

中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第三名

051812

離子電遷移率的測量研究

學校名稱：國立嘉義高級中學

| | |
|---------------------------------|-----------------------------|
| 作者： 高二 陳思樺 高二 黃聆歆 | 指導老師： 林芳妃 洪瑞鼎 |
|---------------------------------|-----------------------------|

關鍵詞：電遷移率、漩渦偶極子、霍爾效應

摘要

電解質水溶液滴上染料，外加互相垂直的電場和磁場後，離子受到勞侖茲力而移動，因黏滯力作用而形成漩渦偶極子；由漩渦偶極子的位置隨時間變化，可算出離子的電遷移率和。兩種離子的電遷移率不同，對染料的衝量不同，而使漩渦偶極子偏移，由偏移量隨時間變化，可求得兩種離子的受力的差。

由電流隨外加電壓的變化可以算出兩種離子的電遷移率和；由霍爾電壓隨外加電壓的變化可以算出兩種離子的電遷移率差，進而算出兩種離子的電遷移率。

霍爾效應法因待測量少，測量得到的電遷移率誤差小；漩渦偶極子法待測量多，測得的結果準確度較小；漩渦偶極子法易控制恆溫，適合探討離子的電遷移率隨溫度的變化。

壹、研究動機

參觀 2018 年臺灣國際科展〔1〕時，對奈米氣泡的電遷移率不甚了解，引起我們研究測量離子電遷移率的興趣。以「簡易方法測量電遷移率」參加 2019 年臺灣國際科展，評審給了許多改進和修正的意見，繼續研究以參加本科展活動。

貳、研究目的

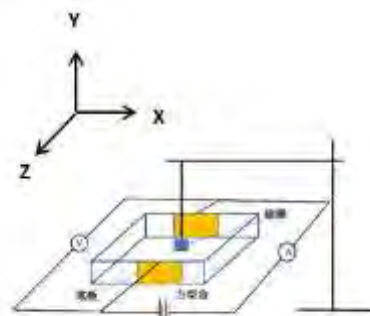
- 一、以漩渦偶極子法測量研究電解質水溶液離子的電遷移率和。
- 二、以霍爾效應測法測量研究電解質水溶液離子的電遷移率。
- 三、以漩渦偶極子法測量研究離子電遷移率隨溫度的變化。

參、研究過程或方法

甲、漩渦偶極子法

一、研究器材和設備

- (一)、壓克力盒長 40cm，寬 20cm，高 5cm。
- (二)、銅片長 10cm，寬 5cm，厚 3mm 兩片做電極。
- (三)、鈷鐵硼磁鐵 0.5T。
- (四)、電源供應器、安培計、伏特計。
- (五)、攝影機、KMPlayer 軟體。
- (六)、染料、微量吸管。
- (七)、氯化鈉、氫氧化鈉、氯化鉀。



圖一：漩渦偶極子法實驗裝置示意圖。

二、原理

1. 方形盒內的水溶液外加電壓 V ，電流 i

向 $-Z$ 方向，磁場 B 向 $-Y$ 方向。在磁鐵下方液面上滴入用電解質水溶液浸泡面積 A 的染料時，染料內的離子受勞侖茲力 F 向 $-X$ 方向，染料一方面擴散，一方面向 $-X$ 移動。因染料所包圍的水溶液隨著離子快速移動，壓力

較小，外圍的水溶液施加壓力，使染料形成漩渦偶極子(vortex dipole) [2, 3]。

2. 電場 E 使帶正電的離子向 $-Z$ 方向，帶負電的離子向 $+Z$ 方向衝撞染料，兩種離子的動量不同，形成的衝力差 ΔF 使漩渦偶極子向 $-Z$ 方向或 $+Z$ 方向偏移。

3. 漩渦偶極子位置 x 隨時間 t 的變化 [3,4] $x = \left(\frac{3J}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} \dots$ (1)。

J 為漩渦偶極子的運動動量通量 Kinematic momentum flux (force per unit mass and depth) 其單位因次 $[J] = L^3 T^{-2}$ 。

4. $F = \rho J h \dots$ (2) 為面積 A 的染料內離子所受的勞侖茲力， ρ 為水溶液的密度。
 $F = q_1 v_1 B + q_2 v_2 B = q(v_1 + v_2) B \dots$ (3)

q_1 、 q_2 分別為陰陽離子的總帶電量 $q_1 = q_2 = q$ ， v_1 、 v_2 分別為陰陽離子的漂移速率。

$\mu = \frac{v_d}{E}$ ， μ ：電遷移率 (electrical mobility)， v_d ：漂移速率， E ：外加電場 $= \frac{V}{z}$

$$(2)(3) F = q(v_1 + v_2)B = \rho J h \Rightarrow v_1 + v_2 = \frac{\rho J h}{qB} = \mu_1 E + \mu_2 E$$

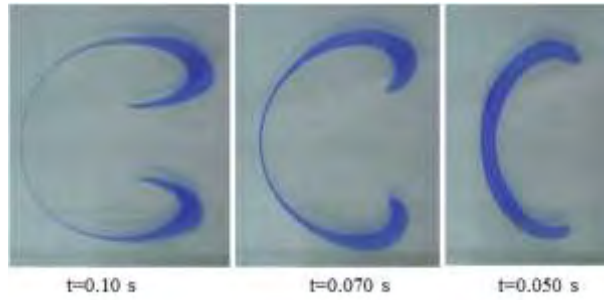
$$\Rightarrow \mu_1 + \mu_2 = \frac{\rho J h}{qBE} \dots (4)$$

$\mu_1 + \mu_2$ 為兩種離子的電遷移率和。

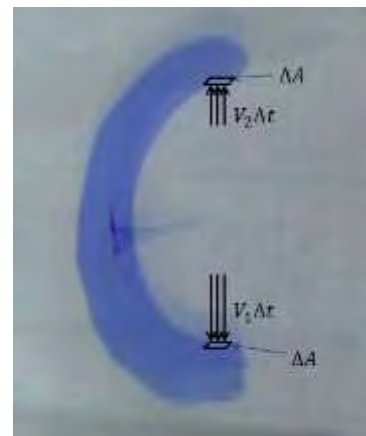
5. 染料內的離子漂移速度不同時，在電場作用下，對染料所施的衝力不同。圖三 所示，向 Z 方向漂移的離子動量大於向 $-Z$ 方向漂移的離子，其衝力差 ΔF 使漩渦偶極子向 Z 方向偏移。電解質水溶液體積 V ，含有 N_1 個質量 m_1 漂移速率 v_1 的離子， N_2 個質量 m_2 漂移速率 v_2 的離子，撞擊面積 ΔA 的染料

$$F_1 \Delta t = (v_1 \Delta t \Delta A) \frac{N_1}{V} 2m_1 v_1$$

$$F_2 \Delta t = (v_2 \Delta t \Delta A) \frac{N_2}{V} 2m_2 v_2$$



圖二:漩渦偶極子的形成。



圖三:漩渦偶極子受到不同大小的衝力而偏移。

染料所受的衝力差 $\Delta F = F_1 - F_2$

$$\Delta F = \frac{2A}{v} (N_1 m_1 v_1^2 - N_2 m_2 v_2^2)$$
$$= \frac{2AE^2}{v} (N_1 m_1 \mu_1^2 - N_2 m_2 \mu_2^2) \cdots (5)$$

6. 漩渦偶極子位置 Z 隨時間 t 的變化 $z = \left(\frac{3J}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}}$, $\Delta F = \rho J h$

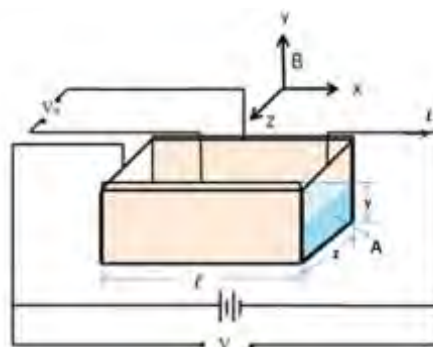
三、實驗步驟

1. 方型盒上方放置磁鐵，N極向下，盒中放入深 0.5cm 的 0.10M 氯化鈉水溶液。電壓 $V = 3.0V$ ，染料粉用 0.10M 的氯化鈉水溶液浸泡，打開攝影機，滴入一滴染料，拍攝漩渦偶極子的運動圖像。
2. 將拍攝的圖像在電腦中用 KMplayer 軟體截取不同時間 (t) 下漩渦偶極子的位置 (x) 由 $x - t^{\frac{2}{3}}$ 關係圖的斜率算出 J 。
3. 量微量吸管一滴染料滴的體積及在滴入液面瞬間的面積，算出漩渦偶極子中的離子電量 q 。
4. 測量氯化鈉水溶液的密度 ρ ，將 ρ 、 J 、 h 、 B 、 E 代入公式 (4) 算出鈉離子和氯離子的電遷移率和 $\mu_1 + \mu_2$ 。
5. 改用 12V 不同電壓下重做相同實驗。
6. 改用 0.10M 氫氧化鈉水溶液重做相同實驗。
7. 改用 0.10M 氯化鉀水溶液重做相同實驗。
8. 將 0.10M 的氯化鈉水溶液加熱到 $100^\circ C$ ，和上述實驗步驟一樣，算出離子的電遷移率和。溫度每降低 $20^\circ C$ ，重做相同實驗，至 $0^\circ C$ 。
9. 以 0.10M 的氯化氫、氫氧化鈉水溶液重做相同實驗。

乙、霍爾效應法

一、研究器材和設備

- (一)、壓克力盒 X 軸上附兩片銅片電極，兩極距離 $l = 9.30cm$ ，面積 $A = 4.84cm^2$ 連接電池；Z 軸上兩片銅片電極距離 $z = 2.24cm$ ，面積 $A' = 4.08cm^2$ 連接毫安計，以測量霍爾電壓。
- (二)、兩鉤鐵硼磁鐵相距 1.5cm，形成均勻磁場 0.504T。



圖四:霍爾效應法實驗裝置示意圖。

- (三)、電源供應器、安培計、伏特計。
 (四)、氯化鈉、氫氧化鈉、氯化鉀、氯化氫等水溶液。

二、原理

1. 電壓 $V = El$ ，液高 h ，電流 (i) 向 +X 方向，磁場 B 向 -Y 方向，正負電載子受勞侖茲力向 -Z 方向，形成霍爾電壓 V_H [5]

(1) $v_d = \frac{i}{nAe}$ ：單位體積的電荷數， $ne=Q$ ：電荷密度 (C/cm^3)

$$I = nAev_d = QA(v_1 + v_2)$$

$$I = QAE(\mu_1 + \mu_2) = QA\frac{V}{\ell}(\mu_1 + \mu_2) \cdots (6)$$

$$(2) q_1v_1B + q_2v_2B = q(v_1 - v_2)B$$

$$= q(\mu_1 - \mu_2)EB$$

$$= q\frac{V}{\ell}B(\mu_1 - \mu_2)$$

$$E_H = \frac{V_H}{z}, \quad qV_H = q\frac{V}{\ell}B(\mu_1 - \mu_2)$$

$$\rightarrow V_H = \frac{BVz}{\ell}(\mu_1 - \mu_2) \cdots (7)$$

三、實驗步驟

1. 方型盒的 $\ell=9.30\text{cm}$ ， $A=4.84\text{cm}^2$ ，分別放入 $1.00 \times 10^{-1}M$ 、 $1.00 \times 10^{-2}M$ 、 $1.00 \times 10^{-3}M$ 和 $1.00 \times 10^{-4}M$ 等四種不同的氯化鉀水溶液；通電後量取電壓 (V) 及電流 (I)，作 I-V 圖，斜率 = $\frac{AQ}{\ell}(\mu_1 + \mu_2)$ 。

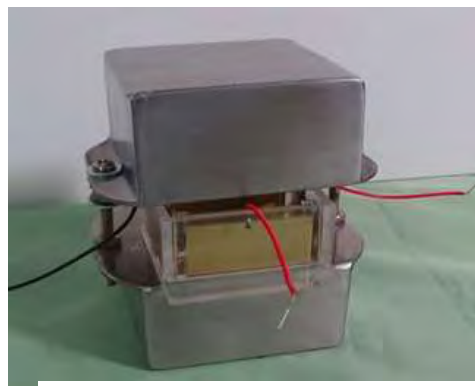
2. 長 $\ell = 4.05\text{cm}$ 寬 $z = 2.24\text{cm}$ ，裝深 1.82cm 的 $0.10M$ 氯化鈉水溶液，外加磁場 $B=0.504T$ 外加電壓 $V = 3.00V$ 、 $6.00V$ 、 $9.00V$ 、 $12.0V$ 。

(1) 量出霍爾電壓 (V_H)，作 V_H-V 圖，斜率 = $\frac{BVz}{\ell}(\mu_1 - \mu_2)$ ，由已知的 B 、 z 、 ℓ 算出 $\mu_1 - \mu_2$ 。

(2) 作 I-V 圖，斜率 = $\frac{AQ}{\ell}(\mu_1 + \mu_2)$ ，由已知的 A 、 Q 、 ℓ 算出 $\mu_1 + \mu_2$ 。

(3) 由 $\mu_1 - \mu_2$ 和 $\mu_1 + \mu_2$ 算出 μ_1 和 μ_2 。

3. 改用 $0.100M$ 氫氧化鈉、氯化氫、氯化鉀水溶液，重做實驗。



圖五：霍爾效應實驗裝置圖。

肆、結果與討論

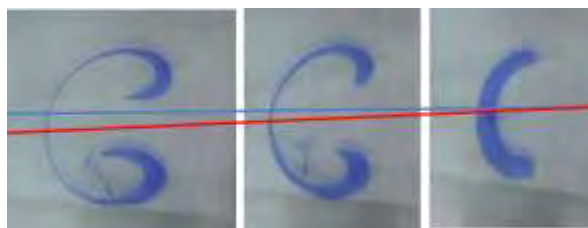
一、測量氯化鈉水溶液的離子電遷移率

1.圖六所示為 0.100M 的氯化鈉水溶液形成的漩渦偶極子運動的截圖，一

滴染料的體積 $V = 0.300 \times 10^{-3} \text{cm}^3$ ，

滴在液面的面積 0.700cm^2 ，厚

$h = 1.20 \times 10^{-7} \text{cm}$ ，磁場 $B = 0.268 \text{T}$



圖六:氯化鈉水溶液上的漩渦偶極子向 -X 偏+Z 方移動。

2. 表一:氯化鈉水溶液漩渦偶極子位置(x)偏移(z)隨時間(t)的變化。

| V (v) | t (s) | 1.50 | 2.00 | 2.50 | 3.50 | 4.50 | 5.50 | 6.50 | 7.50 |
|-------|--------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 3.0 | x (cm) | 6.73 | 8.15 | 10.18 | 12.56 | 14.07 | 15.79 | 16.72 | 17.54 |
| | z (cm) | 0.60 | 0.92 | 1.52 | 2.85 | 3.47 | 3.89 | 4.11 | 4.67 |
| 12 | x (cm) | 8.99 | 11.22 | 13.48 | 16.66 | 18.33 | 20.16 | 21.70 | 23.18 |
| | z (cm) | 0.32 | 0.48 | 1.09 | 2.08 | 2.52 | 3.04 | 3.17 | 3.32 |

漩渦偶極子的位置(x)、偏移(z)隨時間(t)的變化列於表一。

3.作 $x-t^{2/3}$ 圖得到斜率依次為 1.048 ± 0.02 及 1.320 ± 0.026 。由公式

$$x = \left(\frac{3J}{2\pi}\right)^{1/3} t^{2/3}, \text{ 得到 } J \text{ 值 } 4.82 \pm 0.242 \text{cm}^3/\text{s}^2 \text{ 及 } 9.63 \pm 0.48 \text{cm}^3/\text{s}^2。$$

4.氯化鈉水溶液 $\rho = 1.01 \text{g/cm}^3$ ，漩渦偶極子 $h = 1.22 \times 10^{-4} \text{cm}$ ， $B = 0.268 \text{T}$ ， $E = \frac{V}{z}$

為

0.15V/cm 及 0.6V/cm 。

5.氯化鈉水溶液含

離子數 $q_+ + q_- = 6 \times$

$10^{-8} \text{mol} \rightarrow q = 5.76 \times 10^{-3} \text{C}$

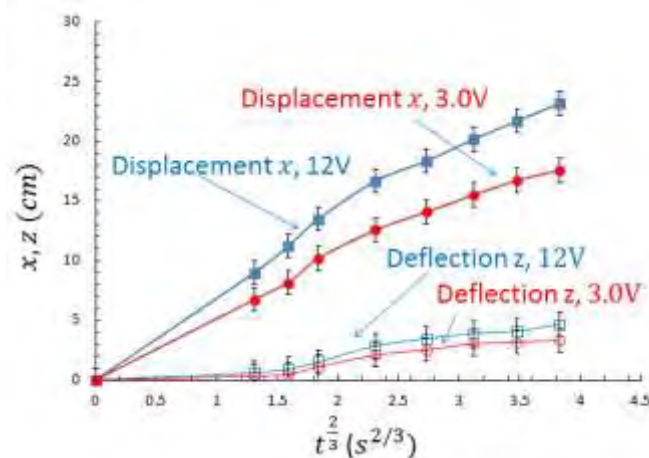
6.兩種離子的電遷移率和 $\mu_1 +$

$$\mu_2 = \frac{\rho h}{qBE} \text{ 求得 } \mu_1 + \mu_2 \text{ 為}$$

$(12.7 \pm 0.6) \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{Vs}$ 和

$(12.5 \pm 0.6) \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{Vs}$ 。

7.作 $z-t^{2/3}$ 圖得到斜率為 0.096 及



圖七:氯化鈉水溶液上的漩渦偶極子移動 x 和 z 對 $t^{2/3}$ 關係圖。

0.91。由公式 (5) $z = \left(\frac{3J}{2\pi}\right)^{1/3} t^{2/3}$,

J 值=0.98 ± 0.09cm³/s²及

2.03 ± 0.02cm³/s²。由 $\Delta F = \rho J h$ 算出 $\Delta F = (1.2 \pm 0.1) \times 10^{-9} N$
及 $(2.5 \pm 0.1) \times 10^{-9} N$

8.由 $\Delta F = \frac{2A}{V} (N_1 m_1 v_1^2 - N_2 m_2 v_2^2) = \frac{2AE^2}{V} (N_1 m_1 \mu_1^2 - N_2 m_2 \mu_2^2) \dots (5)$

氯離子的 $\frac{N_1 m_1 \mu_1^2}{V} = 2.23 \times 10^{-9} g cm s^{-2} V^{-2}$ 大於

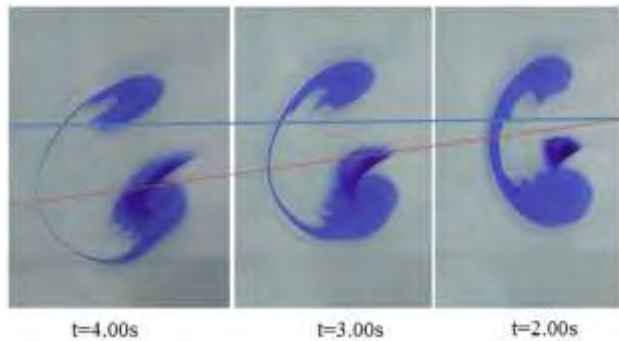
鈉離子的 $\frac{N_2 m_2 \mu_2^2}{V} = 0.619 \times 10^{-9} g cm s^{-2} V^{-2}$

因此，漩渦偶極子向+z 方向偏移。

二、測量氫氧化鈉水溶液的離子電遷移率

1.圖八所示，0.10M 的氫氧化鈉水溶液在 3.0V 的電壓作用下，漩渦偶極子向-x 偏 + Z 方向運動。

2.0.10M 的氫氧化鈉水溶液在 3.0V 和 12V 的電壓作用下，漩渦偶極子位置(x)偏移(z)隨時間(t)的變化如表二。



圖八:氫氧化鈉水溶液上的漩渦偶極子向-x 偏+z 方向移動。

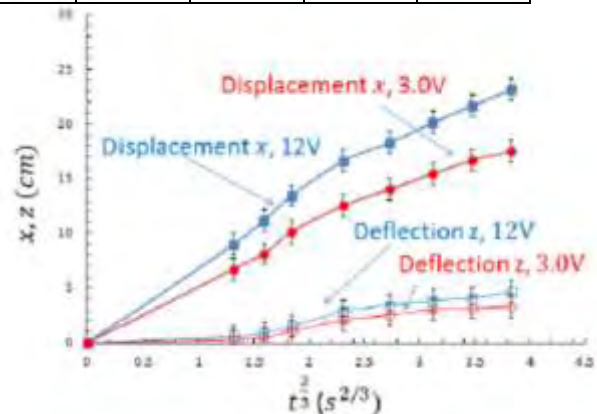
表二:氫氧化鈉水溶液漩渦偶極子位置(x)偏移(z)隨時間(t)的變化。

| V (v) | t (s) | 1.3 | 1.8 | 2.3 | 2.8 | 3.3 | 3.8 | 4.3 |
|-------|--------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 3.0 | x (cm) | 6.36 | 7.84 | 9.04 | 10.42 | 11.34 | 12.51 | 13.57 |
| | z (cm) | 1.2 | 1.54 | 2.29 | 2.98 | 3.63 | 4.25 | 4.98 |
| 12 | x (cm) | 7.84 | 9.88 | 11.57 | 12.67 | 14.33 | 15.74 | 16.87 |
| | z (cm) | 1.51 | 1.93 | 2.95 | 3.74 | 4.62 | 5.33 | 6.11 |

3.作 $x-t^{2/3}$ 圖得到斜率依次為

1.65 ± 0.035 和 2.07 ± 0.04。
得 J 依次為 9.40 ± 0.2cm³/s²
和 18.6 ± 0.9cm³/s²

4. $\rho = 1.01g/cm^3$ ，漩渦偶極子
 $h=1.22 \times 10^{-4} cm$ 、 $B=0.268T$ ，



$E = \frac{V}{z}$ 依次為 0.15 V/cm 、 0.6 V/cm 。

5. 氫氧化鈉水溶液含 $q_1 + q_2 = 6 \times 10^{-8} \text{ mol}$

$$\rightarrow q = 5.76 \times 10^{-3} \text{ C}$$

圖九: 氫氧化鈉水溶液上的漩渦偶極子漩渦偶

6. 由公式(4) $\mu_1 + \mu_2 = \frac{\rho J h}{N q B E}$ 求得

極子移動 x 和 z 對 $t^{2/3}$ 關係圖。

$\mu_1 + \mu_2$ 依次為 $(24.9 \pm 0.5) \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{Vs}$ 和 $(24.8 \pm 0.6) \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{Vs}$ 。

7. 作 $z-t^{2/3}$ 圖得到斜率為 0.96 ± 0.03 及 0.91 ± 0.02 。由公式

$$(5) \quad z = \left(\frac{3J}{2\pi}\right)^{1/3} t^{2/3}, \quad J \text{ 值 } 5.63 \pm 0.41 \text{ cm}^3/\text{s}^2 \text{ 及 } 11.2 \pm 0.3 \text{ cm}^3/\text{s}^2。$$

由 $\Delta F = \rho J h$ 算出 $\Delta F = (6.9 \pm 0.5) \times 10^{-9} \text{ N}$ 及 $(13.8 \pm 0.4) \times 10^{-9} \text{ N}$

8. 由 $\Delta F = \frac{2A}{V} (N_1 m_1 v_1^2 - N_2 m_2 v_2^2)$

$$= \frac{2AE^2}{V} (N_1 m_1 \mu_1^2 - N_2 m_2 \mu_2^2) \dots (5)$$

氫離子的 $\frac{N_1 m_1 \mu_1^2}{V} = 7.24 \times 10^{-9} \text{ g cm s}^{-2} \text{ V}^{-2}$ 大於

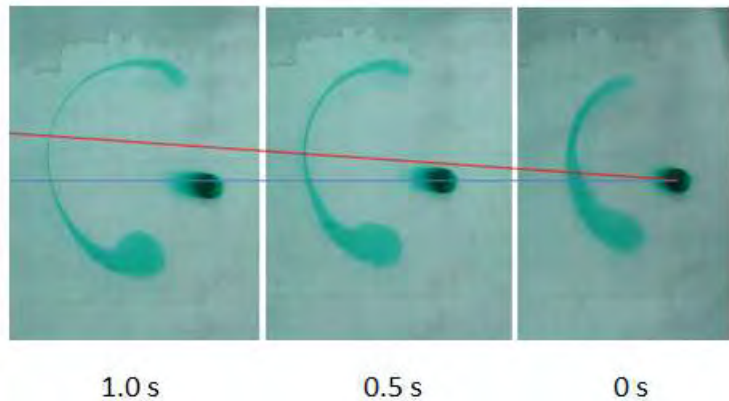
鈉離子的 $\frac{N_2 m_2 \mu_2^2}{V} = 0.619 \times 10^{-9} \text{ g cm s}^{-2} \text{ V}^{-2}$

因此，漩渦偶極子向 $+z$ 方向偏移。

三、測量氯化鉀水溶液的離子電遷移率

1. 圖十所示: 0.10 M 的氯化鉀水溶液在 3.0 V 的電壓作用下，漩渦偶極子向 $-x$ 偏 $-z$ 方向運動。

2. 0.10 M 的氯化鉀水溶液在 3.0 V 和 12 V 的電壓作用下，漩渦偶極子位置 (x) 及偏移 (z) 隨時間 (t) 的變化如表三。



圖十: 氯化鉀水溶液上的漩渦偶極子向 $-x$ 偏 $-z$ 方向移動。

表三: 氯化鉀水溶液漩渦偶極子位置 (x) 偏移 (z) 隨時間 (t) 的變化。

2.

| V (v) | t (s) | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 | 3 | 3.5 |
|-------|--------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| 3.0 | x (cm) | 4.08 | 6.15 | 7.49 | 8.66 | 9.53 | 10.46 | 11.09 |
| | z (cm) | 1.80 | 2.97 | 3.33 | 3.66 | 4.05 | 4.85 | 5.23 |
| 12 | x (cm) | 6.10 | 8.00 | 9.60 | 11.73 | 12.59 | 14.00 | 15.00 |
| | z (cm) | 2.30 | 3.64 | 4.03 | 4.44 | 4.98 | 5.94 | 6.52 |

3. 作 $x-t^{2/3}$ 圖得到斜率依次為 1.41 ± 0.04 和 1.78 ± 0.05 。算得 J 值依次為 $5.86 \pm 0.4 \text{ cm}^3/\text{s}^2$, $11.7 \pm 0.5 \text{ cm}^3/\text{s}^2$

4. $\rho = 1.01 \text{ g/cm}^3$, 漩渦偶極子 $h = 1.22 \times 10^{-4} \text{ cm}$, $B = 0.268 \text{ T}$, $E = \frac{V}{z}$ 依次為

0.3 V/cm 、

0.6 V/cm , 氯化鉀水溶液含 $q_1 + q_2 = 6 \times 10^{-8} \text{ mol} \rightarrow q = 5.76 \times 10^{-3} \text{ C}$

5. 由公式(4) $\mu_1 + \mu_2 = \frac{\rho J h}{q B E}$ 求得 $\mu_1 + \mu_2$ 依次為 $(11.5 \pm 0.6) \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{Vs}$ 和

$(11.4 \pm 0.6) \times 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{Vs}$ 。

6. 作 $z-t^{2/3}$ 圖得到斜率為

0.77 ± 0.03 及

2.18 ± 0.02 。由公式

$$(5) \quad z = \left(\frac{3J}{2\pi}\right)^{1/3} t^{2/3}, \text{ J 值}$$

$0.96 \pm 0.41 \text{ cm}^3/\text{s}^2$ 及

$1.65 \pm 0.3 \text{ cm}^3/\text{s}^2$ 。

由 $\Delta F = \rho J h$ 算出 $\Delta F =$

$(2.02 \pm 0.5) \times 10^{-9} \text{ N}$ 及

$(2.03 \pm 0.4) \times 10^{-9} \text{ N}$

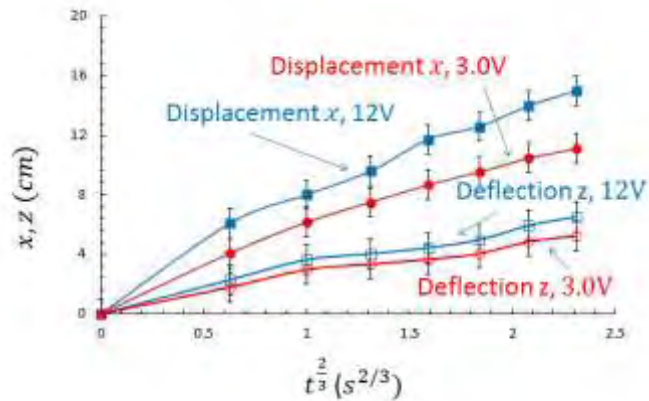
7. 由 $\Delta F = \frac{2A}{v} (N_1 m_1 v_1^2 - N_2 m_2 v_2^2)$

$$= \frac{2AE^2}{v} (N_1 m_1 \mu_1^2 - N_2 m_2 \mu_2^2) \dots (5)$$

鉀離子的 $\frac{N_1 m_1 \mu_1^2}{v} = 2.26 \times 10^{-9} \text{ g cm s}^{-2} \text{ V}^{-2}$ 大於

氯離子的 $\frac{N_2 m_2 \mu_2^2}{v} = 2.23 \times 10^{-9} \text{ g cm s}^{-2} \text{ V}^{-2}$

因此，漩渦偶極子向 -z 方向偏移。



圖十一:氯化鉀水溶液上的漩渦偶極子移動 x 和 $t^{2/3}$ 關係圖。

四、離子電遷移率隨溫度的變化

1.以 0.10M 的氯化鈉、氫氧化鈉、和氯化氫水溶液用漩渦偶極子法測得鈉離子和氫氧離子電遷移率隨溫度的變化；另外以 0.10M 的氯化氫水溶液用漩渦偶極子法測得氯離子和氫離子電遷移率隨溫度的變化，結果如表四及圖十一所示。

2. 表四:離子化合物電遷移率和 $\mu_1 + \mu_2 (\times 10^4 \frac{cm^2}{Vs})$ 隨溫度的變化

| | T(k) | 273 | 298 | 313 | 333 | 353 | 373 |
|-----------------|------|-------|------|------|------|-------|------|
| $\mu_1 + \mu_2$ | NaCl | 6.26 | 13.1 | 25.0 | 37.8 | 48.6 | 66.0 |
| | NaOH | 22.1 | 25.8 | 43.5 | 76.8 | 110.6 | 155 |
| | HCl | 19.38 | 44.1 | 68.9 | 104 | 140 | 191 |

3.溫度上升水溶液的黏滯係數減少，電遷移率增大。

4.溫度超過 303K，水分子間的氫鍵遭到破壞，離子的電遷移率有顯著的增大〔1〕。

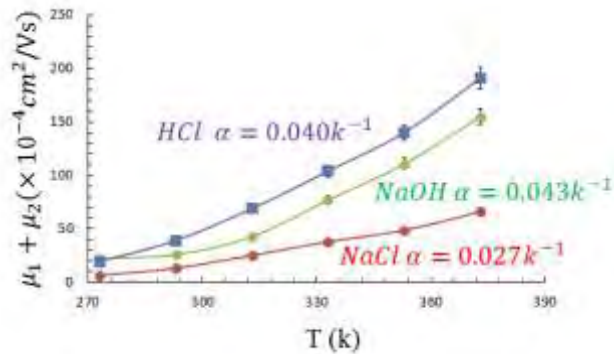
5.圖十二中，溫度係數 α

$$Na^+ + Cl^- \alpha = 0.027k^{-1}$$

$$Na^+ + OH^- \alpha = 0.043k^{-1}$$

$$H^+ + Cl^- \alpha = 0.0407k^{-1}$$

可判斷氫離子和氫氧離子的電遷移率隨溫度產生劇烈變化。



圖十二:三種化合物離子電遷移率隨溫度的變化。

五、利用霍爾效應測量電遷移率

1.(1) $1.00 \times 10^{-1}M$ 、 $1.00 \times 10^{-2}M$ 、 $1.00 \times 10^{-3}M$ 和 $1.00 \times 10^{-4}M$ 等四種不同的氯化鉀水溶液放入方型盒 $l=9.30cm$ ， $A=4.84cm^2$ ，通電後量電壓(V)及電流(I)結果如表五。

表五:氯化鉀水溶液的電流隨電壓的變化(22.5°C)。

(2) 圖十三中，

$$1.00 \times 10^{-1}M$$

的水溶液外加

電壓增大時，電

流非線性的增

大，電解現象非

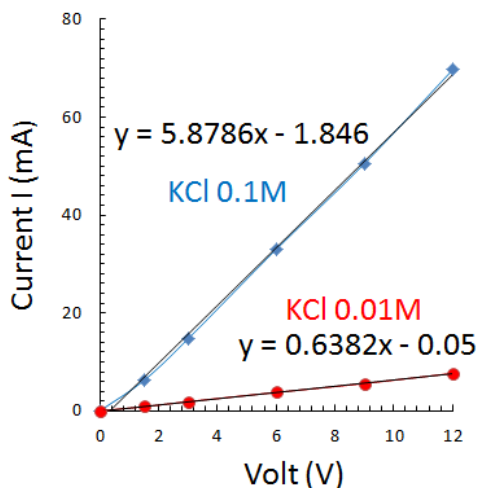
| V(volt) | | 1.50 | 3.00 | 6.00 | 9.00 | 12.0 |
|------------------------|--------|--------|--------|---------|--------|-------|
| $1.00 \times 10^{-1}M$ | I (mA) | 0.621 | 1.47 | 33.0 | 50.5 | 69.7 |
| $1.00 \times 10^{-2}M$ | I (mA) | 0.863 | 1.88 | 3.77 | 5.59 | 7.68 |
| $1.00 \times 10^{-3}M$ | I (mA) | 0.0801 | 0.194 | 0.473 | 0.702 | 0.923 |
| $1.00 \times 10^{-4}M$ | I (mA) | 0.0101 | 0.0302 | 0.00604 | 0.0901 | 0.122 |

常顯著。I-V 圖的斜率 5.88 代入公式(6) $I = \frac{QAV}{\ell}(\mu_1 + \mu_2)$ ，求得氯離子和鉀離子的電遷移率和

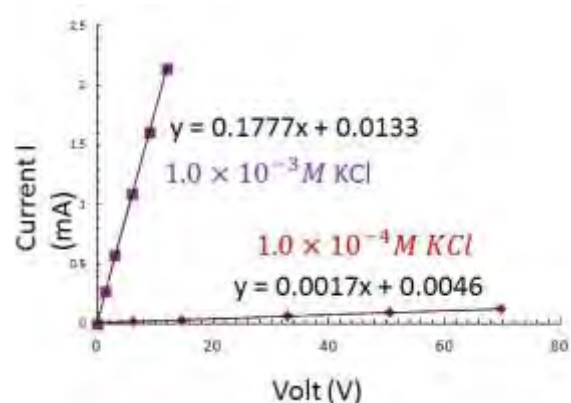
$\mu_1 + \mu_2 = 118 \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{Vs}$ ，為公認值 $15.54 \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{Vs}$ 的 7.59 倍。

(3) $1.00 \times 10^{-2} \text{M}$ I-V 圖的斜率 0.638 代入公式(6) $I = \frac{QAV}{\ell}(\mu_1 + \mu_2)$ ，求得氯離子和鉀離子的電遷移率和 $(\mu_1 + \mu_2) = 12.8 \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{Vs}$ ，和公認值 $\mu_1 + \mu_2 = 15.54 \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{Vs}$ 比較，誤差為-17.6%。

(4) $1.00 \times 10^{-3} \text{M}$ I-V 圖的斜率 0.178 代入公式(6) $I = \frac{QAV}{\ell}(\mu_1 + \mu_2)$ ，求得氯離子和鉀離子的電遷移率和 $\mu_1 + \mu_2 = 15.8 \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{Vs}$ ，和公認值 $\mu_1 + \mu_2 = 15.54 \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{Vs}$ 比較，誤差為-2.3%。



圖十三:高濃度氯化鉀水溶液的電流隨電壓的變化。



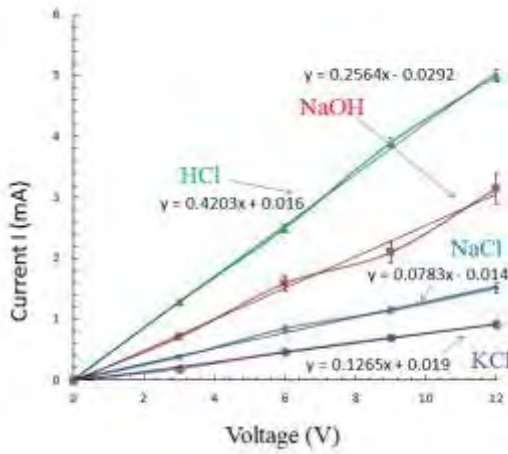
圖十四:低濃度氯化鉀水溶液的電流隨電壓的變化。

(5) $1.00 \times 10^{-4} \text{M}$ I-V 圖的斜率 0.0017 代入公式(6) $I = \frac{QAV}{\ell}(\mu_1 + \mu_2)$ ，求得氯離子和鉀離子的電遷移率和 $(\mu_1 + \mu_2) = 34.4 \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{Vs}$ ，為公認值 $15.54 \times 10^{-4} \text{cm}^2/\text{Vs}$ 的 2.12 倍。濃度太低的水液容易受汙染，藥品和水(DI water)的純度也是誤差的來源。

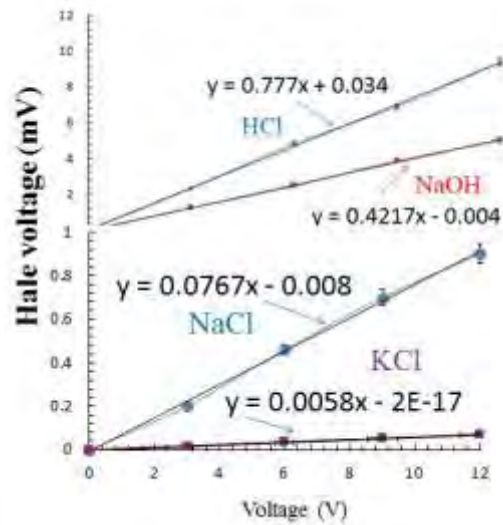
2. $1.00 \times 10^{-3} \text{M}$ 的氯化鈉、氫氧化鈉和氯化氫等三種相同濃度水溶液放入方型盒 $\ell=4.05 \text{cm}$ ， $A=4.08 \text{cm}^2$ ， $z=2.24 \text{cm}$ 的方型盒，通電後量取電壓(V)、電流(I)及霍爾電壓(V_H)，結果如表六。

表六: $1.00 \times 10^{-3}M$ 的氯化鈉、氫氧化鈉、氯化鉀和氯化氫水溶液的電流(I)及霍爾電壓(V_H)隨外加電壓(V)的變化

| | | | | | |
|------|------------|--------|--------|--------|--------|
| | V (V) | 3.0 | 6.0 | 9.0 | 12 |
| | V_H (mV) | 0.228 | 0.456 | 0.684 | 0.912 |
| NaOH | I(mA) | 0.707 | 1.59 | 2.10 | 3.15 |
| | V_H (mV) | 1.29 | 2.50 | 3.91 | 4.98 |
| HCl | I(mA) | 1.29 | 2.50 | 3.91 | 4.98 |
| | V_H (mV) | 2.35 | 4.85 | 6.90 | 9.38 |
| KCl | I(mA) | 0.19 | 0.47 | 0.70 | 0.92 |
| | V_H (mV) | 0.0173 | 0.0348 | 0.0526 | 0.0690 |



圖十五: $1.00 \times 10^{-3}M$ 的氯化鈉、氫氧化鈉、氯化鉀和氯化氫水溶液的電流隨電壓的變化。



圖十六: $1.00 \times 10^{-3}M$ 的氯化鈉、氫氧化鈉、氯化鉀和和氯化氫水溶液的霍爾電壓隨外加電壓的變化。

3. 表七:測量得到的鈉離子、氯離子、氫氧離子、鉀離子和氫離子電遷移率

| | I-V 斜率 (mA/V) | $V_H - V$ 斜率 | 測量值(22.5°C) | | 公認值(25.0°C) | |
|------|------------------------|------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| | | | μ_+ $10^{-4}cm^2/Vs$ | μ_- $10^{-4}cm^2/Vs$ | μ_+ $10^{-4}cm^2/Vs$ | μ_- $10^{-4}cm^2/Vs$ |
| NaCl | 0.1265 ± 0.0063 | 0.0767 ± 0.0008 | 5.16 ± 0.03 | 7.92 ± 0.03 | 5.19 | 7.92 |
| NaOH | 0.2564 ± 0.0205 | 0.4217 ± 0.0084 | 5.69 ± 0.03 | 20.8 ± 0.2 | 5.19 | 20.6 |
| HCl | 0.423 ± 0.0084 | 0.777 ± 0.0155 | 36.8 ± 0.8 | 7.94 ± 0.08 | 36.2 | 7.92 |
| KCl | 0.1265 ± 0.0063 | 0.0057 ± 0.0003 | 7.64 ± 0.06 | 7.92 ± 0.05 | 7.62 | 7.92 |

$\ell=4.05\text{cm}$, $A=4.08\text{cm}^2$, $z=2.24\text{cm}$, $Q = 9.6 \times 10^{-2}\text{C/cm}^3$, $B=0.504\text{T}$

由公式 (6) $I = \frac{QAV}{\rho} \mu_1 + \mu_2 \rightarrow \mu_1 + \mu_2 = 10.34 \times (I - V \text{斜率}) \times 10^{-3}$

由公式 (7) $V_H = \frac{BVz}{l} (\mu_1 - \mu_2) \rightarrow (\mu_1 - \mu_2) = 3.587 \times (V_H - V \text{斜率}) \times 10^{-3}$

由上兩式算出離子的電遷移率列於表七。

4. H^+ 在水中以跳躍方式傳輸(proton jumping) [5]，因此離子的電遷移率特別的大，為一般離子的 4.5 倍以上； OH^- 在水中亦以跳躍方式傳輸，但因為粒子尺寸比 H^+ 大，離子的電遷移率小於 H^+ ，但仍為一般離子的 2.5 倍以上。

5. 霍爾效應法測量離子的電遷移率和只須測量電流隨外加電壓的變化，測量離子的電遷移差和只須測量霍爾電壓隨外加電壓的變化；得到的結果三位有效數字。但因為外加磁場必須為均勻磁場，測量用的方型盒尺寸小，待測液體積小，不易控制恆溫，無法實驗探討溫度變化對離子電遷移率的影響。

6. 漩渦偶極子法必須測量漩渦偶極子的位移隨時間的變化，偏移隨時間的變化，以及染料滴入液面後擴散的面積；得到的結果二位有效數字。但測量用的方型盒尺寸大，待測液體積大，易控制恆溫，可用來實驗探討溫度變化對離子電遷移率的影響。

伍、結論

1. 利用漩渦偶極子的移動，可求出兩離子的電遷移和。
2. 利用霍爾效應求出兩離子電遷移差，利用水溶液的電流隨外加電壓的變化求出兩離子電遷移和，進而算出離子的電遷移率。
3. 氫離子的電遷移率以及氫氧離子的溫度係數，都異乎尋常的大。

陸、參考資料

1. 楊承勸、王昱淇、許瀚元「奈米氣泡水溶液導電度的測量與應用」2018 台灣國際科學展覽會物理與天文學科。 www.ntsec.gov.tw
2. 孫培文「簡易方法測量勞倫茲力」2014 台灣國際科學展覽會物理與天文學科。 www.ntsec.gov.tw
3. Y.D. Afanasyev and V.N. Korabel , Physics of Fluid 16, 3850-3857, (2004)
4. Y.D. Afanasyev and C.G. Deacon, American Journal of Physics 74,236-240, (2006)
5. A.Avdonin and P.Skupinski, Physica B 483, 13-18, (2016)

【評語】 051812

本實驗研究測量離子的電遷移率，曾參加2019臺灣國際科展。

本次作品增加以霍爾效應量測離子在液體中的遷移率，類似磁場輔助電泳，得以測量離子的遷移率，配合理論模擬，分析合宜。利用

漩渦偶極子利用霍爾效應量測離子在液體中的移動，值得再探討。

建議可再變換參數延伸實驗，開發成實驗課教材。

壹、研究動機

參觀2018年臺灣國際科展〔1〕時，對奈米氣泡的電遷移率不甚了解，引起我們研究測量離子電遷移率的興趣。以「簡易方法測量電遷移率」參加2019年臺灣國際科展，評審給了許多改進和修正的意見，繼續研究以參加全國科展活動。

貳、研究目的

- 一、以漩渦偶極子法測量研究電解質水溶液離子的電遷移率。
- 二、以霍爾效應法測量研究電解質水溶液離子的電遷移率。
- 三、以漩渦偶極子法測量研究離子電遷移率隨溫度的變化。

參、研究過程或方法

甲、漩渦偶極子法

一、研究器材和設備

- (一)、壓克力盒長40cm，寬20cm，高5cm。
- (二)、銅片長10cm，寬5cm，厚3mm兩片做電極。
- (三)、鈦鐵硼磁鐵0.5T。
- (四)、電源供應器、安培計、伏特計。
- (五)、攝影機、KMPlayer軟體。
- (六)、染料、微量吸管。
- (七)、氯化鈉、氫氧化鈉、稀鹽酸。

二、原理

(一)、電壓 V ，電流 i 向 $-Z$ 方向，磁場 B 向 $-Y$ 方向。在磁鐵下方液面上滴入面積 A 的染料時，染料內的離子受勞倫茲力向 $-X$ 方向，染料一方面擴散，一方面向 $-X$ 移動。因染料所包圍的水溶液隨著離子快速移動，壓力較小，外圍的水溶液施加壓力，使染料形成漩渦偶極子(vortex dipole)〔2, 3〕。

(二)、漩渦偶極子位置 x 隨時間 t 的變化〔3, 4〕

$$x = \left(\frac{3J}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} \dots (1) \quad J: \text{漩渦偶極子的運動動量通量,} \\ [J] = L^3 T^{-2}.$$

(三)、 $F = \rho J h \dots (2)$ F 為面積 A 的染料內離子所受的勞倫茲力， ρ 為水溶液的密度。 $F = q_1 v_1 B + q_2 v_2 B = q(v_+ + v_-)B \dots (3)$

(四) $\mu = \frac{v_d}{E}$ ， μ ：電遷移率， v_d ：漂移速率， E ：外加電場 $= \frac{V}{z}$

$$\Rightarrow \mu_1 + \mu_2 = \frac{\rho J h}{q B E} \dots (4)$$

(五)、染料內的離子漂移速度不同時，在電場作用下，對染料所施的衝力不同。圖三所示，向 Z 方向漂移的離子動量大於向 $-Z$ 方向漂移的離子，其衝力差 ΔF 使漩渦偶極子向 Z 方向偏移。

$$\Delta F = \frac{2A}{V} (N_1 m_1 v_1^2 - N_2 m_2 v_2^2) = \frac{2AE^2}{V} (N_1 m_1 \mu_1^2 - N_2 m_2 \mu_2^2) \dots (5)$$

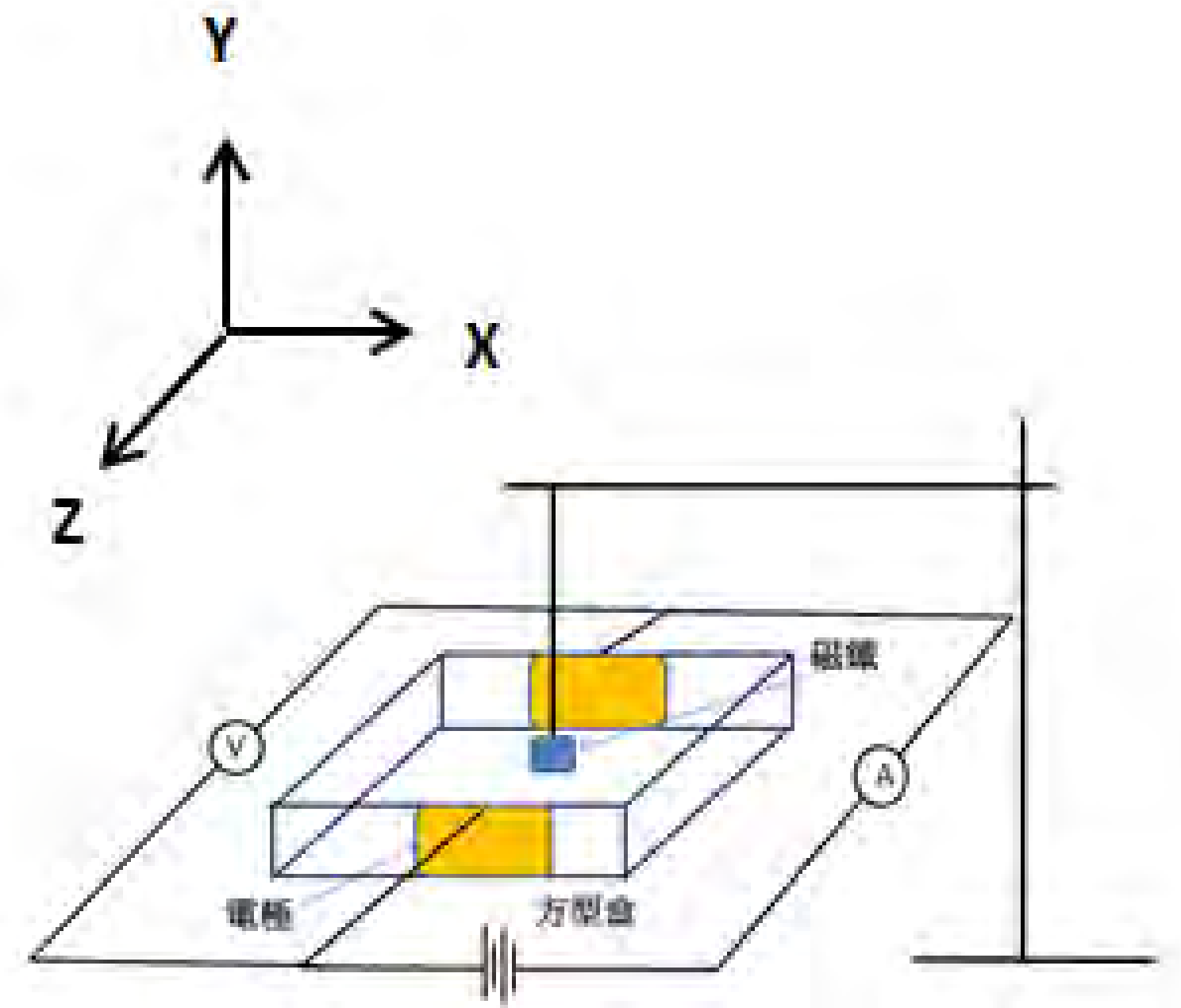
三、實驗步驟

- (一)方型盒上方放置磁鐵，N極向下，盒中分別放入深0.5cm的0.10M氯化鈉、氯化鉀和氫氧化鈉水溶液。電壓 $V = 3.0V$ ，染料粉用氯化鈉水溶液浸泡，打開攝影機，滴入一滴染料，拍攝漩渦偶極子的運動圖像。將拍攝的圖像在電腦中用KMplayer軟體截取不同時間(t)下漩渦偶極子的位置(x)由 $x-t^{\frac{2}{3}}$ 關係圖的斜率算出 J 。量微量吸管一滴染料滴的體積及在滴入液面瞬間的面積，算出漩渦偶極子中的離子電量 q 。測量氯化鈉水溶液的密度 ρ ，將 ρ 、 J 、 h 、 B 、 E 代入公式(4)算出鈉離子和氯離子的電遷移率 $\mu_1 + \mu_2$ 。
- (二)將0.10M的氯化鈉水溶液加熱到 $100^\circ C$ ，和上述實驗步驟一樣，算出離子的電遷移率。溫度每降低 $20^\circ C$ ，重做相同實驗，至 $0^\circ C$ 。

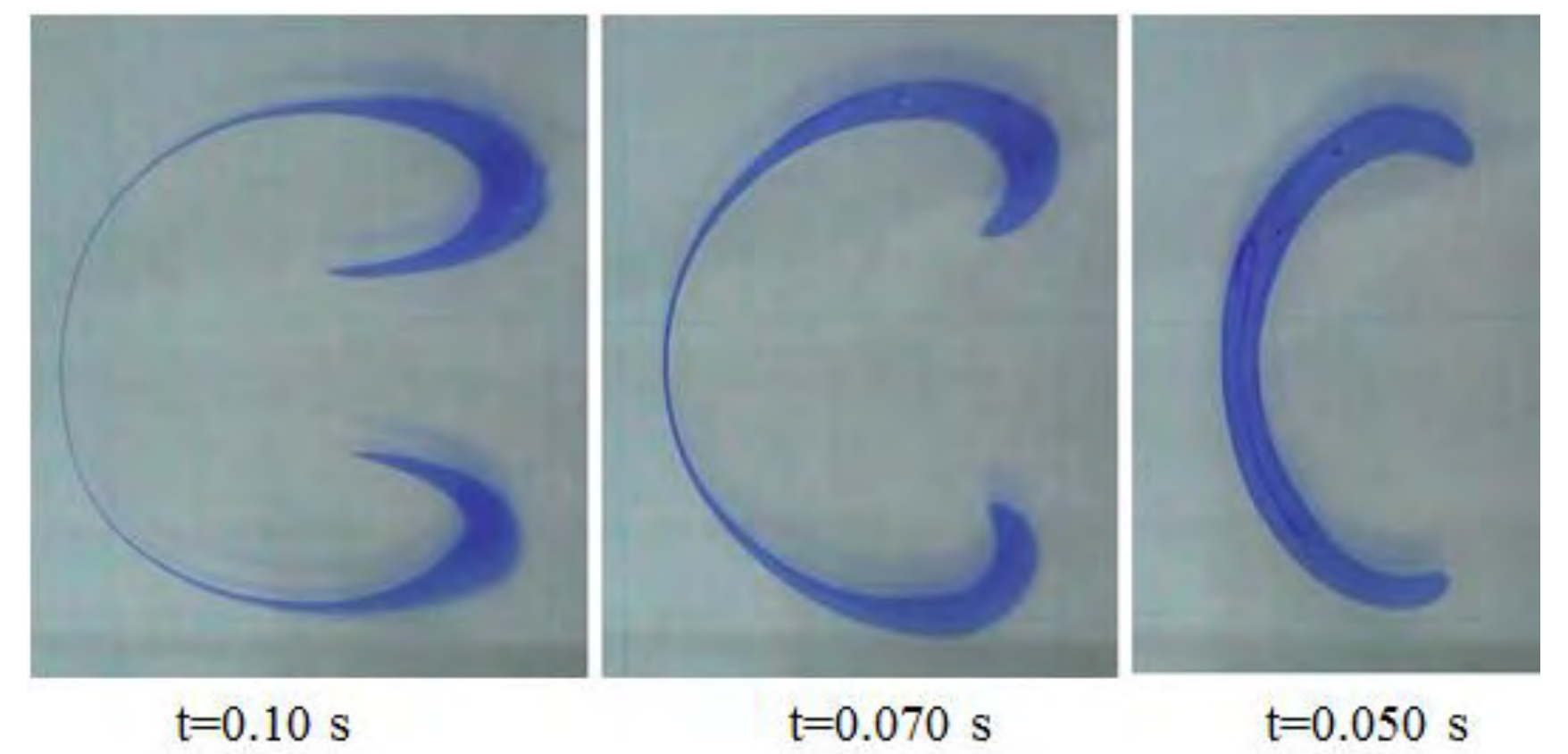
乙、霍爾效應法

一、研究器材和設備

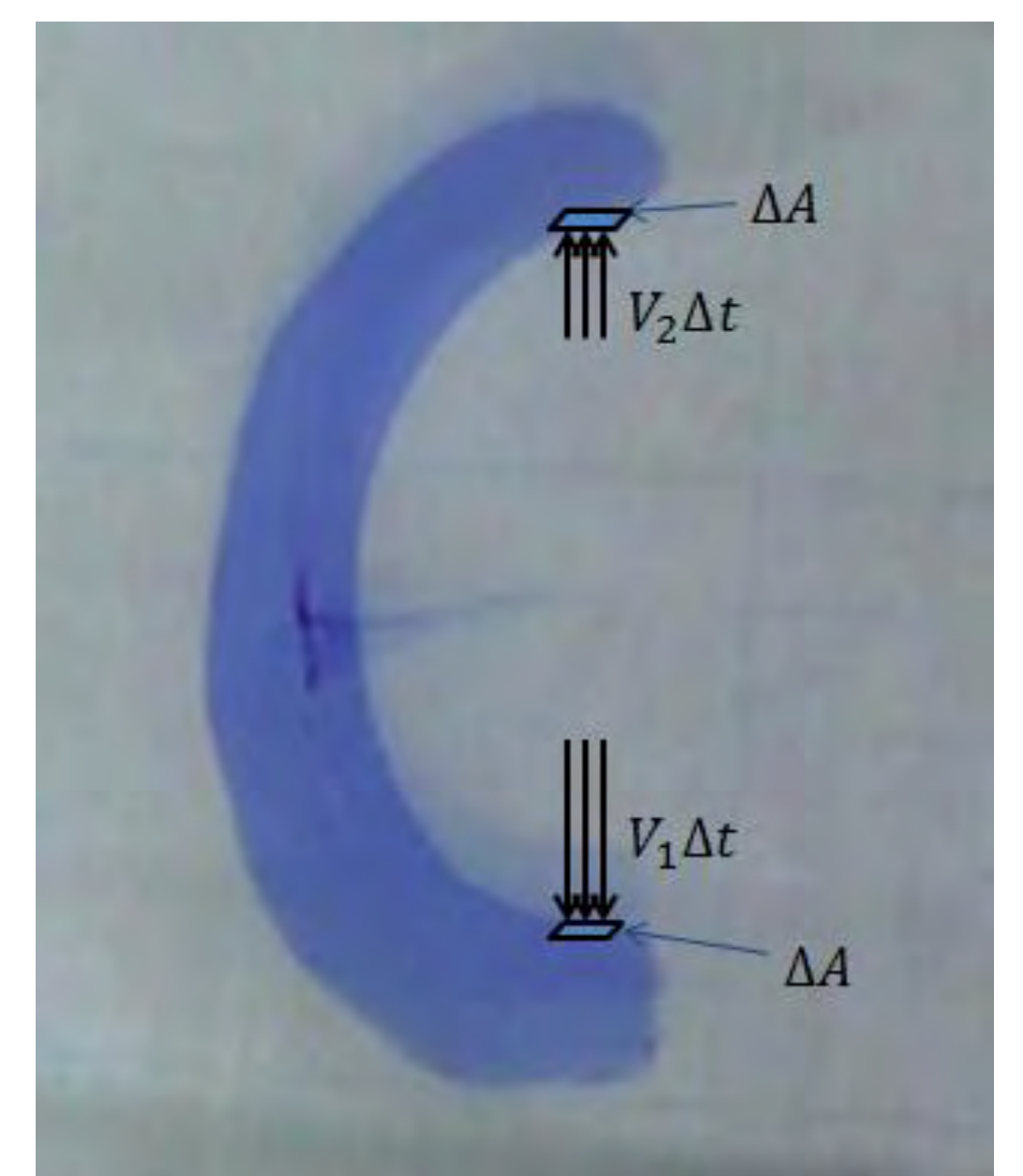
- (一)壓克力盒附兩片銅片電極，兩極距離9.30cm，面積 $4.84cm^2$ 。壓克力盒附四片銅片電極， $\ell = 4.05cm$ ， $A = 4.08cm^2$ ， $z = 2.24cm$ 。
- (二)兩鈦鐵硼磁鐵相距1.5cm，形成均勻磁場0.504T。



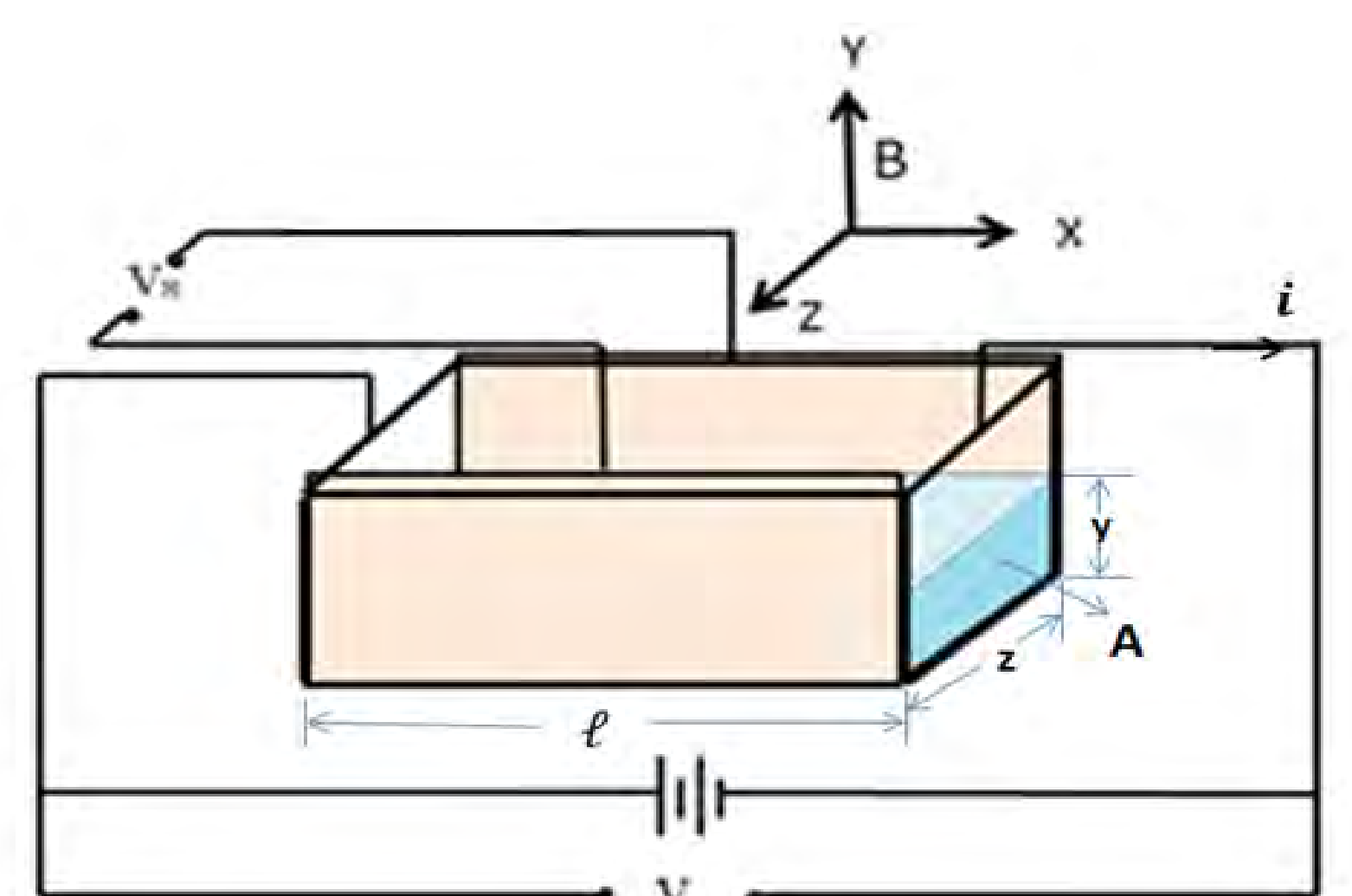
圖一：漩渦偶極子法實驗裝置示意圖。



圖二：漩渦偶極子的形成。



圖三：漩渦偶極子受到不同的衝力而偏移。



圖四：霍爾效應法實驗裝置示意圖。

二、原理

(一) 電壓 $V = El$ ，液高 h ，電流 (i) 向 $+X$ 方向，磁場 B 向 $-Y$ 方向，正負離子受勞倫茲力向 $-Z$ 方向，形成霍爾電壓。

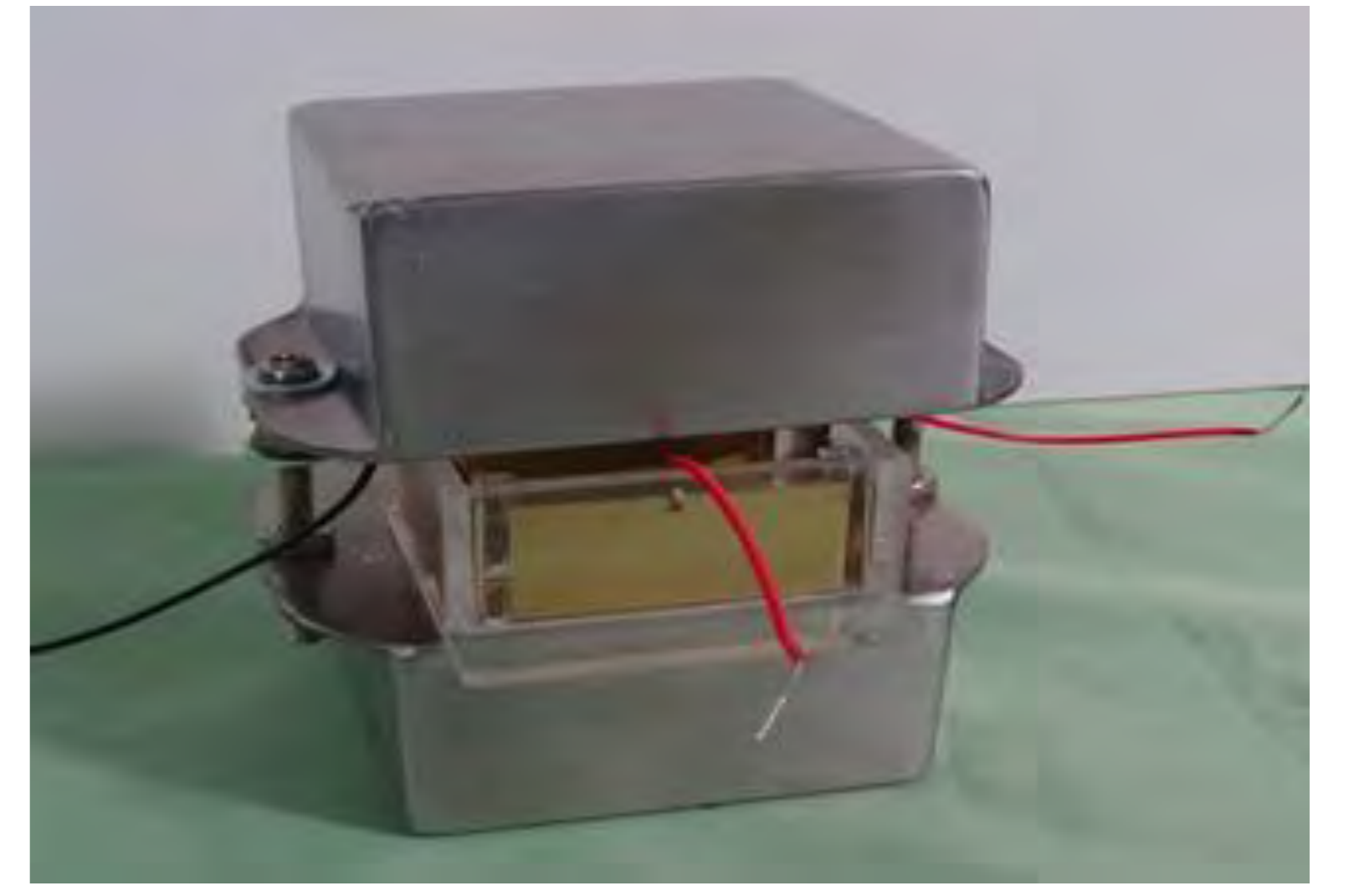
(二) $v_d = \frac{i}{nAe}$ n : 單位體積的電荷數， $ne=Q$: 電荷密度 ($\frac{C}{cm^3}$)

$$i = nAev_d = QA(v_1 + v_2)$$

$$i = QAE(\mu_1 + \mu_2) = QA\frac{V}{\ell}(\mu_+ + \mu_-) \dots (6)$$

(三) $E_H = \frac{V_H}{z}$, $qV_H = q\frac{V}{\ell}B(\mu_1 - \mu_2)$

$$\rightarrow V_H = \frac{BVz}{\ell}(\mu_1 - \mu_2) \dots (7)$$



圖四: 霍爾效應實驗裝置圖。

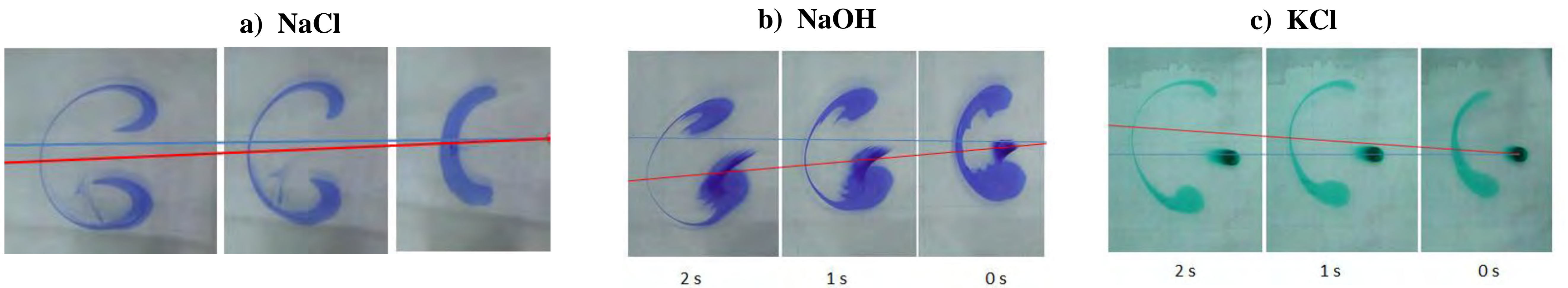
三、實驗步驟

(一) 方型盒分別放入 $1.00 \times 10^{-3} M$ 的氯化鈉、氯化鉀、氯化氫和氫氧化鈉水溶液；通電後量取電壓 (V) 及電流 (I)，作 $I-V$ 圖，斜率 $= \frac{AQV}{l}(\mu_+ + \mu_-)$ ，算出各化合物的電遷移率和。

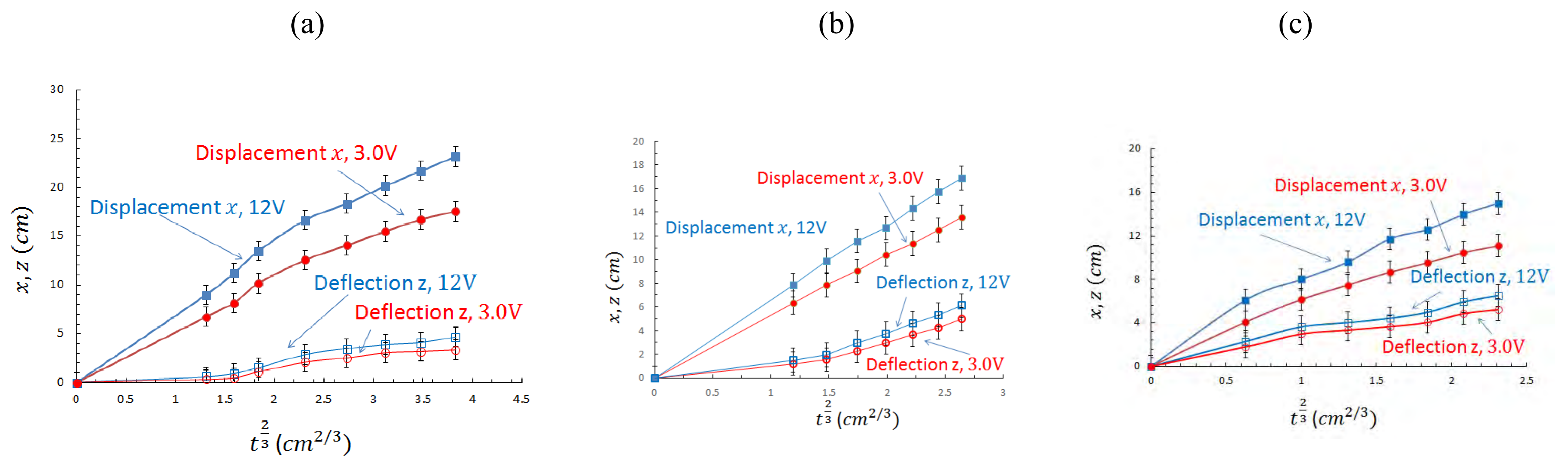
(二) 方型盒分別裝深 $1.82 cm$ 的 $0.100 M$ 氯化鈉、氯化鉀、氯化氫和氫氧化鈉水溶液，外加磁場 $B=0.504 T$ 外加電壓 $V=3.00 V$ 、 $6.00 V$ 、 $9.00 V$ 、 $12.0 V$ ，量出霍爾電壓 (V_H)，作 V_H-V 圖，斜率 $= \frac{BVz}{l}(\mu_1 - \mu_2)$ ，由已知的 B 、 z 、 l 可算出電遷移率差 $\mu_1 - \mu_2$ 。由 $\mu_1 - \mu_2$ 和 $\mu_1 + \mu_2$ 算出 μ_1 和 μ_2 。

肆、結果與討論

一、漩渦偶極子法求電遷移率和



圖五: 漩渦偶極子向左方移動，(a) 氯化鈉水溶液的漩渦偶極子略向下偏移；(b) 氫氧化鈉水溶液的漩渦偶極子向下偏移；(c) 氯化鉀水溶液的漩渦偶極子向上偏移。



圖六: 漩渦偶極子移動的位置 (x)，偏移 (z) 隨時間 ($t^2/3$) 的變化，(a) 氯化鈉水溶液；(b) 氫氧化鈉水溶液；(c) 氯化鉀水溶液。

(一) 氯化鈉 $x - t^2/3$ 圖得到斜率依次為 1.048 ± 0.02 及 1.320 ± 0.026 。求得 J 值 $4.82 \pm 0.242 cm^3/s^2$ 及 $9.63 \pm 0.48 cm^3/s^2$ 。 $\rho = 1.01 g/cm^3$ ， $h = 1.22 \times 10^{-4} cm$ 、 $B = 0.268 T$ ， $E = \frac{V}{z}$ 為 $0.15 V/cm$ 、 $0.6 V/cm$ 離子數 $q_1 + q_2 = 6 \times 10^{-8} mol \rightarrow Q = 5.76 \times 10^{-3} C$ ；離子的電遷移率和 $(12.7 \pm 0.6) \times \frac{10^{-4} cm^2}{Vs}$ 和 $(12.5 \pm 0.6) \times 10^{-4} cm^2/Vs$ 。

(二) 由 $\Delta F = \frac{2AE^2}{V}(N_1 m_1 \mu_1^2 - N_2 m_2 \mu_2^2) \dots (5)$ 氯離子的 $\frac{N_1 m_1 \mu_1^2}{V} = 2.23 \times 10^{-9} g cm s^{-2} V^{-2}$ 大於鈉離子的 $\frac{N_2 m_2 \mu_2^2}{V} = 0.619 \times 10^{-9} g cm s^{-2} V^{-2}$ 因此，漩渦偶極子向 $+Z$ 方向偏移。

(二) 氫氧化鈉水溶液鈉離子電遷移率和為 $(24.9 \pm 0.5) \times 10^{-4} cm^2/Vs$ 和 $(24.8 \pm 0.6) \times 10^{-4} cm^2/Vs$ 。氫氧離子的 $\frac{N_1 m_1 \mu_1^2}{V} = 7.24 \times 10^{-9} g cm s^{-2} V^{-2}$ 大於鈉離子的 $\frac{N_2 m_2 \mu_2^2}{V} = 0.619 \times 10^{-9} g cm s^{-2} V^{-2}$ 因此漩渦偶極子向 $+Z$ 方向偏移。

(三)、氯化鉀水溶液 $\mu_1 + \mu_2$ 依次為 $(11.5 \pm 0.6) \times 10^{-4} cm^2/Vs$ 和 $(11.4 \pm 0.6) \times 10^{-4} cm^2/Vs$ 。鉀離子的 $\frac{N_1 m_1 \mu_1^2}{V} = 2.26 \times 10^{-9} g cm s^{-2} V^{-2}$ 大於氯離子的 $\frac{N_2 m_2 \mu_2^2}{V} = 2.23 \times 10^{-9} g cm s^{-2} V^{-2}$ 因此，漩渦偶極子向 $-Z$ 方向偏移。

二、漩渦偶極子法探討電遷移率隨溫度的變化

(一) 0.10M的氯化鈉、氫氧化鈉、和氯化氫水溶液測得電遷移率隨溫度的變化如圖七。

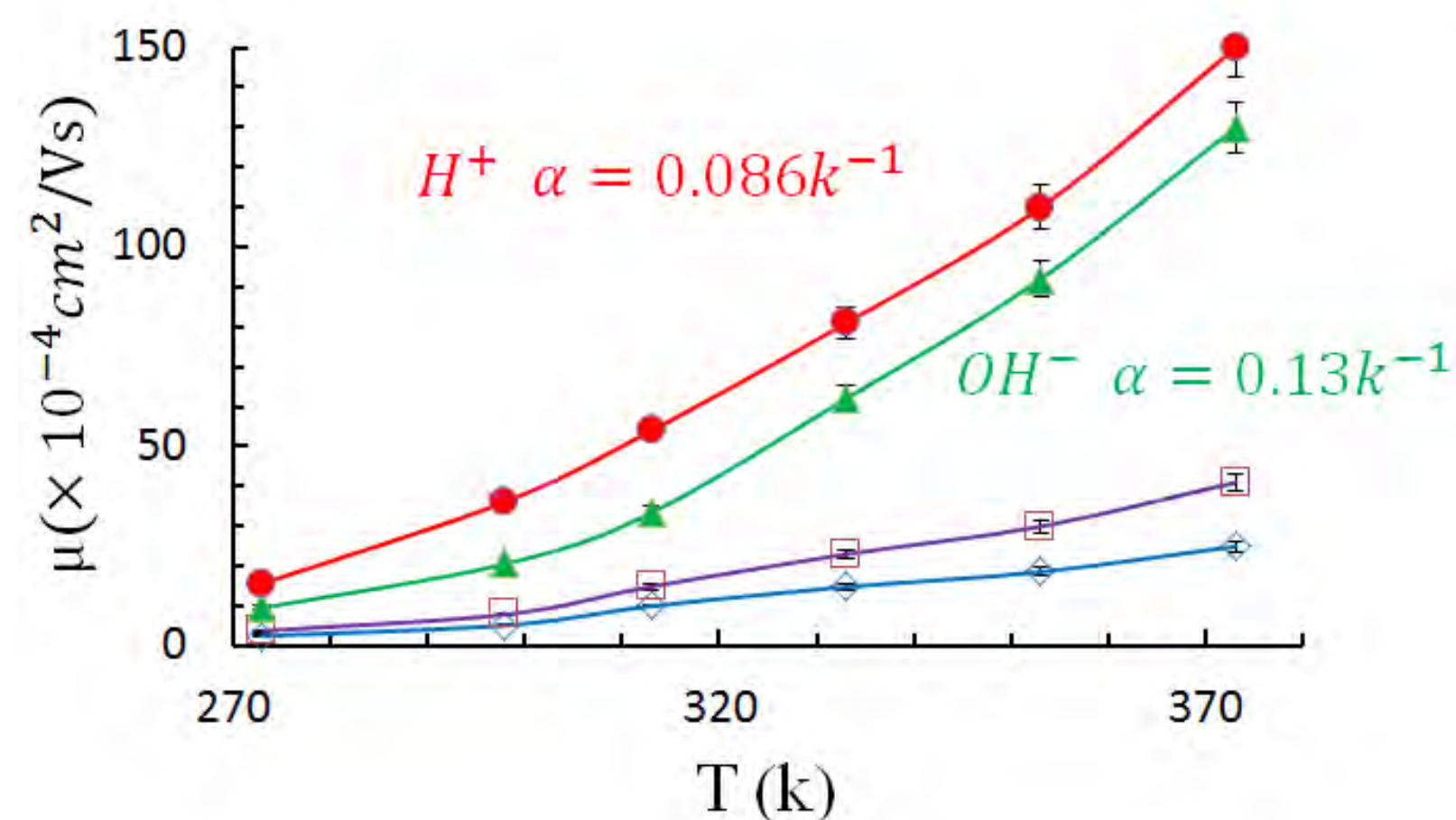
- (二) 1. $Na^+ + Cl^- \quad \alpha = 0.027k^{-1}$
 2. $Na^+ + OH^- \quad \alpha = 0.043k^{-1}$
 3. $H^+ + Cl^- \quad \alpha = 0.0407k^{-1}$

可判斷氫離子和氫氧離子的電遷移率隨溫度產生劇烈變化。

(三) 溫度上升水溶液黏滯係數減少，電遷移率增大。

(四) 氫氧離子的溫度係數為氫離子的1.5倍。

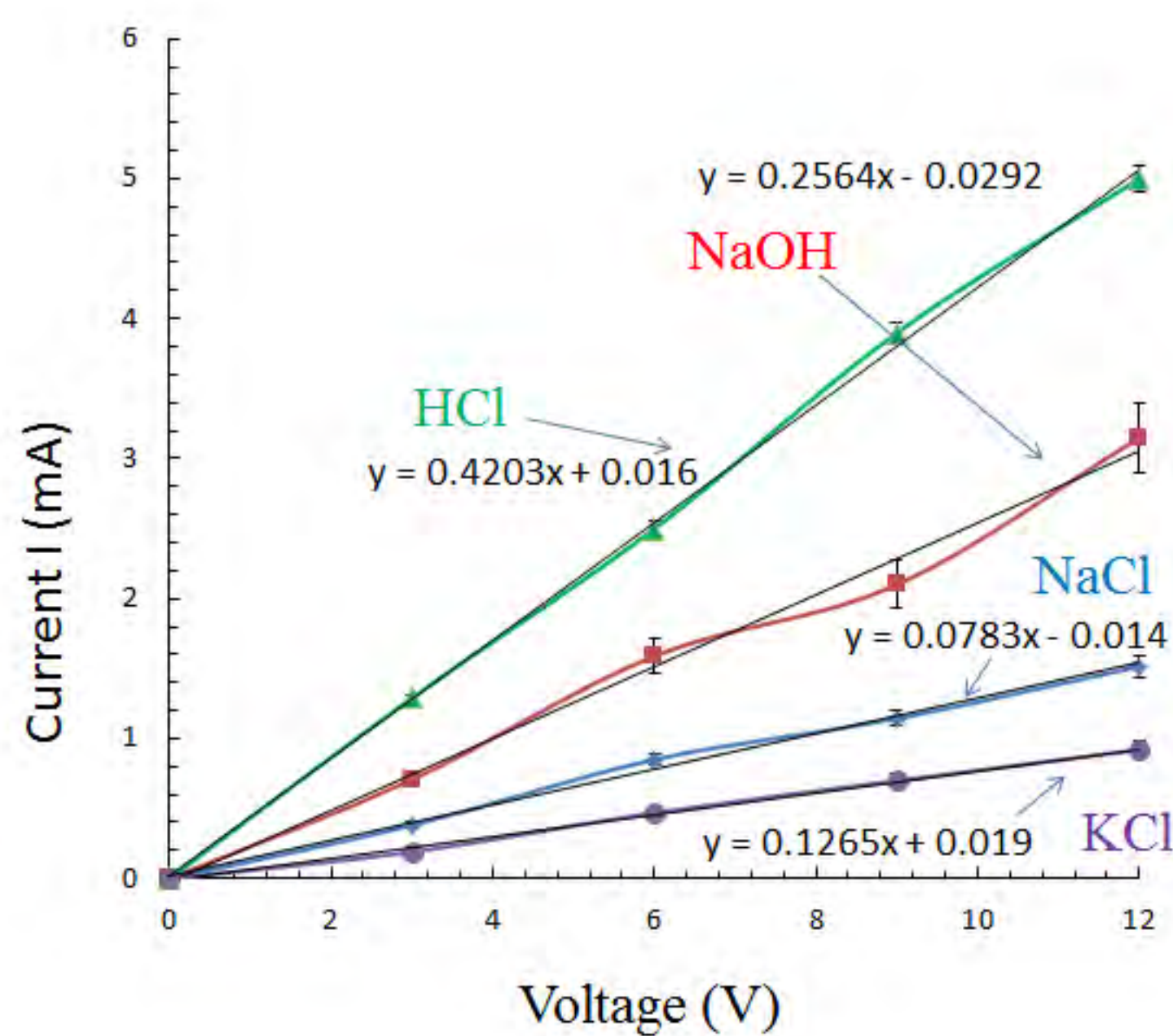
(五) 溫度超過303K，水分子間的氫鍵遭到破壞，離子的電遷移率顯著的增大〔1〕。



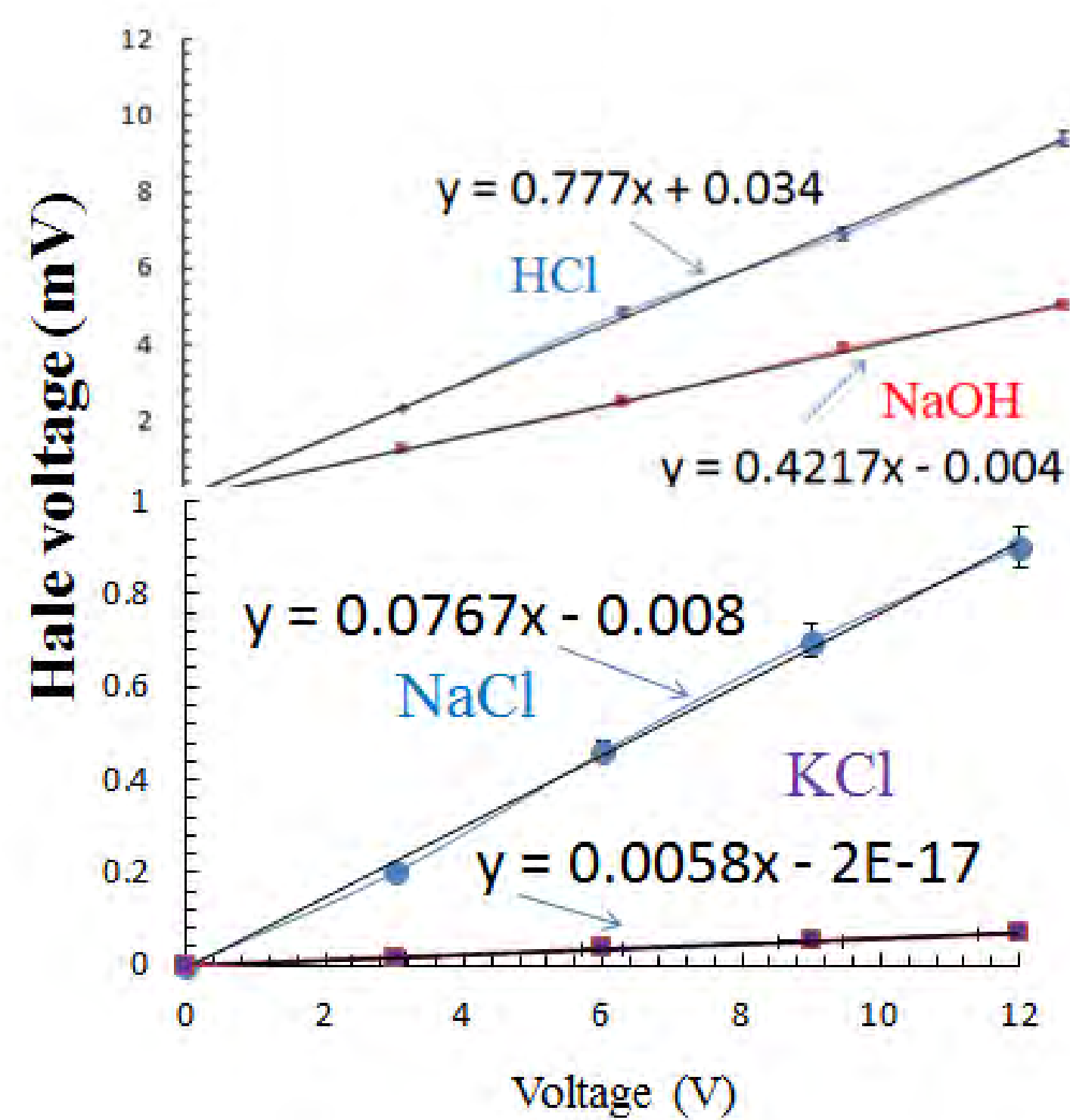
圖七：四種離子電遷移率隨溫度的變化。

三、利用霍爾效應測量電遷移率

(一) $1.00 \times 10^{-3} M$ 的氯化鈉、氫氧化鈉和氯化氫等三種相同濃度水溶液放入方型盒 $l = 4.05 cm$ ， $A = 4.08 cm^2$ ， $z = 2.24 cm$ 的方型盒，通電後量取電壓(V)、電流(I)及霍爾電壓(V_H) 結果如圖八及圖九。



圖八： $1.00 \times 10^{-3} M$ 的氯化鈉、氫氧化鈉和氯化氫水溶液的電流隨電壓的變化。



圖九： $1.00 \times 10^{-3} M$ 的氯化鈉、氫氧化鈉和氯化氫水溶液的霍爾電壓隨外加電壓的變化。

$Q = 9.6 \times 10^{-2} C/cm^2$ ，
 $B = 0.504 T$ ，

$$I = \frac{QAV}{l} (\mu_1 + \mu_2) \mu$$

$$V_H = \frac{BVZ}{l} (\mu_1 - \mu_2)$$

由上式算出離子的電遷移率列於表一。

(二) 霍爾效應法測量離子的電遷移率，和只須測量電流隨外加電壓的變化，測量離子的電遷移差和只須測量霍爾電壓隨外加電壓的變化；得到結果為三位有效數字。但因為外加磁場必須為均勻磁場，測量用的方型盒尺寸小，待測液體積小，不易控制恆溫，無法

實驗探討溫度變化對離子電遷移率的影響。

(三) 漩渦偶極子法必須測量漩渦偶極子的位移隨時間的變化，偏移隨時間的變化，以及染料的入液面後擴散的面積；得到的結果二位有效數字。但測量用的方型盒尺寸大，待測液體積大，易控制恆溫，可用來實驗探討溫度變化對離子電遷移率的影響。

(四) H^+ 在水中以跳躍方式傳輸(proton jumping)〔5〕，因此離子的電遷移率特別的大，為一般離子的4.5倍以上； OH^- 在水中亦以跳躍方式傳輸，但因為粒子尺寸比 H^+ 大，離子的電遷移率小於 H^+ ，但仍為一般離子的2.5倍以上。

表一：氯離子、鈉離子、氫離子和氫氧離子的電遷移率。

| | 測量值(22.5°C) | | 公認值(25.0°C) | |
|------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| | μ_+ ($10^{-4} cm^2/Vs$) | μ_- ($10^{-4} cm^2/Vs$) | μ_+ ($10^{-4} cm^2/Vs$) | μ_- ($10^{-4} cm^2/Vs$) |
| NaCl | 5.16 ± 0.03 | 7.92 ± 0.03 | 5.19 | 7.92 |
| NaOH | 5.69 ± 0.03 | 20.8 ± 0.2 | 5.19 | 20.6 |
| HCl | 36.8 ± 0.8 | 7.94 ± 0.08 | 36.2 | 7.92 |

伍、結論

(一) 利用漩渦偶極子的移動，可求出兩離子的電遷移和。

(二) 利用霍爾效應求出兩種離子電遷移差，利用水溶液的電流隨外加電壓的變化求出兩離子電遷移和，進而算出離子的電遷移率。

(三) 氫離子的電遷移率以及氫氧離子的溫度係數，都異乎尋常的大。

陸、參考資料

- 楊承叡、王昱淇、許瀚元「奈米氣泡水溶液導電度的測量與應用」2018台灣國際科學展覽會物理與天文學科。www.ntsec.gov.tw
- 孫培文「簡易方法測量勞倫茲力」2014台灣國際科學展覽會物理與天文學科。www.ntsec.gov.tw
- Y.D. Afanasyev and V.N. Korabel, Physics of Fluid 16, 3850-3857, (2004)
- Y.D. Afanasyev and C.G. Deacon, American Journal of Physics 74, 236-240, (2006)
- A. Avdonin and P. Skupinski, Physica B 483, 13-18, (2016)