中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　物理與天文學科

051815

以彈簧系統模擬固體內原子振動行為

學校名稱：國立宜蘭高級中學

作者：	指導老師：
高二 吳彥忞 高二 呂浩宇	陳萬城

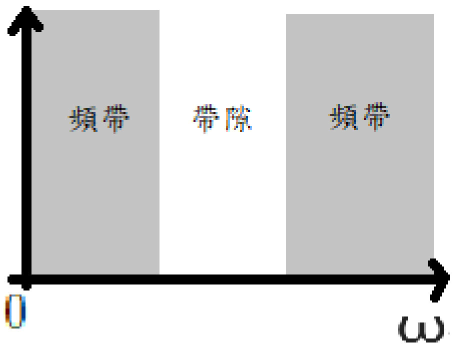
關鍵詞：能隙、晶格震盪、聲子晶體

摘要

以彈簧系統模擬固體內原子振動行為並以 Tracker 軟體分析情運動情形。
以驅動力改變頻率方式看彈簧系統的振動模式，從單一砝碼的運動情形開始探討，逐漸推廣到同質量砝碼串聯，再延伸到兩個不同質量砝碼週期性串聯，最後討論其不同外加頻率下彈簧系統的振動行為，可模擬出兩不同砝碼可以出現如固態物理中晶格振動的色散現象(dispersion relation)，其振動行為可分為聲頻支與光頻支，並觀察出在某些頻域系統不太具有振動行為，這跟固態物理的能隙的相呼應。

壹 研究動機

在國際物理奧林匹亞競賽(IPHO)國家代表隊培訓教材第一冊裡面亦看到有關環狀振子振動的行為，找出其共振的頻率，並將其推廣到無窮多個，此時其共振的頻率有無窮多組解，頻率可視為連續地，但是有其極大值為 $\sqrt{\frac{2k}{m}}$ (k 為彈力常數、m 為振子質量) ，然後再加入質量不一樣的一個振子，此時又會多出一個解，不過此時此解是與之前頻率不一樣，最後在依序地討論到質量一大一小交替構成雙原子鏈時，兩者之間存在一個無解的頻域，如圖(一)所示



(圖一)

對於此現象，請教老師後，得知這與材料內原子的振動行為相類似，是所謂的聲子晶體，而且會出現能隙現象，而且從國家地震研究中心出版的簡訊內容有介紹土木工程師正研究利用此聲子晶體能夠抵擋某些特定頻率的彈性波傳遞，用來設計在建築物上以隔絕地震波的傳遞，我們從網路上也看到西班牙馬德里的一座 200 年前製作的雕塑(圖二)它由許多不鏽鋼空心柱組成，在幾何上有規律地排布，且呈現出周期性。若進行聲學特性研究時發現，某些特定頻率的聲音經雕塑散射後聽不到，即不能在雕塑內傳播。

(圖二) 西班牙馬德里的一座雕塑——流動的旋律

我們對於此特殊現象感到興趣，參考固態物理內容後，決定以彈黃組模擬固體原子振動行為，展開研究。

貳 研究目的

1.單顆砝碼的自然頻率。

2.砝碼在外加驅動力(driven force)施予不同頻率下其振動行為與驅動力的相位關係。

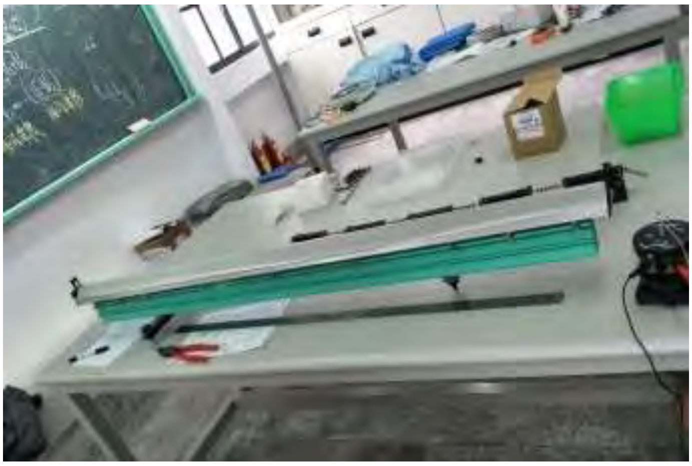
3.多組同質量砝碼在驅動力施予不同頻率下的運動情形。

4.觀察兩不同質量週期性串連的砝碼在驅動力施不同頻率下是否會如固態物理的聲頻支與光頻支運動情形並觀察其振幅情形。

5.經由外加驅動力(driven force)施予不同頻率能模擬出系統的能帶理論，看是否經由有限組單位晶胞能看出晶體內的帶隙(band gap)。

參 研究設備及器材

彈簧	砝碼	弦上駐波起波器 (當驅動力)	攝影器材
			
Tracker 軌跡追蹤軟體	架高鐵架	電腦	電子秤
			

氣墊軌道	送氣馬達	臺車
		

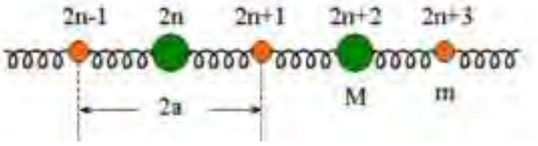
肆 研究過程及方法

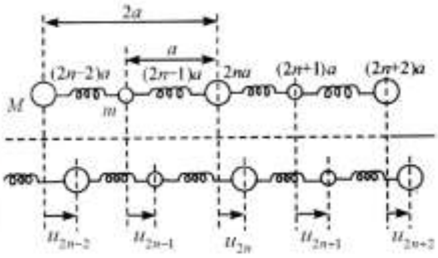
一、文獻探討

固態物理晶格振動理論：

兩種原子質量分別為M、m（設M > m）等間距相間排列，設平衡時相鄰兩原子的間距為a，則每隔2a間距排列情形會重複出現，在固態物理稱此為單位晶胞(unit cell)，相對於原子間的距離，原子均只在平衡點位置附近振動其振動幅度遠小於原子間的距離，如此可以把相鄰原子間的相互作用力看作是正比於相對位移的彈性恢復力，即可以想成原子間有一根彈簧其彈力常數為 β 。情形如下圖表示

在某一時刻t，考慮一個單元內的兩個原子其位移分別為 x_{2n}與x_{2n+1}





由 $F = ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ ，知道有以下之方程式

$$\begin{cases} M\dfrac{d^2x_{2n}}{dt^2} = \beta\left(x_{2n+1} + x_{2n-1} - 2x_{2n}\right) \\ m\dfrac{d^2x_{2n+1}}{dt^2} = \beta\left(x_{2n+2} + x_{2n} - 2x_{2n+1}\right) \end{cases} \quad ....(1)$$

因為原子振動為簡諧運動,所以假設其解為下列型式

$$\begin{cases} x_{2n} = A\cos(\mathrm{k}(2n)a - \omega t) \\ x_{2n+1} = \mathrm{B}\cos(\mathrm{k}(2n+1)a - \omega t) \end{cases}$$ (類似行進波的方程式 $y = R\cos(\mathrm{kx} - \omega t)$)

表示所有原子均以角頻率 ω 振動，波數 $\mathrm{k}=\dfrac{2\pi}{\lambda}$ (λ 為原子所形成的波長)。

將假設解帶入(1)中，並利用和差化積可以簡化成下列式子

$$-M\omega^2 A = \beta(2\cos ka)B - 2\beta A$$
$$-m\omega^2 B = \beta(2\cos ka)A - 2\beta B$$

移項整理成以下式子

$$\begin{cases} \left(2\beta - M\omega^2\right)A - \left[2\beta\cos(ka)\right]B = 0 \\ -\left[2\beta\cos(ka)\right]A + \left(2\beta - m\omega^2\right)B = 0 \end{cases} \quad .....(2)$$

方程式要有解須滿足以下條件

$$\begin{vmatrix} 2\beta - M\omega^2 & 2\beta\cos(ka) \\ -2\beta\cos(ka) & 2\beta - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{\beta}{mM}\left\{\left(m+M\right) \pm \left[m^2 + M^2 + 2mM\cos(2ka)\right]^{\frac{1}{2}}\right\} ....(3)$$

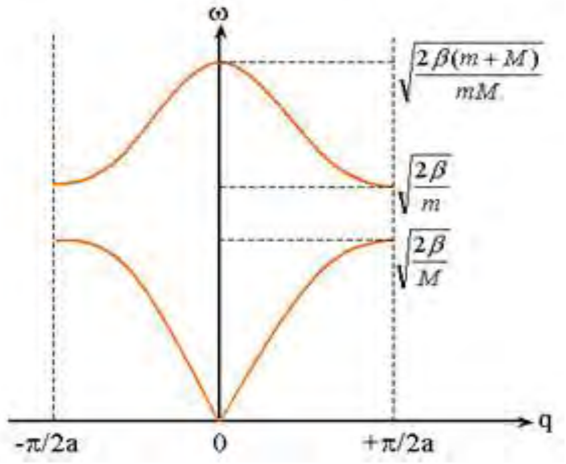
將 ω 兩個解分開來看

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \dfrac{\beta}{mM}\left\{\left(m+M\right) - \left[m^2 + M^2 + 2mM\cos(2ka)\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \\ \omega_2^2 = \dfrac{\beta}{mM}\left\{\left(m+M\right) + \left[m^2 + M^2 + 2mM\cos(2ka)\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \end{cases}$$

cos 值僅能在-1 與 1 之間，所以 ω_1 與 ω_2 均只能在一定範圍內

又參考大學固態物理內容：改成改變 k 值，看 ω_1 與 ω_2 的值發現可以用下列的圖表示，而且

$\sqrt{\dfrac{2\beta}{M}} < \omega < \sqrt{\dfrac{2\beta}{m}}$ 這個區間是不存在其數學解，在固態物理稱之為能隙，研究此現象又稱為能帶理論，在量子力學領域，晶格振動其能量是不連續的，因此稱為聲子以別與光子。



(A)聲頻支由來的推導

由(2)中 $-[2\beta\cos(ka)]A+\left(2\beta-m\omega^2\right)B=0$

可以得到$\therefore \dfrac{B}{A}=\dfrac{2\beta\cos(ka)}{2\beta-m\omega^2}$

從圖中可看出$\omega_1^2<\dfrac{2\beta}{M}<\dfrac{2\beta}{m}$又 k 被限制在$-\dfrac{\pi}{2a}<k\le\dfrac{\pi}{2a}$

$\therefore \dfrac{B}{A}=\dfrac{2\beta\cos(ka)}{2\beta-m\omega^2}\ge 0$

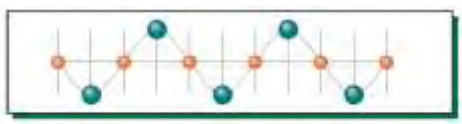
※因此對應到ω_1的解其相鄰原子的振動方向相同，原子振動情形可用下圖所示

特例情形

Case1.

當 k=$\dfrac{\pi}{2a}$時$\Rightarrow$B=0(m(輕的)原子不動) 且$\omega_1=\sqrt{\dfrac{2\beta}{M}}$為 max

其原子運動情形如圖所示



上面的圖可認為 M 原子振動形成駐波(此時λ=4a)

當$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}\to 0$(原子所形成的波波長為長波長)時，

$\omega_1^2\approx\dfrac{2\beta}{m+M}\sin^2(ka)\approx\dfrac{2\beta}{m+M}(ka)^2\Rightarrow\omega_1=\sqrt{\dfrac{2\beta}{m+M}}\cdot|k|\cdot a$且$\dfrac{A}{B}\to 1$

即在長波極限下，兩種原子的運動完全一致，振幅和相位均相同。

且波速 $v=\frac{\omega_1}{|k|}=\sqrt{\frac{2\beta}{m+M}}\cdot a$ 為常數，這種原子振動所形成的波很像空氣中氣體分子所形成的聲波，所以 ω_1稱為聲頻支

(B)光頻支由來的推導

由(2) $\left(2\beta-M\omega^2\right)A-\left[2\beta\cos(ka)\right]B=0$

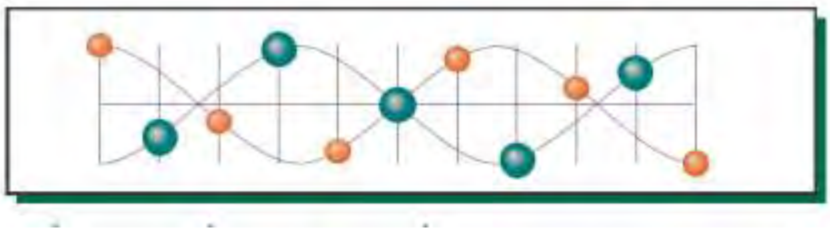
可以得到 $\frac{A}{B}=\frac{2\beta\cos(ka)}{2\beta-M\omega^2}$

又從圖中可看出 $\omega_2^2>\frac{2\beta}{m}>\frac{2\beta}{M}$ 又 k 被限制在 $-\frac{\pi}{2a}<k\leq\frac{\pi}{2a}$

所以 $\frac{A}{B}=\frac{2\beta\cos(ka)}{2\beta-M\omega^2}<0$

⇒代表相鄰原子的振動方向相反

原子振動情形可用下圖表示：



原胞內為兩個帶相反電荷的離子（如離子晶體），那麼正負離子的相對振動必然會產生電偶極矩，而這一電偶極矩可以和電磁波發生相互作用。在某種光波的照射下，光的電場可以激發這種晶格振動，因此，我們稱這種振動為光頻支。

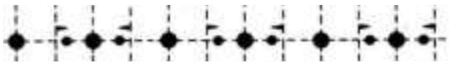
特例情形

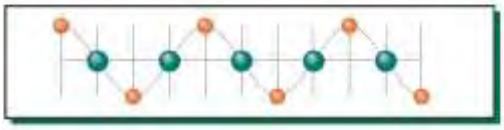
Case1：

當 k=$\frac{\pi}{2a}$ 時⇒ $\frac{A}{B}=\frac{2\beta\cos(ka)}{2\beta-M\omega^2}$

則 A=0(M(重的原子)不動) 且 $\omega_2=\sqrt{\frac{2\beta}{m}}$ 為 min

其原子運動情形如圖所示





上面的圖可認為 m 原子振動形成駐波(此時 λ=4a)

Case2：

當k=0時，$\omega_2=\sqrt{\dfrac{2\beta(m+M)}{mM}}=\sqrt{\dfrac{2\beta}{\mu}}$(其中$\dfrac{1}{\mu}=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{M}$)

則$\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=-\dfrac{m}{\mathrm{M}}$(兩原子的位移量與質量成反比)

即單位晶格內中兩原子振動方向相反，但質心固定不變。如圖所示

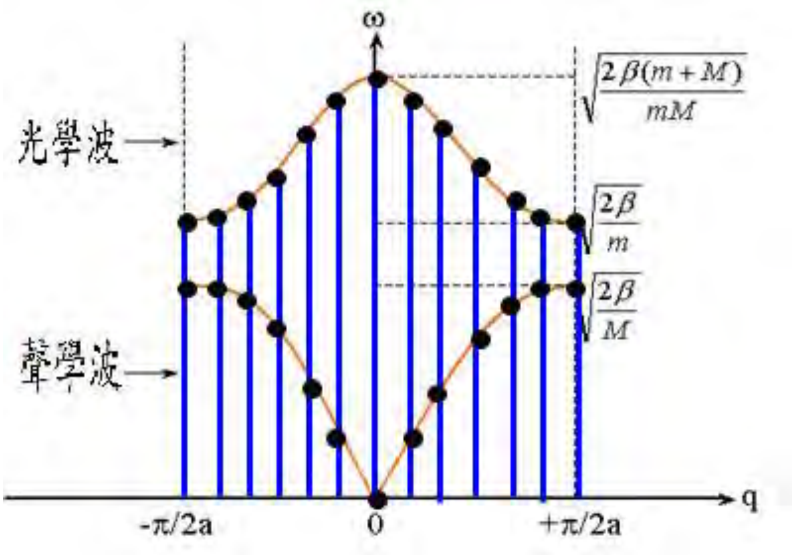
上面求解假定M、m無限長，這是不可能的，參考大學固態物理內容利用週期性邊界條件就是將一有限長度的晶體看成無限長晶體的一個重複單元：

就是假設晶體內有N個單位晶胞，即有2N個原子

$$x_{2n}=x_{2N+2n}\Rightarrow A\cos(k(2na)-\omega t)=A\cos(k(2N+2n)a-\omega t)$$

$$\therefore 2kNa=2\pi\cdot n \;\Rightarrow k=\frac{\pi}{Na}\cdot n(n=1.2.....N)$$

如此可以得到振動的波數k的值為有限個其k與對應的ω_1與ω_2圖，如下圖所示：ω由連續值變成是不連續的值



經由(3)知

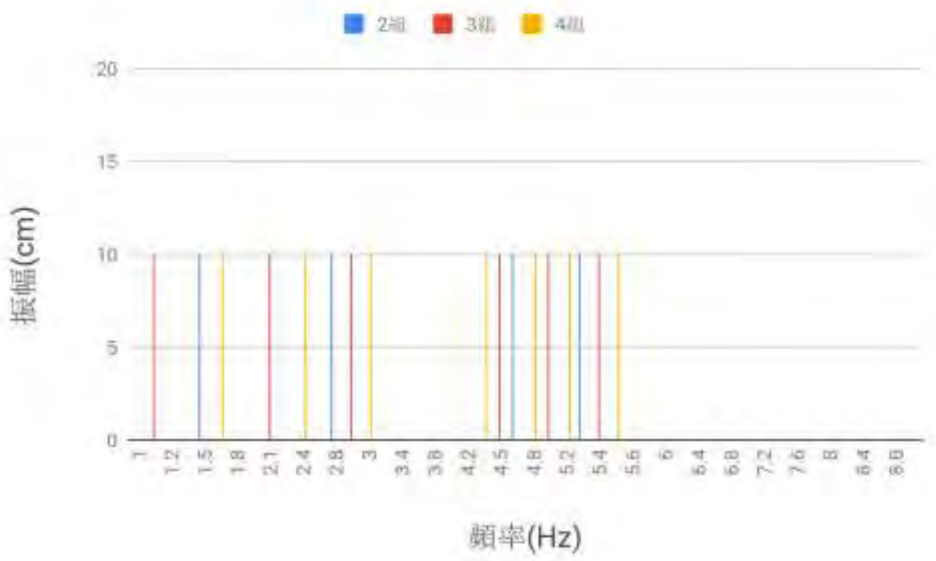
$$\omega^2=\frac{\beta}{mM}\left\{(m+M)\pm\left[m^2+M^2+2mM\cos(2ka)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}$$ ，其中 $k=\frac{\pi}{Na}\cdot n$ (=1.2.3……N)

系統內有 N 個原子就有 N 個振動解

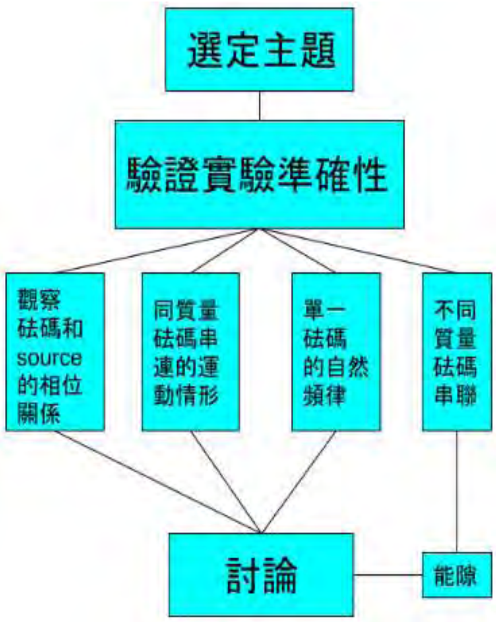
二、實驗模擬理論想法：

本實驗若於水平方向串聯彈簧系統，因砝碼有重量，無法呈現水平狀態，因此改為鉛直方向，串聯彈簧系統，如圖所示。

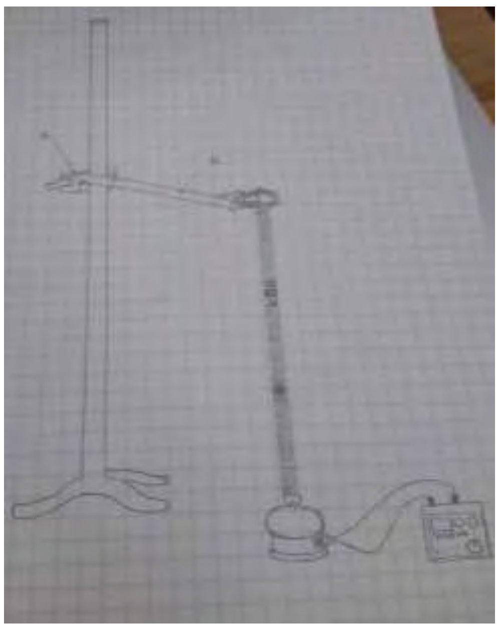
但受限於彈簧受砝碼重量影響會伸長，無法組成多組單位晶胞。因此以上述模型以 2 個單位晶胞、3 個單位晶胞、4 個單位晶胞、………並以訊號源輸入各種頻率，看其系統振動情形，期望經由共振方式(如圖)，找出其振動的 ω ，並能模擬出系統的能帶理論，看是否經由有限組單位晶胞能看出晶體內的帶隙(band gap)。



二、實驗流程圖



三、實驗示意圖



一. 測量單顆砝碼的自然頻率

(一)為了確保實驗的準確度，我們以理論公式算出單一砝碼的自然頻率

$f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ ，並將之和實際測得之值加以比較其相關性。

(二)觀察彈簧在自然頻率下和振動源(source)之相位關係

二.觀察同質量多顆砝碼的自然頻率並分析振動情形

(一)以 50 克砝碼串連而成之彈簧組 (二)測試不同頻率下砝碼組的運動行為

(三)同樣以上述公式計算比較實際數據 (四)觀察在共振頻率下各砝碼間之相位關係

三.觀察兩不同質量砝碼週期性串聯運動行為

(一)以 50/20 克砝碼串連而成彈簧組(依序為周期數 2、周期數 3、周期數 4)

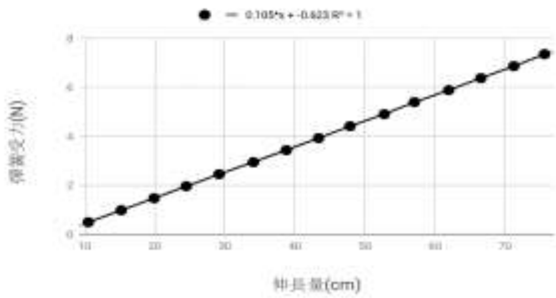
(二)測試不同頻率下砝碼組的運動行為 (三)測量不同頻率下砝碼組之最大振幅

(四)觀察在共振頻率下各砝碼間之相位關係

伍 研究結果

一. 彈簧之正比限度

為了確保在實驗進行中，彈簧之受力皆和其伸長量的一次方成正比，我們以彈簧的伸長量(cm)為 x 軸，受力(N)為 y 軸做圖，其圖如下。



二.單顆砝碼

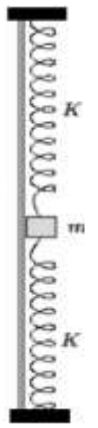
(一)單顆砝碼的自然頻率

(1).由靜力平衡方式算出彈簧的彈性係數 k 值:10.51(N/m)，並考量到振動時彈簧的等效質量，由電子天平知彈簧質量為 10.00g。

(2)因為砝碼做簡諧運動，所以我們以簡諧運動公式算出砝碼的自然頻率

$f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ ，並加與實驗值比較。(方程式中 k 要帶 2k，質量 m 除了砝碼質量還要加上彈簧的等效質量$m_{等效} = \frac{1}{3} m_{彈簧}$)

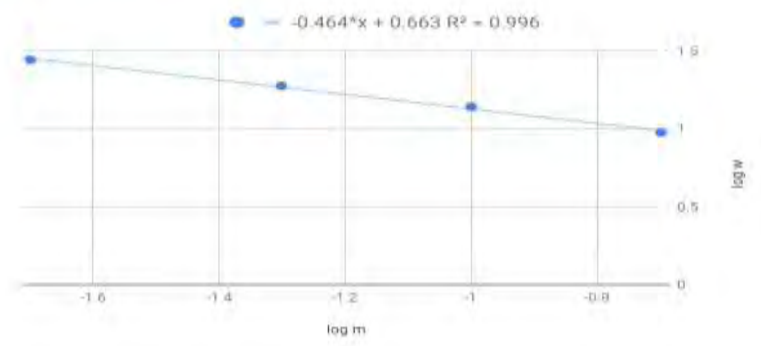
(3)得結果如下表



砝碼 m(kg)	測得 f(Hz)	理論 f(Hz)
0.02	4.4	4.5
0.05	3.0	3.1
0.1	2.2	2.2
0.2	1.5	1.6

因為$\omega = 2\pi f$；$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$，取對數後得到

$\log \omega = -\frac{1}{2}\log m + \log 2k$，其中$-\frac{1}{2}$為斜率，$\frac{1}{2}\log 2k$ 為截距，其圖如下:

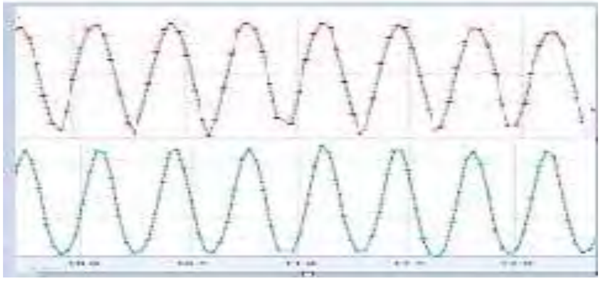


(二)單顆砝碼在自然頻率下和振動源(source)之相位關係

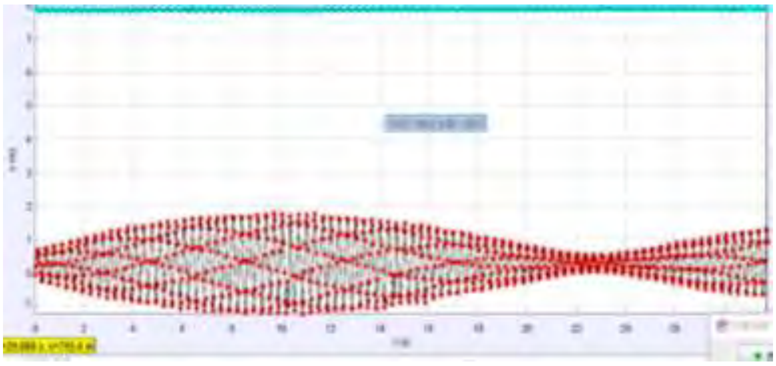
(單一砝碼質量 m 為 50g，自然頻 率為 3.0)圖形如下。

(紅色為砝碼的運動情形，藍色為振動源(source)的運動情形)

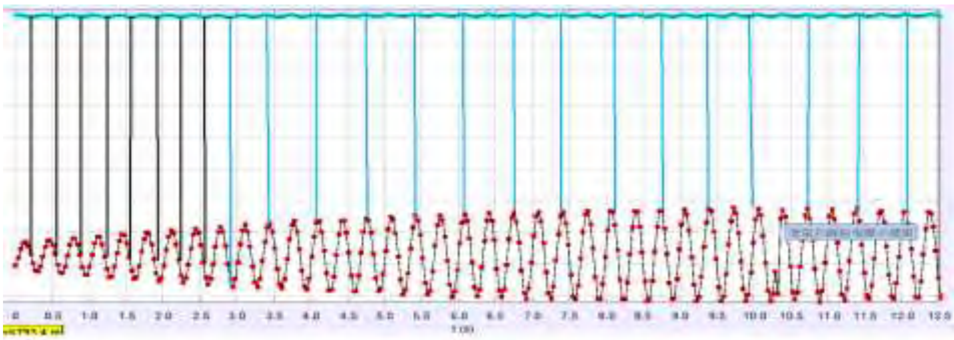
f(Hz)	相位關係
<3.0	同相(相位差為 0 度)
3.0	相位差由 90 度變為 0 度再變為 90 度依此循環
>3.0	反相(相差為 180 度)



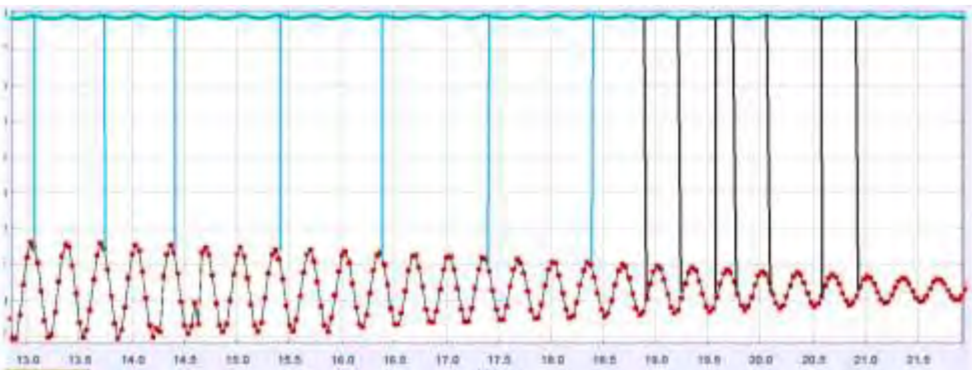
(振源頻率 f=2.9Hz，圖中之振幅乃經繪圖軟體後製而成，未按實際比例。)



(振源頻率 f=3.0Hz)

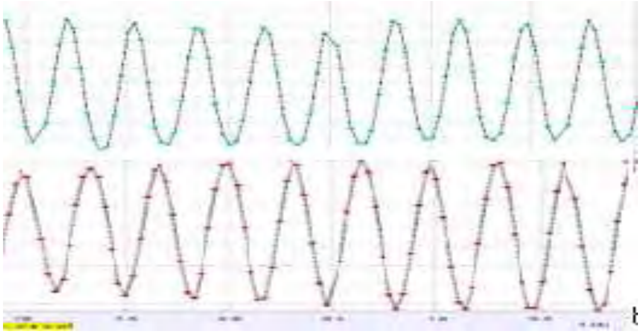


(擷取某一段時間相位差由 90 度變成 0 度)



(擷取某一段時間相位差由 0 度轉為 90 度)

砝碼振動情形就好比波動內容裡面的「拍音」，會有此現象是因為振源的頻率最小單位為 0.1Hz 無法再精確，此頻率與砝碼的自然頻率極為接近，才會出現拍音的現象，所以振動源與砝碼的相位才會變得不固定。

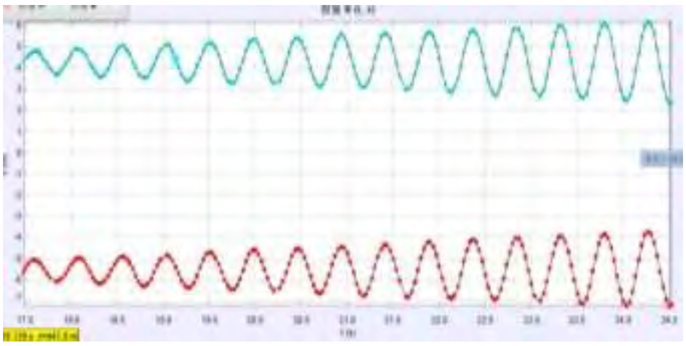
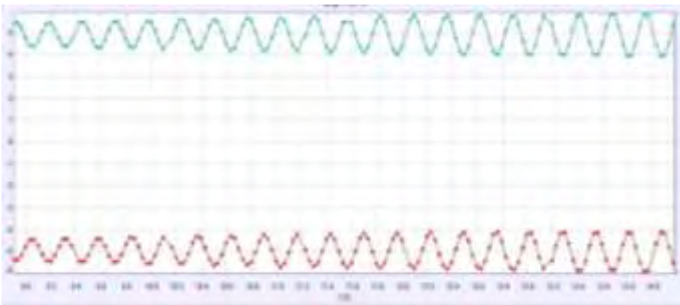


(振源頻率 f=3.1Hz，圖中之振幅乃經繪圖軟體後製而成，並按實際比例。)

三.同質量多顆砝碼

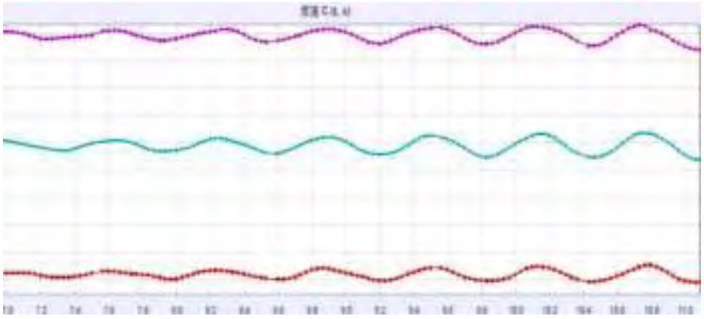
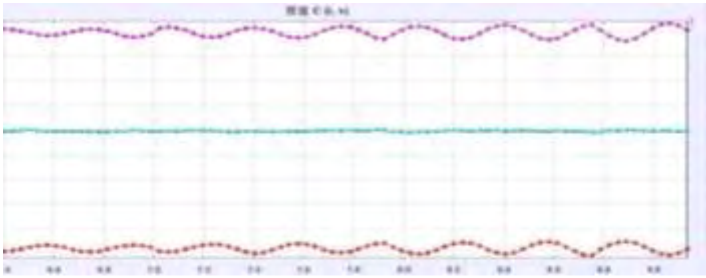
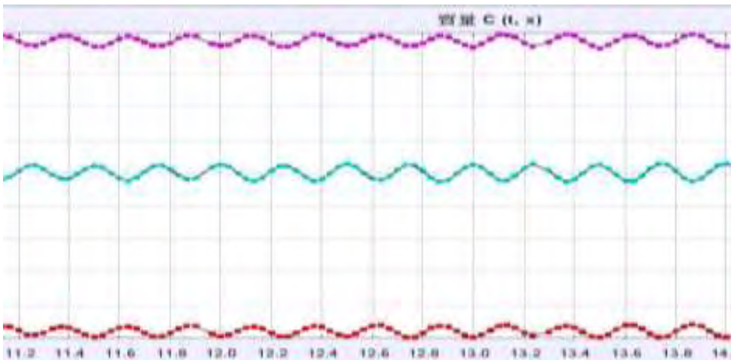
(一)兩顆砝碼

不斷的將驅動力的頻率從最低值 f=1.0Hz，每次增加 0.1Hz，發現當外加頻率在 2.1Hz 及 3.8Hz 時，我們發現砝碼的振幅特別明顯，我們便以 Tracker 軟體追蹤其運動行為並加以討論，如下表所示

共振頻率與示意圖	振子位移與時間關係圖
f=2.1Hz ⇈ ⇈	
f=3.8Hz ⇈ ⇊	

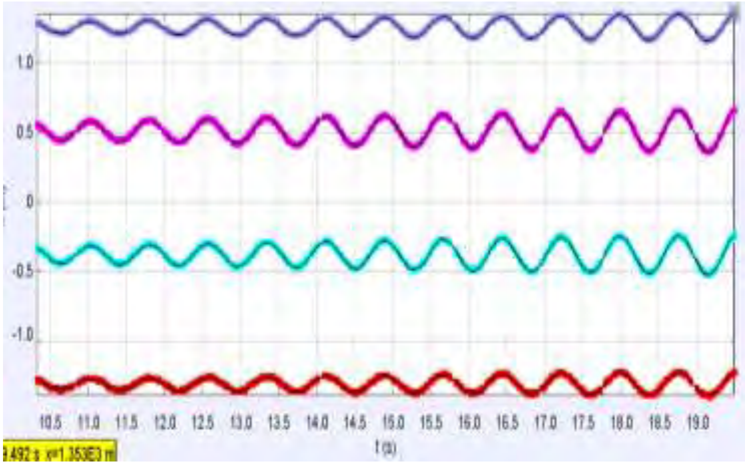
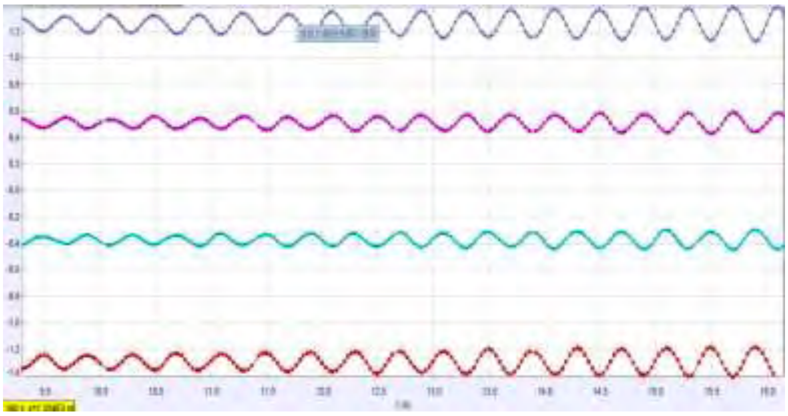
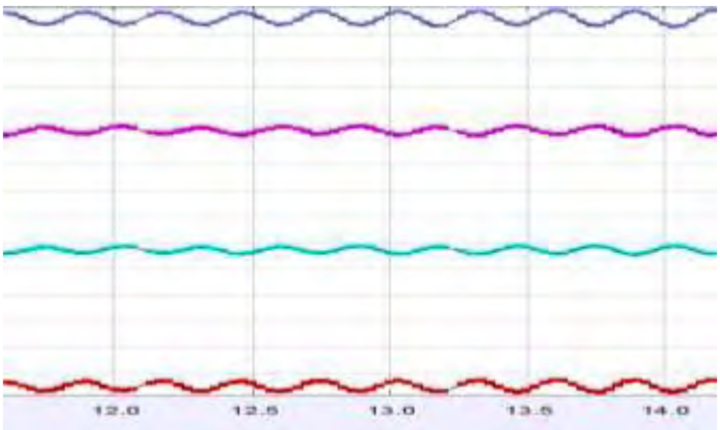
(二)三顆砝碼

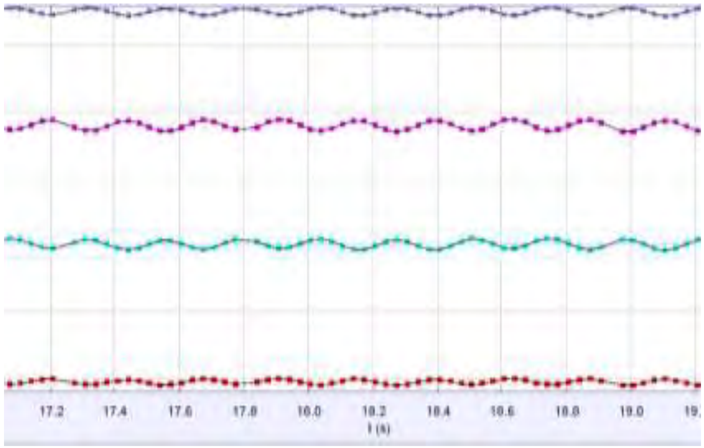
仿上面實驗方法，系統砝碼數量改為 3 顆，以相同方法找其共振頻率並以 Tracker 軟體分析運動情形，其共振頻率及相位關係如下：

共振頻率與示意圖	振子位移與時間關係圖
f=1.6Hz ↿↾ ↿↾ ↿↾	
f=3.0Hz ↿↾ 幾乎不動 ⇃⇂	
f=4.0Hz ↿↾ ⇃⇂ ↿↾	

(三)四顆砝碼

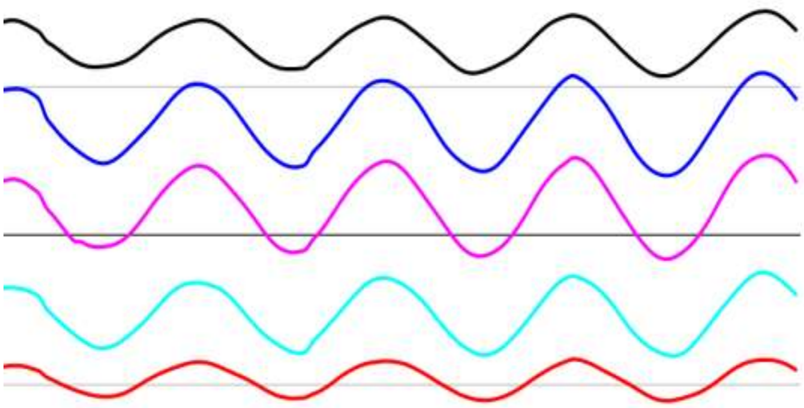
觀察四顆砝碼之共振頻率下並分析其運動情形，所得結果如下圖所示。

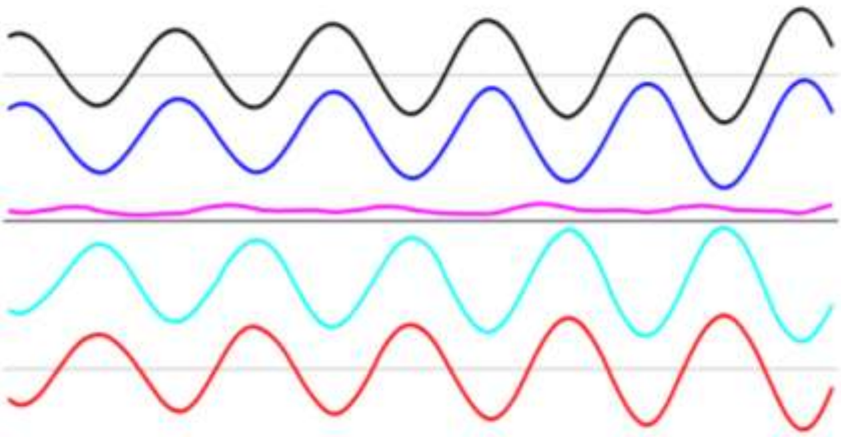
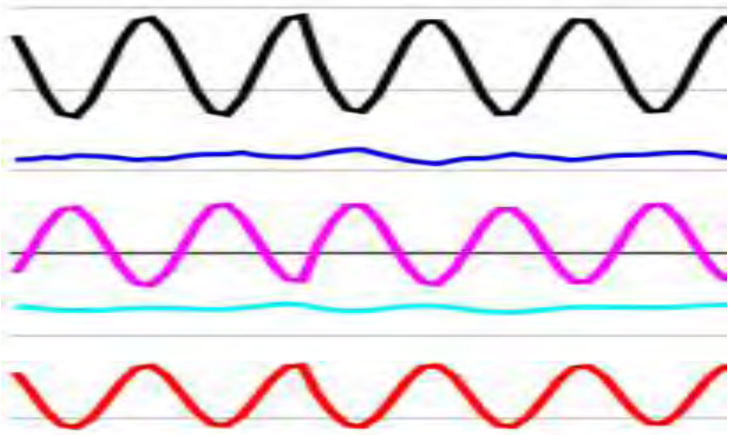
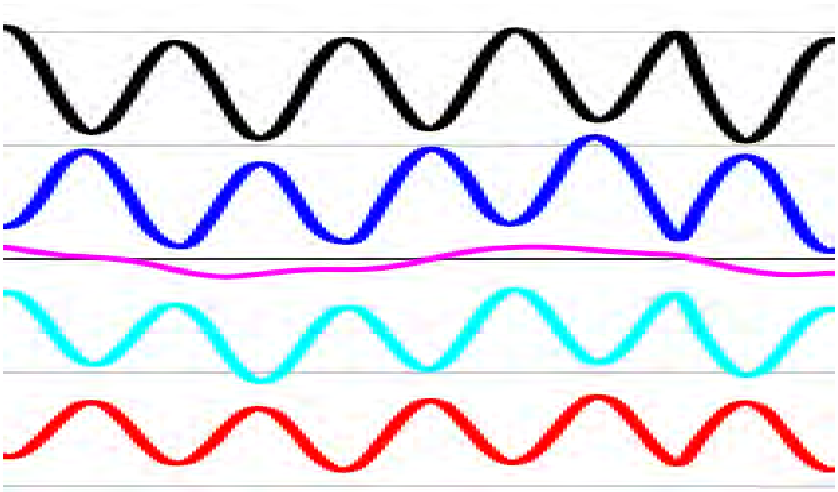
共振頻率與示意圖	振子位移與時間關係圖
f=1.3Hz ⇈ ⇈ ⇈ ⇈	
f=2.5Hz ⇈ ⇈ ⇊ ⇊	
f=3.5Hz ⇈ ⇊ ⇊ ⇈	

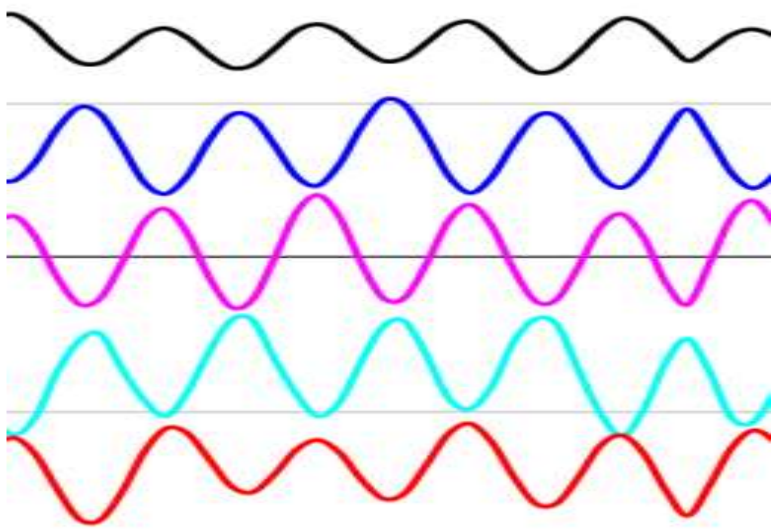
f=4.3Hz ⇈ ⇊ ⇈ ⇊	

(四)五顆砝碼

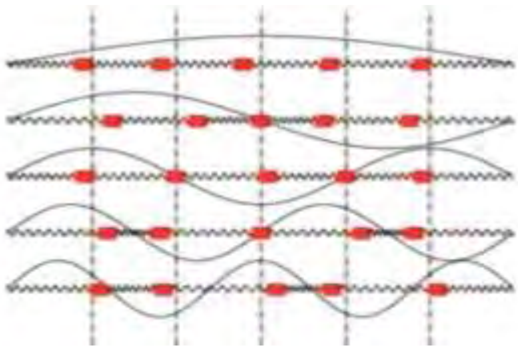
觀察五顆砝碼之共振頻率下並分析其運動情形，所得結果如下所示(由於此時法碼組的總長度過長，導致法碼的運動情形在 tracker 分析下振幅過小，所以我們以 excel 將其座標平移以利於觀察)

共振頻率與示意圖	振子位移與時間關係圖
f=1.1Hz ⇈ ⇈ ⇈ ⇈ ⇈	

f=2.1Hz ⇈ ⇈ 幾乎不動 ⇊ ⇊	
f=3.0Hz ⇈ 幾乎不動 ⇊ 幾乎不動 ⇈	
f=3.8Hz ⇈ ⇊ 幾乎不動 ⇈ ⇊	

f=4.3Hz ⇈ ⇓ ⇈ ⇓ ⇈	

為了清楚方便的描述各振子振動產生的波的行為，我們參考網路上動畫發現可以將上面的情形表示成下圖



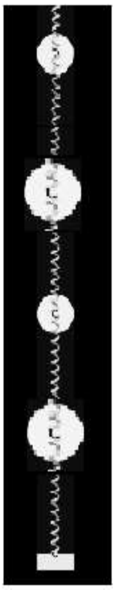
即可認為振子振動好像是兩端為固定端形成的駐波，若兩固定端的長度為 L，則其駐波的波長為 $L=\frac{n}{2}\lambda$ 如圖中最上方情形就是各振子運動方向都保持同向，此時的振子振動形成的波長 $\lambda_1 = 2L$ ，再往下看，正中央的振子幾乎保持不動，此時的振子振動形成的波長 $\lambda_2 = L$ ，這樣就可以輕鬆的看出在不同振動模式下各振子之間的相位關係與位移情形，這種因為振子振動形成的波長與這時共振的頻率兩者相乘即時這種模式下的波速，我們發現波速並不為常數，這說明彈簧系統形成了色散現象(dispersion relation)

四.觀察兩不同質量砝碼週期性串聯運動行為

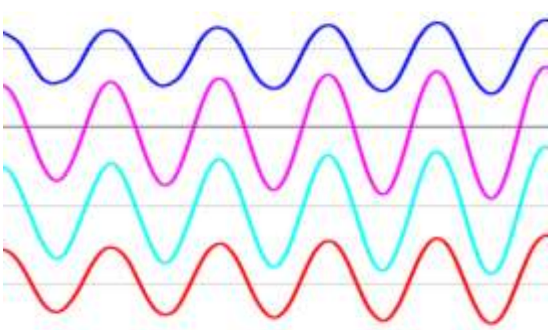
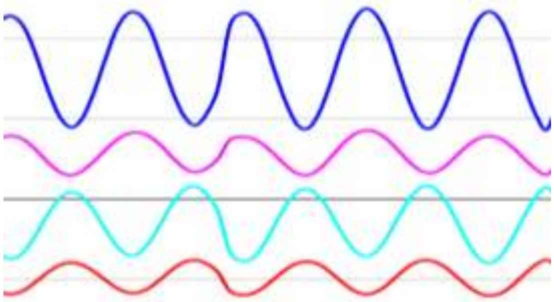
(一)以 50 克、20 克砝碼串連而成彈簧組週期數為 2

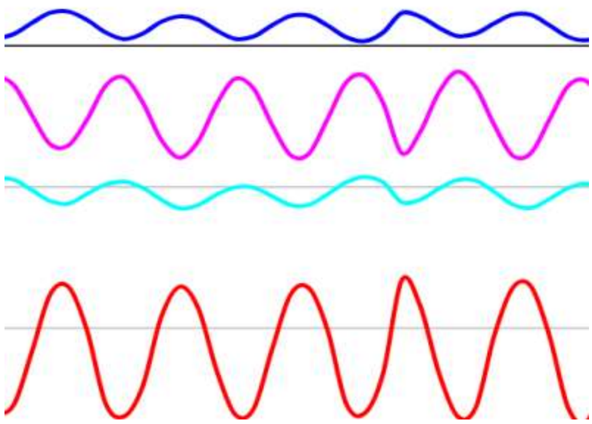
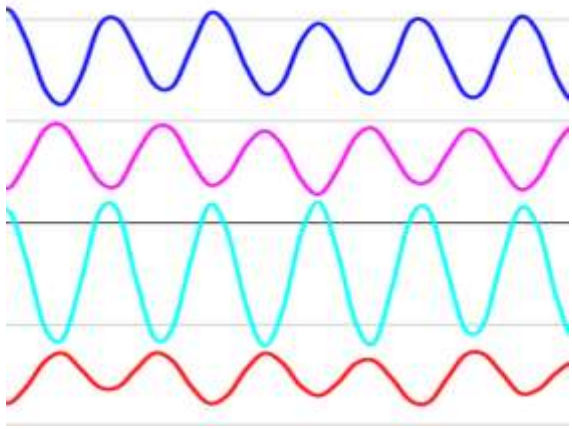
若兩砝碼質量相差太懸殊，因鉛直方向串聯會造成系統的總長度過長，又若砝碼質量太小無法拉開彈簧，且並須考量我們振源端最低頻率僅能從 1.0Hz 開始，多方嘗試後使用此質量組合(20g.50g)進行 ，並仿之前實驗方法找出系統的共振頻率。 (由於此時

砝碼組的總長度過長，導致砝碼的運動情形在 tracker 分析下振幅過小，所以我們以 excel 將其座標平移以利於觀察)本實驗觀察所在特定頻率下彈簧組之運動情形如下圖所示。(紅、紫色為 20g 砝碼，深、淺藍色為 50g 砝碼)

共振頻率(Hz)	1.5	2.8	4.6	5.3
振子由上而下運動情形 	⥣ ⥣ ⥣ ⥣ 如圖(一)	⥣ 幾乎不動 ⇓ 幾乎不動 如圖(二)	幾乎不動 ⥣ 幾乎不動 ⇓ 如圖(三)	⥣ ⇓ ⥣ ⇓ 如圖(四)
屬性	單位晶胞原子振動同向，對應到理論部分的聲頻支		單位晶胞原子振動反向，對應到理論部分的光頻支	

(1)振子位移對時間圖

圖(一)	圖(二)
	
圖(三)	圖(四)

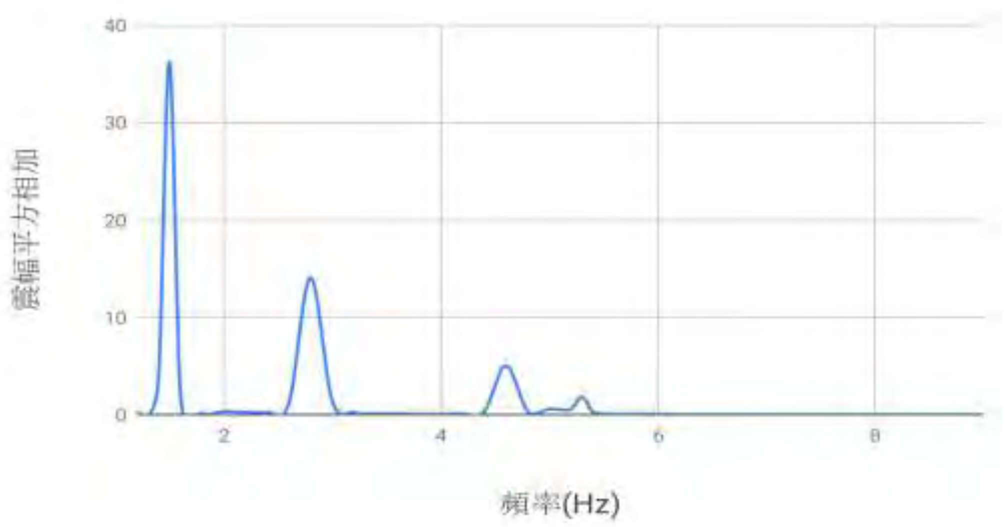
(2)觀察其頻率對振幅的影響

1.紀錄其中一個周期內兩砝碼在不同頻率下之振幅

f(Hz)	平均振幅(50g)	平均振幅(20g)	f(Hz)	平均振幅(50g)	平均振幅(20g)	f(Hz)	平均振幅(50g)	平均振幅(20g)
1.0	0.19cm	0.15cm	3.8	0.17cm	0.15cm	6.6	0.03cm	0.02cm
1.2	0.41cm	0.43cm	4.0	0.13cm	0.21cm	6.8	0.04cm	0.05cm
1.4	1.39cm	1.34cm	4.2	0.17cm	0.28cm	7.0	0.03cm	0.02cm
1.6	1.17cm	1.03cm	4.4	0.23cm	0.52cm	7.2	0.02cm	0.03cm
1.8	0.22cm	0.28cm	4.6	0.22cm	2.23cm	7.4	0.01cm	0.01cm
2.0	0.48cm	0.28cm	4.8	0.38cm	0.47cm	7.6	0.02cm	0.01cm
2.2	0.40cm	0.30cm	5.0	0.47cm	0.58cm	7.8	0.02cm	0.02cm
2.4	0.47cm	0.16cm	5.2	0.55cm	0.50cm	8.0	0.02cm	0.03cm
2.6	1.00cm	0.39cm	5.4	0.39cm	0.39cm	8.2	0.01cm	0.02cm
2.8	3.36cm	1.67cm	5.6	0.14cm	0.19cm	8.4	0.02cm	0.03cm
3.0	1.12cm	0.41cm	5.8	0.15cm	0.21cm	8.6	0.02cm	0.01cm
3.2	0.33cm	0.32cm	6.0	0.15cm	0.17cm	8.8	0.01cm	0.02cm

3.4	0.25cm	0.21cm	6.2	0.02cm	0.03cm	9.0	0.02cm	0.01cm
3.6	0.21cm	0.20cm	6.4	0.03cm	0.04cm			

2.以 20g、50g 砝碼之振幅平方相加(由於當砝碼達到最大振幅時，其所含之力學能為 $\frac{1}{2}kR^2$)為 Y 軸，頻率為 X 軸作圖，得到以下圖形。因為系統內共有 4 顆碼，所以根據理論應該可以找到 4 振動解，當輸入的頻率與系統頻率一致時，就會產生共振，此時系統會吸收振源的能量，砝碼的晃動幅度相較非共振頻率下有著顯著的提升，其中有一段頻率(2.8~4.6)不振動，此段及被稱為能隙。



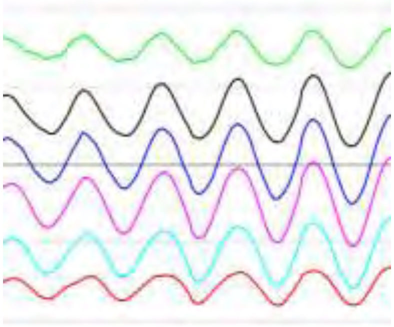
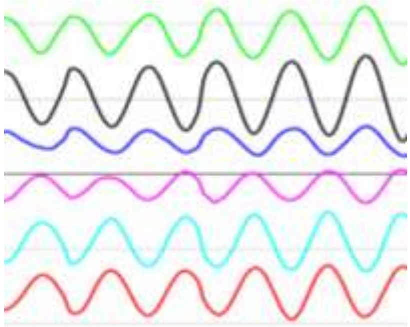
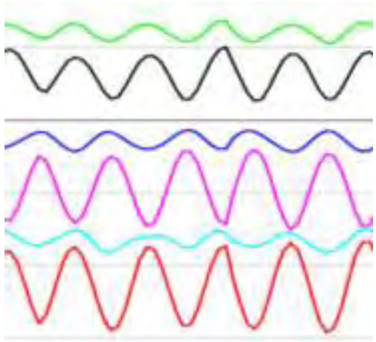
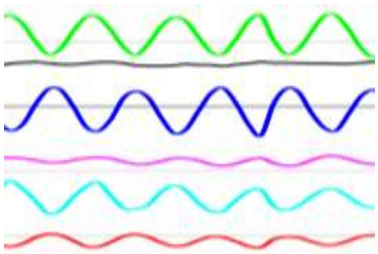
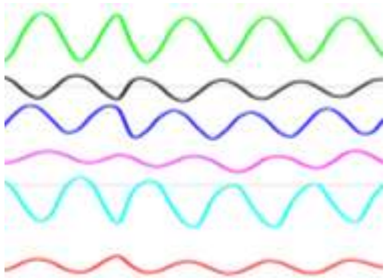
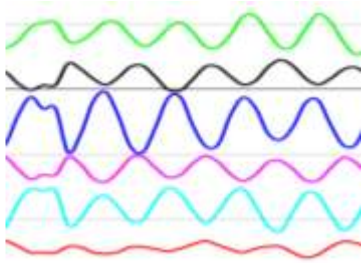
(二)以 50/20 克砝碼串連而成彈簧組(三顆 50 三顆 20)

(1)觀察所在共振頻率下彈簧組之運動情形(三顆 50 三顆 20g)

(紅、紫、黑色為 50g 砝碼，寶藍、淺藍、綠色為 20g 砝碼)

<table>
<tr><td>共振頻率
(Hz)</td><td>1.1</td><td>2.1</td><td>2.9</td><td>4.5</td><td>5.0</td><td>5.4</td></tr>
<tr><td>振子由上而下運動情形
</td><td>⥮
⥮
⥮
⥮
⥮
⥮
如圖(一)</td><td>⥮
⥮
⥮
⇓
⇓
⇓
如圖(二)</td><td>幾乎不動
⥮
幾乎不動
⇓
幾乎不動
⥮
如圖(三)</td><td>⥮
幾乎不動
⇓
幾乎不動
⥮
幾乎不動
如圖(四)</td><td>⇓
⥮
⇓
⥮
⇓
⥮
如圖(五)</td><td>⇓
⥮
⇓
⥮
⇓
⥮
如圖(六)</td></tr>
<tr><td>屬性</td><td colspan="3">單位晶胞原子振動
同向，對應到理論部分的聲頻支</td><td colspan="3">單位晶胞原子振動
反向，應到理論部分的光頻支</td></tr>
<tr><td colspan="7">特例:
1.在 f=2.9Hz 時 m 不動 M 兩兩反向，此時行為很像駐波。
2.在 f=4.5Hz 時 M 不動 m 兩兩反向，此時行為很像駐波 。
3..振子振動所形成的波長在上方特例 1.2.中一樣，而其振子的頻率不一樣，所形成的波速 $v = f\lambda$ 就不一樣，是為色散現象。
4.當 f=5.4Hz 時兩振子的振幅比 $\frac{1.24}{0.48} \cong \frac{5}{2} = \frac{M}{m}$ 振子的振幅與其質量成反比，代表的意義是晶胞內的質心不動，兩振子振動方向恆反向運動。</td></tr>
</table>

(2)振子位移對時間圖

圖(一)	圖(二)	圖(三)
		
圖(四)	圖(五)	圖(六)
		

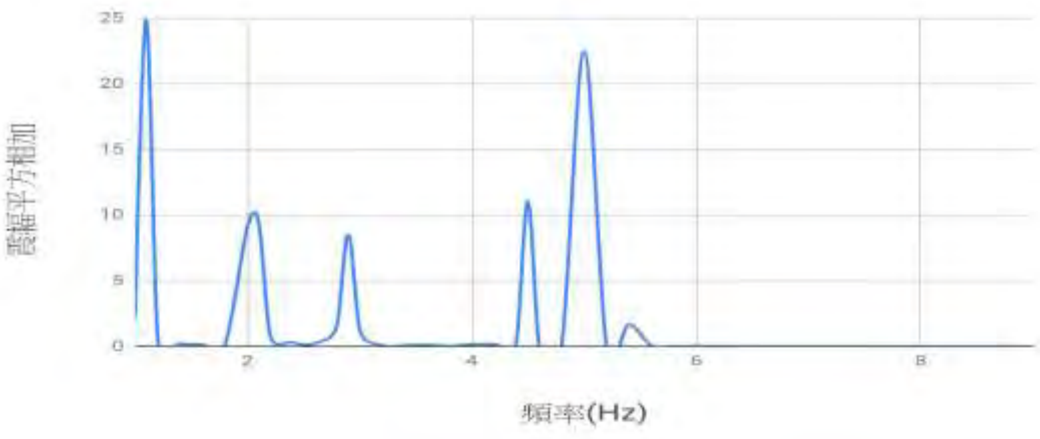
(3)觀察其頻率對振幅的影響

1.紀錄單位砝碼組在不同頻率下之振幅

f(Hz)	平均振幅(50g)	平均振幅(20g)	f(Hz)	平均振幅(50g)	平均振幅(20g)	f(Hz)	平均振幅(50g)	平均振幅(20g)
1.0	1.03cm	1.01cm	3.8	0.13cm	0.17cm	6.6	0.02cm	0.05cm
1.2	0.67cm	0.72cm	4.0	0.26cm	0.31cm	6.8	0.03cm	0.04cm
1.4	0.38cm	0.31cm	4.2	0.37cm	0.22cm	7.0	0.02cm	0.06cm
1.6	0.33cm	0.22cm	4.4	0.64cm	0.33cm	7.2	0.05cm	0.07cm
1.8	0.17cm	0.13cm	4.6	0.21cm	0.18cm	7.4	0.04cm	0.05cm

f(Hz)	平均振幅(50g)	平均振幅(20g)	f(Hz)	平均振幅(50g)	平均振幅(20g)	f(Hz)	平均振幅(50g)	平均振幅(20g)
2.0	2.14cm	2.12cm	4.8	0.17cm	0.18cm	7.6	0.02cm	0.03cm
2.2	0.45cm	0.91cm	5.0	3.21cm	3.49cm	7.8	0.04cm	0.07cm
2.4	0.25cm	0.50cm	5.2	0.28cm	0.15cm	8.0	0.05cm	0.04cm
2.6	0.26cm	0.41cm	5.4	0.48cm	1.24cm	8.2	0.03cm	0.02cm
2.8	0.61cm	1.13cm	5.6	0.35cm	0.15cm	8.4	0.02cm	0.03cm
3.0	0.57cm	1.02cm	5.8	0.07cm	0.11cm	8.6	0.03cm	0.03cm
3.2	0.20cm	0.21cm	6.0	0.13cm	0.09cm	8.8	0.05cm	0.01cm
3.4	0.15cm	0.25cm	6.2	0.04cm	0.15cm	9.0	0.03cm	0.02cm
3.6	0.28cm	0.21cm	6.4	0.08cm	0.12cm			

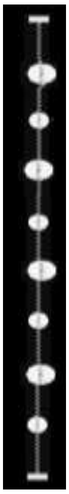
2.以 20g、50g 砝碼之振幅平方相加(由於當砝碼達到最大振幅時，其所含之力學能為$\frac{1}{2}kR^2$)為 Y 軸，頻率為 X 軸作圖，得到以下圖形。因為系統內共有 6 個砝碼，所以根據理論應該可以找到 6 個振動解，當輸入的頻率與系統頻率一致時，就會產生共振，此時系統會吸收振源的能量，砝碼的晃動幅度相較非共振頻率下有著顯著的提升，其中有一段頻率(2.9~4.5)不太會振動，這一段就是能隙。



（三）以 50/20 克砝碼串連而成彈簧組(四顆 50 四顆 20)

(1)觀察所在特定頻率下彈簧組之運動情形(四顆 50 四顆 20)

(紅、紫、黑、深藍為 50g 砝碼，淺藍、藍色、綠色、黃色為 20g 砝碼)

共振頻率 (Hz)	1.6	2.4	3.0	4.4	4.8	5.2	5.5
振子由上而下運動情型 	⇑ ⇑ ⇑ ⇑ ⇓ ⇓ ⇓ ⇓ 如圖一	⇑ ⇑ 不動 ⇓ ⇓ 不動 ⇑ ⇑ 如圖二	⇑ 不動 ⇓ 不動 ⇑ 不動 ⇓ 不動 如圖三	不動 ⇑ 不動 ⇓ 不動 ⇑ 不動 ⇓ 如圖四	⇑ ⇓ 不動 ⇑ ⇓ 不動 ⇑ ⇓ 如圖五	⇑ ⇓ ⇑ 不動 ⇑ ⇑ ⇓ 不動 如圖六	⇑ ⇑ ⇓ ⇓ ⇑ ⇑ ⇓ ⇓ 如圖七
屬性	單位晶胞原子振動 同向，對應到理論部分的聲頻支			單位晶胞原子振動 反向，應到理論部分的光頻支			

特例:

1. 在 f=3.0Hz 時 m 不動 M 兩兩反向，此時行為很像駐波。

2.

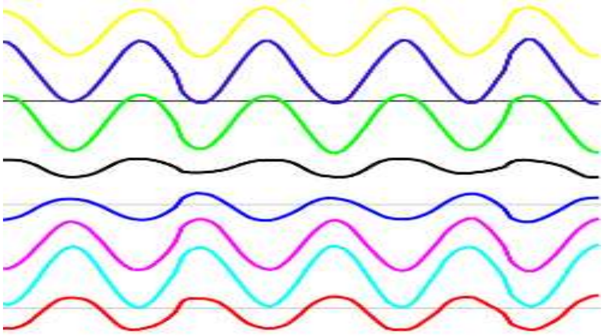
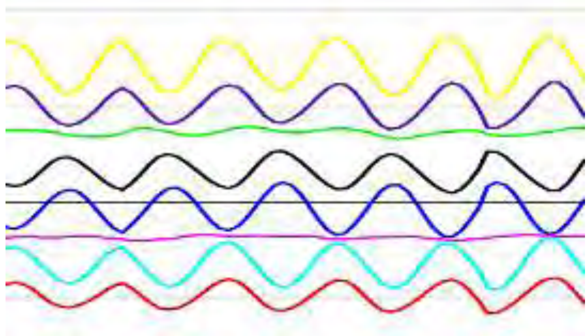
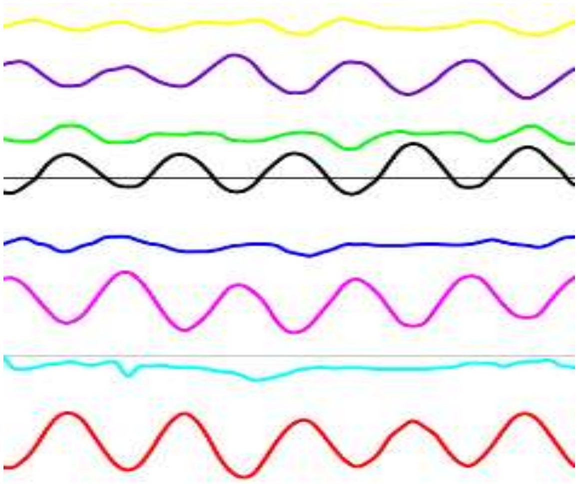
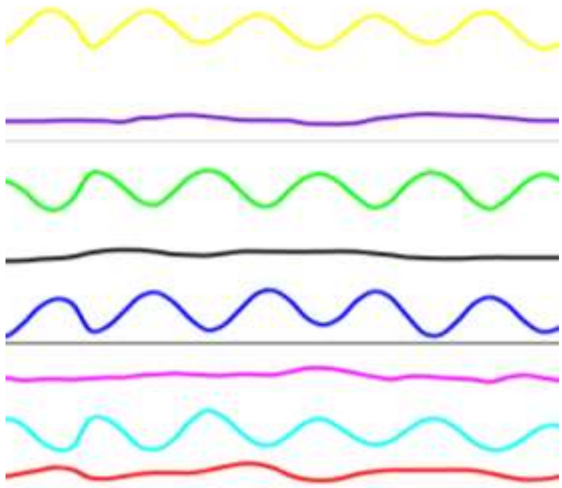
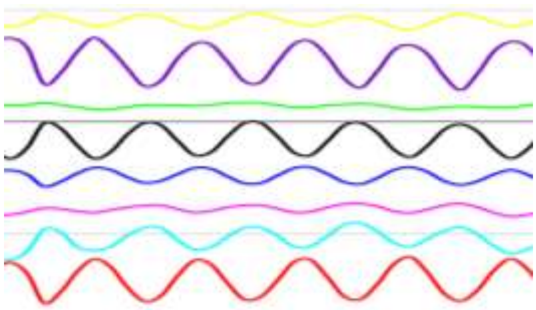
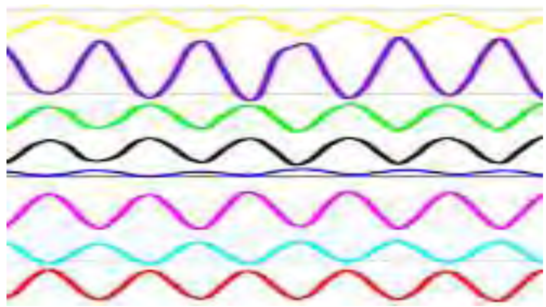
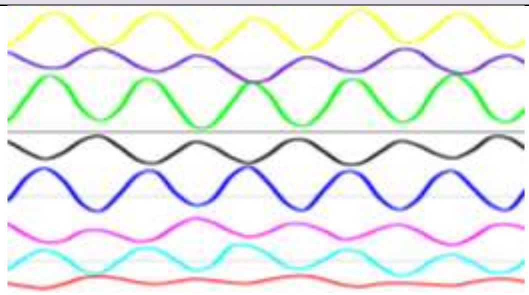
2.在 f=4.4Hz 時 M 不動 m 兩兩反向，此時行為很像駐波。

3.振子振動所形成的波長在上方特例 1.2.中一樣，而其振子的頻率不一樣，

所形成的波速 $v = f\lambda$ 就不一樣，是為色散現象。

4.當 f=5.5Hz 時兩振子的振幅比$\frac{1.12}{0.45} \cong \frac{5}{2} = \frac{M}{m}$振子的振幅與其質量成反比，代表的意義是晶胞內的質心不動，兩振子振動方向恆反向運動。

(2)振子位移對時間圖

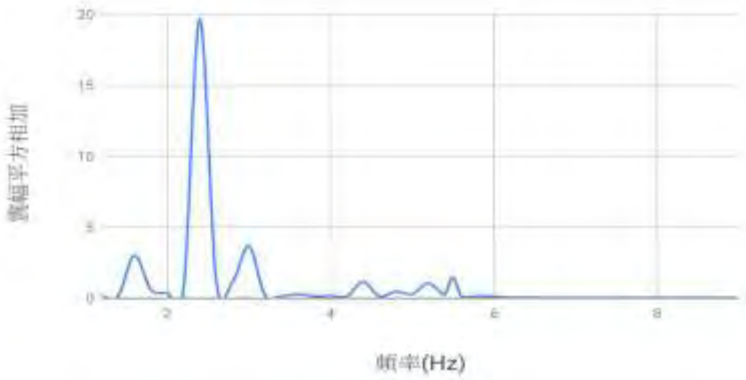
圖(一)	圖(二)
	
圖(三)	圖(四)
	
圖(五)	圖(六)
	
圖(七)	
	

(3)觀察其頻率對振幅的影響

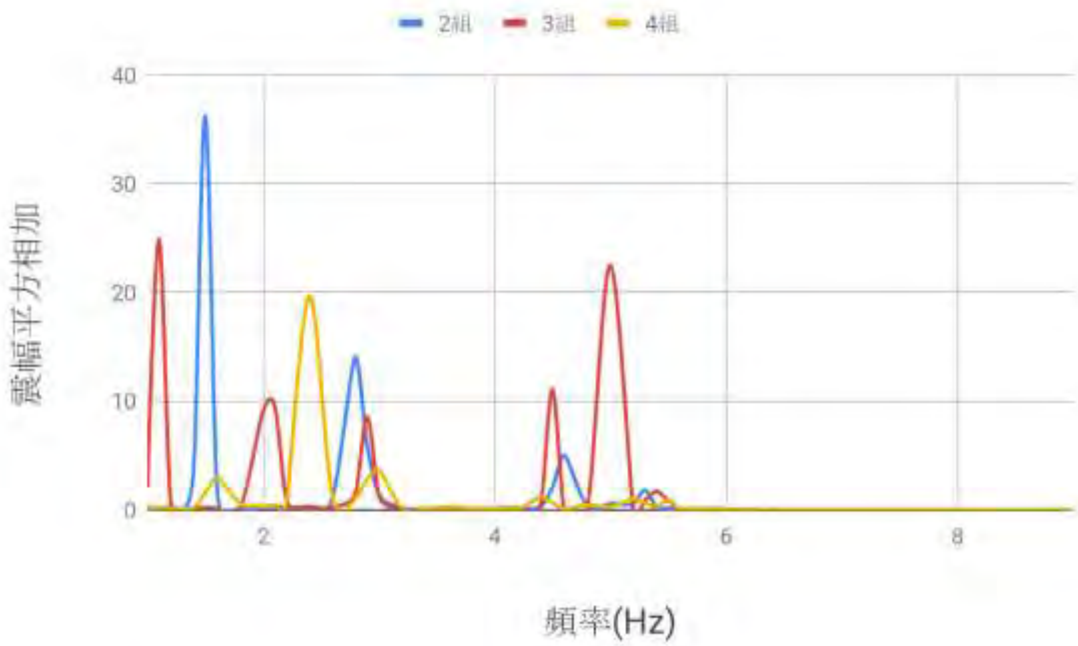
1.紀錄單位砝碼組在不同頻率下之振幅

f(Hz)	平均振幅(50g)	平均振幅(20g)	f(Hz)	平均振幅(50g)	平均振幅(20g)	f(Hz)	平均振幅(50g)	平均振幅(20g)
1.0	0.38cm	0.39cm	3.8	0.28cm	0.19cm	6.6	0.02cm	0.05cm
1.2	0.35cm	0.27cm	4.0	0.25cm	0.31cm	6.8	0.03cm	0.04cm
1.4	0.28cm	0.25cm	4.2	0.19cm	0.28cm	7.0	0.02cm	0.06cm
1.6	0.89cm	1.49cm	4.4	0.51cm	0.94cm	7.2	0.05cm	0.07cm
1.8	0.47cm	0.63cm	4.6	0.17cm	0.28cm	7.4	0.04cm	0.05cm
2.0	0.35cm	0.51cm	4.8	0.41cm	0.53cm	7.6	0.02cm	0.03cm
2.2	0.51cm	0.58cm	5.0	0.38cm	0.37cm	7.8	0.04cm	0.07cm
2.4	3.06cm	3.21cm	5.2	0.41cm	0.93cm	8.0	0.05cm	0.04cm
2.6	1.01cm	0.52cm	5.4	0.27cm	0.42cm	8.2	0.03cm	0.02cm
2.8	1.01cm	0.31cm	5.6	0.18cm	0.34cm	8.4	0.02cm	0.03cm
3.0	1.48cm	1.21cm	5.8	0.26cm	0.28cm	8.6	0.03cm	0.03cm
3.2	0.30cm	0.31cm	6.0	0.21cm	0.23cm	8.8	0.05cm	0.05cm
3.4	0.21cm	0.31cm	6.2	0.04cm	0.15cm	9.0	0.03cm	0.02cm
3.6	0.40cm	0.33cm	6.4	0.08cm	0.12cm			

2.以 20g、50g 砝碼之振幅平方相加(由於當砝碼達到最大振幅時，其所含之力學能為$\frac{1}{2}kR^2$)為 Y 軸，頻率為 X 軸作圖，得到以下圖形。



五.比較 2 3 4 組砝碼頻率和最大能量關係圖



陸 討論

一.討論單一砝碼

(一)我們將一顆砝碼以及二個彈簧垂直串接在一起，可形成一組質點彈簧，測量其垂直振盪週期，並觀察共振頻率下振源與砝碼的相位關係， 得到以下方程式：令此一砝碼在某一瞬間之位移為 x，則根據牛頓第二運動定律，可得

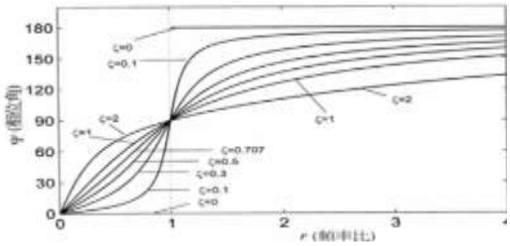
$F = ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ ，其中 F 為 $-2kx$ (k 為單一彈簧之彈力常數)可得

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{2k}{m}x$ ，此為簡諧運動標準式，其角頻率 $\omega = 2\pi f = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ ；將理論數值帶入後發現和實際值之誤差甚小，增加本次實驗可信度。

(二)共振頻率下的運動情形探討

以 50g 砝碼做討論，測得其自然頻率為 3.0，在 3.0 以前我們發現砝碼與振源是同相運動(相位差為 0 度)，3.0 以後呈現反相運動(相位差為 180 度)， f=3.0 時卻是相位差由 0 度變為 90 度再變回 0 度依此循環，理論情形在自然頻率下下相位差應為 90 度，造成誤差的原因為以下兩點

(1)砝碼組的阻力過小，如下圖：在不同阻力下頻率對其相位關係如下(圖中之 r 為砝碼系統之自然頻率和振動源(source)頻率之比值，ζ 為阻尼比)

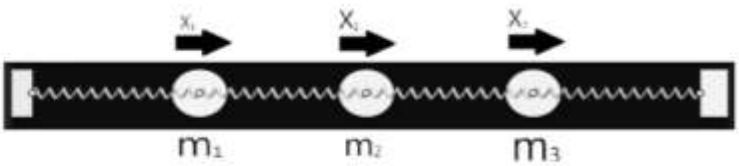


所以在幾乎無阻尼情形下，只要振源頻率與系統自然頻率相差一點點，相位立刻出現明顯變化。

(2)振動源(source)之單位頻率(0.1Hz)過大，使我們無法讓砝碼和振動源(source)的頻率比剛好為 1，所以我們才會觀察到拍音現象。

二.同質量砝碼串聯

(一)分析砝碼組運動情形(以 50g 三組為例)



(令向右為正)

某一瞬間，此三顆砝碼的位移分別為 x_1 ， x_2 ， x_3 ，三顆砝碼質量皆為 m

$$Fm_1 = m\frac{d^2x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1) - kx_1$$

$$Fm_2 = m\frac{d^2x_2}{dt^2} = k(x_1 - x_2) + k(x_3 - x_2)$$

$$Fm_3 = m\frac{d^2x_3}{dt^2} = k(x_2 - x_3) - k(x_3)$$

其受力量值皆和位移的一次方成正比，此為簡諧運動標準式，又其角頻率皆相同，固可將上式化簡如下所式

$$Fm_1 = -m\omega^2 x_1 = m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -2kx_1 + kx_2 + 0kx_3$$

$$Fm_2 = -m\omega^2 x_2 = m\frac{d^2x_2}{dt^2} = kx_1 - 2kx_2 + kx_3$$

$$Fm_3 = -m\omega^2 x_3 = m\frac{d^2x_3}{dt^2} = 0kx_1 + kx_2 - 2kx_3$$

$$-\mathrm{m}\omega^2 x_1 = -2kx_1 + kx_2 + 0kx_3$$

$$-\mathrm{m}\omega^2 x_2 = kx_1 - 2kx_2 + kx_3$$

$$-\mathrm{m}\omega^2 x_3 = 0kx_1 + kx_2 - 2kx_3$$

若要使 ω 有非零時數解，此時

$$\begin{vmatrix} -2k-m\omega^2 & k & 0 \\ k & -2k-m\omega^2 & k \\ 0 & k & -2k-m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

解得 $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})k}{m}}$, $\sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})k}{m}}$ ，為 3 組解，將實際數值帶入後發現與實驗結果相符合，實際實驗後我們也發現當 n 顆同質量砝碼串聯時，可以得到 n 組共振頻率解。

(二)探討共振頻率下的運動情形

我們發現多顆砝碼在一些共振頻率下的運動情形是較少顆砝碼串聯共振頻率解的延伸 EX:三顆砝碼運動情形(二)及五顆砝碼運動情形(二)。

三顆砝碼運動情形(二)是中間砝碼不動上下反向，而五顆砝碼運動情形(二)也是如此，再往下探討 5 顆砝碼串連的運動情形，由於上方 2 砝碼為同相運動，其間彈簧伸長量為 0，因此可將這 2 顆砝碼及彈簧視為視為質量為 110g 的砝碼(單一砝碼:50g，彈簧:10g)，同理下方也可視為一 110g 的 砝碼，則整個彈簧組則為不同質量砝碼串聯，此可用於推導出奇數顆砝碼串連的一組共振解，以加快實驗地進行。

三.兩不同質量砝碼週期性串聯

(一)探究其理論和現實的差異性

如前者所述，將 N=2、3 時其單位週期(一顆 50g，一顆 20g)所含之最大能量和其所對應的頻率做圖，分別可明顯看出在共振頻率下單位週期所含之最大能量遠高於其他頻率，且可明顯看出帶隙；但當 N=4 時，我們卻沒有找出 8 個共振頻率解，且與理論值有些許落差(非共頻率下也有出現振幅偏大的情況)，其誤差原因如下

(1)攝影機幀數太低，導致振動源在高頻率時無法掌握砝碼組的最大振幅。

(2)振動源(source)的最低頻率只能到達 1.0Hz，但可能有些共振頻率解小於 1

(3)砝碼總系統的長度過長，導致系統不太穩定，砝碼易出現水平位移，使振動源(source)傳遞的能量無法完全被砝碼吸收，並表現在其鉛直位移。

(二)能隙

當 N=2、3、4 時皆可明顯地發現能隙的存在，某些特定頻率的彈性波無法有效的傳遞聲原所施予的能量，此現象與固態物理學中晶格振動理論相符合。

柒 結論

(一)單一質量砝碼

當振動源(source)對砝碼組施加和彈簧自然頻率相似當週期性位移時，砝碼和振動源(source)之相位差 90 度變為 0 度再變為 90 度依此循環；小於自然頻率時程同相，大於自然頻率時呈反向。

(二)相同質量砝碼串聯

n 顆砝碼串聯可以得到 n 組共振頻率解，其運動情形即可認為振子振動好像是兩端為固定端形成的駐波，令兩端固定端長度為 L，則與波長之關係為 $L=\frac{n}{2}\lambda$；多組同質量砝碼串連的某些運動情形即可視為較少顆砝碼串連運動情形的延伸。

(三)相異質量砝碼串聯

N=k 時，將會有 2k 組共振頻率解，且在共振頻率為 $\sqrt{\frac{2\beta}{m}}$、$\sqrt{\frac{2\beta}{M}}$ 間可發現能隙的存在，此可應用於減振材料上，使大部分地震的頻率位於能隙的頻率區間內。

捌 未來展望

一.提高能隙(拉大 Mm 比例)可應用於減振材質方面

二.將三種以上不同質量砝碼串聯並觀察其運動情形及能隙出現情形

玖 參考資料

1.大學普通物理_固態物理----中國人民出版社

2.https://kknews.cc/zh-tw/science/bqnbr4o.html?fbclid=IwAR0Kdh0Ibf1n0IVacaNFPq0RYqFLIbf3y9ZJTEeW9mYJNSRCoytHD-MWUWQ

4.國家地震工程研究中心簡訊第 103 期

5.https://www.youtube.com/watch?v=M4WQs_U1nmU&fbclid=IwAR2M52Y6W8T5EHrLWh5IQ163VFixIig3-bOfh_v56rPBWL3aFWv9v-h-Z6M

6. https://www.youtube.com/watch?v=MmpoXeOoLNo&fbclid=IwAR3d9d_1oTB60HoOkQn-i0y7w86gY0LPK7g_rh-rC9k8gwmtKWGISKd9R9Y

7.固體物理學—吉林大學出版社

8. Introduction To *Solid State Physics* 8th Edition By Charles *Kittel*.

9. https://phy.ntnu.edu.tw/~changmc/Teach/SS/SS_note/chap04.pdf

【評語】051815

本實驗以彈簧系統模擬固體內原子振動，特別是可以觀測量度振動能譜之能帶與能隙，本實驗本身有科學價值，是一項認真的作品。但是彈簧連接質量體的振動模式，已可見於教科書，較欠缺新穎構思。這是一個蠻標準的實驗，參展的作品並沒有太多的創新。

作品海報

摘要

以彈簧系統模擬固體內原子振動行為並以Tracker軟體分析情運動情形。以驅動力改變頻率方式觀察彈簧系統的振動模式，從單一砝碼的運動情形開始探討，逐漸推廣到同質量砝碼串聯，再延伸到兩個不同質量砝碼週期性串聯，最後討論其不同外加頻率下彈簧系統的振動行為，可模擬出兩不同砝碼可以出現如固態物理中晶格振動的色散現象(dispersion relation)，其振動行為可分為聲頻支與光頻支，並觀察出在某些頻域系統不太具有振動行為，這跟固態物理的能隙的相呼應。

研究目的

1.單顆砝碼的自然頻率。

2.砝碼在外加驅動力(driven force)施予不同頻率下其振動行為與驅動力的相位關係。

3.多組同質量砝碼在驅動力施予不同頻率下的運動情形。

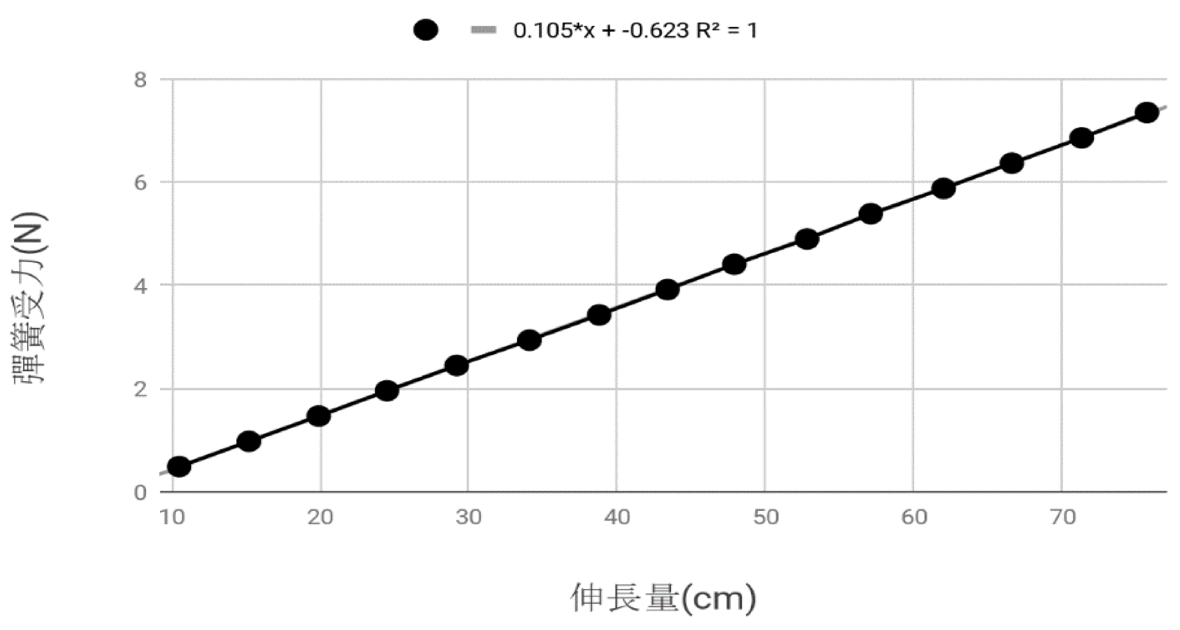
4.觀察兩不同質量週期性串連的砝碼在驅動力施不同頻率下是否會如固態物理的聲頻支與光頻支運動情形並觀察其振幅情形。

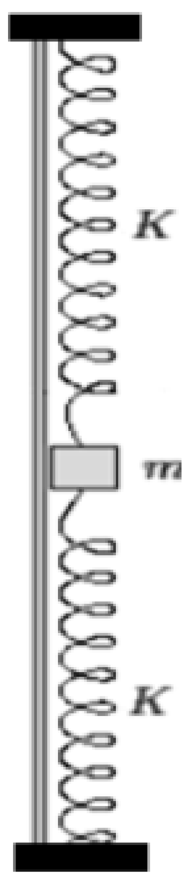
5.經由外加驅動力(driven force)施予不同頻率能模擬出系統的能帶理論，看是否經由有限組單位晶胞能看出晶體內的帶隙(band gap)。

研究結果

一、彈簧正比限度

為了確保在實驗進行中，彈簧之受力皆和其伸長量的一次方成正比，我們以彈簧的伸長量(cm)為x軸、受力(N)為y軸做圖，其圖如下。



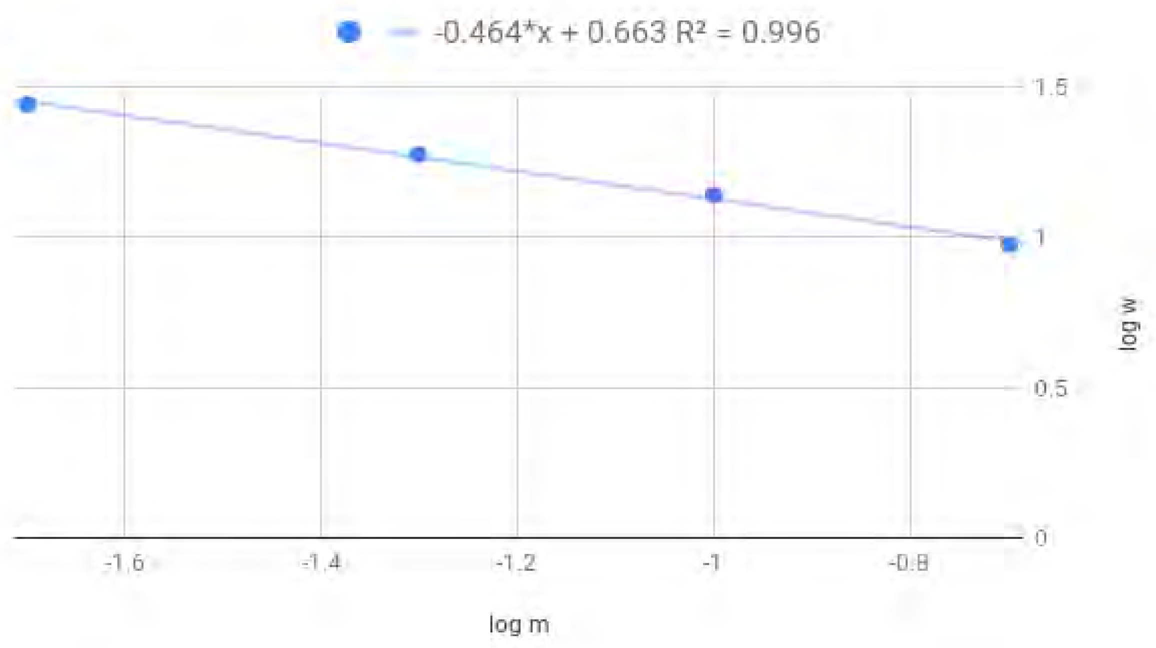


二、單顆砝碼自然頻率

以簡諧運動公式計算不同質量砝碼自然頻率之理論值與測得實際值做比較。

($f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ 公式之k要帶2倍彈力常數，m除了砝碼質量還要加入彈簧之等效質量)

砝碼m(kg)	測得之f(Hz)	理論值(Hz)
0.02	4.4	4.5
0.05	3.0	3.1
0.10	2.2	2.2
0.20	1.5	1.6

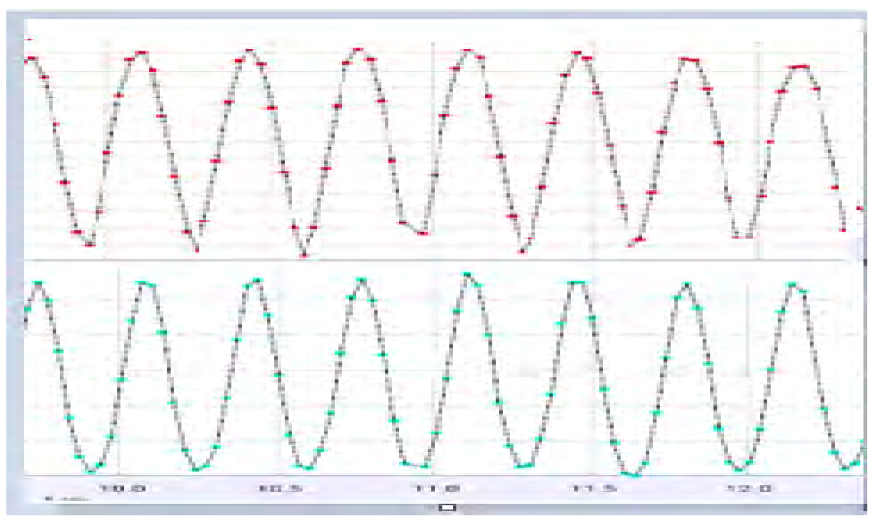


三、單顆砝碼在不同頻率下與振源之相位關係

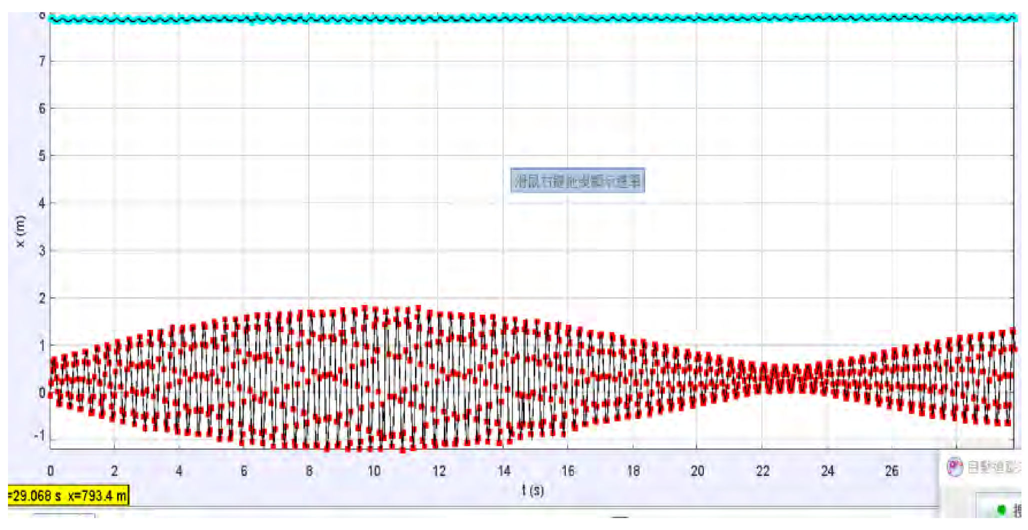
以Tracker軟體追蹤砝碼之運動情形，並分析砝碼與震動源之相位關係，得到以下結果。

(法碼:50g)　(圖中紅色為砝碼的運動情形，藍色為振動源(source)的運動情形)

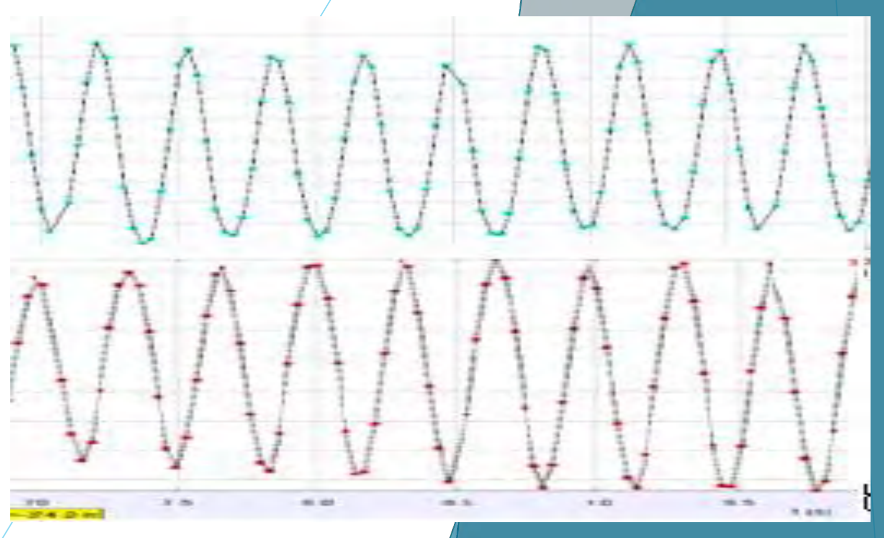
f(Hz)	相位關係
<3.0	同相(相位差為0度)
3.0	相位差由90度變為0度再變為90度依此循環
>3.0	反相(相差為180度)



(振源頻率f=2.9Hz)

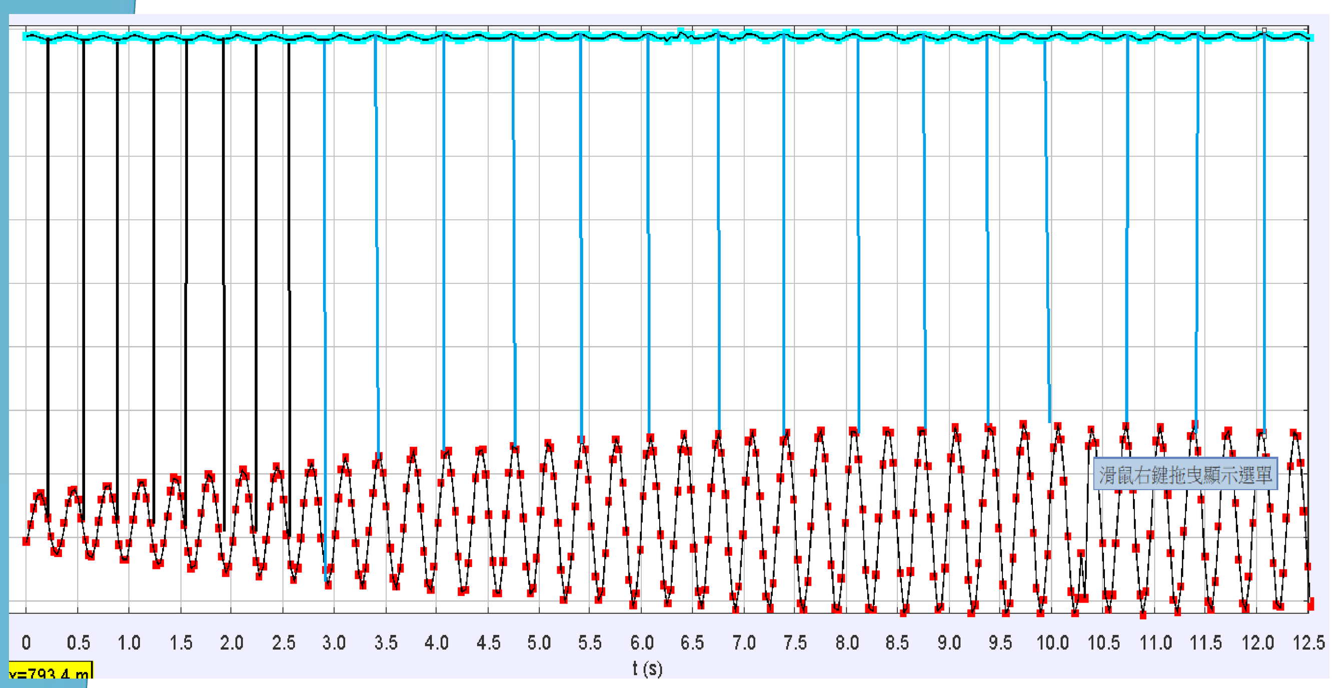


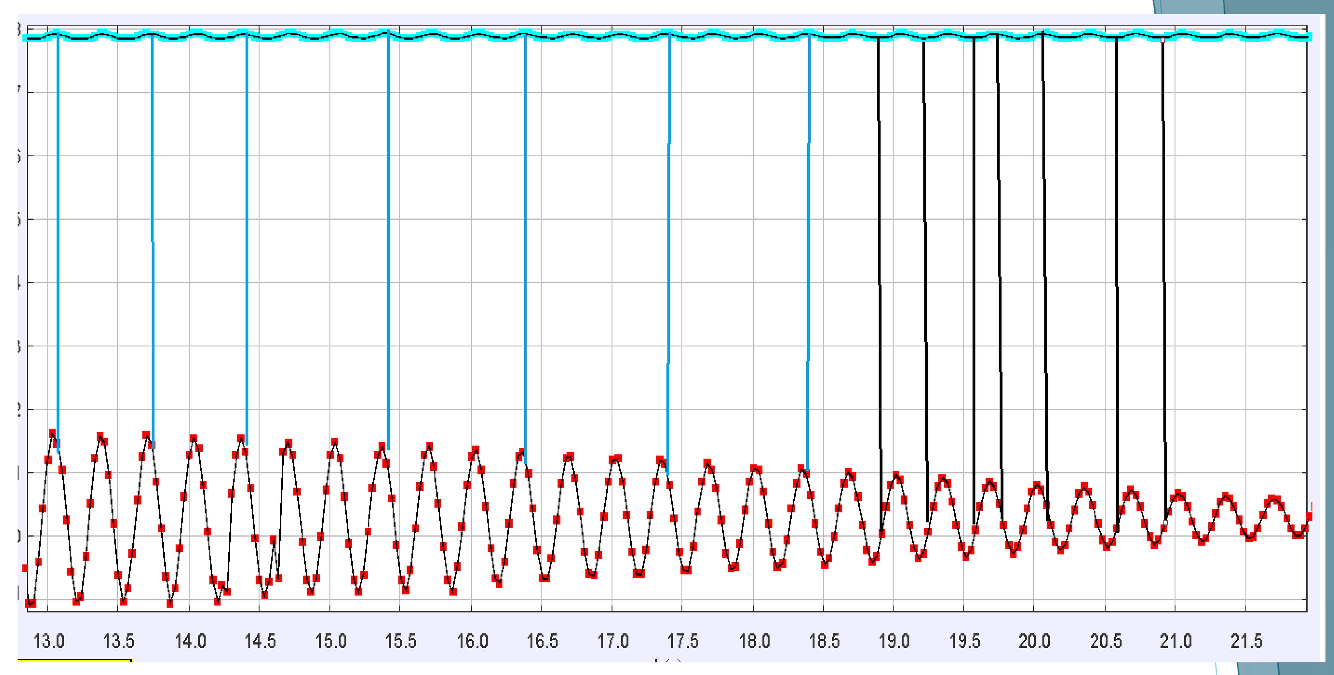
(振源頻率f=3.0Hz)



(振源頻率f=3.1Hz)

將共振頻率下的tracker圖形放大討論





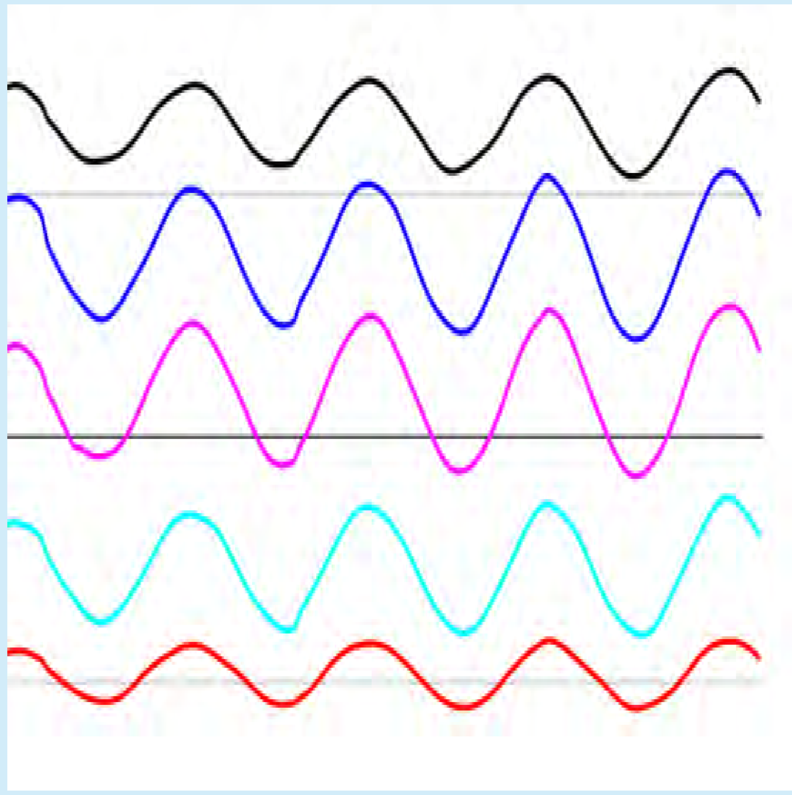
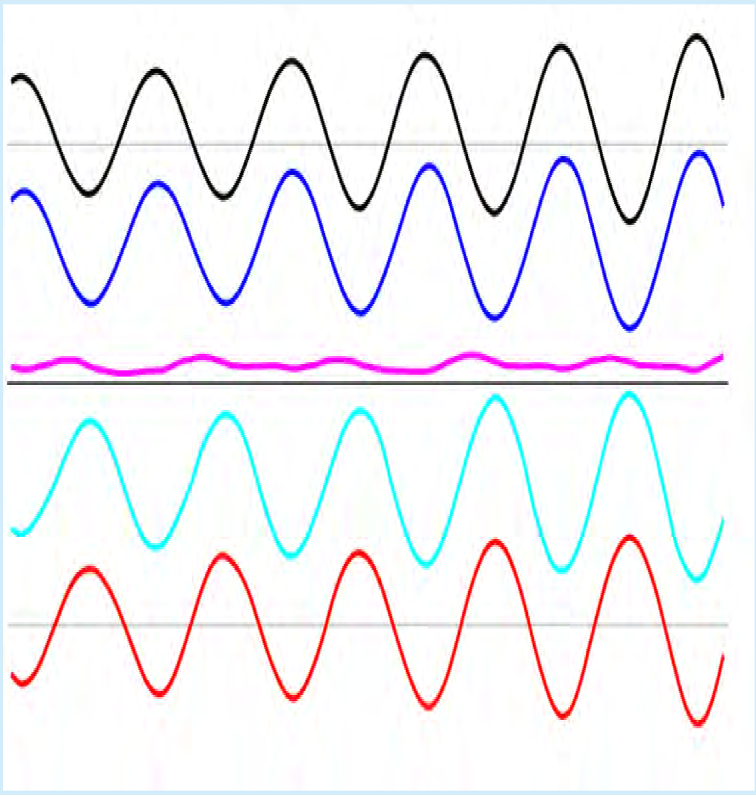
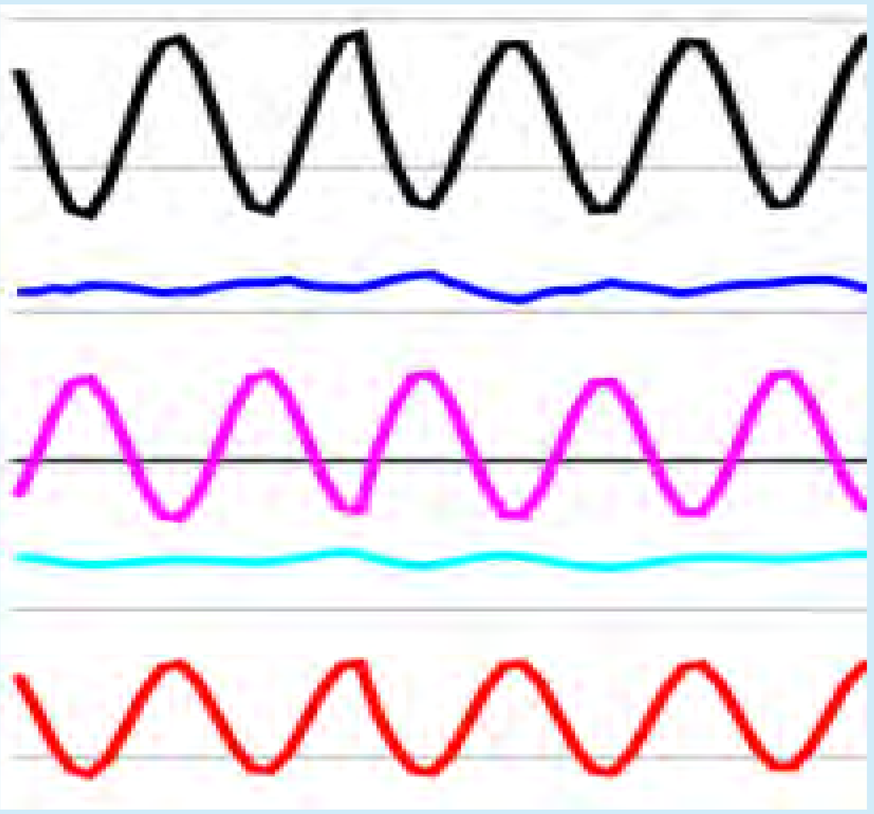
(擷取某一段時間相位差由90度變成0度)　　　　(擷取某一段時間相位差由0度轉為90度)

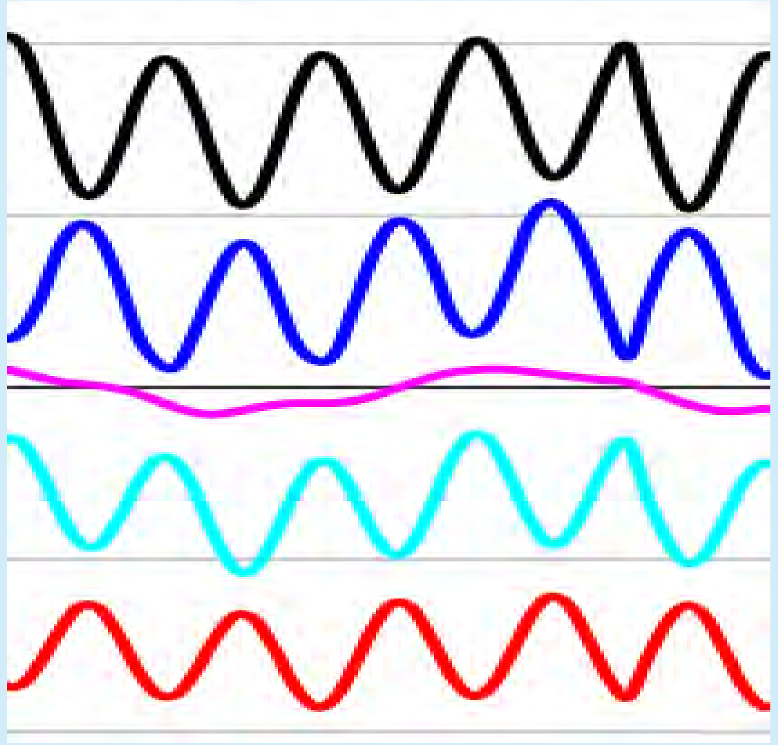
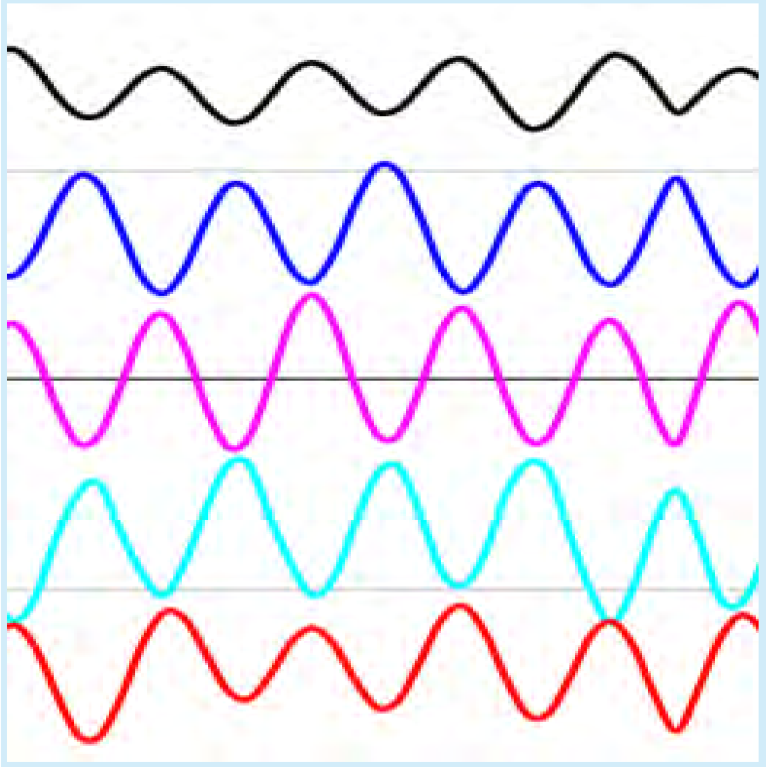
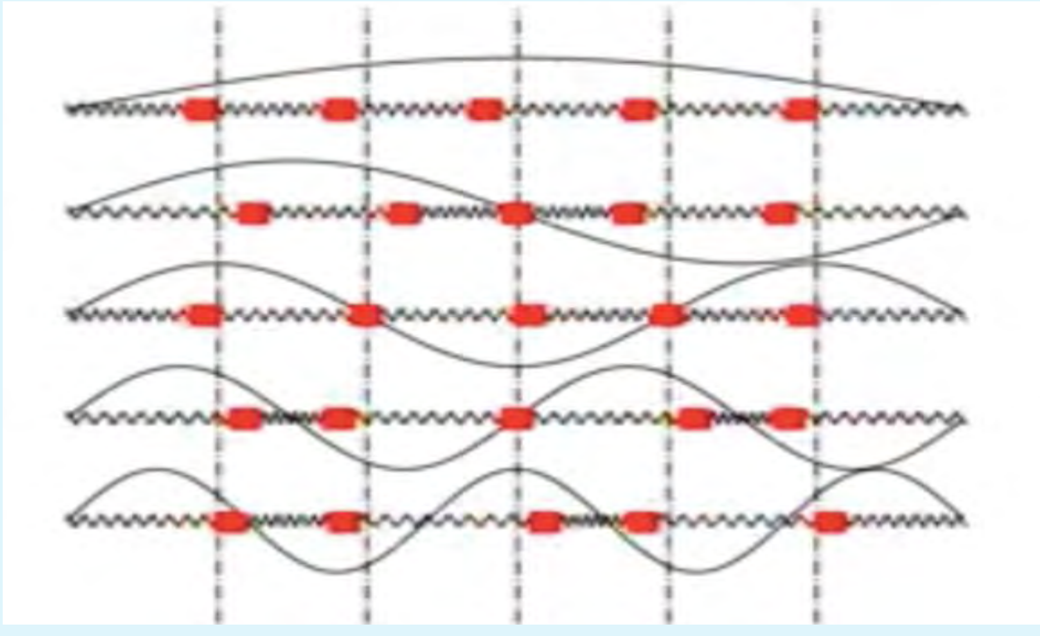
砝碼振動情形就好比波動內容裡面的「拍音」，會有此現象是因為振源的頻率最小單位為0.1Hz無法再精確，此頻率與砝碼的自然頻率極為接近，才會出現拍音的現象，所以振動源與砝碼的相位才會變得不固定。

四、同質量多顆砝碼串聯

(一)五顆砝碼

不斷的將驅動力的頻率從最低值f=1.0Hz，每次增加0.1Hz，發現當外加頻率在1.1Hz、2.1Hz、3.0Hz、3.8Hz及4.3Hz時，我們發現砝碼的振幅特別明顯，我們便以Tracker軟體追蹤其運動行為並加以討論，如下表所示。

共振頻率與示意圖	振子位移與時間關係圖	共振頻率與示意圖	振子位移與時間關係圖	共振頻率與示意圖	振子位移與時間關係圖
f=1.1Hz		f=2.1Hz 不動		f=3.0Hz 不動 不動	

共振頻率與示意圖	振子位移與時間關係圖	共振頻率與示意圖	振子位移與時間關係圖	
f=3.8Hz 不動		f=4.3Hz		

振子振動好像是兩端為固定端形成的駐波，若兩固定端的長度為L，則其駐波的波長$\lambda = \frac{2L}{n}$

如圖中最上方情形就是各振子運動方向都保持同向，此時的振子振動形成的波長$\lambda_1 = 2L$

，接著往下看，位於正中央的振子幾乎保持不動，此時的振子振動形成的波長$\lambda_2 = L$

，這樣就可以輕鬆的看出在不同振動模式下各振子之間的相位關係以及位移情形

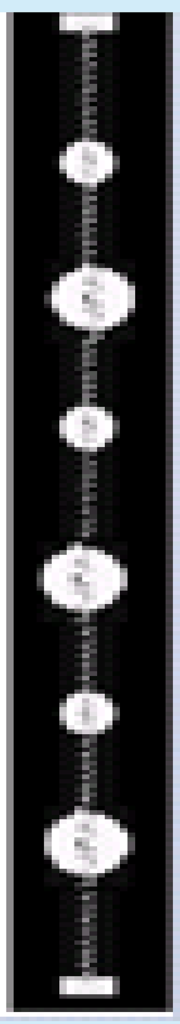
，這種因為振子振動形成的波長與這時共振的頻率兩者相乘即時這種模式下的波速

，我們發現波速並不為常數，這說明彈簧系統形成了色散現象(dispersion relation)。

五.不同質量多顆法碼串聯

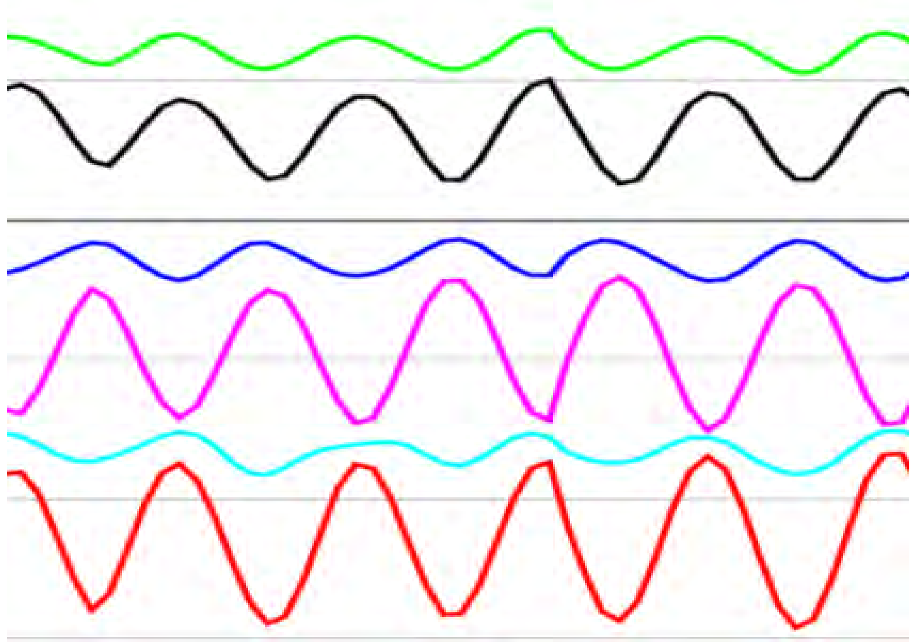
將20g、50g法碼週期性串聯，仿效之前方法觀察在共振頻率下法碼之運動情形

(以週期數為3做範例)

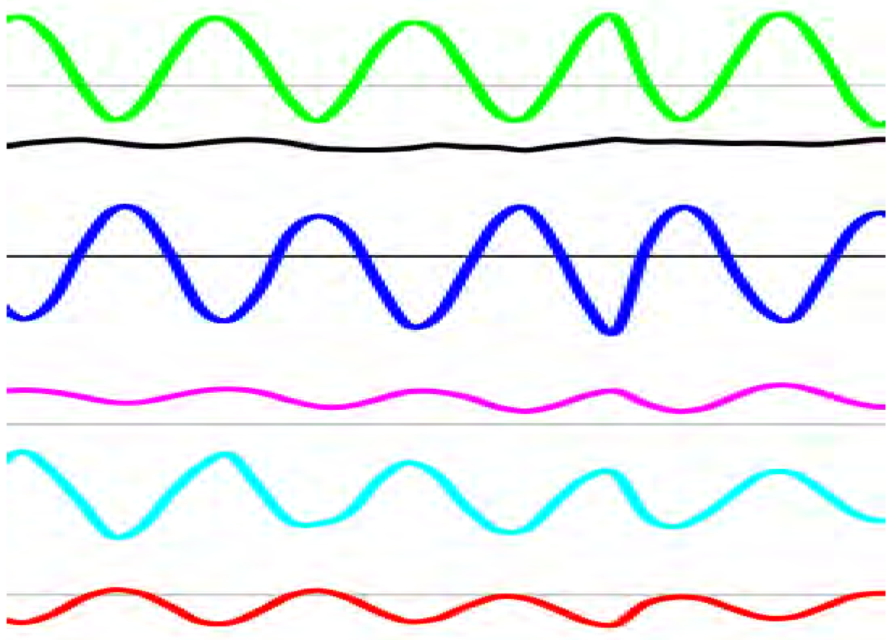
共振頻率 (Hz)	1.1	2.1	2.9	4.5	5.0	5.4
振子由上而下運動情型 	↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↑ ↑ ↑ ↓ ↓ ↓	不動 ↑ 不動 ↓ 不動 ↑	↑ 不動 ↓ 不動 ↑ 不動	↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑	↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑
屬性	單位晶胞原子振動同向，對應到理論部分的聲頻支			單位晶胞原子振動反向，應到理論部分的光頻支		

特例:

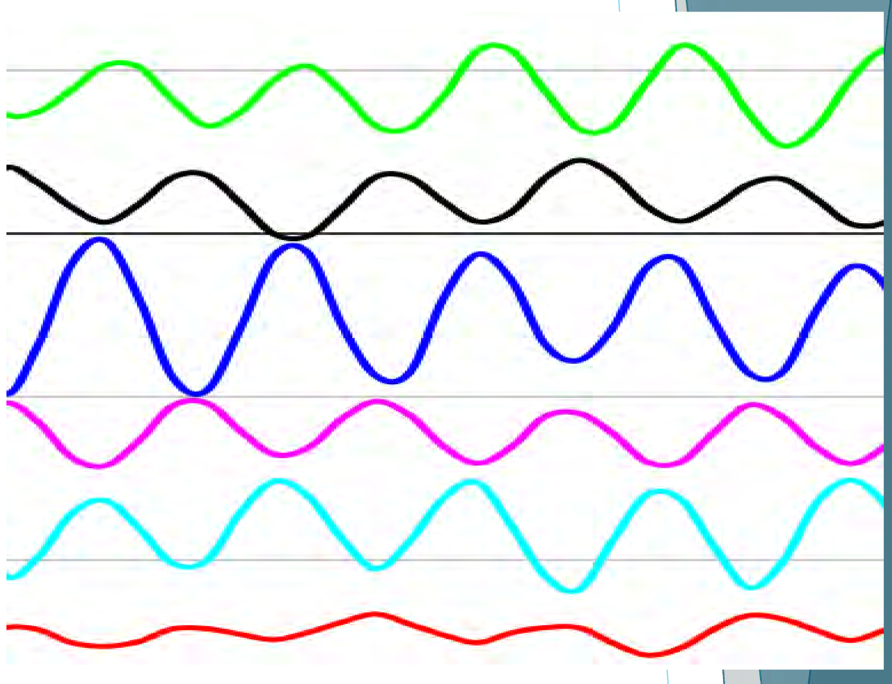
1. 在f=2.9Hz時m不動M兩兩反向，此時行為很像駐波，對應到理論部分的此時波長 =4a
2. 在f=4.5Hz時M不動m兩兩反向，此時行為很像駐波，對應到理論部分的此時波長 =4a
3. 振子振動所形成的波長在1.2.中一樣，而其振子的頻率不一樣，所形成的波速就不一樣，是為色散現象。
4. 當f=5.4Hz時兩振子的振幅$\frac{1.24}{0.48} \cong \frac{5}{2} = \frac{M}{m}$振子的振幅與其質量成反比，代表的意義是晶胞內的質心不動，兩振子振動方向恆反向運動。



(f=2.9Hz)

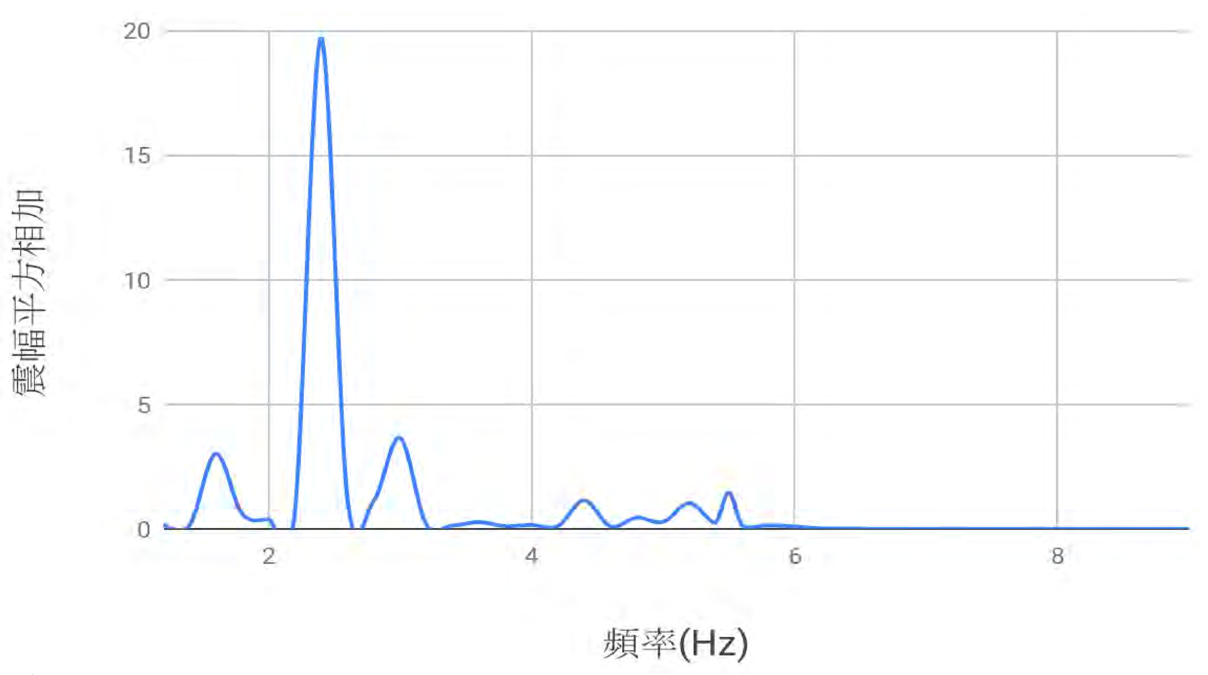


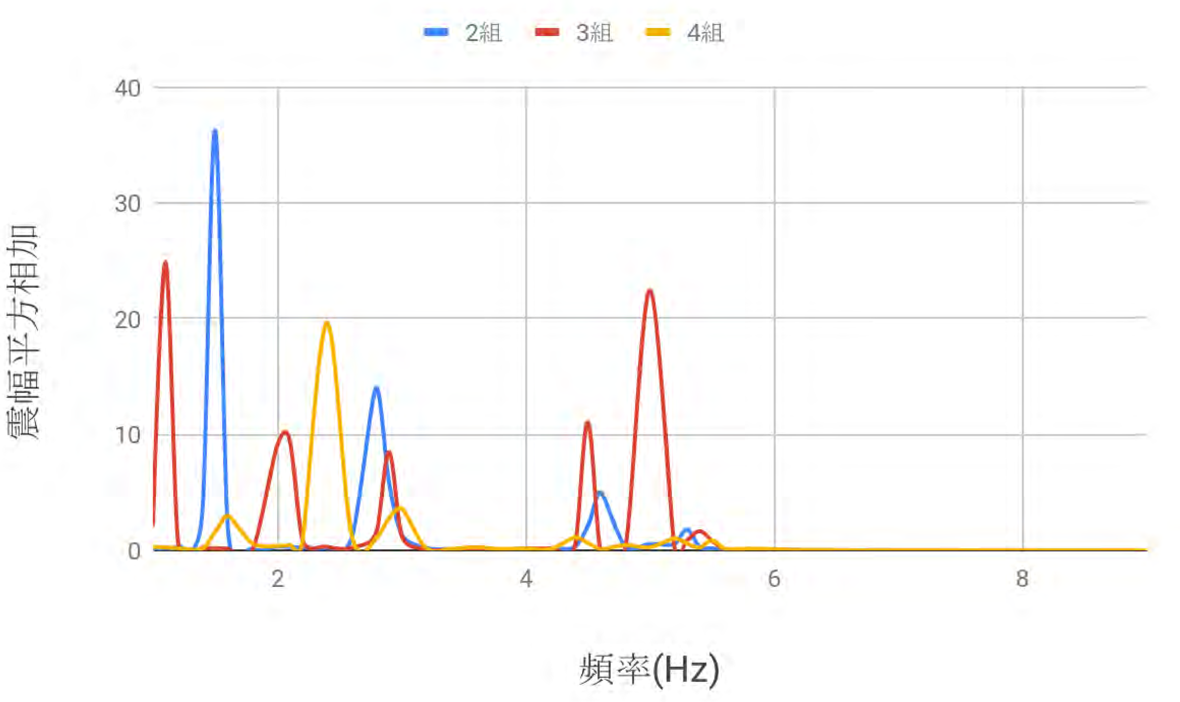
(f=4.5Hz)



(f=5.4Hz)

六.能隙





討論

單一砝碼

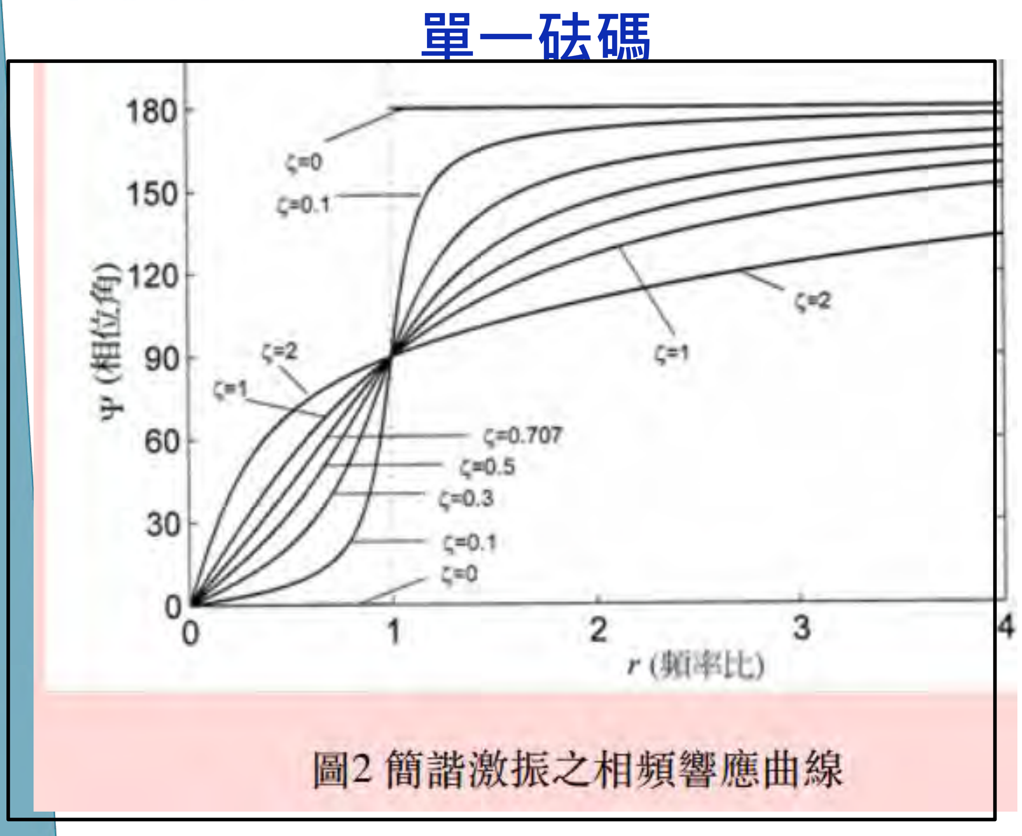
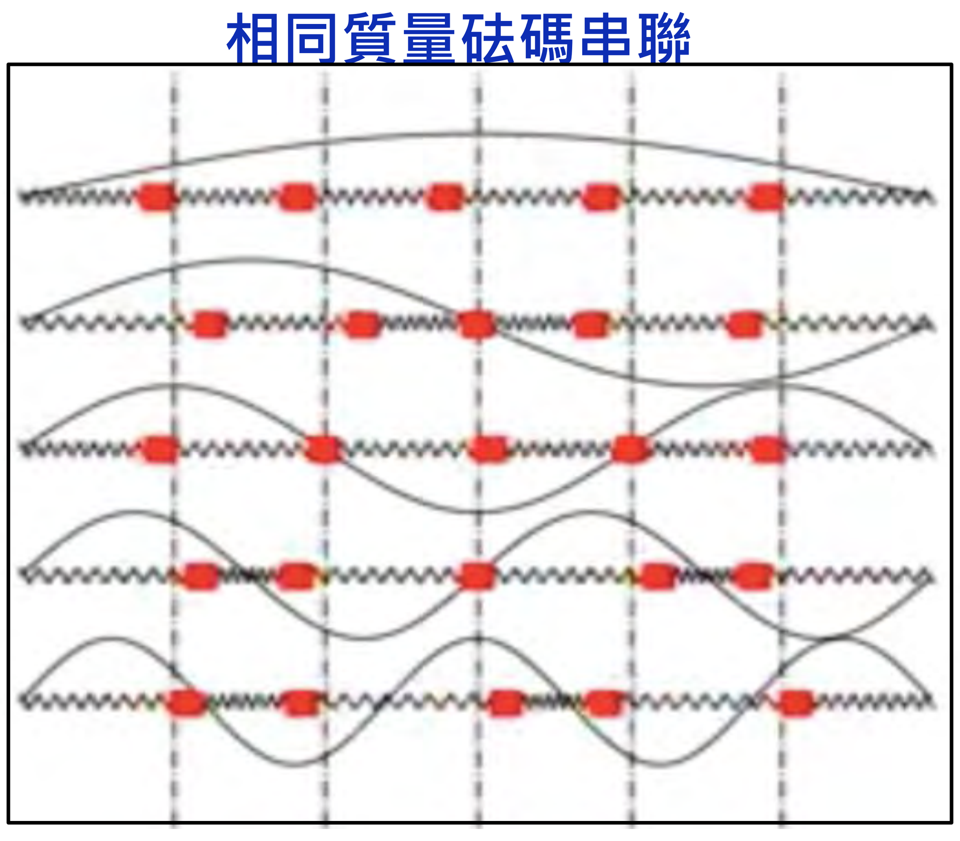
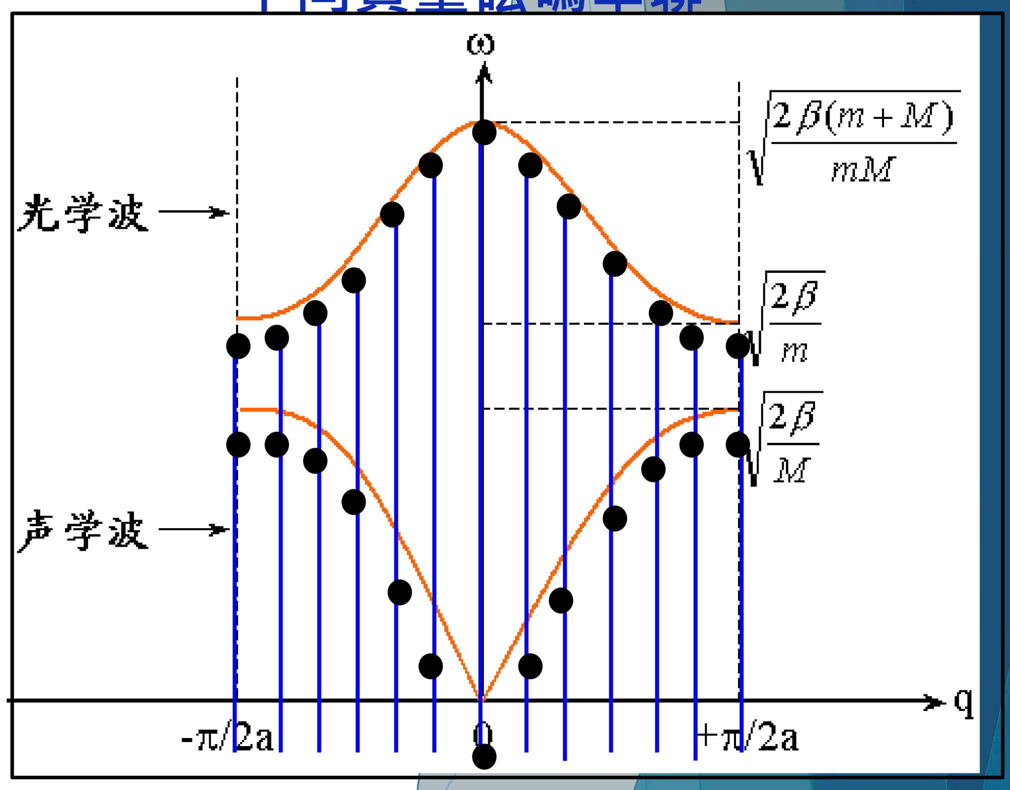


圖2 簡諧激振之相頻響應曲線

相同質量砝碼串聯



不同質量砝碼串聯



結論

(一)單一質量砝碼

當source對砝碼組施加和彈簧自然頻率相似當週期性位移時，法碼和source之相位差90度變為0度再變為90度依此循環；小於自然頻率時程同相，大於自然頻率時呈反向。

(二)相同質量砝碼串聯

n顆砝碼串聯可以得到n組共振頻率解，且多顆法碼串聯的運動情形為較少顆法碼串聯運動情形的延伸。

(三)相異質量法碼串聯

N=k時，將會有2k組共振頻率解，且在共振頻率為$\sqrt{\frac{2\beta}{M}}$、$\sqrt{\frac{2\beta}{m}}$其間可發現能隙的存在，此可應用於減振材料上，使大部分地震的頻率位於能隙的頻率區間內。

未來展望

- 一.提高能隙(拉大Mm比例)可應用於減振材質方面
- 二.將三種以上不同質量砝碼串聯並觀察其運動情形及能隙出現情形