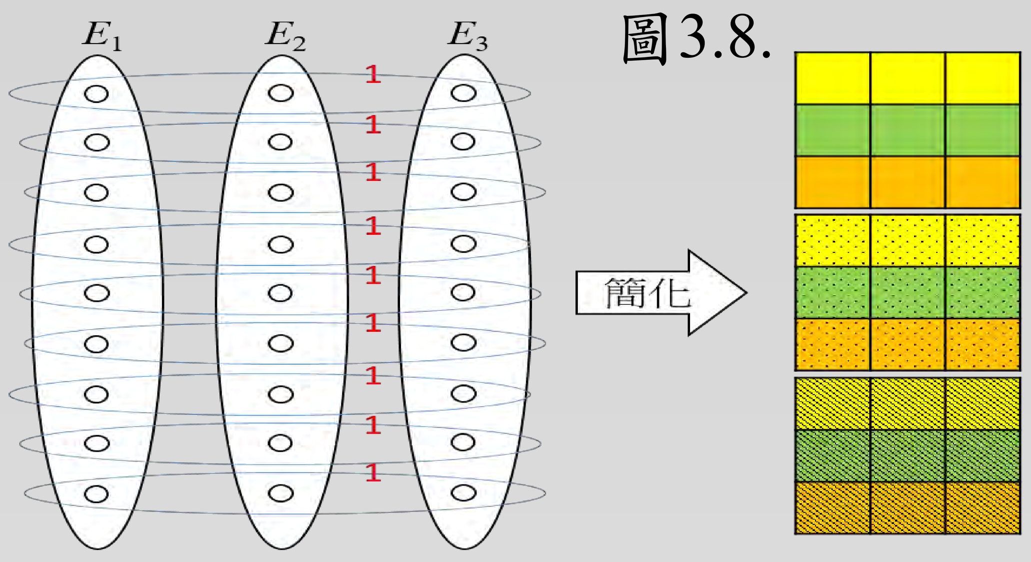


圖3.13.

性質3.14. R_{33}^3，類型一的交點標號方法為，交點$V(E_{0,k},E_{1,(k+i)mod9},E_{2,(k+j)mod9})$標上$9i+j+1$，$i=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\},j=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\},k=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$。

性質3.15. R_{33}^3，類型二的交點標號方法為，遞推R_{32}^3的標法，先將E_0、E_1、E_2各分成3等分，如圖6.4.19.。若有兩個平面都屬於E_0的第一等分，則剩下的那個平面可以是$E_{1,0}$、$E_{1,1}$、$E_{1,2}$、$E_{1,3}$、$E_{1,4}$、$E_{1,5}$、$E_{1,6}$、$E_{1,7}$、$E_{1,8}$、$E_{2,0}$、$E_{2,1}$、$E_{2,2}$、$E_{2,3}$、$E_{2,4}$、$E_{2,5}$、$E_{2,6}$、$E_{2,7}$、$E_{2,8}$，而E_0的第一等分內共有$C_2^3=3$種組合方式，因此總共是$18\times3=54$個標號。再加上若三個平面都屬於不同等分的話，則會有R_{32}^3類型二的18(個標號)$\times3\times3\times3=$ 486個交點、$\frac{18(\text{個標號})\times3\times3\times3}{3}=162$個標號，也就是162。因此，總共對648個點用了$54+162=216$個標號。

性質3.16. R_{33}^3，類型三的交點標號方法為，將E_0、E_1、E_2分別分成3等分。如此，這個結構也相當於R_{32}^3的結構。共用了28個標號。

平面的個數	交點的數量	交線的數量	類型一用掉的個數	類型二用掉的個數	類型三用掉的個數	Factors
3	1	3	1	0	0	1
9	84	36	9	18	1	28
27	2925	351	81	216	28	325
81	85320	3240	729	2106	325	3160
243	2362041	29403	6561	19440	3160	29161
729	64304604	265356	59049	176418	29161	264628
2187	1741001445	2390391	531441	1592136	264628	2388205
6561	47050068240	21520080	4782969	14342346	2388205	21513520
n	C_3^n	C_2^n	$\frac{n^2}{9}$	$\frac{n^2}{3}-n$	$\frac{9C_3^{\frac{n}{3}}}{n}$	$\frac{3C_3^n}{n}$

04 多維度空間

題目4.1. 有n個$k-1$度超立方體，每k個相交成一個交點、每$k+1$個不存在共點，若我們在點上標上連續的自然數由1到C_{k-1}^{n-1}，使得每個k度超立方體上數字不重複，則稱為標好標滿。

[說明] 任意k個平面相交出一個交點，因此總交點數量是$C_k^n=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\ldots\times(n-k+1)}{k!}$，將此數乘以$k$後再平分給$n$個超立方體，就是$\frac{(n-1)\times(n-2)\times\cdots\ldots\times(n-k+1)}{(k-1)!}=C_{k-1}^{n-1}$。

性質4.2. *Complete k-uniform hypergraph*相當於標好標滿的R_n^k，因此$R_{k\times n}^k$可以標好標滿。

[證明] *Complete k-uniform hypergraph*中，每個點相當於標好標滿R_n^k中的一個k度超立方體、每條*hyperedge*相當於標好標滿R_n^k中的一個交點。如此，每一個*1-factor*為被標上相同數字的點，而總共有C_{k-1}^{n-1}個數字也就是C_{k-1}^{n-1}個*1-factor*。 Q.E.D.

05 參考資料

[1]游森棚，科學研習月刊第57卷第5期第58頁，台灣科學教育館網站，2018年5月。
[2]維基百科，Banayai`s theorem，2019年6月2日下載。
https://en.wikipedia.org/wiki/Baranyai%27s_theorem
[3]Narsingh Deo and Paulius Micikevicius，On One-factorization of Complete 3-Uniform。
Hypergraphs https://pdfs.semanticscholar.org/7b3c/a95518252fe89e3346345e1192c884aceedf.pdf