

中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

051817

穿越「波」油路的冒險之旅——探討油滴與波的
交互作用

學校名稱：國立新竹高級中學

作者： 高二 陳俞安 高二 田雋寬	指導老師： 林慧潔
---------------------------------	------------------

關鍵詞：油滴、波、跳躍

摘要

此研究是關於液滴在震動液面上彈跳所產生的行為。儘管這個實驗很明顯是屬古典物理範疇，卻發現許多「類量子」的現象，所以嘗試尋覓兩者之間的關聯與互動。此實驗選擇以矽油作為實驗樣品，將其盛裝於容器裡，並放置在震動臺上使容器鉛直簡諧運動，於容器中央擺有一塊和器壁緊密接合的壓克力，稱之為「障礙物(Barrier)」，它的作用是使該區域的液體深度驟降，減慢矽油漣漪的波速。在開啟震動臺後，用細棒挑起油滴，由於彈跳時，油滴和油面會產生一層薄薄的空氣層，讓油滴得以在油面上進行彈跳而不致墜入油體中，在它彈跳的同時油面會產生漣漪驅使油滴移動。此實驗的研究主要探討這些變因如何隨不同的條件而變化，從中找出趨勢或關係，進而建構合理的模型。

壹、研究動機

某天，在 YouTube 上看到一部有關液滴彈跳的影片，深感興趣，於是開始搜尋更多資料，進而這項實驗由 Couder 實驗室提出，他們發現在震動的液面上進行彈跳的液滴(walker)，有行為與量子力學世界中的些許現象類似，例如狹縫干涉、機率分佈等。在容器中央擺放壓克力牆讓該處液體深度改變後，液滴的移動呈現十分特殊的行走模式，有時候它會順利地穿越壓克力牆抵達另一端，有時候則像碰到障礙物般反彈，有時候甚至會停留在壓克力牆上方來回彈跳。這樣的行為引發我們的好奇心，進而想要去探究這個現象的原理以及成因。

貳、研究目的

觀察油滴(walker)的行為，發現它有時會順利穿越障礙物，有時則來回跳動於障礙物間，另些時候卻又會如遇上障礙般直接反彈，這種能否穿越障礙物的機率稱之為「穿越機率(Probability)」，而成功穿越障礙物所花費的時間稱作「成功穿越時間(Time)」。

此實驗研究重點主要為下列三項：

- 一、研究 *Walker*，成功穿越 *Barrier* 之機率。
- 二、研究 *Walker*，穿越 *Barrier* 所需之時間。
- 三、研究 *Walker*，各種變因之間的關聯性。

參、研究設備及器材

一、實驗物質

矽油(*silicone oil*) :使用這種黏滯性高的液體，是為了讓油滴能存活得更久，且能運動得更加活潑，因此以矽油作為實驗的物質可以提升 walker 的續航力，但矽油會因室溫溫度改變時，敏感地影響它的黏滯性，這將也是此實驗必須控制的變因。

二、硬體設備

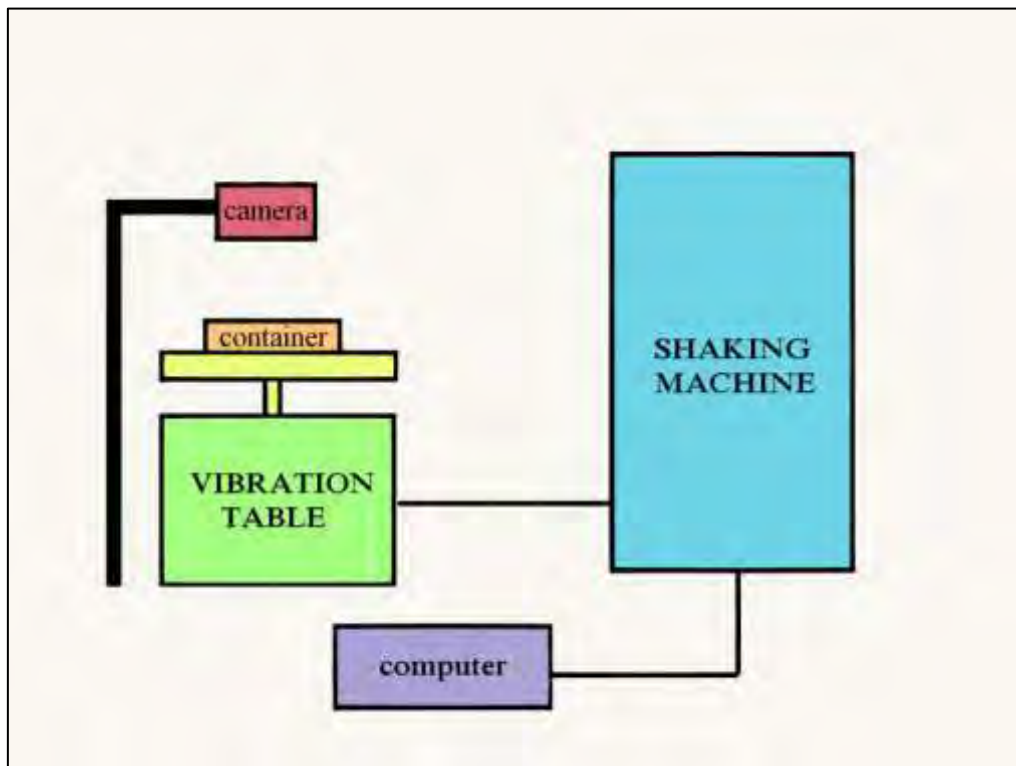
氣閥	震動器	震動臺	氣墊
			
電腦	加速度量測器	螺絲與墊片	六角板手
			

壓克力板	壓克力牆	量筒	針筒
			
溫度計	檯燈	膠帶	保鮮膜
			

三、軟體程式

- (一) *Shaker Control – Swept Sine : LSD SAVE* : 用來調整振動臺的振動頻率(f)、振幅(x_m)以及加速度(γ)
- (二) *Microsoft Excel 2010* : 用來統整數據及繪製出數據關係圖
- (三) *Meazure* : 藉由比例的計算，運用此軟體來得到油滴的半徑大小

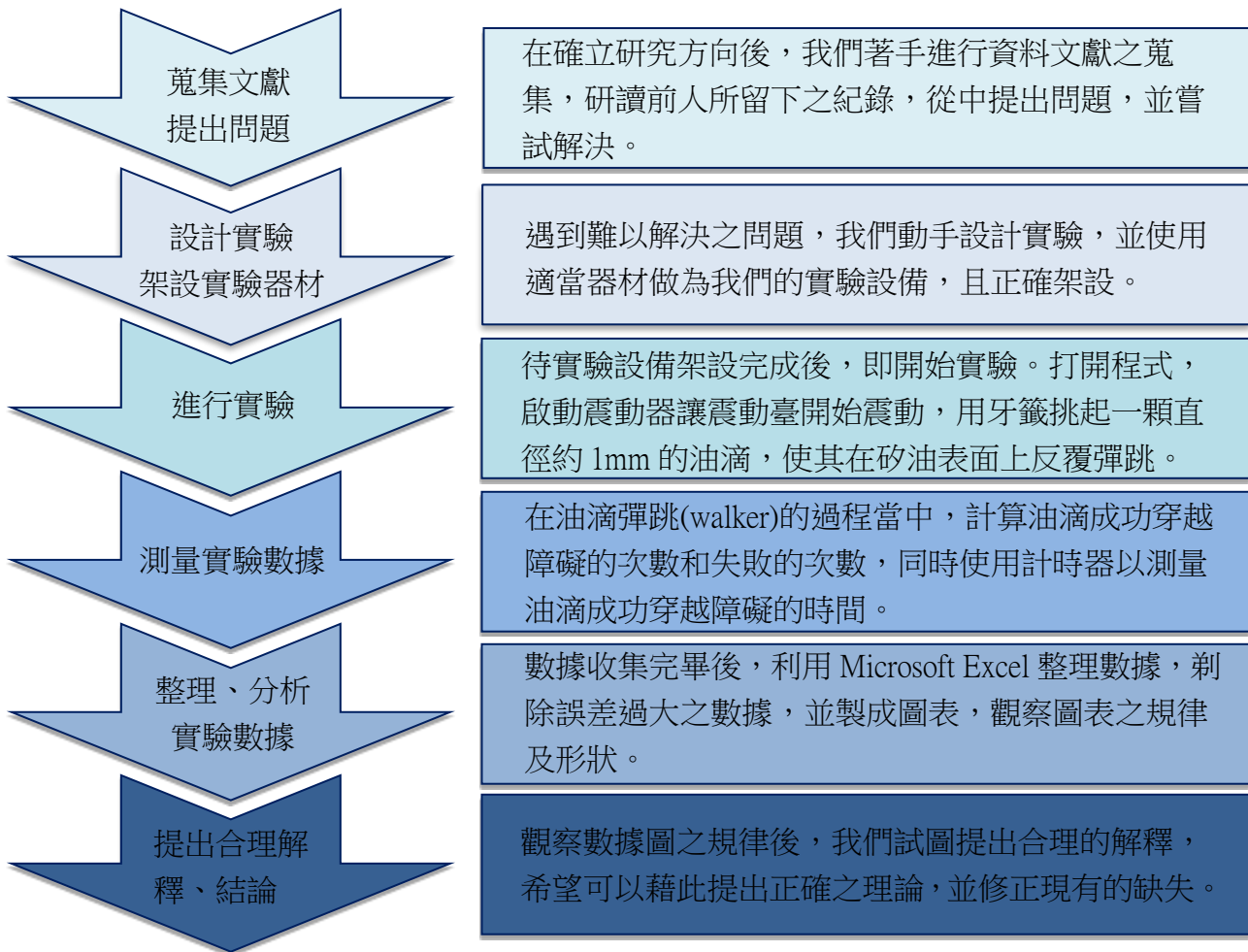
四、裝置架設示意圖



【圖 3-1】實驗裝置架設示意圖

肆、研究過程及方法

一、研究歷程圖



二、實驗理論

(一) 設定震動器之條件

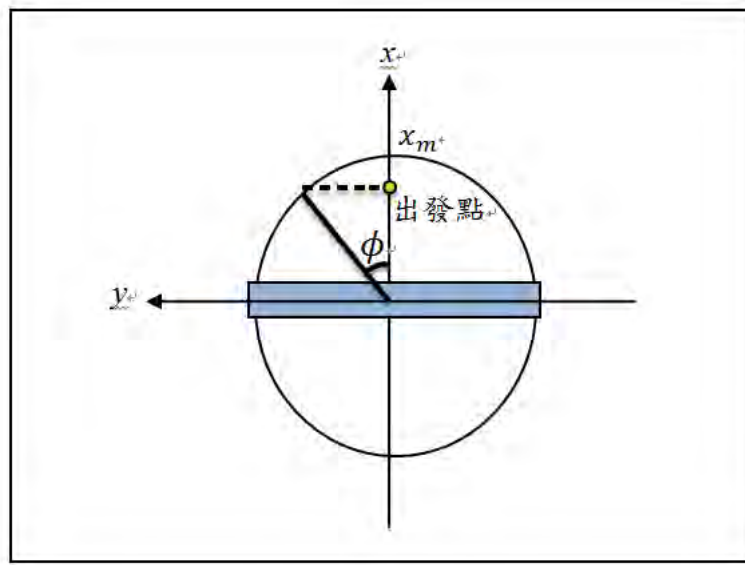
1. 在震動器上依序按下“Main On”及“System On”，待“Normal”燈號亮起，接著轉動“Reset”鈕，使震動臺開始震動。裝置如【圖 4-1】。



【圖 4-1】震動器

運用電腦程式 *Shaker Control – Swept Sine : LSD SAVE*，讓其加速度保持 $3.9g$ (g 為重力加速度) 左右，而震動臺之震動是為簡諧運動，我們定義震動臺的震動振幅為 x_m (mm)， ϕ (rad/sec) 為此震動臺的相位角，而震動臺之角速度為 ω (rad/sec)，所以震動臺之位置與時間關係 ($x - t$) 為：

$$x = x_m \sin(\omega t + \phi)$$



【圖 4-2】震動臺之簡諧運動示意圖

而將位置與時間關係進行微分，即可得到震動臺之速度與時間關係 $v(t)$ 為：

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} x_m \sin(\omega t + \phi) \cdot \frac{d}{dt} (\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow v = \omega x_m \cos(\omega t + \phi)$$

若繼續將速度與時間關係進行微分，即可得到震動臺之加速度與時間關係

$\gamma(t)$ 為：

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \omega x_m \cos(\omega t + \phi) \cdot \frac{d}{dt} (\omega t + \phi)$$

$$\Rightarrow \gamma = -\omega^2 x_m \sin(\omega t + \phi)$$

【式 1】

所以此實驗使用之電腦程式以及震動臺將加速度 γ 固定為 $3.9g$ ，震動的頻率也固定為 50 赫茲(Hz)，因此我們可以由下列式子推出該震動臺之角速度 ω ：

$$x_m \omega = v \quad \text{【式 2】}$$

$$v = 50 \times \frac{2\pi x_m}{1} = 100\pi x_m \quad \text{【式 3】}$$

將【式 3】併入【式 2】：

$$x_m \omega = 100\pi x_m$$
$$\Rightarrow \omega = 100\pi \quad \text{【式 4】}$$

將 $\gamma = 3.9 \times g$ 與【式 4】併入【式 1】：

$$3.9g = -(100\pi)^2 x_m \sin(100\pi t + \phi)$$
$$\Rightarrow x_m = \frac{-3.9g}{10000\pi^2 \sin(100\pi t + \phi)} \quad \text{【式 5】}$$

所以震動臺震動振幅為【式 5】，震動之加速度為 $3.9g$ ，震動頻率為 50 赫茲(Hz)，作為此實驗操作前之基本設定數值。

- 2.以量測器傳回該時刻的瞬時加速度數據至電腦中，確認加速度數值是否約略保持在 $3.9g$ 左右，以定量實驗數據。
- 3.對於這個數值設定的原因以及影響將會在研究結果的空白實驗部份作探討。

(二) 類量子特性之行為

1.我們在翻找資料的過程中，找到了一篇論文{3}描述了如何以理論去說明為何一顆油滴於油面上的運動行為類似量子世界中的現象，也推論出了系統符合了似薛丁格方程式的狀態方程。

$$i\tilde{\xi}\frac{\partial\tilde{\psi}'}{\partial t} = \left(-\frac{\tilde{\xi}^2}{2m_0}\nabla^2 + V\right)\tilde{\psi}'$$

【式 6】

而根據其中所述 $\tilde{\xi}$ 為類似於 \hbar 的常數， m_0 為油滴質量， V 為位能， $\tilde{\psi}$ 為類似波函數的函數式。

2.因此利用此關係式，嘗試推導出障礙物厚度與油滴穿越至另一端之機率的關係，而推導過程詳情請見附錄一。

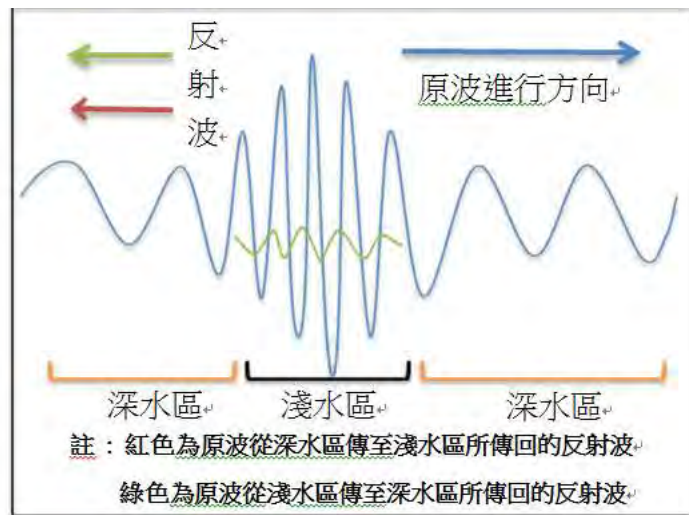
而此實驗推導是奠基在似於薛丁格方程式之方程下，解出了機率與厚度的關係：

$$P = \frac{C}{2\beta}(e^{-2\beta d} - 1) \quad (P\text{為機率且}C\text{為常數})$$

【式 7】

其中， $\beta = \sqrt{\frac{2m(U-E)}{\tilde{\xi}^2}}$ 。因此接著根據所推導出來的方程式，依序以一連串的實驗數據去做類比。

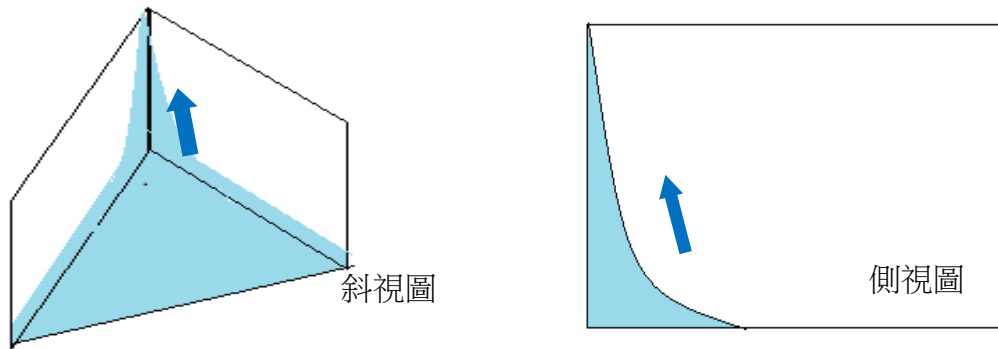
3.下圖為波進入障礙物之示意圖，波在進入淺水區時會有透射波及反射波，而透射波在到達障礙物邊緣端時，又會產生反射波與透射波，再波形複雜及連續的疊加與干涉後，才會有機率使的油滴運動至對面的深水區中。而此種概念基礎下，我們認為與量子力學世界中的「穿隧效應」十分相似，並且查到的一篇資料裡{1}甚至直接將此種行為稱為穿隧，但是在本實驗中的障礙物位能並未高於油滴與波本身的動能，因此是否有類似量子的行為，會以實驗所得數據做為參考的資料。



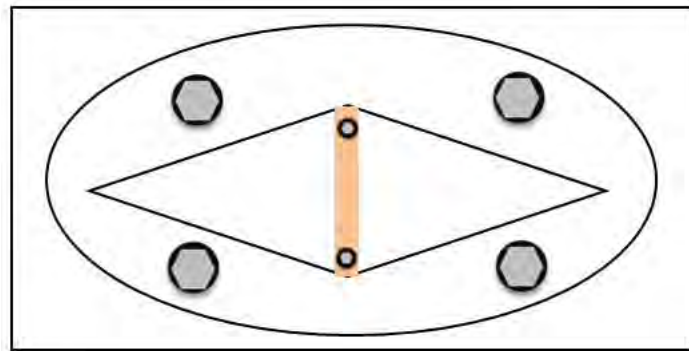
【圖 4-3】油滴產生的波行進之示意圖

三、其他實驗前置作業

- (一) 開啟實驗室之暖氣，以保持室內的溫度固定，避免溫度變化以產生實驗誤差，因矽油 (silicone oil) 隨溫度越低，黏滯性越高，黏滯性的改變會間接地影響到油滴之表面張力、油滴產生的波射入淺水層所反射回的波之波速、油滴在油面上震動的活潑性……因此會將溫度固定在**略高溫**的環境進行實驗，使得此實驗能夠定量地做觀察與測量，並在進行實驗時，關閉暖氣以排除風流造成的影響。
- (二) 將氣閥開啟，並將氣體灌入氣墊中，讓作業平臺能夠水平地進行實驗，以避免傾斜，使得油滴以及它所產生的波之複合體的行進受到影響，產生實驗誤差。
- (三) 實驗裝置如【圖 4-4】、【圖 4-5】所示，必須將壓克力板以螺絲、墊片及六角板手鎖在震動臺上，保持其固定不動。同時，將壓克力牆以螺絲鎖在容器中央，並以膠帶平滑地貼覆住螺絲頂部，以免螺絲頂部的凹痕影響液面高度。
- (四) 此實驗使用保麗龍膠將容器邊緣頂部堵住，**避免油滴在震動時藉著毛細作用攀上容器縫隙**(如【圖 4-3】所示)，造成矽油的容量持續減少而影響實驗結果。



【圖 4-3】毛細作用示意圖



【圖 4-4】矽油裝載容器示意圖



【圖 4-5】矽油裝載容器實圖

四、實驗進行步驟

(一) 為了用油滴進行實驗，於震動臺震動時，此實驗使用細棒在矽油中挑撥出適當大小、活動性佳的油滴，並將油面上的其餘油滴戳破，避免兩顆油滴互相干擾而造成實驗誤差。在壓克力板下放著格子固定為邊長為**5(mm)**的方格紙，以手機拍下油滴的大小，以方格紙的一格與油滴半徑的比例(若定義為 **$q:1$**)可計算出油滴的半徑大小 **$r(mm)$** ，計算式可整理如下式：

$$1:q = r:5 \Rightarrow r = \frac{5}{q}$$

【式 8】

(二) 將油滴以細棒推至菱形容器的兩端夾角處，因容器兩端夾角狹窄，影響油滴行進之自由度，因此油滴會朝著容器中央之障礙物而去，而在油滴跑動之時，在壓克力板下放著格子固定為邊長**5(mm)**的方格紙，偵測油滴在抵達障礙物前所經過若干格子(若通過**s**個格子)時所費的時間**t(second)**，可整理如下式：

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \bar{v} = \frac{0.5 \times s}{t}$$

【式 9】

並重複記錄三次速度取平均，作為此油滴之運動速度數值。

(三) 實驗進行當中，架設實驗相機並開啟錄影模式，記錄油滴移動影像，稍後在電腦上進行油滴行為的數據分析。若途中油滴破掉，此顆油滴的數據就到此結束，更換新的一顆油滴、新的一組數據。

(四) 根據定義，若油滴從容器一端越過障礙物上方而抵達容器另一端，即得知該顆油滴**成功**穿越一次；反之，若油滴進入障礙物上方後，反彈回原本的來向，無法抵達容器的另一端，即將其視為穿越**失敗**。如果油滴成功穿越障礙物，則替它記時它穿越壓克力牆所花費的時間，作為「穿越時間」。



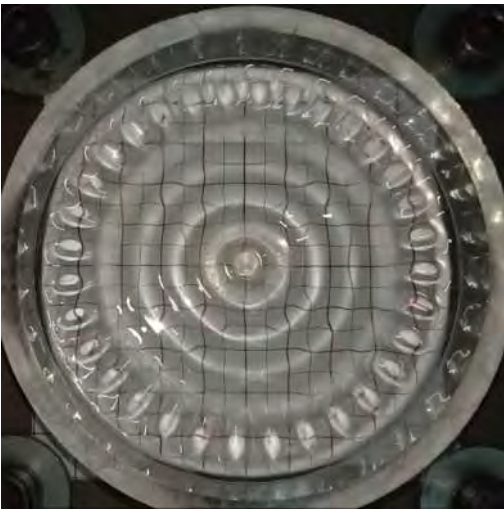
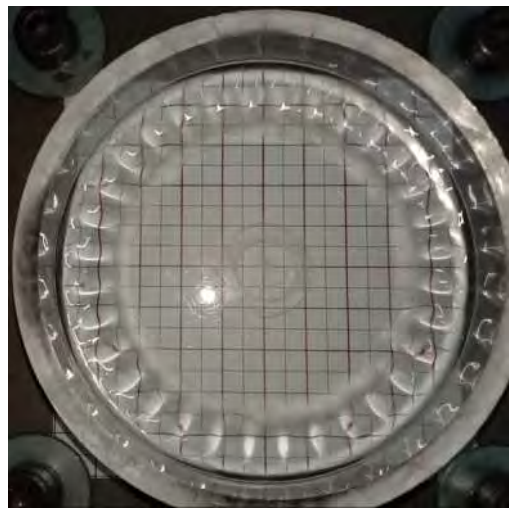
(五) 將成功穿越的油滴數量除以總共進行穿越實驗動作的次數，以得到穿越成功的機率，並以各種變數的關係繪製成圖表，以觀察出規律性。

伍、研究結果

一、空白實驗

(一) 圓形容器









以下就不同加速度及其所產生的現象進行討論。油溫介於 25~26°C 之間。



1. $\gamma = 4.3g (m/s^2)$ $f=50 (Hz)$	2. $\gamma = 4.2g (m/s^2)$ $f=50 (Hz)$
	
達到波形穩定需歷時約 7.08 秒	達到波形穩定需歷時約 5.70 秒
3. $\gamma = 4.1g (m/s^2)$ $f=50 (Hz)$	4. $\gamma = 4.0g (m/s^2)$ $f=50 (Hz)$
	
達到波形穩定需歷時約 7.43 秒	達到波形穩定需歷時約 10.73 秒

上述圓形容器實驗結果驗證了系統具法拉第波的現象，因此開始接著著手觀測及調整菱形容器的參數設置，嘗試將容器上之法拉第波的影響調至最小。





(二) 菱形容器

1. 固定頻率($f = 50 \text{ Hz}$)、調整加速度

(1) $\gamma = 3.5g \text{ m/s}^2$	(2) $\gamma = 3.6g \text{ m/s}^2$
	
此時油面平靜，並未出現任何波形。	此時油面平靜，並未出現任何波形。
(3) $\gamma = 3.7g \text{ m/s}^2$	(4) $\gamma = 3.8g \text{ m/s}^2$
	
此時油面平靜，並未出現任何波形。	此時油面平靜，並未出現任何波形。
(5) $\gamma = 4.0g \text{ m/s}^2$	(6) $\gamma = 4.1g \text{ m/s}^2$
	
此時逐漸出現細微波紋(照片不清晰)	此時出現淡淡的波紋(照片不清晰)
(7) $\gamma = 4.2g \text{ m/s}^2$	(8) $\gamma = 4.3g \text{ m/s}^2$
	

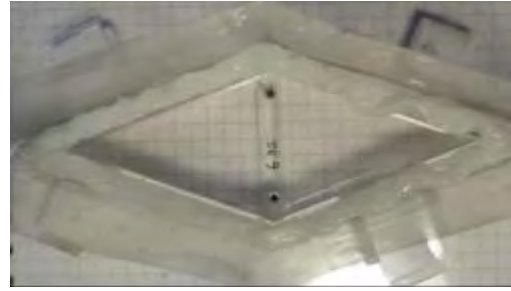
此時可觀察出波紋	此時波紋非常明顯
(9) $\gamma = 4.4g \text{ m/s}^2$	(10) $\gamma = 4.5g \text{ m/s}^2$
	
此時油面波紋更明顯	此時油面波形起伏很大

2. 固定加速度($\gamma = 3.9g \text{ m/s}^2$)、調整頻率

(1) $f = 45 \text{ Hz}$	(2) $f = 46 \text{ Hz}$
	
此時油面波形起伏很大	此時波紋非常明顯
(3) $f = 47 \text{ Hz}$	(4) $f = 48 \text{ Hz}$
	
此時可觀察出波紋	此時出現淡淡波紋
(5) $f = 49 \text{ Hz}$	(6) $f = 51 \text{ Hz}$



此時出現淡淡的波紋(照片不清晰)



此時油面平靜，並未出現任何波形。

(7) $f = 52 \text{ Hz}$



此時油面平靜，並未出現任何波形。

(8) $f = 53 \text{ Hz}$



此時油面平靜，並未出現任何波形。

(9) $f = 54 \text{ Hz}$



此時油面平靜，並未出現任何波形。

(10) $f = 55 \text{ Hz}$



此時油面平靜，並未出現任何波形。

由上述空白實驗可知，固定震動器頻率($f = 50 \text{ Hz}$)，當加速度(γ) $> 3.9g \text{ m/s}^2$ 時，油面可明顯觀察出法拉第波的波紋，使得此實驗的討論更加複雜，油滴也不易存活；而當加速度(γ) $< 3.9g \text{ m/s}^2$ 時，油面雖然沒辦法觀察出波紋，但挑起的油滴活潑性較低，無法自行移動，當然也無法進行穿越實驗，因此本實驗控制加速度為 $3.9g \text{ m/s}^2$ 進行實驗。至於固定震動器加速度($\gamma = 3.9g \text{ m/s}^2$)時，當頻率(f) $< 50 \text{ Hz}$ 時，情況類似於加速度(γ) $> 3.9g \text{ m/s}^2$ 時；同樣地，當頻率(f) $> 50 \text{ Hz}$ 時，情況類似於加速度

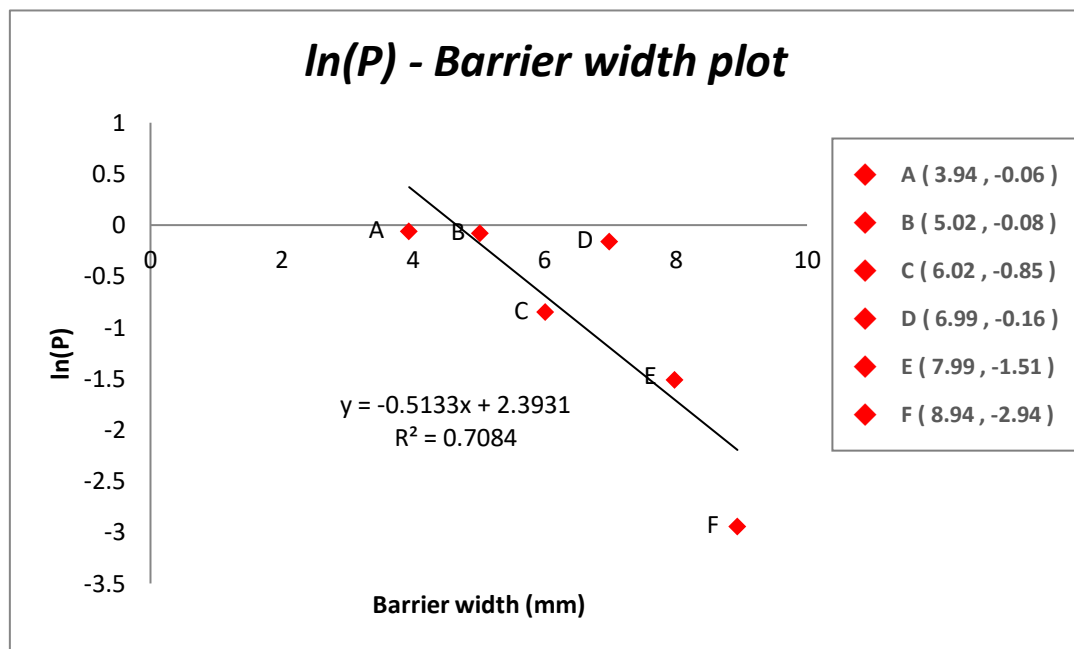
(γ) < 3.9g m/s^2 時。綜合以上討論，我們的實驗條件為加速度(γ) = 3.9g m/s^2 、頻率
 (f) = 50 Hz。

※以下結果與討論加速度與頻率條件皆為

$$\gamma = 3.9g \text{ (m/s}^2\text{)} \quad f = 50 \text{ (Hz)}$$

二、低液面研究結果之探討

(一) 油滴穿越機率與障礙物厚度關係



【圖 5-1】低液面之油滴穿越機率取自然對數與障礙物厚度關係圖

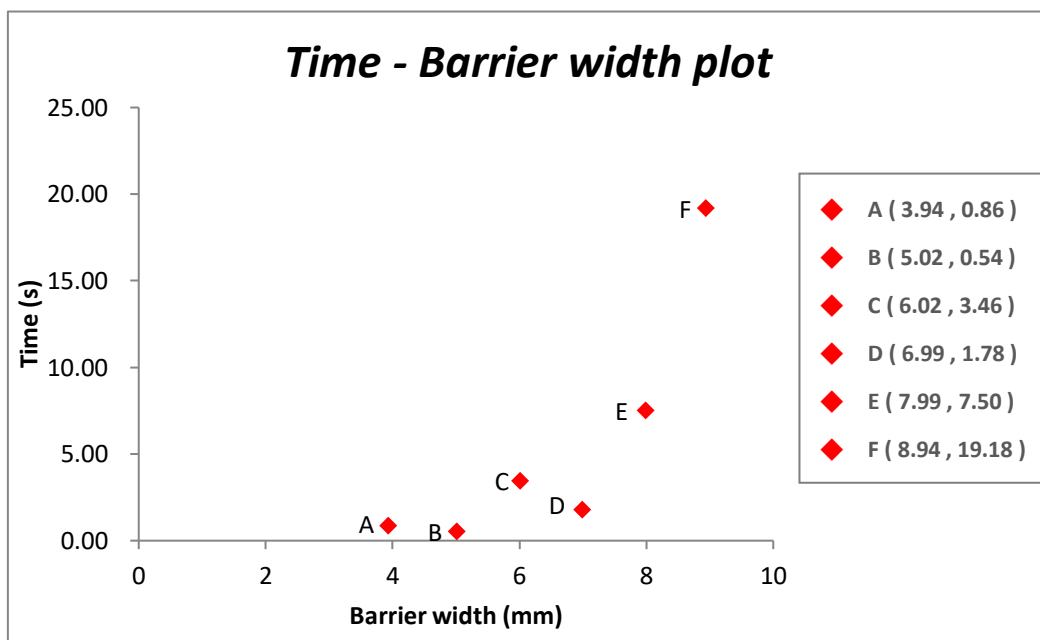
根據理論所推導的方程式，試著將油滴穿越道另一端的機率取自然對數，看是否具有線性的關係。而我們所得到的關係圖就如同【圖 5-1】所示， $\ln(P)$ 與 d 呈現負相關，而之間的關係也略呈線性。

若將理論套上此結果，可以得到斜率為 -2β ，因此整理化簡得到：

$$\beta = \sqrt{\frac{2m(U - E)}{\xi^2}} \approx 0.26$$

而根據此實驗的直觀而言，障礙物的厚度越厚，同過的機率也越低，可以由圖表觀察到是與本實驗結果相符合。

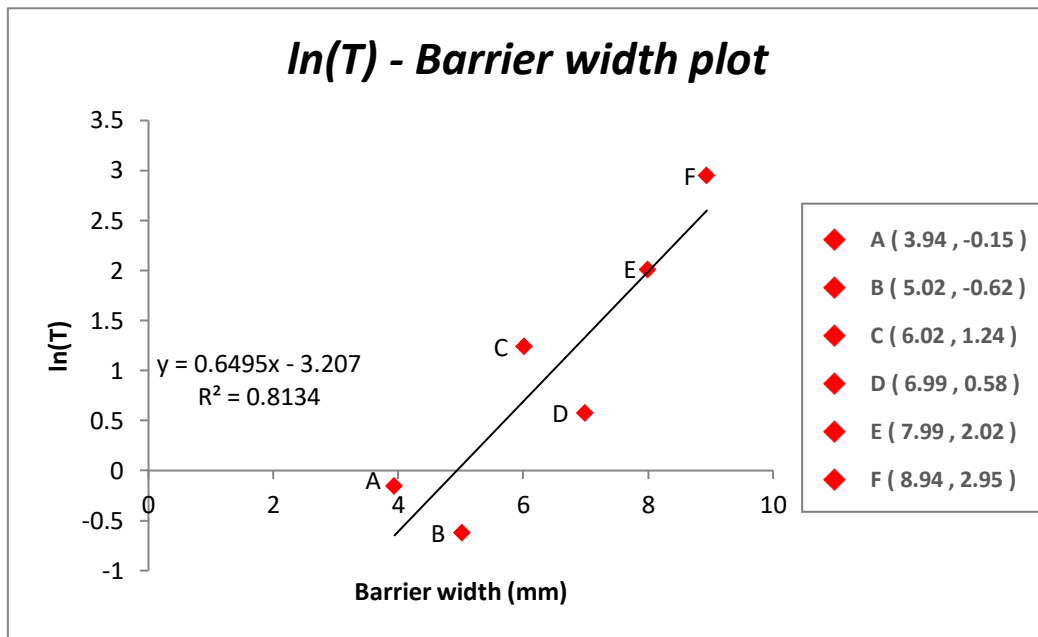
(二) 油滴穿越時間與障礙物厚度關係



【圖 5-2】低液面之油滴穿越時間與障礙物厚度關係圖

接著著手觀察油滴穿越障礙物所需的時間與厚度之間的關係。而實驗數據所整理出來的

【圖 5-2】可以發現此兩個變數具有正相關，且關係似為指數函數的曲線，因此將穿越的時間取自然對數並得到下圖。



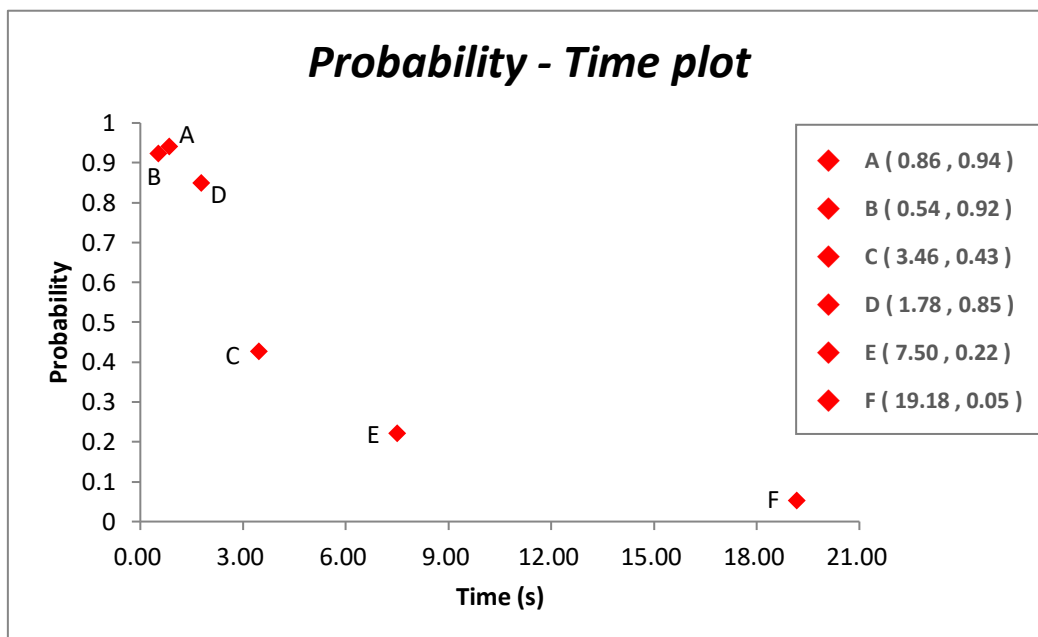
【圖 5-3】低液面之油滴穿越時間取自然對數與障礙物厚度關係圖

在【圖 5-3】中，可以看到 $\ln T$ 與 d 的關係略為線性，因此可以知道油滴穿越障礙物所需的時間為障礙物厚度的指數函數，並且可以簡略地將此兩者的關係寫成下式：

$$T = C_1 e^{\eta d} \quad (\text{其中 } C_1 \text{ 為一常數})$$

而同樣地，也可以很容易的理解當障礙物越厚時，油滴穿越障礙物所需的時間就會越多。

(三) 油滴穿越機率與穿越時間關係



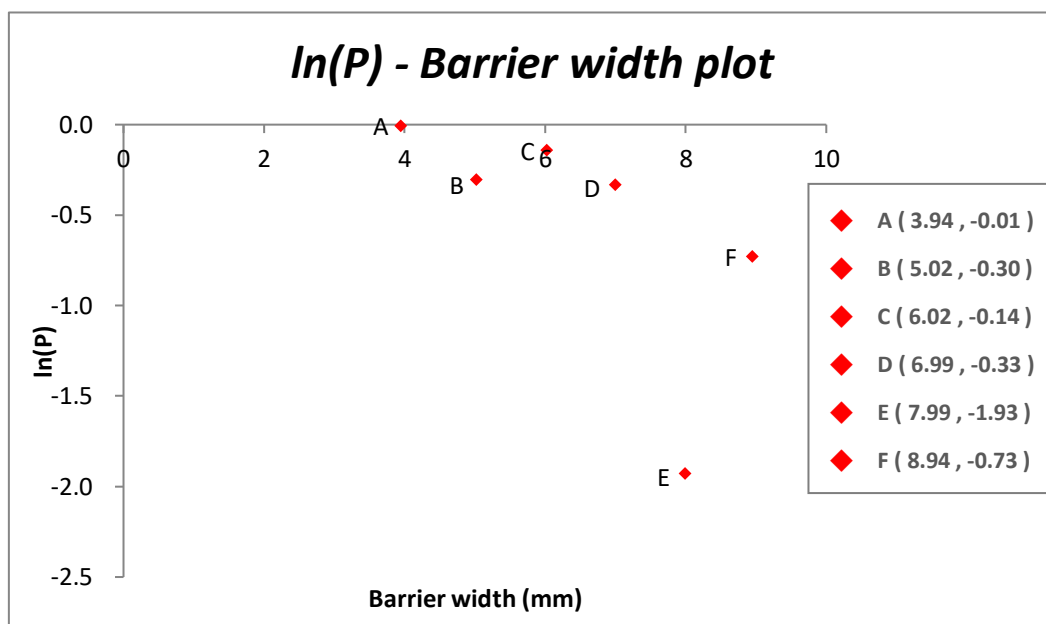
【圖 5-4】低液面之油滴穿越機率與穿越時間關係圖

【圖 5-4】中，可以看到油滴穿越障礙物的機率與穿越所需之時間的關係。當油滴穿越的機率越低時，穿越所需的時間也越來越長，並且之間的關係呈曲線的樣貌，所以可以得知穿越的時間增幅也越大。

三、高液面研究結果之探討

在高液面的實驗中，所設置的液面與障礙物之間的高度差相較低液面的大了許多，而所得到的實驗數據也與低液面的略有差異。

(一) 油滴穿越機率與障礙物厚度關係

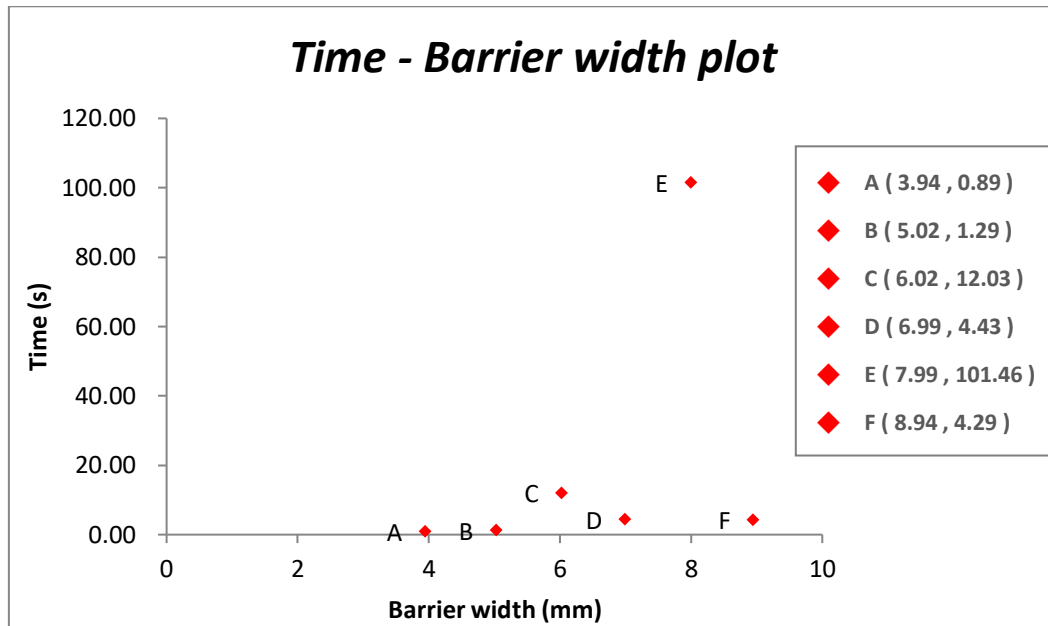


【圖 5-5】高液面之油滴穿越機率取自然對數與障礙物厚度關係圖

在高液面的數據中，也做了與低液面實驗的一樣的關係圖進行對比。而首先根據【圖 5-5】，可以發現 A, B, C, D, F 五個數據略呈現線性關係，與【圖 5-1】相似，但是在上圖中，**障礙物厚度為 7.99mm 的那組數據相較其他組略為突出**，且進行了多次實驗，依舊有如此的現象，於是可以推論在障礙物厚度為 7.99mm 時，油面的法拉第波波長恰與障礙物厚度達成了共振，因而使得 E 點的穿越機率低於其他障礙物厚度許多。

由於液面與障礙物的高度差變大，因此波的振幅也越明顯，由此推論這就是為何在高液面的實驗數據中會出現這樣的情況，而低液面的則否。

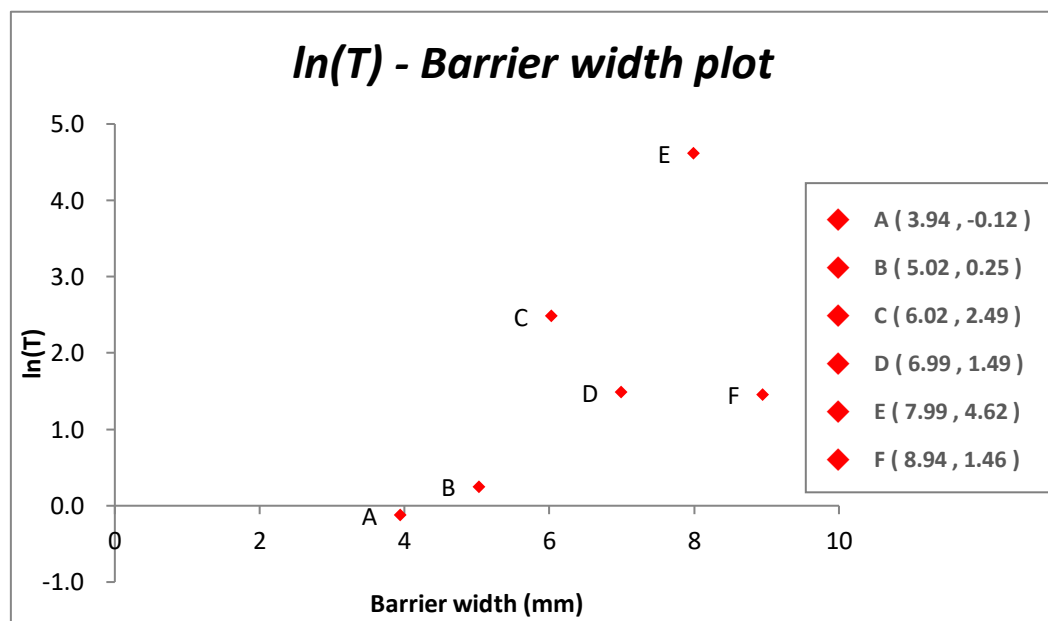
(二) 油滴穿越時間與障礙物厚度關係



【圖 5-6】高液面之油滴穿越時間與障礙物厚度關係圖

在【圖 5-6】中，顯示了穿越所需的時間與障礙物厚度的關係，與前述所說的理由一樣，在障礙物厚度為 7.99mm 時，穿隧所需時間也與其他數據大了許多。

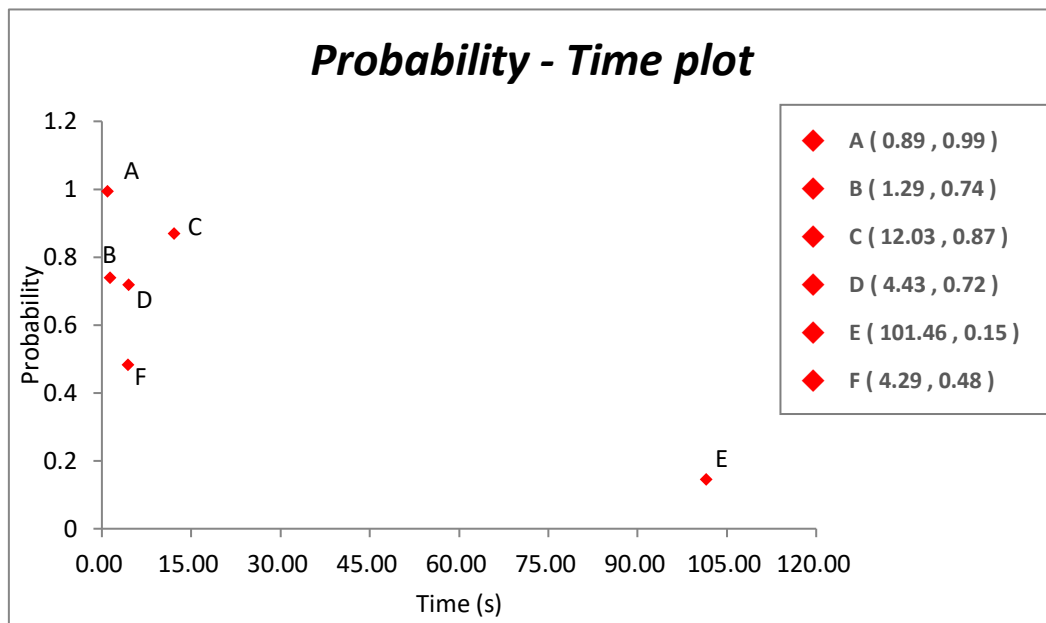
除此之外，若是將 7.99mm 之數據刪除後，其他數據所呈現的趨勢也相較低液面沒那麼漂亮了，所以在高液面時，實驗所得到的數據及油滴的現象會越來越不明顯。



【圖 5-7】高液面之油滴穿越時間取自然對數與障礙物厚度關係圖

當將【圖 5-6】的時間取自然對數後，即可得到【圖 5-7】。可以發現圖中的點散布得非常雜亂，因為波所形成的干涉及影響隨著液面高度差提升複雜度，因此在【圖 5-7】裡的數據分布，為由十分複雜的波的交互影響而建構的現象。

(三) 油滴穿越機率與穿越時間關係



【圖 5-8】高液面之油滴穿越機率與穿越時間關係圖

雖說因為高液面的影響，許多關係都顯得雜亂了，但是根據【圖 5-8】，可以觀察到隨著穿越的機率越低，油滴穿越障礙物所需的時間也有增加的趨勢，因此可以推論出隨著液面的高度差變化，穿越的機率與穿越所需的時間，大致上也是有曲線負相關的趨勢。

陸、討論

未來能夠將理論推展至計算油滴與它所產生之波的複合體在壓克力牆中，來回碰撞的次數，因為從本實驗結果，我們認為在壓克力牆內所碰撞的次數將會影響油滴穿越的時間，因此碰撞次數能以機率的概念計算出它的理論模型。

而在此實驗中，目前也還尚未推導出時間與厚度、機率之間的函數式，我們將持續發展可施行的實驗方式，歸納出更多的關係，或許能帶來一些啟發來得到某個方程式而得到解。

我們想藉由 β ，統整起 η 以及 γ ，但是直至目前，我們還尚未解出相關的式子，我們也希望或許能經由較嚴謹、較正規的方法，來得到油滴成功穿越的時間函數式，以找到一個能夠給予其他科學家一個參考方向的價值。

這次的研究中，我們選擇矽油作為我們的研究對象，理由是矽油的黏滯性較高，其跳動的油滴擁有較高的活潑性和持續性，讓實驗進行得更加順利與流暢。在往後的實驗，我們將嘗試使用不同的液體作為實驗研究對象，觀察是否仍有類似量子穿隧的現象，並透過分析，比較出不同黏滯性的液體對於液滴所產生的影響，以及其行為所產生之變化。

透過這次關於油滴穿越障礙物之運動的研究過程，力圖將此實驗「擬量子態」的特性，推展至量子力學的世界中，解決哥本哈根詮釋(Copenhagen Interpretation)的困擾，並嘗試提出一個合理的物理模型，來解釋這奇妙且詭譎的現象。

另外，在搜尋量子力學相關領域的理論時發現，穿隧機率已經非常清楚地被寫入教科書，例如 WKB 近似也可以被拿來成功地預測機率和位能障寬度的指數關係，但是相對地，穿隧時間則是從德布洛伊(de Broglie)開始討論起，至今很沒有定論的謎題。為什麼呢？其中一個原因是，穿隧是波粒二相性裏波動的性質，而當入射波碰到位能障（或是在我們實驗的淺水區）時，如何決定何時算是開始和結束穿隧，這個時間間隔顯然會隨定義而變。根據文獻，在超

過 6 種比較可行的穿隧時間裡，比較被使用、且可被證明等價的相時間(Phase Time)和停留時間(Dwelling Time)，竟然都預測在位能障寬度變大時，會趨近一個定值。這暗示穿隧速度最終要多大就多大，這樣得到的穿隧速度明顯違背狹義相對論中光速為宇宙裡最高速度之間，這個令人不滿意的預測源於對穿隧時間的定義。從我們接觸的論文裏，發現該如何重新定義、並如何在實驗上量到「不會超光速」的穿隧時間，是個很重要的懸而未決的難題，這也是我們當初進行這個實驗的主要動機：希望藉此巨觀的油滴實驗，進而推廣至實際的微觀量子力學領域當中，能夠給予這方面的研究一個參考價值，以冀解決這個神秘的問題。

柒、結論

一、系統具有類似量子之特性

依據波的特性，用理論證明了此實驗的系統，與量子世界中的許多公式是相似的，而我們就進一步藉由實驗數據來擬對理論，而根據所推出的方程式，在巨觀的系統下，令普朗克常數 h 及約化普朗克常數 \hbar 以 ξ 及 $\tilde{\xi}$ 進行代替。

二、以似薛丁格的方程式推導機率

透過了薛丁格方程式，可計算出了不含時以及含時薛丁格方程式的解，分【式 39】以及【式 42】，並將之合併，得到了波函數之解，如【式 43】。 $\Psi(\overline{x}, t) = C_6 e^{-\beta x - \frac{iE}{\tilde{\xi}} t}$ (C_6 為常數，

$$\beta = \sqrt{\frac{2m(U-E)}{\tilde{\xi}^2}}$$

而透過了機率密度的定義，可將穿越壓克力牆的機率視為油滴出現在壓克力牆後的機率，因此將機率密度從 d 積分到 ∞ (d 為壓克力牆的厚度)，並藉由共軛波函數相乘即為機率密度的特性，如【式 42】處理般，可得到油滴穿越到另一端的機率與壓克力牆厚度之間的關係，

$$P = \frac{C}{2\beta} (e^{-2\beta d} - 1) \quad (C \text{ 為常數})。$$

因此可從以上所推導出的結果，推論並且透過實驗及作圖，驗證出 P 與 d 之間的關係，

不僅如此，還能得到 β 的量值，嘗試藉此可以推回位能與動能之間的能量差。

三、油滴成功穿隧機率與壓克力牆厚度關係（目的一）

由此實驗而得的數據，觀察壓克力牆厚度(d)以及穿越的機率(P)之間的關係，如【圖 5-1】顯示的圖表一般，可發現這兩者之間具有負相關，因此根據上述所推導出的【式 44】，我們嘗試將 P 取自然對數並再度描繪關係圖，從【圖 5-2】可以發現兩者具有線性的關係，因此此趨勢線的斜率，可以推得 β 值， $\beta = \sqrt{\frac{2m(U-E)}{\xi^2}} \approx 0.026$ 。

四、油滴成功平均穿隧時間與壓克力牆厚度關係（目的二）

透過分析實驗數據(參考【圖 5-3、5-4】)，此實驗中的兩個變數：油滴平均穿越時間(t)和壓克力牆厚度(x)，兩者具有相關性，當壓克力牆厚度越厚，油滴所需穿越時間就越長。經由理論推導之後，得知將油滴平均穿越時間取自然對數以後，兩變數之間具有正相關的線性關係，因而可發現壓克力牆厚度為穿越時間的指數函數。

五、油滴平均穿隧時間和障礙物厚度的比值與壓克力牆厚度關係

另外，本實驗也製作了油滴平均穿越時間和壓克力牆厚度比值取自然對數與壓克力牆厚度關係圖(參考【圖 5-5】)，其散佈圖中的數據點呈正相關的線性關係，這也符合前述之理論推導。

六、油滴成功穿隧機率與油滴平均成功穿隧時間關係

在【圖 5-6】中，以機率(P)作為縱座標、成功穿隧時間(t)作為橫坐標繪製此關係圖，因為由客觀的角度思考，會認為穿越時間或許會與穿越的機率有相關性，並且穿越機率越低，油滴在壓克力牆上停滯的時間應該會越長，而此實驗在統整數據後也確實看到了此趨勢。

試著將 P 取自然對數與 t 進行比較(參考【圖 5-7】)，也在【圖 5-6】發現類似的圖形以及趨勢，雖然目前還尚未完整而嚴謹地得到更精確的物理建構以及模型，但這卻也證實了此種較直觀的分析。

七、低液面與高液面實驗的差別

低液面與高液面的差異是在於液面與障礙物之間的高度差的不同。照著與低液面同樣的變數關係進行繪圖，可以明顯發現高液面的數據點分布地較為混亂，而基於液面高度差的改變，推論出造成此現象的原因是由於高度差增大，因此波的振幅及其波的性質會更加顯著，使得障礙物上波複雜的疊加及干涉進而建構出所測量的數據。

在實驗結果中，可以發現在高液面的數據組中，障礙物厚度為 7.99mm 的數據相較其他數據突出許多，重複執行了多次實驗，依舊顯示出其特性，因此同樣的依據液面高度差的改變，進而推論此現象的產生是因為障礙物的厚度，恰好與液面上波的波長及頻率達成了共振，使得油滴在障礙物上難以通過至另一端深水區。

根據【圖 5-8】，雖高液面的數據及現象較為混亂及複雜，但穿越機率與穿越時間卻與低液面實驗的趨勢相似，兩者呈現曲線負相關的關係，也就是說當穿越機率越低，穿越所需的時間也越長。

捌、參考資料及其他

- 一、Couder, Y., Fort, E., Boudaoud, A. & Gautier, C. H. *Phys. Rev. Lett.* **94**, 177801 (2005) {1}
- 二、Daniel M. Harris, Julien Moukhtar, Emmanuel Fort, Yves Couder, and John W. M. Bush. Wavelike statistics from pilot-wave dynamics in a circular corral. 88, 011001(R) (2013) {2}
- 三、Robert Brady and Ross Anderson, Why bouncing droplets are a pretty good model of quantum mechanics, ArXiv: 1401.4356, (2014) {3}
- 四、蔣怡萱、朱鳳華、徐悅聲, 與波共舞的飄浮水滴, 臺灣國際科展作品, (2012) {4}
- 五、Jan Moláček and John W. M. Bush. Drops bouncing on a vibrating bath. *J. Fluid Mech.* (2013), vol. 727, pp. 582_611. {5}
- 六、Jan Moláček and John W. M. Bush. Drops walking on a vibrating bath: towards a hydrodynamic pilot-wave theory. *J. Fluid Mech.*, 727, 612 (2013) {6}
- 七、Giuseppe Pucci^{1,2}, Pedro J. Sáenz¹, Luiz M. Faria¹ and John W. M. Bush. Non-specular reflection of walking droplets. *J. Fluid Mech.* 804, R3. (2016) {7}
- 八、M. Labousse,^{1,2} A. U. Oza,³ S. Perrard,^{2,†} and J. W. M. Bush⁴. Pilot-wave dynamics in a harmonic potential: Quantization and stability of circular orbits. *Phy. Rev E* 93, 033122 (2016) {8}
- 九、Molacek and J.W. M. Bush, *J. Fluid Mech.* 727, 612 (2013) {9}

【評語】 051817

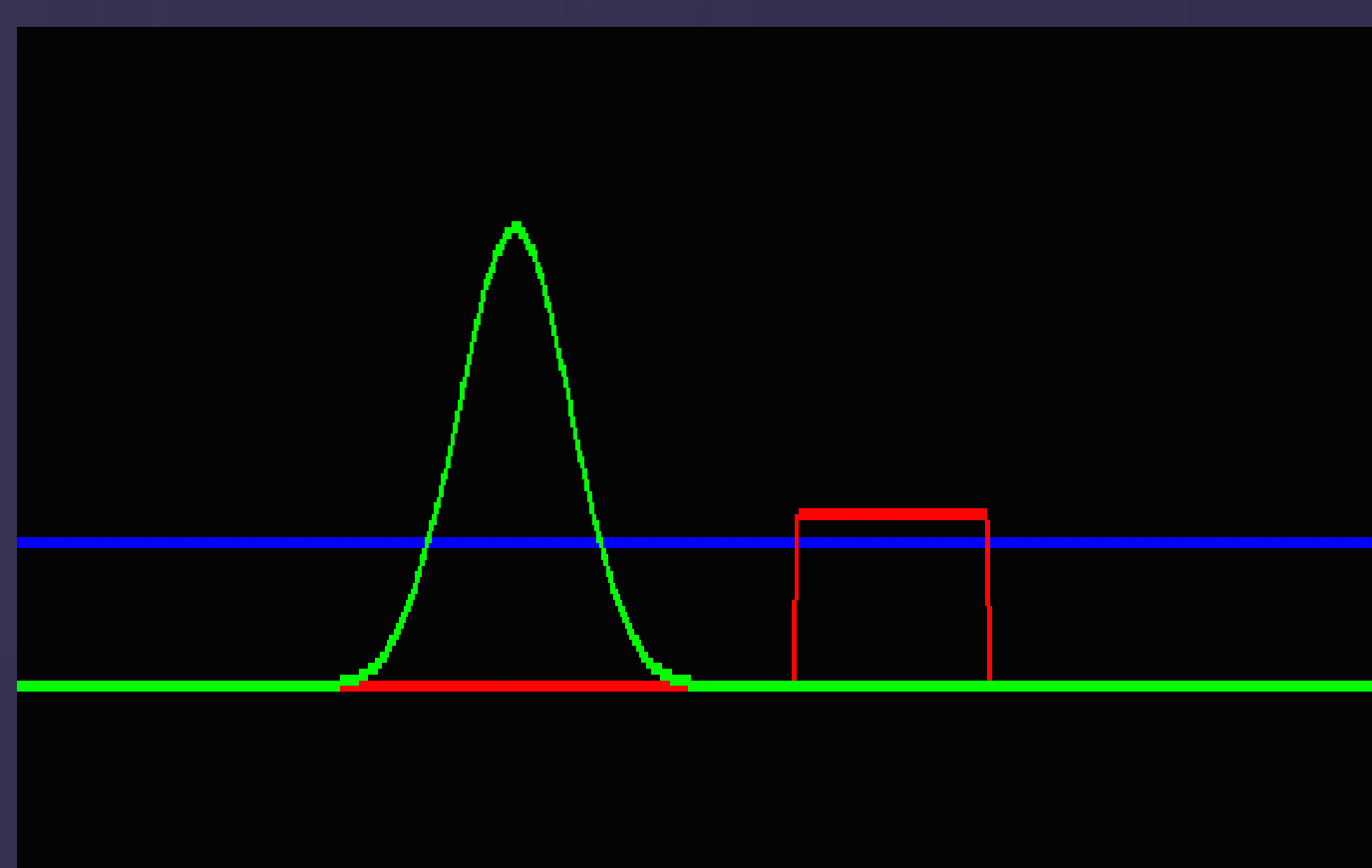
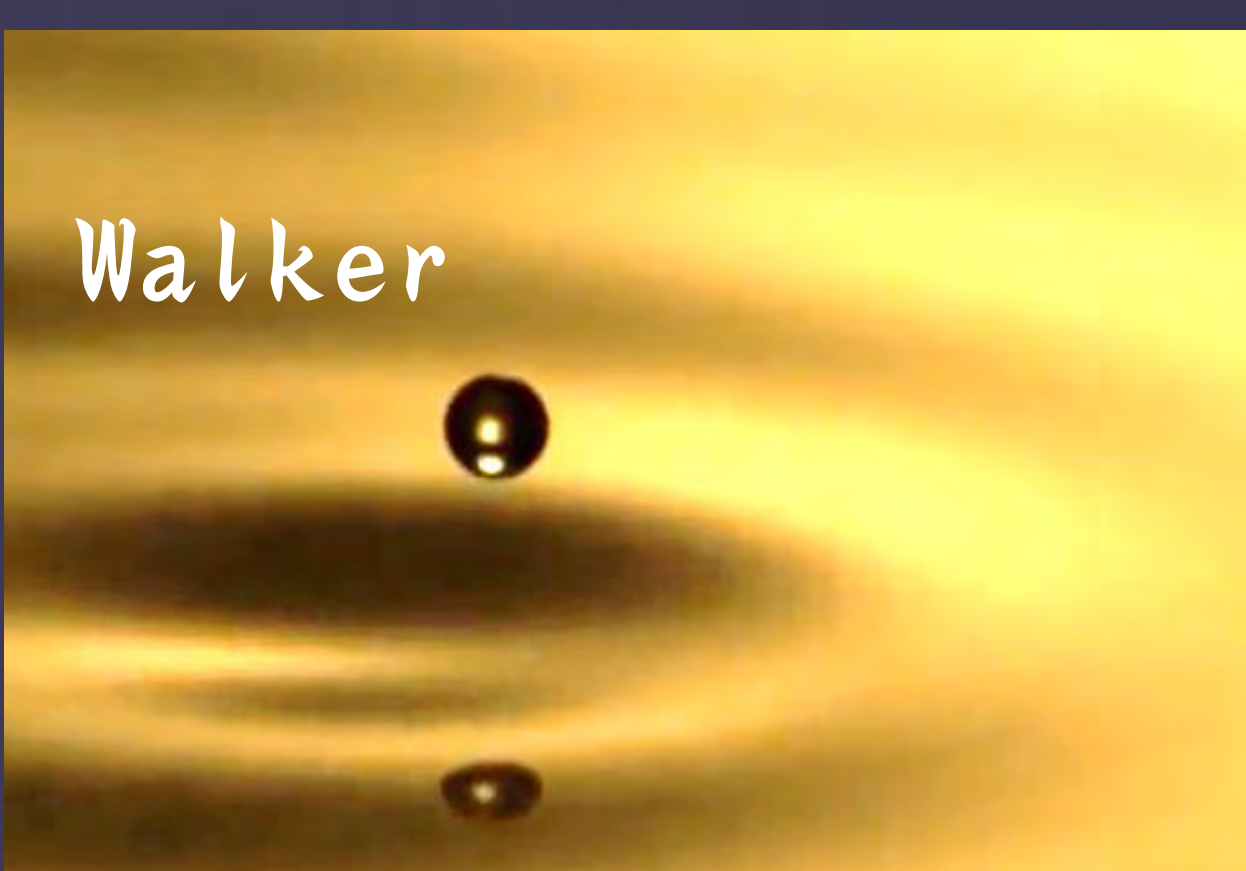
本實驗利用矽油油滴在震動液面上的彈跳，觀察油滴的行為，並以之擬量子力學穿隧效應的行為。但是油滴穿越障礙物，並非就是量子穿隧，以波討論液體的起伏振盪，並非就是量子效應。這些與真正量子力學的行為有很大的差異，而本實驗也只是重複已有的實驗，雖然有趣，但缺新穎構思。

摘要

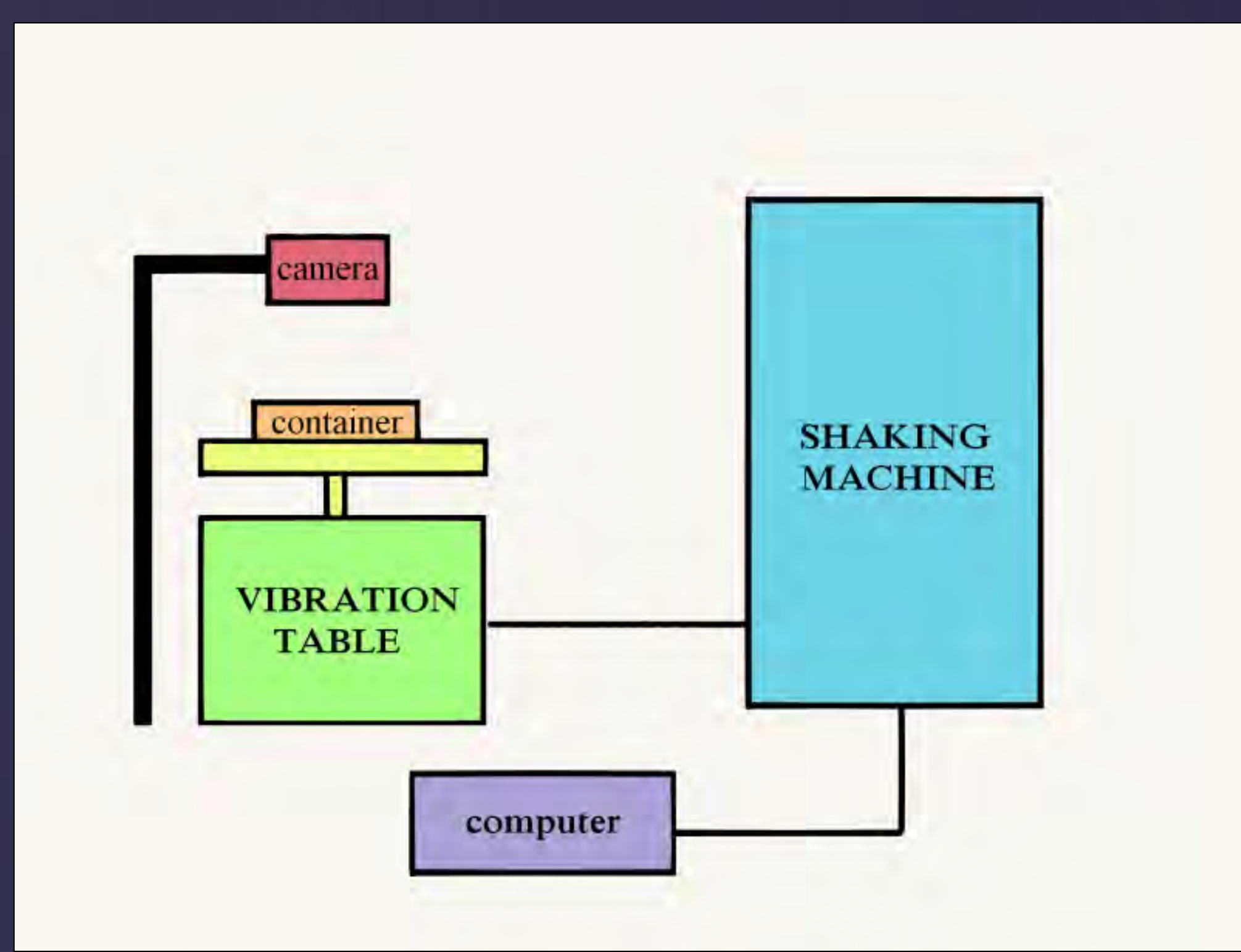
一個在震動液面上彈跳的液滴，會同時使下方液體產生波紋，進而影響它的移動。當其經過不同深度的液體時，其行為也會產生變化，我們於容器中央放置壓克力牆作為障礙物模擬。透過實驗數據分析，我們得以推導不同變因之間的關係，同時能夠發現其類似量子現象的特性。

壹、動機

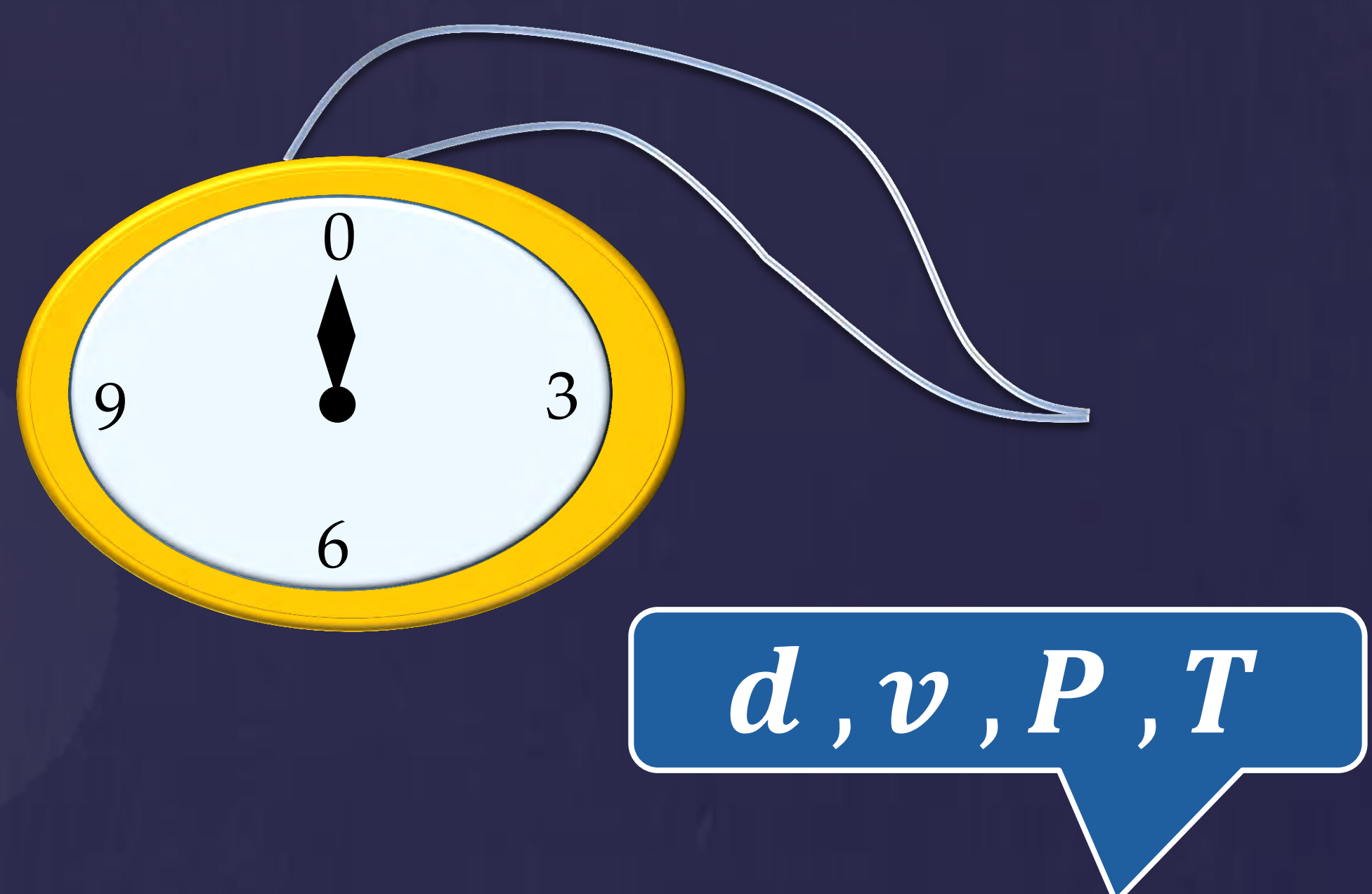
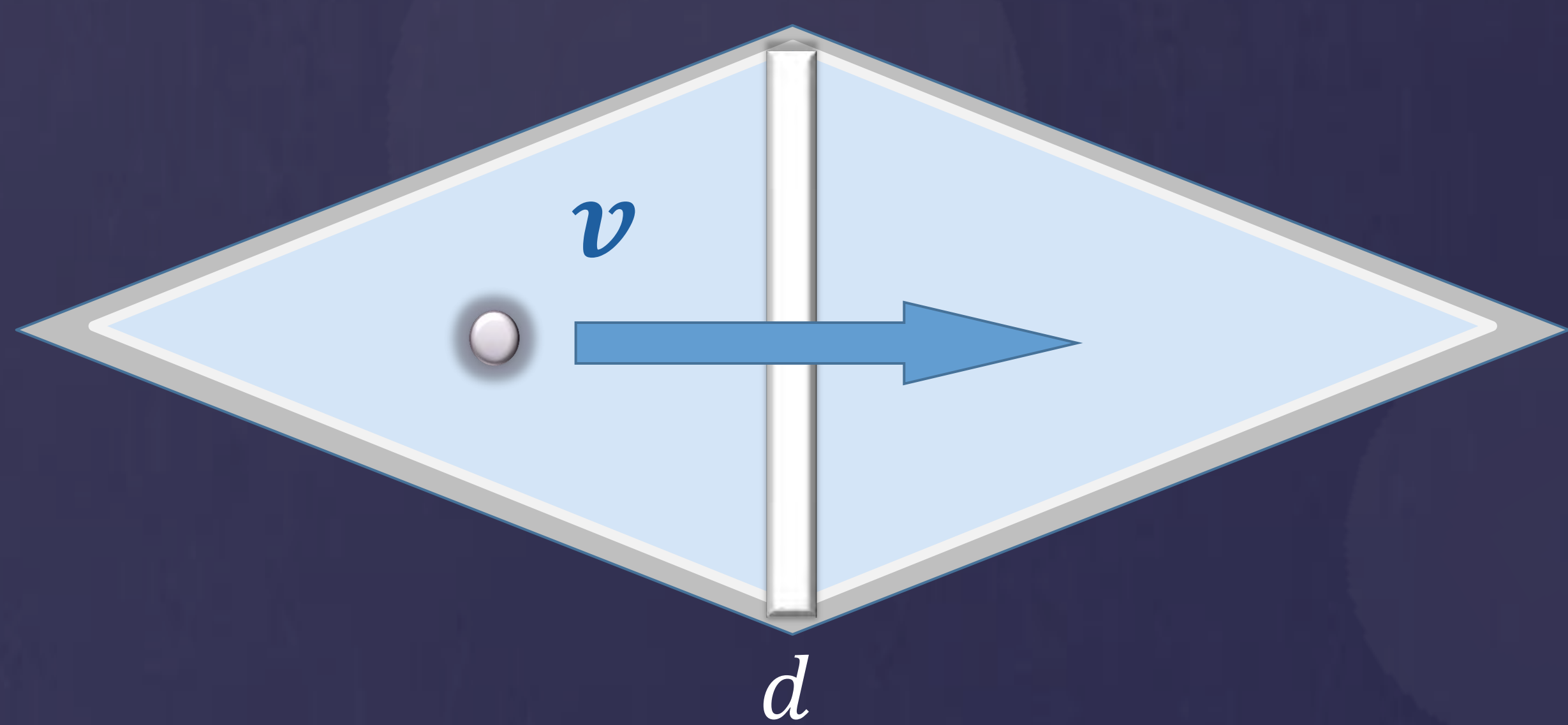
我們曾在YouTube上觀賞過一部有關液滴彈跳的影片，對該實驗之現象深感興趣，於是開始搜尋更多資料，發現在震動的液面上進行彈跳的液滴，其行為與量子力學世界中的某些現象類似，因此引發了我們的好奇心，想要去探究這個現象背後的原理以及成因。



貳、設備



參、研究過程



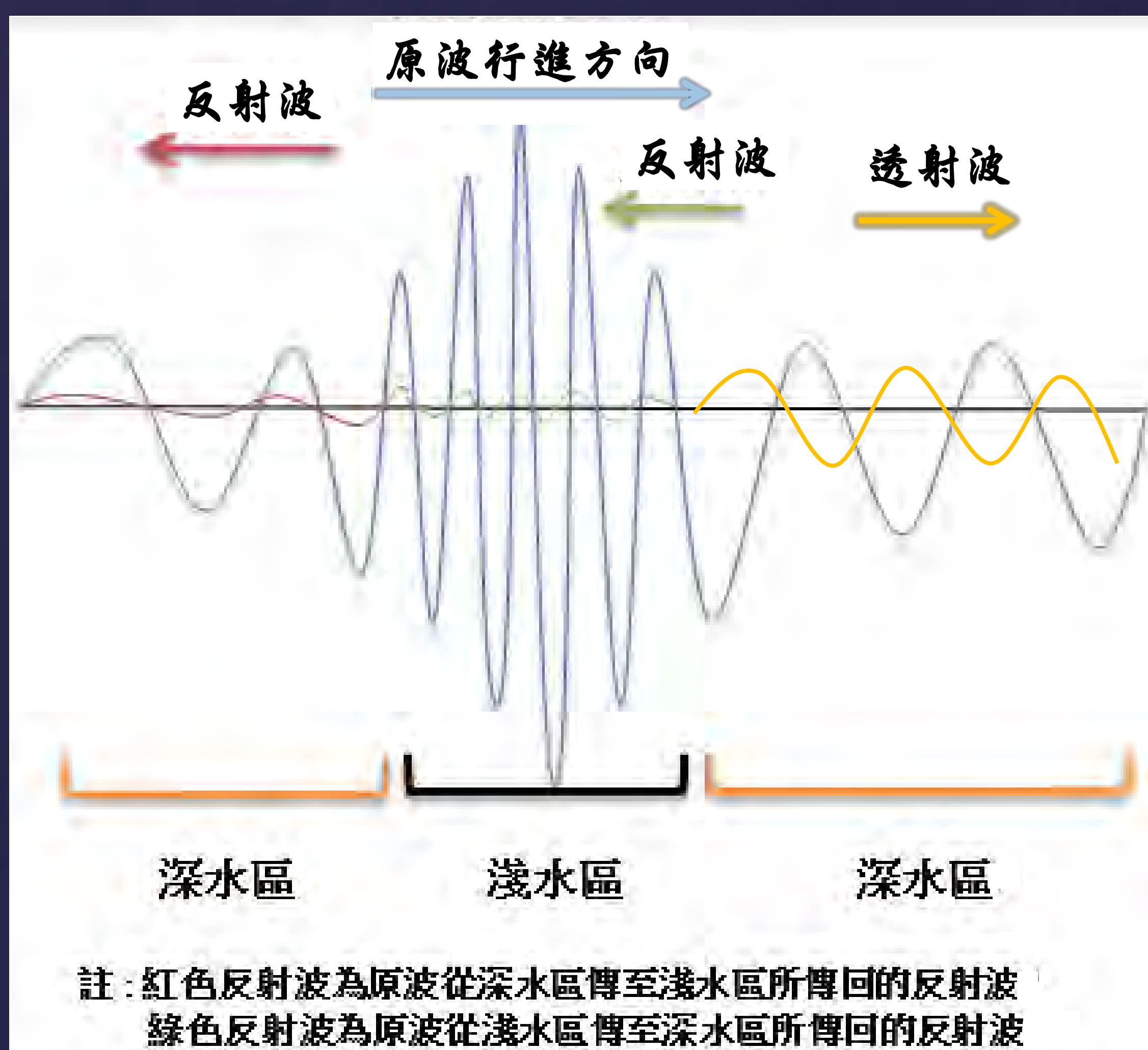
先利用細棒挑起一顆油滴，使其穿越障礙物，並藉由設備以得知Walker的各種變因。

肆、研究理論

波在進入淺水區時會有透射波及反射波，而透射波在到達障礙物邊緣端時，又會產生反射波與透射波，在波形複雜及連續的疊加與干涉後，才會有機率使得Walker運動至對面的深水區中。

此種概念基礎下，我們認為與量子力學世界中的「穿隧效應」十分相似，而由資料可知，此實驗系統可能具有似薛丁格方程式之特性：

$$i\tilde{\xi} \frac{\partial \tilde{\psi}'}{\partial t} = \left(-\frac{\tilde{\xi}^2}{2m_0} \nabla^2 + V \right) \tilde{\psi}'$$



而我們解此偏微分方程，得到了障礙物厚度與Walker穿越機率之間的關係：

$$P = \frac{C}{2\beta} \cdot e^{-2\beta d}$$

伍、研究結果

一、空白實驗

(一) 圓形容器

1. $\gamma = 4.3g (m/s^2)$ $f = 50 (Hz)$ 2. $\gamma = 4.2g (m/s^2)$ $f = 50 (Hz)$

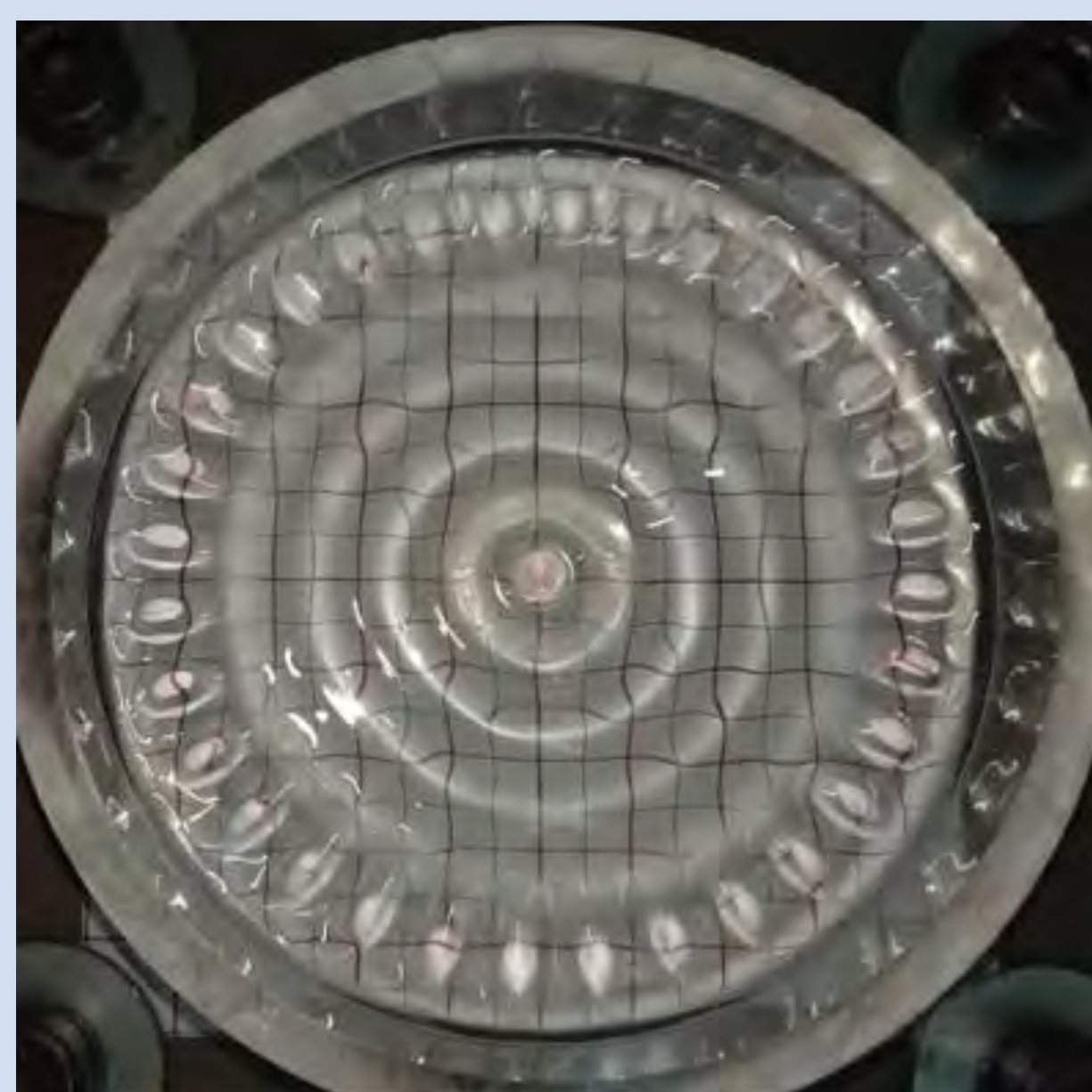


達到穩定波形需歷時約7.08秒

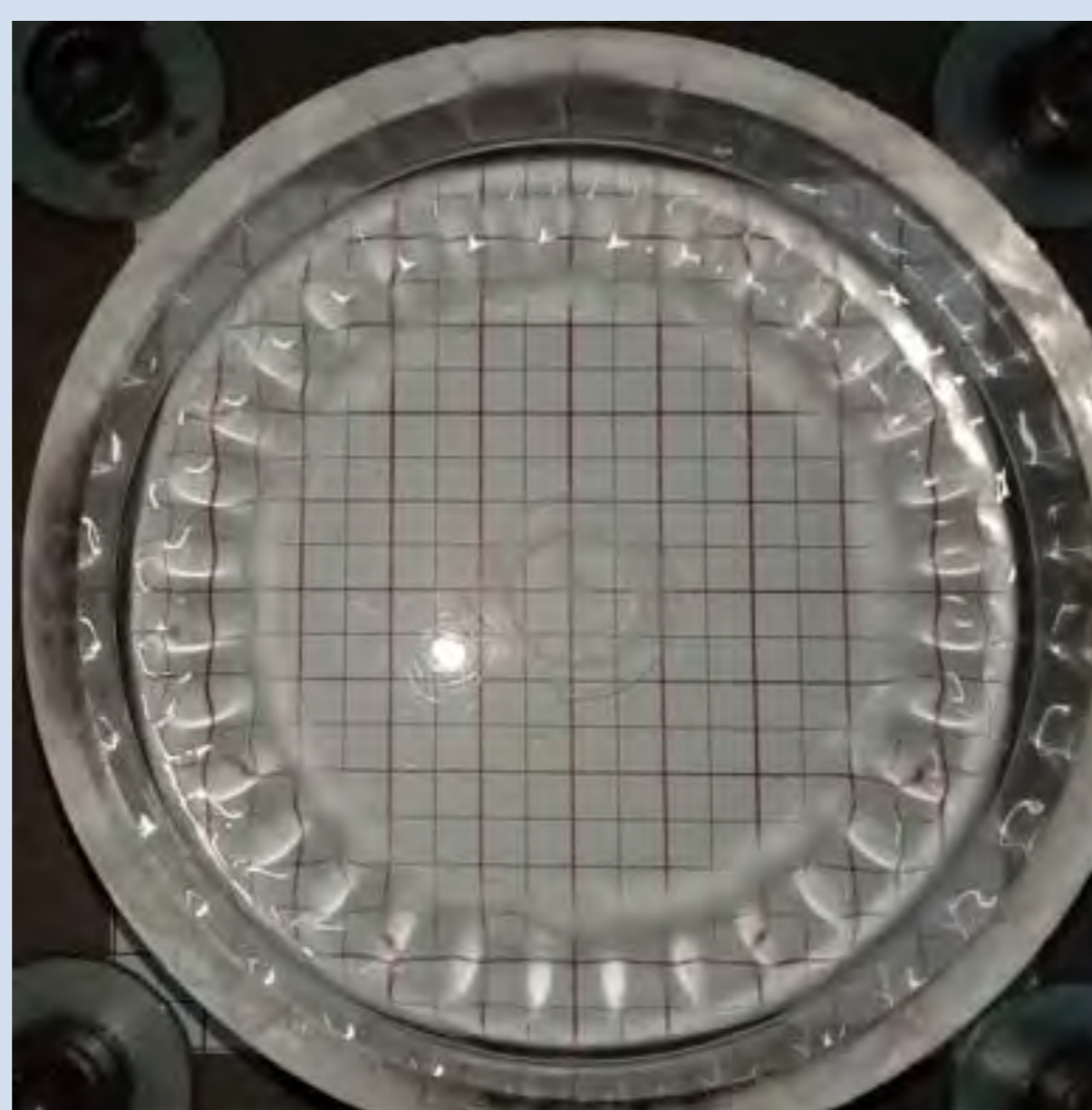


達到穩定波形需歷時約5.70秒

3. $\gamma = 4.1g (m/s^2)$ $f = 50 (Hz)$ 4. $\gamma = 4.0g (m/s^2)$ $f = 50 (Hz)$



達到穩定波形需歷時約7.43秒



達到穩定波形需歷時約10.73秒

(二) 菱形容器

1. 固定震動頻率 $f = 50 (Hz)$

(1) $\gamma = 3.6g (m/s^2)$



(2) $\gamma = 3.8g (m/s^2)$



(3) $\gamma = 4.0g (m/s^2)$



(4) $\gamma = 4.2g (m/s^2)$



2. 固定震動加速度 $\gamma = 3.9g (m/s^2)$

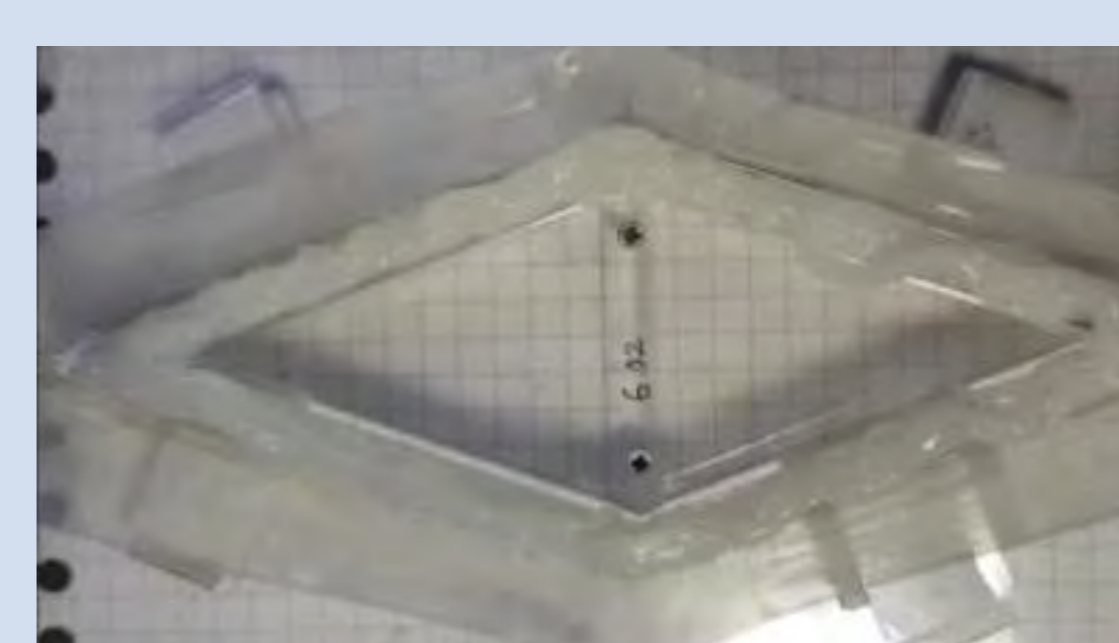
(1) $f = 45 (Hz)$



(2) $f = 47 (Hz)$



(3) $f = 49 (Hz)$



(4) $f = 51 (Hz)$

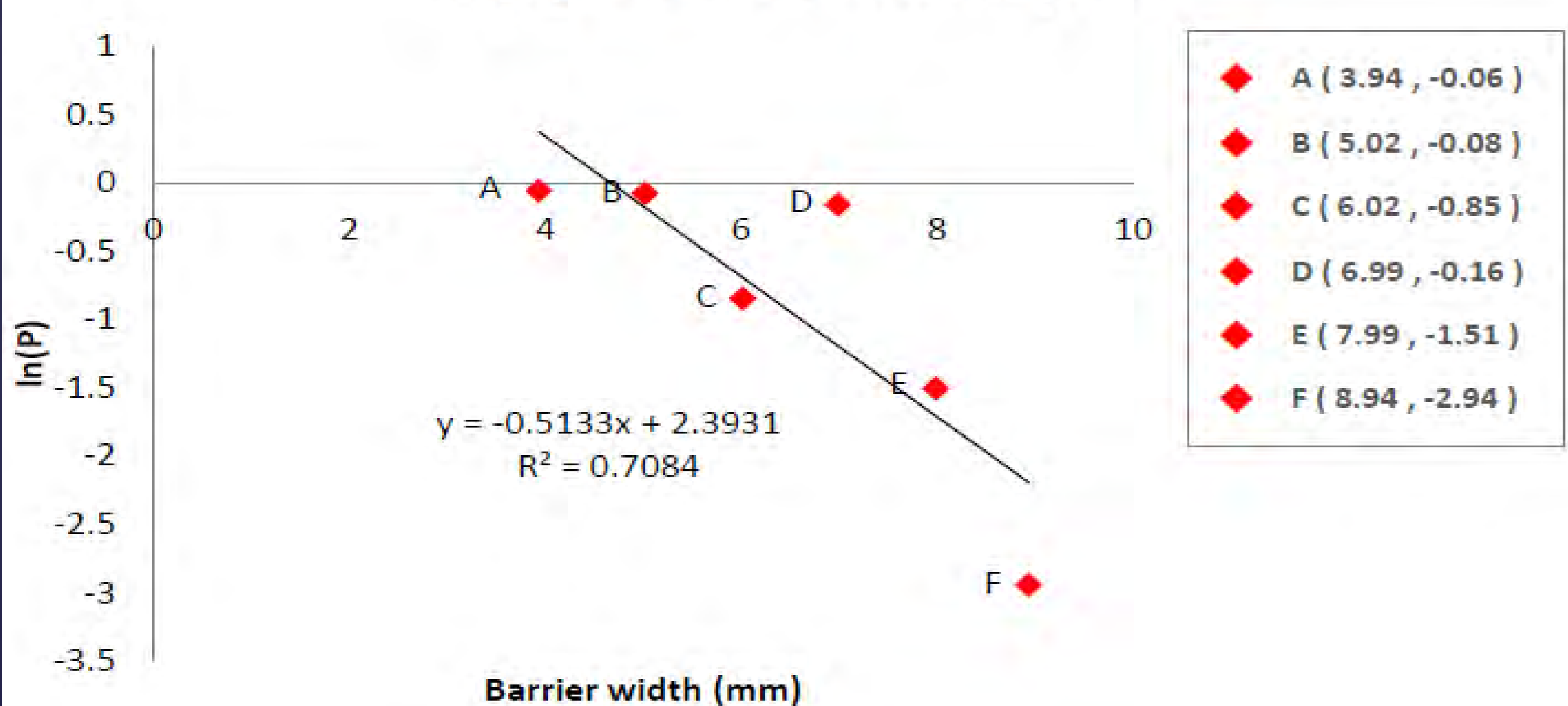


以下實驗皆以震動頻率 $f = 50 (Hz)$ 、加速度 $\gamma = 3.9g (m/s^2)$ 作為實驗控制變因。

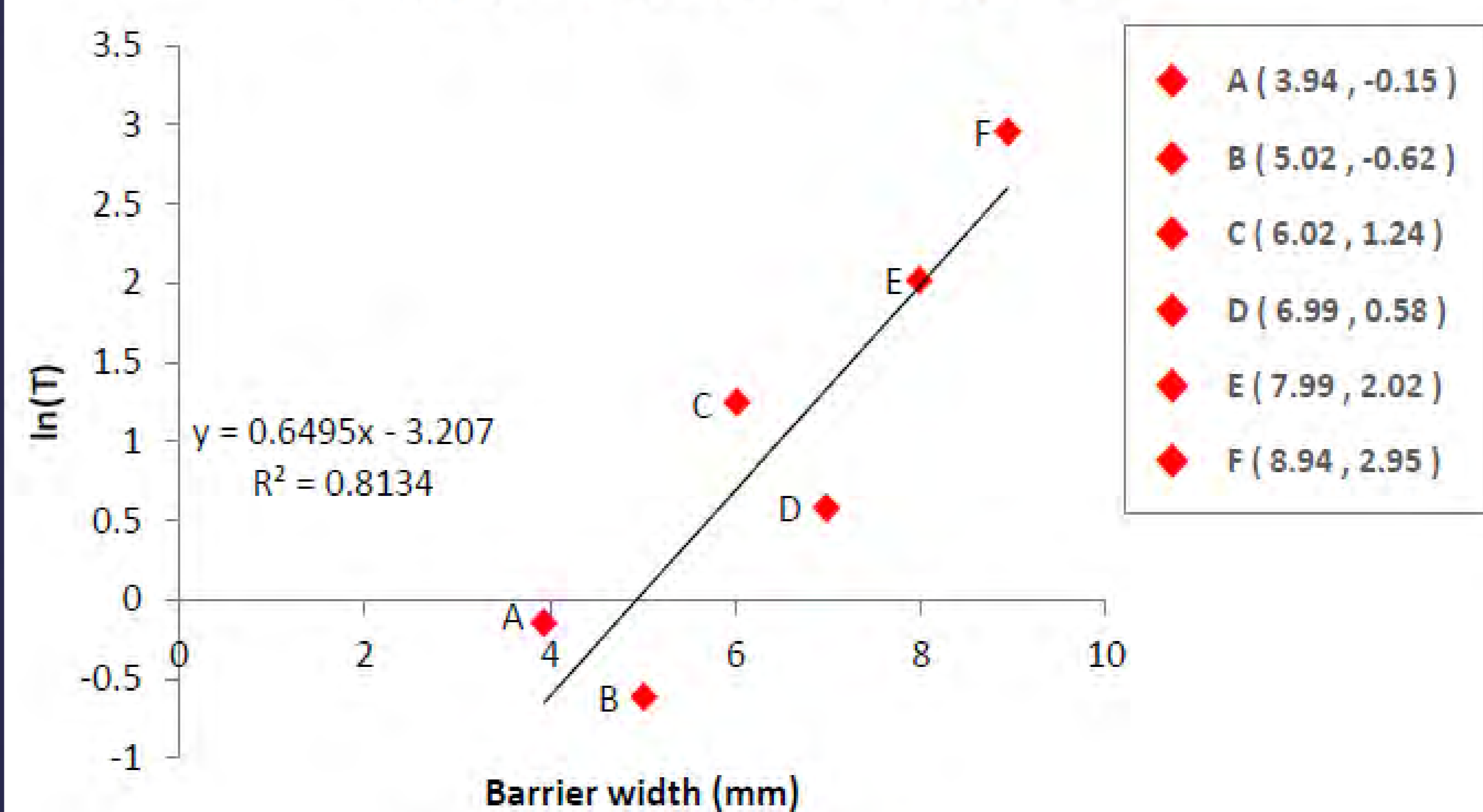
二、實驗結果

(一) 低液面實驗組

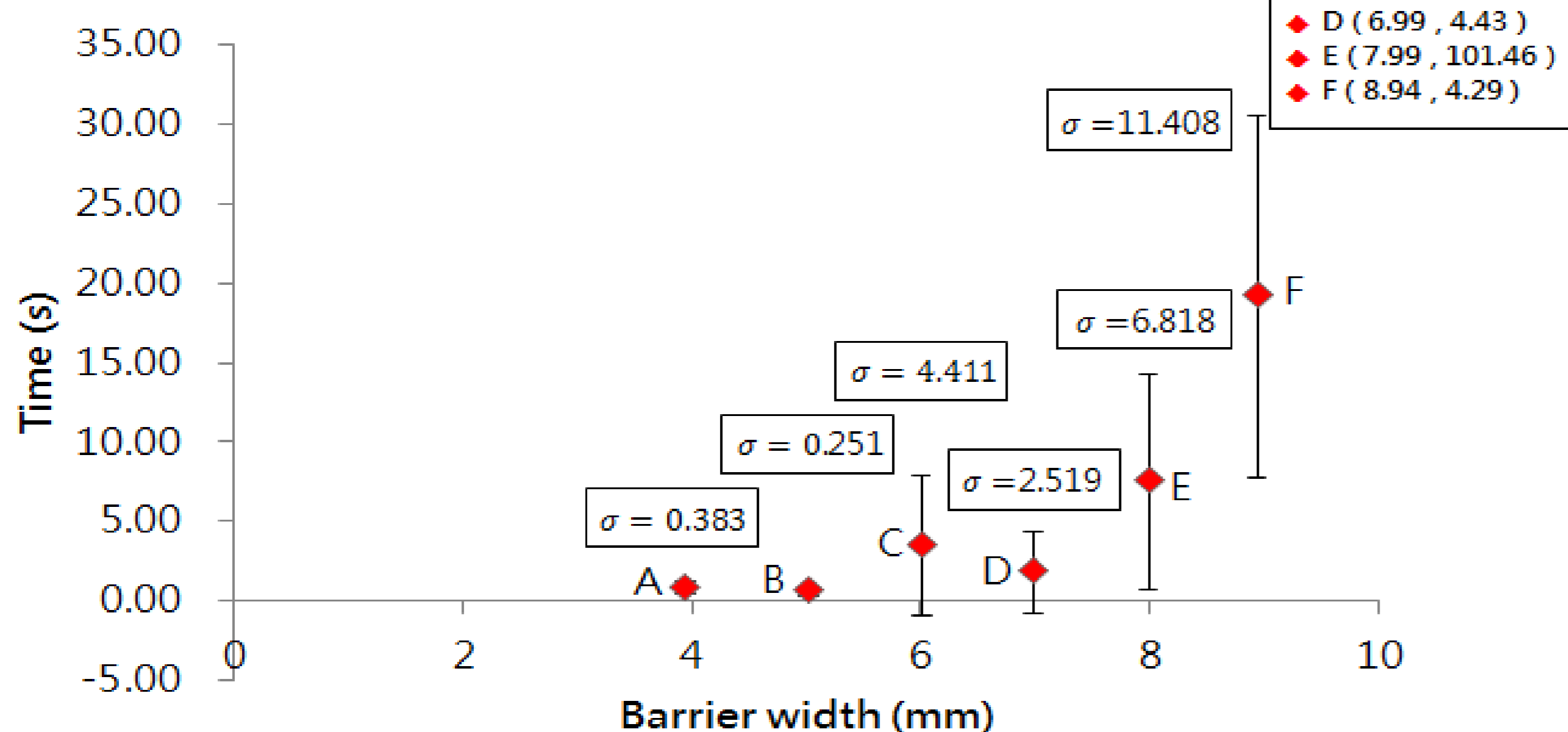
$\ln(P)$ - Barrier width plot



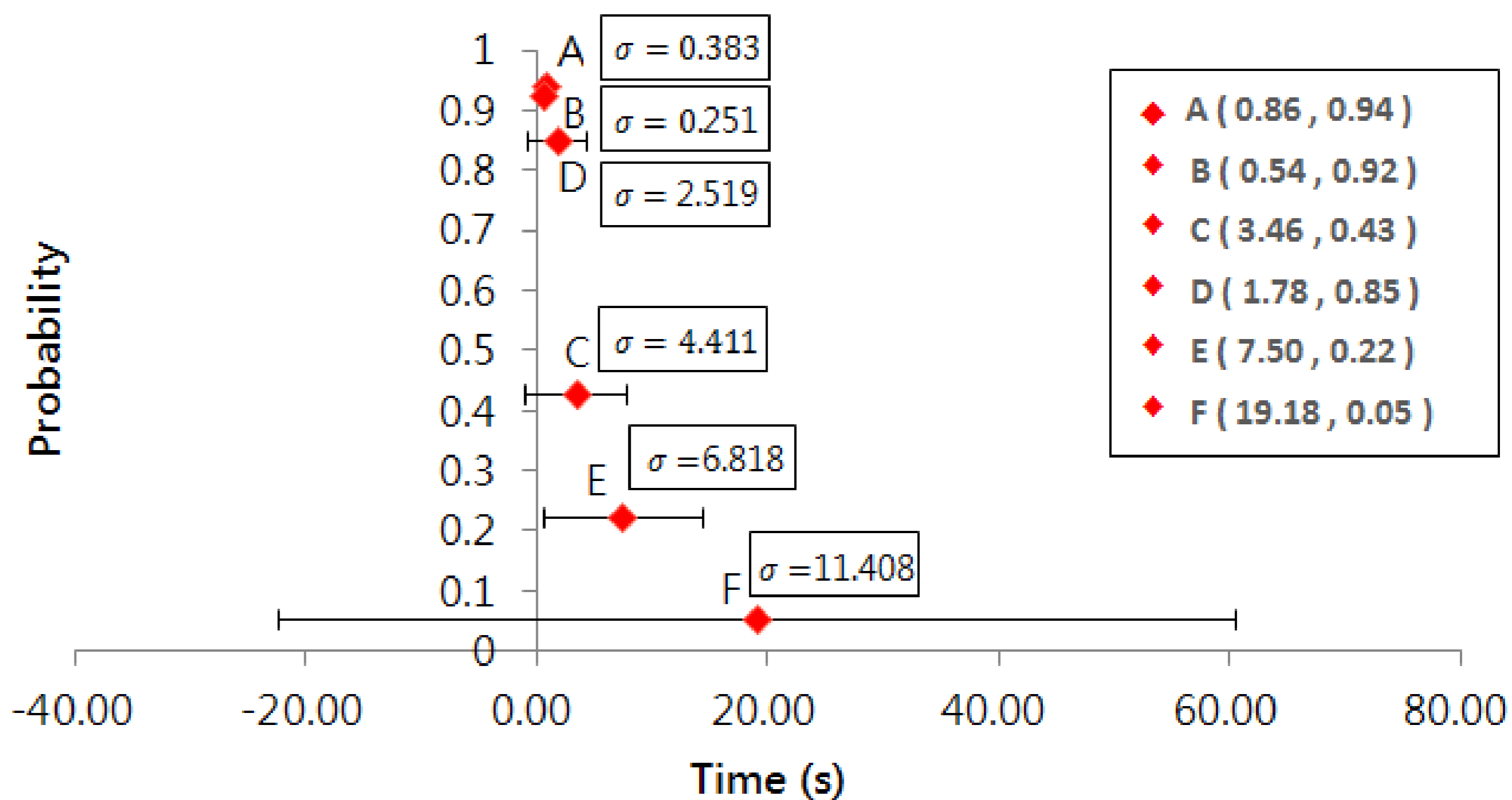
$\ln(T)$ - Barrier width plot



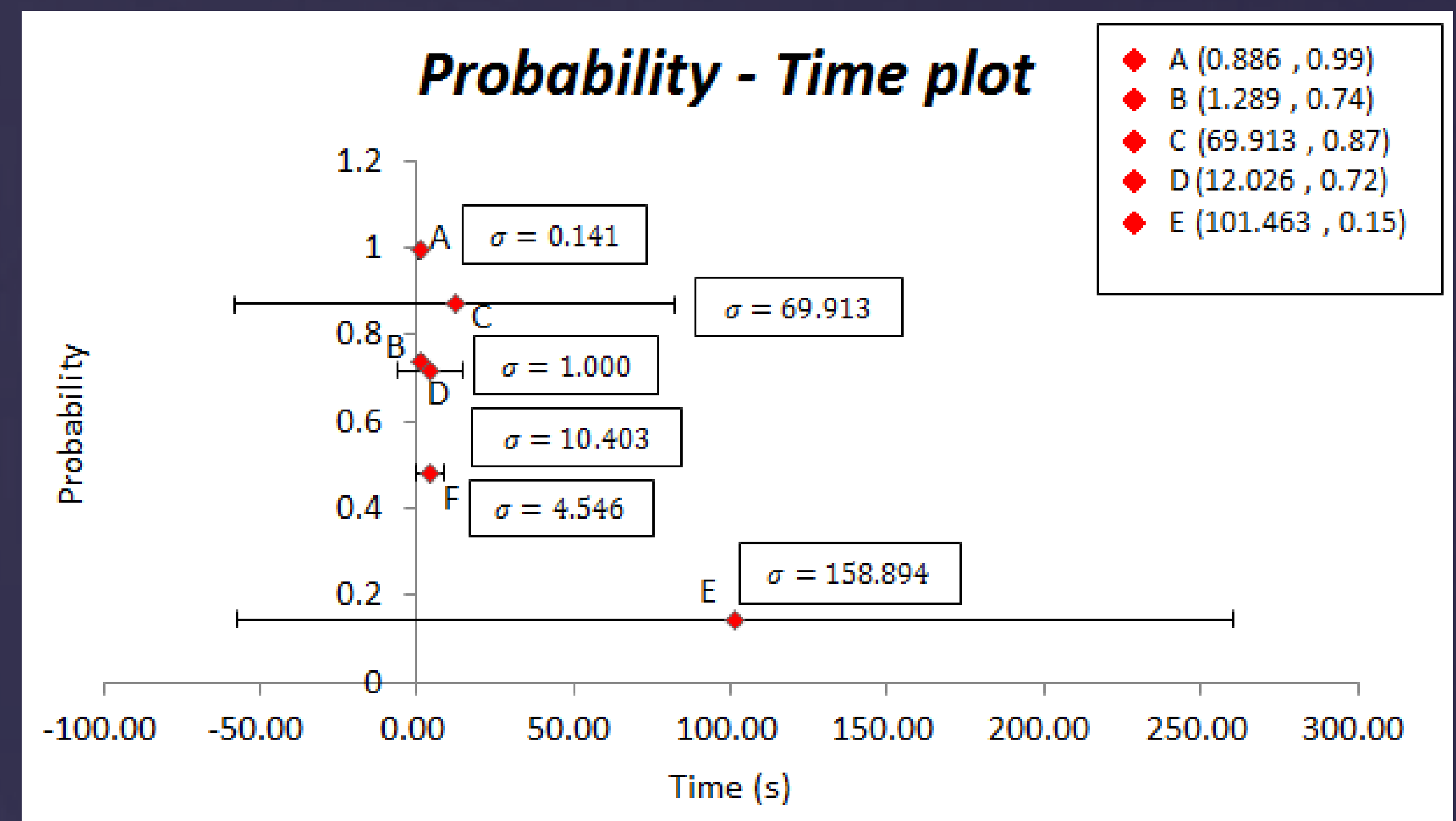
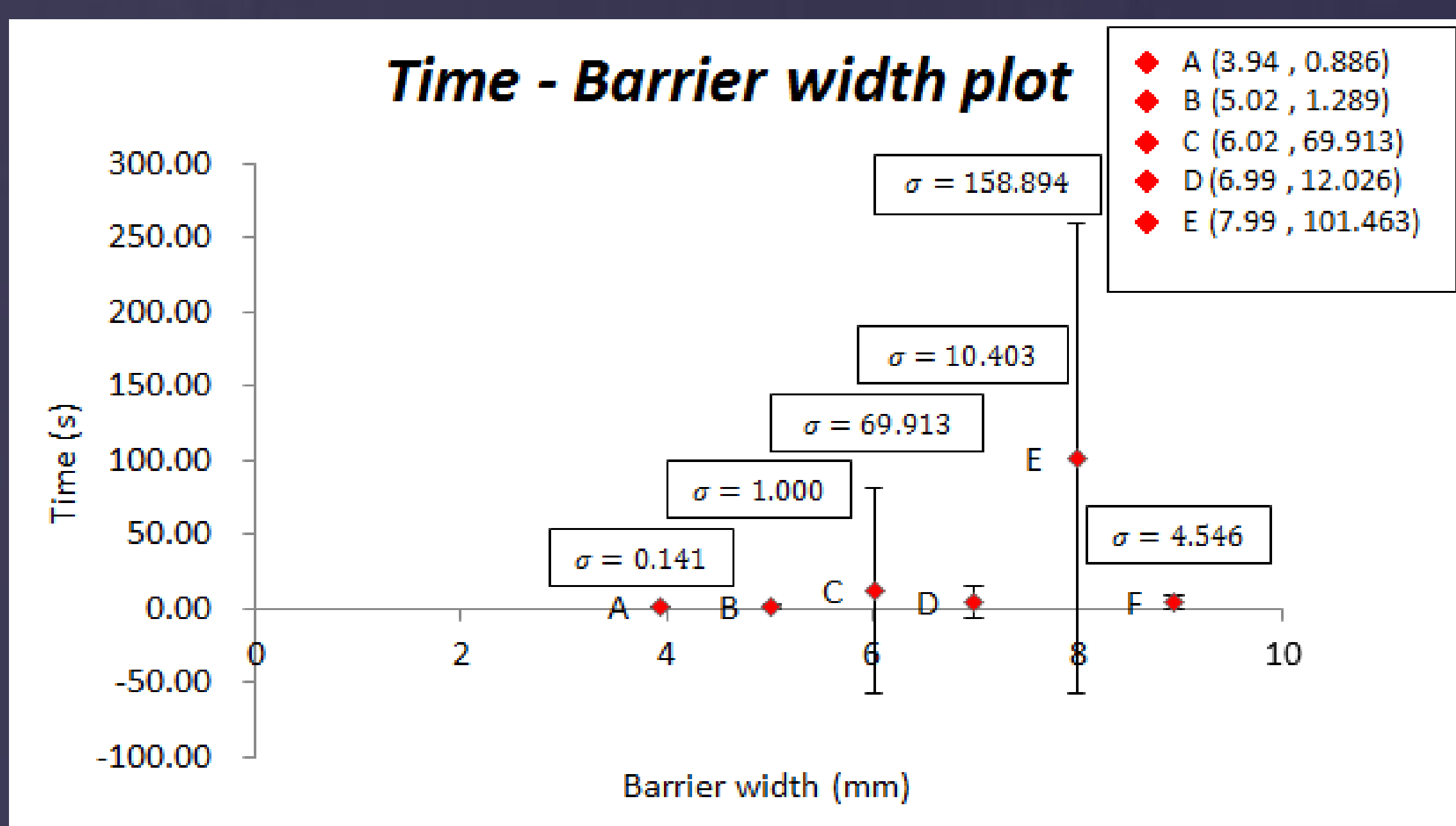
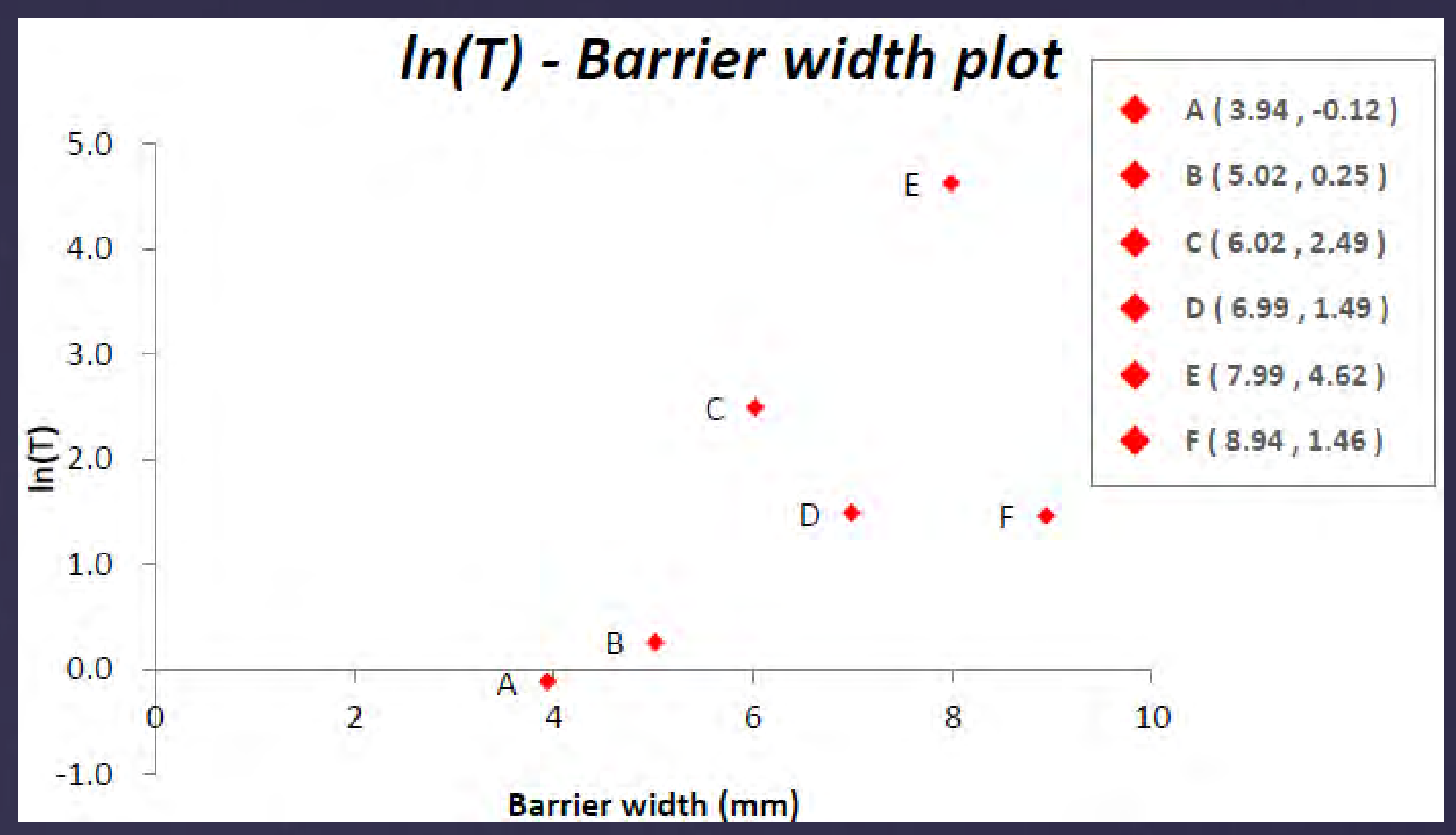
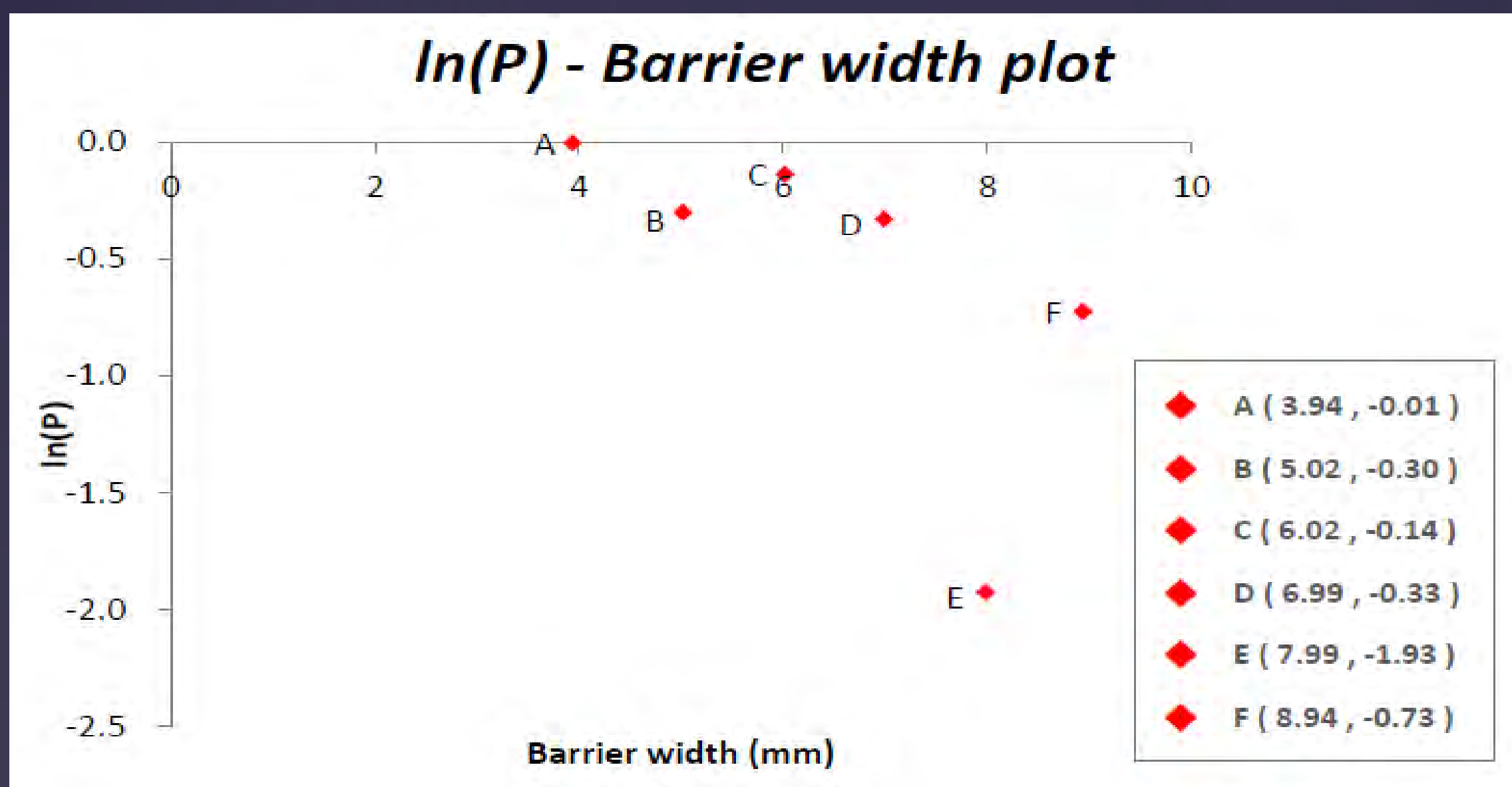
Time - Barrier width plot



Probability - Time plot



(二) 高液面實驗組



陸、結論

一、系統具有擬似量子態特性

透過波的特性，我們利用理論證明了此實驗的系統，與量子世界中的許多公式是相似的，而我們就進一步藉由實驗數據來擬對理論。而根據此似薛丁格之方程式，在巨觀的系統下，令普朗克常數 h 及狄拉克常數 \hbar 以 ξ 及 $\tilde{\xi}$ 進行代替。

二、以似薛丁格方程式的公式推導 $P-d$ 的關係

推知了波函數之解： $\Psi'(x, t) = C_0 e^{-\beta x - \frac{iE}{\tilde{\xi}} t}$ 且 $\beta = \sqrt{\frac{2m(U-E)}{\tilde{\xi}^2}}$

進而可得Walker成功穿越至障礙物另一端的機率： $P = \frac{C}{2\beta} \cdot e^{-\beta d}$

三、穿越機率、穿越時間及障礙物厚度之間的關係

- (一) Walker的 $\ln(P)$ 與 d 具有線性的關係
- (二) Walker的 $\ln(T)$ 與 d 具有線性的關係
- (三) Walker的 P 越低，所需之 T 也越長

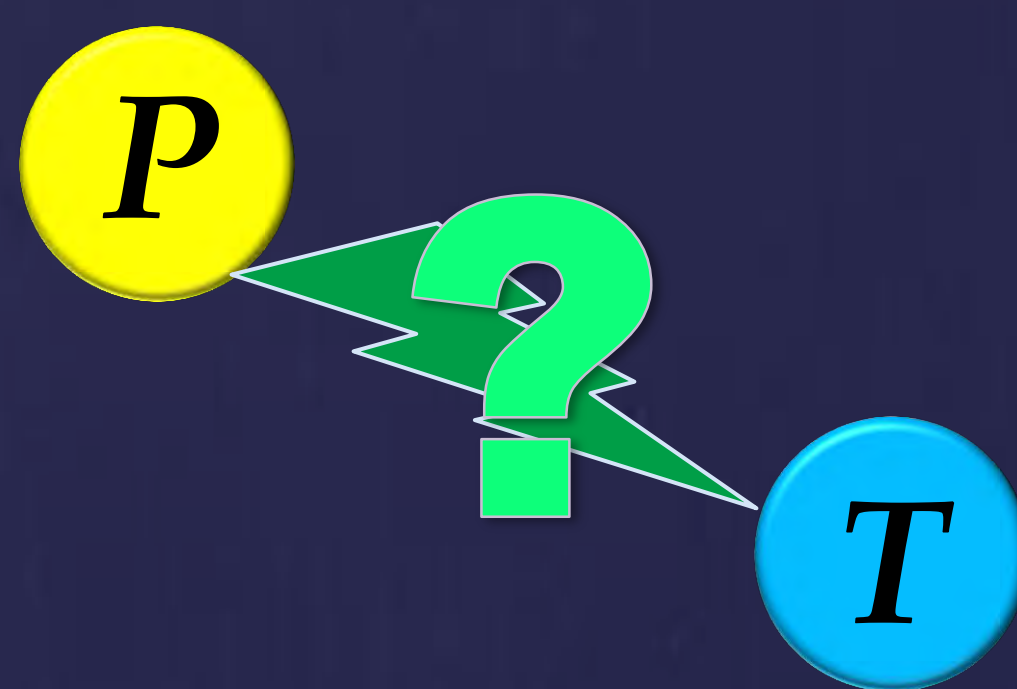
四、高液面與低液面的差異

照著與低液面同樣的變數關係進行繪圖，可以明顯發現高液面的數據點分布地較為混亂，而基於液面高度差的改變，我們推論造成此現象的原因是由於高度差增大，因此波的振幅及其波的性质會更加顯著，使得障礙物上波更複雜的疊加及干涉進而建構出所測量的高液面數據。

柒、未來展望

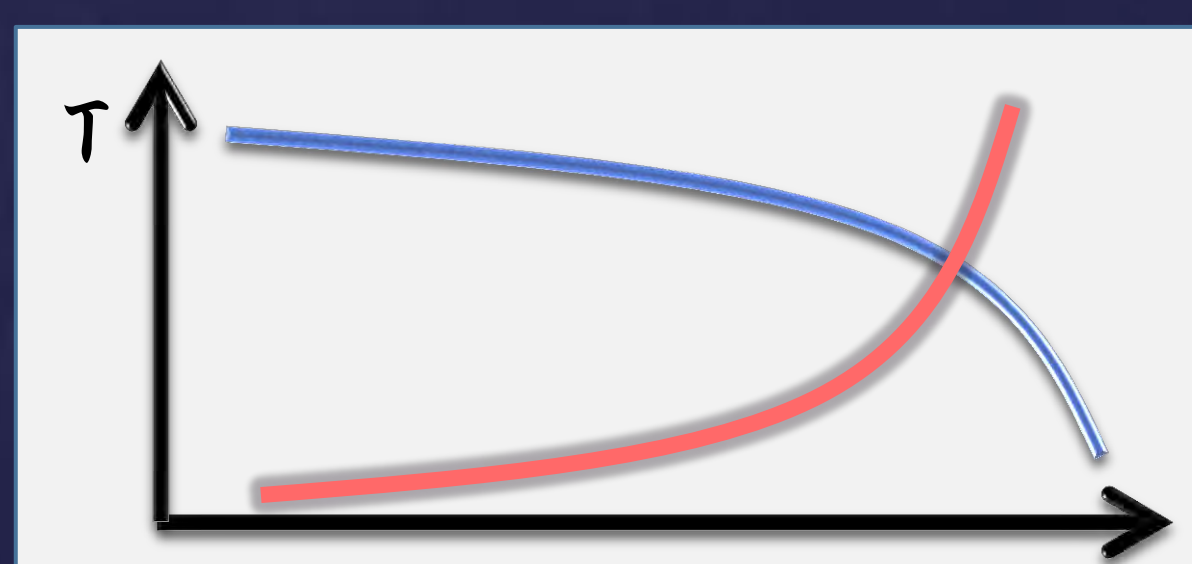
一、來回碰撞次數

我們期望藉由數據的分析，研究油滴在障礙物中的來回碰撞次數和穿越機率和時間是否有所關聯。



二、 $T(P, d) = ?$

目前我們試圖找出穿越時間與障礙物關係，希冀未來能進一步研究出穿越時間與機率和厚度的關係。



捌、參考資料

- 一、Couder, Y., Fort, E., Boudaoud, A. & Gautier, C. H. *Phys. Rev. Lett.* 94, 177801 (2005)
- 二、Daniel M. Harris, Julien Moukhtar, Emmanuel Fort, Yves Couder, and John W. M. Bush. Wavelike statistics from pilot-wave dynamics in a circular corral. 88, 011001 (R) (2013)
- 三、Robert Brady and Ross Anderson, Why bouncing droplets are a pretty good model of quantum mechanics, ArXiv: 1401.4356, (2014)

以及作品說明書上標示之其餘相關文獻