

中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

佳作

051811

「鏈」住你的心-鏈條複雜運動狀態分析

學校名稱：國立花蓮高級中學

作者： 高一 李逸寬 高一 李晨令 高一 莊翔鈞	指導老師： 胡育豪 莊文治
---	-----------------------------

關鍵詞：鏈條、波動、轉動

摘要

當一個掛有鏈條的單齒輪轉動時，鏈條會有複雜的運動現象。本研究以調整直流馬達電壓來控制齒輪轉速，並將此現象簡化為兩個方向進行探究：固定角速度 ω 下短鏈條的運動行為與長鏈條上波動傳遞。經研究分析後，發現在短鏈條實驗中，鏈條下端曲率半徑 r 與齒輪角速度 ω 呈線性正相關，而鏈條的質心座標 x_{cm} 與鏈條的關係如下式：

$$\vec{x}_{cm} \times M\vec{g} = -C\vec{\omega}_m$$

由實驗發現 C 值的數量級為 $10^{-7}(\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})$ ，與馬達特性相關。

另外在鏈條的視波速 \vec{v}_s 、鏈速 \vec{v}_{ch} 、波動行進位置 y 的關係為：

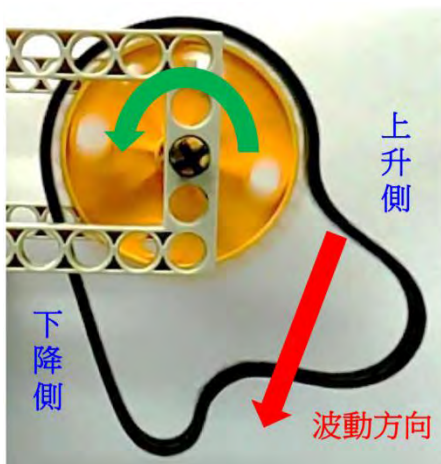
$$|\vec{v}|^2 = (\vec{v}_s - \vec{v}_{ch})^2 = -gy + |\vec{v}_0|^2$$

且發現長鏈實驗中鏈條張力 T 與鏈條位置 y 關係為： $T(y) = -\mu gy + T_0$

而 T_0 則與齒輪角速度 ω 成次方正相關。

壹、研究動機

在一次的實驗課中我們發現一個掛有鏈條的單齒輪，用手轉動時，會在鏈條的上拉側產生波動（如圖 1-1），而波會往鏈條下端傳遞且波形會不斷改變。在初步實驗中，使用馬達帶動單齒輪以控制角速度 ω ，發現：一、在齒輪加速與減速時，出現了上述之波動，推測此現象和角速度變化有關。二、在齒輪等角速度 ω 時鏈條會出現穩態形狀（如圖 1-2），且會因角速度 ω 不同，而使鏈條形狀改變，於是著手進行相關實驗。又在長鏈珠之影片中^[1]，觀察到其波動傳遞行為與本研究欲探討行為類似，所以依據上述觀察我們將實驗分為短鏈條實驗與長鏈條實驗，分別用以探討鏈條的穩態形狀與波動傳遞的相關物理分析。



▲圖 1-1：鏈條上的波動




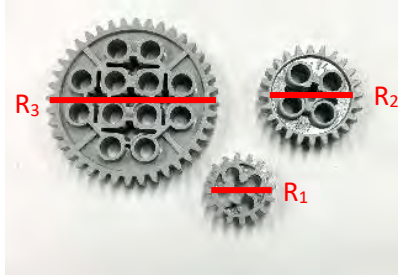
▲圖 1-2：鏈條下端上揚

貳、 研究目的

- 一、改變馬達負載（鏈條長度），測量供應電壓 V 與齒輪角速度 ω 之關係。
- 二、在短鏈條的情況下，測量齒輪角速度 ω 與穩態鏈條（偏移量與曲率半徑）形狀之關係。
- 三、在短鏈條的情況下，分析一轉動週期內單位鏈條的運動過程。
- 四、在長鏈條的情況下，探討影響波動速度的所有變因。

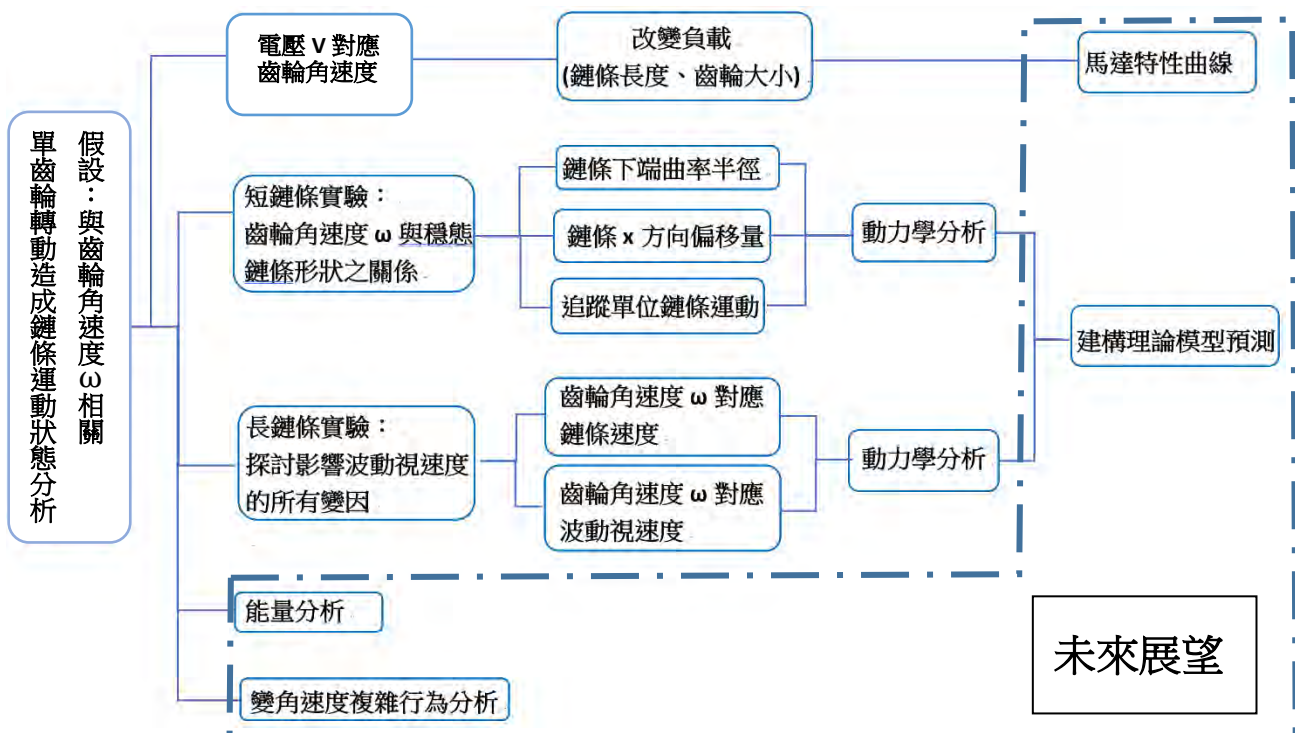
參、 研究設備及器材

研究設備	
高速攝影機 (MegaSpeed MS30K)	直流電源供應器 ($V_{\max}=50V$ $A_{\max}=5A$)
	
Electric RC Race Buggy Motor	相機 Canon G1X
	

研究器材	
<p>Lego 樂高鏈條 (單位鏈條)</p> <p>鏈條 1 : 質量 0.09g 長度 1.4cm</p> <p>鏈條 2 : 質量 0.10g 長度 1.4cm</p>	<p>Lego 樂高齒輪</p> <p>小齒輪 : R_1 直徑 1.325cm 質量 : 0.56g</p> <p>中齒輪 : R_2 直徑 2.115cm 質量 : 1.19g</p> <p>大齒輪 : R_3 直徑 3.720cm 質量 : 3.53g</p>
	
軟體	
GeoGebra : 測量曲率半徑	Tracker : 追蹤物件

肆、 研究過程或方法

一、 研究過程圖



▲圖 4-1-1：研究過程圖

二、 實驗相關原理

(一) 轉動

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1)$$

其中 τ 為力矩（牛頓-公尺）； r 為施力點與轉軸距離（公尺）； F 為施力大小（牛頓）。此式說明了力矩的定義與力矩對轉動的影響。

(二) 直流馬達^[2]

$$\vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\tau}_m + B\vec{\omega}_m \quad (2)$$

其中 τ 為馬達扭矩； I 為負載以馬達軸心的轉動慣量； ω_m 為馬達軸心之角速度； τ_m 為負載之扭矩； B 為阻力係數。

此式說明了馬達提供負載之扭矩 τ_m 為馬達扭矩 τ 減去轉軸行角加速度運動所需力矩 $I \frac{d\omega}{dt}$ 與馬達內阻力造成的力矩 $B\omega_m$ 。

三、 實驗各項條件與物理量

(一) 物理量：

符號	SI 制單位	意義	符號	SI 制單位	意義
τ_m	(N·m)	負載被提供之扭矩	τ	(N·m)	馬達扭矩
Δl	(m)	單位鏈條長度	μ	(kg/m)	鏈條線密度
ω_m	(rad/s)	馬達軸心之角速度	ω	(rad/s)	角速度
I	(kg·m ²)	負載以馬達軸心的轉動慣量	τ	(N·m)	力矩
B	(kg·m ² /s)	馬達阻力係數	V	(Voltage)	電壓
v	(m/s)	波動相對鏈條之波速	T	(N)	鏈條張力
v_s	(m/s)	波動視速度	v_{ch}	(m/s)	鏈條速度
r	(cm)	鏈條下端曲率半徑	x_{cm}	(m)	質心 x 座標

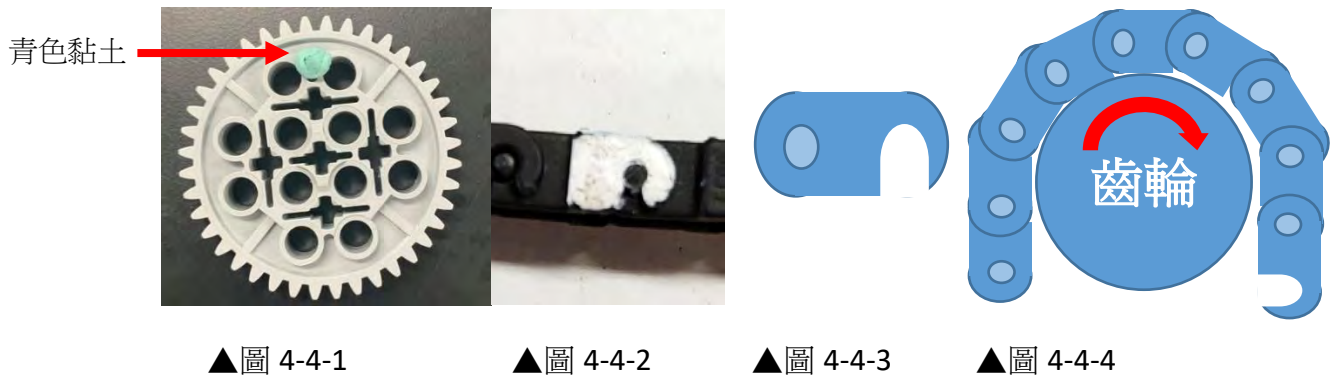
註：本作品中，斜體無特殊含義。

(二) 鏈條長度定義：鏈條均由單位鏈條組成，短鏈條與長鏈條的差異在於鏈條之總長度，長鏈條因為單側鏈條長度遠大於齒輪直徑，故可忽略下段轉折處，將單側鏈條視為單方向直線運動。本實驗長鏈條使用 400 個單位鏈條 2 組成；短鏈條則分別由 30、50、70 個單位鏈條 1 組合，且簡稱為 30 鏈、50 鏈、70 鏈。

四、 實驗前置作業

(一) 運動分析追蹤點

本實驗採用 tracker 動態追蹤分析，為能清楚尋找追蹤點，將齒輪外側貼青色黏土（如圖 4-3-1），並在其中一單位鏈條塗上白色廣告顏料（如圖 4-3-2）。



(二) 鏈條之組裝方式

圖 4-4-3 為單位鏈條。組裝時，將鏈條開口端在右側且開口朝下。圖 4-4-4 為鏈條方向與齒輪轉動相對關係圖。

五、 實驗裝置架設

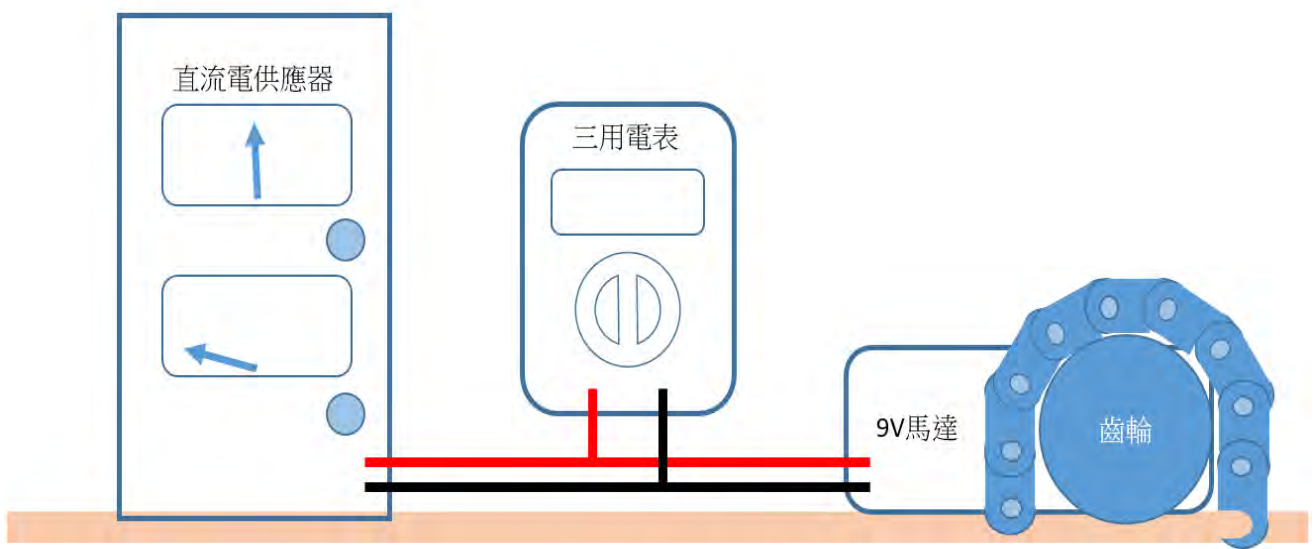
(一) 基本實驗器材

直流電源供應器：控制電壓

三用電表：測量電壓

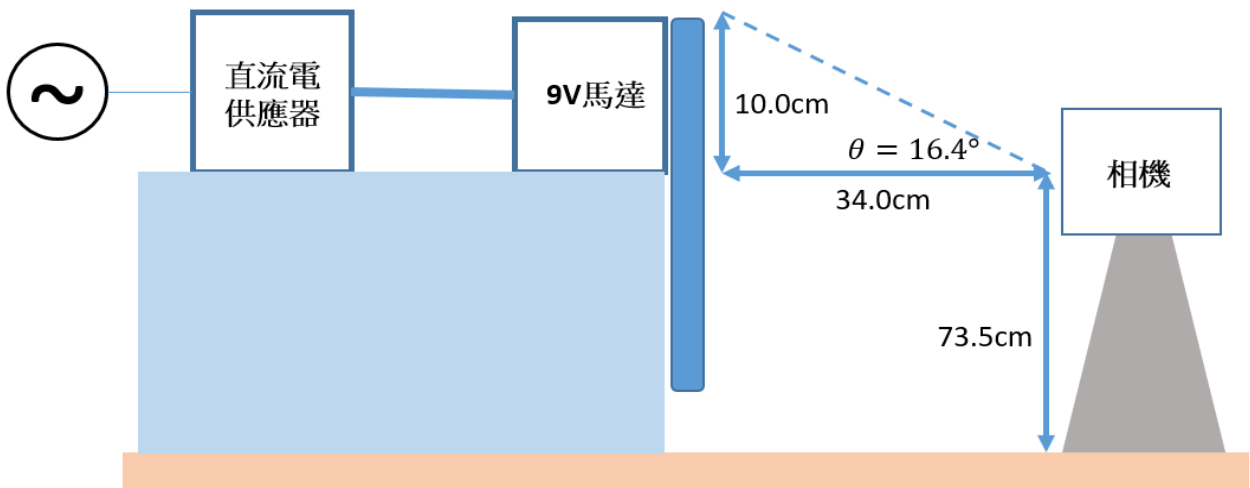


▲圖 4-5-1：實驗器材實際圖（正視圖）



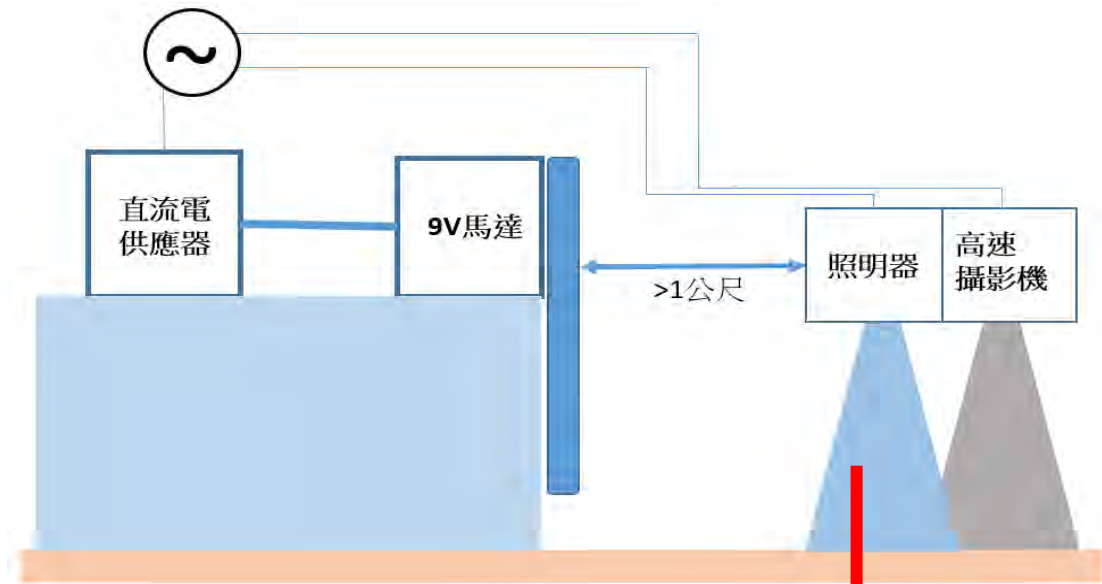
▲圖 4-5-2：實驗器材簡圖（正視圖）

(二) 使用相機記錄

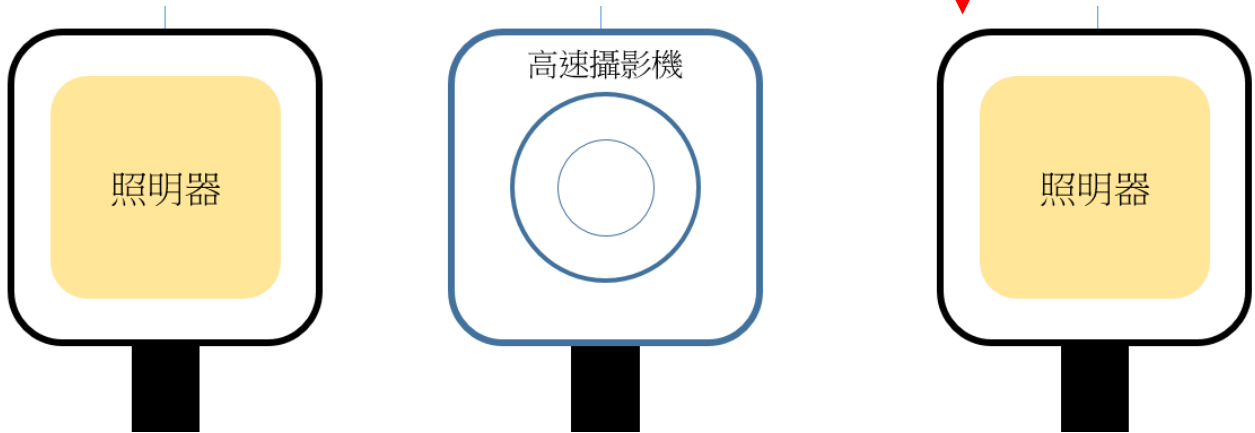


▲圖 4-5-3：實驗器材簡圖（側視圖）

(三) 使用高速攝影機紀錄



▲圖 4-5-4：實驗器材簡圖（側視圖）



▲圖 4-5-5：照明設備（正視圖）

六、 實驗方法

(一) 實驗一：供應電壓 V 與齒輪角速度 ω 之關係 (使用高速攝影機)

實驗 1-1：在短鏈條的情況下，電壓 V 對應齒輪轉動角速度 ω

1. 分別更換齒輪 (直徑)： R_1 、 R_2 、 R_3 。
2. 分別更換鏈條長度：30 鏈、50 鏈、70 鏈。
3. 調整電壓：1.5V~9V，每次間隔 1.5V。
4. 以高速攝影機錄製齒輪轉動，其幀數為 1000fps。
5. 實驗時先操縱電壓 (1.5V~9V)，再依序改變鏈條長度、齒輪半徑。
6. 以 Tracker 軟體追蹤齒輪角速度 ω 。
7. 將資料帶入 excel 分析作 ω - V 圖。

實驗 1-2：在長鏈條的情況下，電壓 V 對應齒輪轉動角速度 ω

1. 更換齒輪 (直徑)： R_3 ，更換鏈條長度：400 鏈。
2. 調整電壓：1.5V~9V，每次間隔 1.5V。
3. 以高速攝影機錄製齒輪轉動，其幀數為 1000fps。
4. 實驗時先操縱電壓 (1.5V~9V)，再依序改變鏈條長度、齒輪半徑。
5. 以 Tracker 軟體分析齒輪角速度 ω 。
6. 將資料帶入 excel 分析作 ω - V 圖。

(二) 實驗二：在短鏈條的情況下，測量齒輪角速度 ω 與穩態鏈條形狀之關係

實驗 2-1：齒輪角速度 ω 對應鏈條下端曲率半徑 r (使用相機)

1. 分別更換齒輪 (直徑)： R_1 、 R_2 、 R_3 。
2. 分別更換鏈條長度：30 鏈、50 鏈、70 鏈。
3. 調整電壓：1.5V~9V，每次間隔 1.5V。
4. 以相機拍攝鏈條轉動穩定態之形狀。
5. 實驗時先操縱電壓 (1.5V~9V)，再依序改變鏈條長度、齒輪半徑。
6. 將圖片以軟體 GeoGebra 分析鏈條下端曲率半徑。
7. 將資料帶入 excel 分析作 r - ω 圖。

實驗 2-2：齒輪角速度 ω 對應鏈條質心之 x 座標 x_{cm} （使用高速攝影機）

1. 更換齒輪大小（直徑） R_3 與鏈條長度 30 鏈，並改變鏈條總重量為：2.58（公克）、3.33（公克）、5.7（公克）。
2. 調整電壓：5~9V，每次間隔 1V。
3. 以高速攝影機錄製鏈條移動，其幀數為 1000fps。
4. 實驗時先操縱電壓（1.5V~9V），再依序改變鏈條長度、齒輪半徑。
5. 以 Tracker 軟體追蹤單位鏈條之運動。
6. 作 x_{cm} - ω 圖。

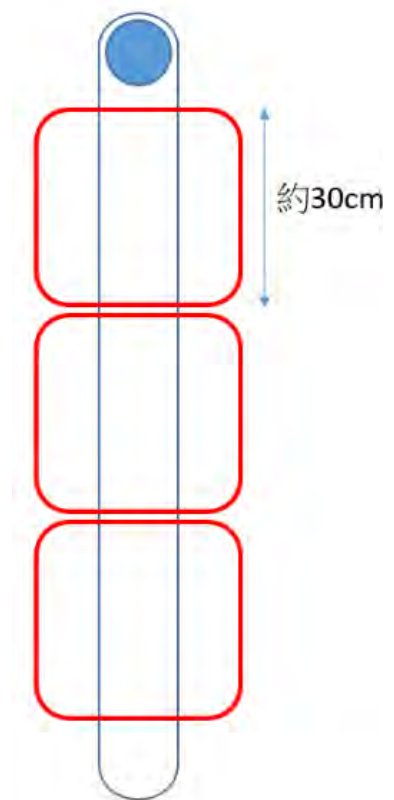
（三）實驗三：測量鏈條在各點的運動狀態（使用高速攝影機）

1. 更換齒輪大小（直徑） R_3 與鏈條長度 30 鏈，並供應電壓 9V。
2. 以高速攝影機錄製鏈條移動，其幀數為 1000fps。
3. 以 Tracker 軟體分析鏈條速度、鏈條各質點 x 座標、鏈條各質點 y 座標。
4. 將資料帶入 excel 分析作 v - t 、 x - t 、 r - t 圖。

（四）實驗四：在長鏈條的情況下，探討影響波動視速度的所有變因（使用高速攝影機）

實驗 4-1：鏈條速度 v_{ch} 跟齒輪角速度 ω 與鏈條位置之關聯

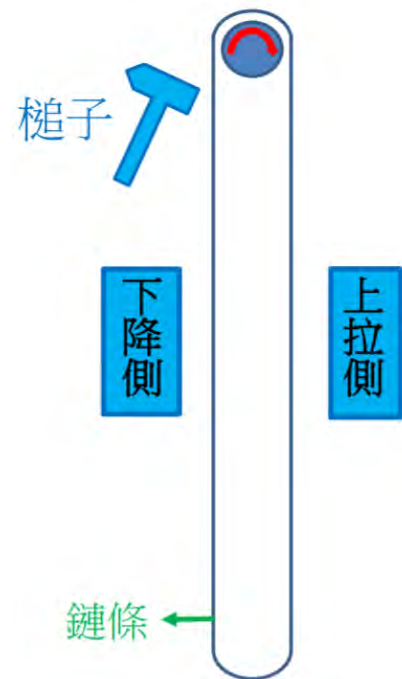
1. 更換齒輪大小（直徑） R_3 ，更換鏈條長度：400 鏈。
2. 調整電壓：1.5V、3V、4.5V、9V。
3. 如圖 4-6-1 所示將鏈條劃分為三個區域（紅框處），分別追蹤。
4. 以高速攝影機錄製鏈條移動，其幀數為 1000fps。
5. 以 Tracker 軟體分析單位鏈條速度 v_{ch} 。
6. 將資料帶入 excel 分析作 v_{ch} - ω 圖



▲圖 4-6-1

(五) 實驗 4-2：波動視速度 v_s 跟齒輪角速度 ω 與鏈條位置之關聯（使用高速攝影機）

1. 更換齒輪大小（直徑） R_3 與鏈條長度 400。
2. 調整電壓：1.5V~9V，每次間隔 1.5V。
3. 敲擊鏈條（如圖 4-6-2）：下降側、上拉側之頂端。
4. 以高速攝影機錄製鏈條移動，其幀數 200fps。
5. 以 Tracker 軟體分析波形視波速度 v_s 。
6. 將資料帶入 excel 分析作 v_s -t 圖。

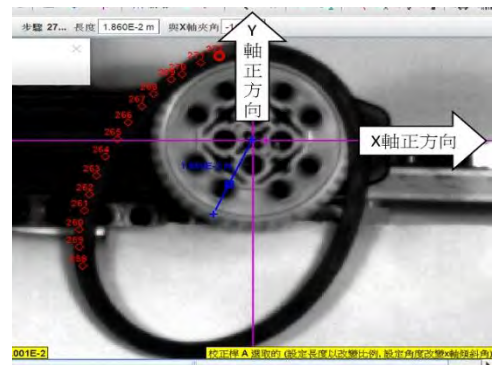


▲圖 4-6-2

七、 數據分析方式

(一) 使用 Tracker 分析短鏈實驗

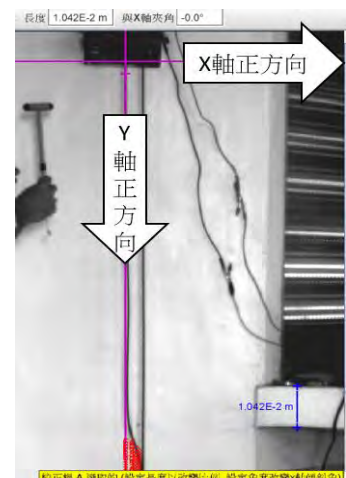
1. 設定座標軸：原點放置在馬達轉軸，且將 x 軸平行桌面（如圖 4-7-1）。
2. 設定比例尺。
3. 追蹤標定點轉動五圈。
4. 匯出數據至 excel 進行作圖與分析



▲圖 4-7-1：
短鏈實驗座標軸設定

(二) 使用 Tracker 分析長鏈實驗

1. 設定座標軸：原點放置在平台上，且將 y 軸平行鏈條且正方向向下（如圖 4-7-2）。
2. 設定比例尺。
3. 追蹤標定點。
4. 匯出數據至 excel 進行作圖與分析。



▲圖 4-7-2：
長鏈實驗座標軸設定

(三) 使用 GeoGebra 分析

1. 在鏈條下端上揚處內側，取三個相鄰的點。
2. 對此三點做外接圓（如圖 4-7-3）。
3. 並測量該外接圓半徑。
4. 除以比例尺做長度調整。



▲圖 4-7-3：
對此三點做外接圓

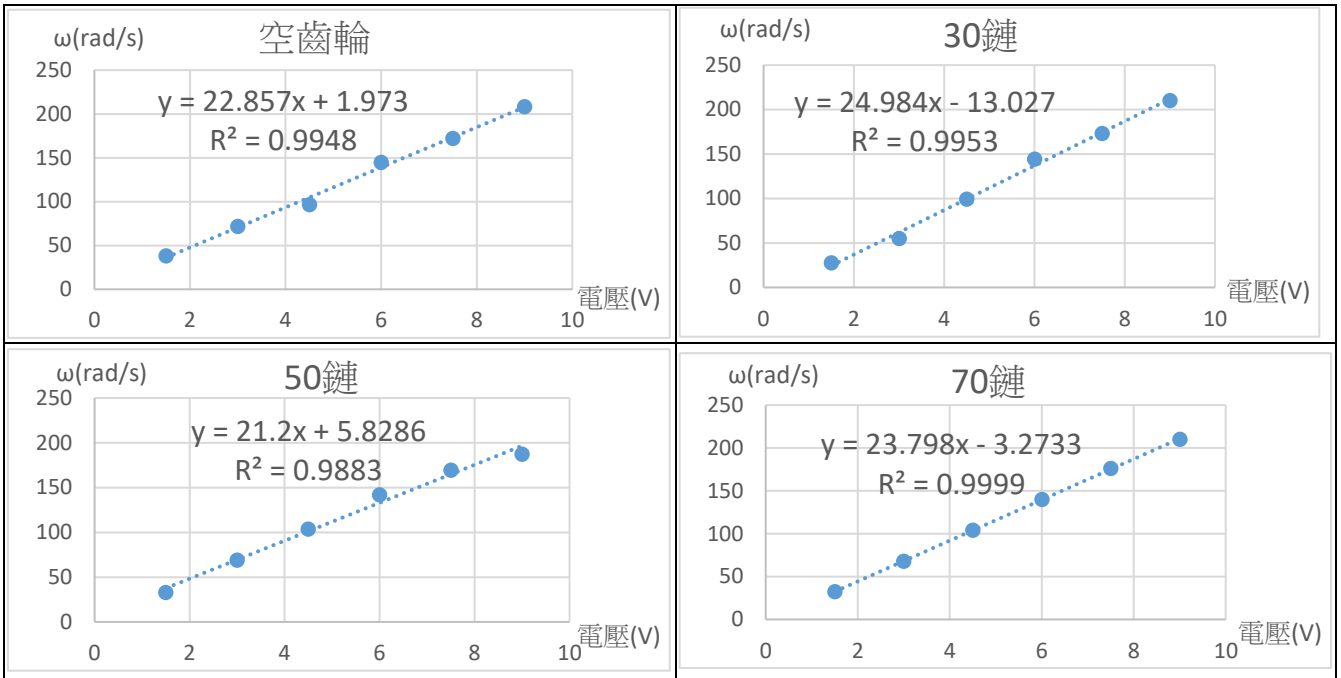
伍、 研究結果

一、 實驗一：供應電壓 V 與齒輪角速度 ω 之關係

以 Tracker 得出之速率 v 除以追蹤點與原點（轉軸）的位置 r ，得到角速度 ω 。

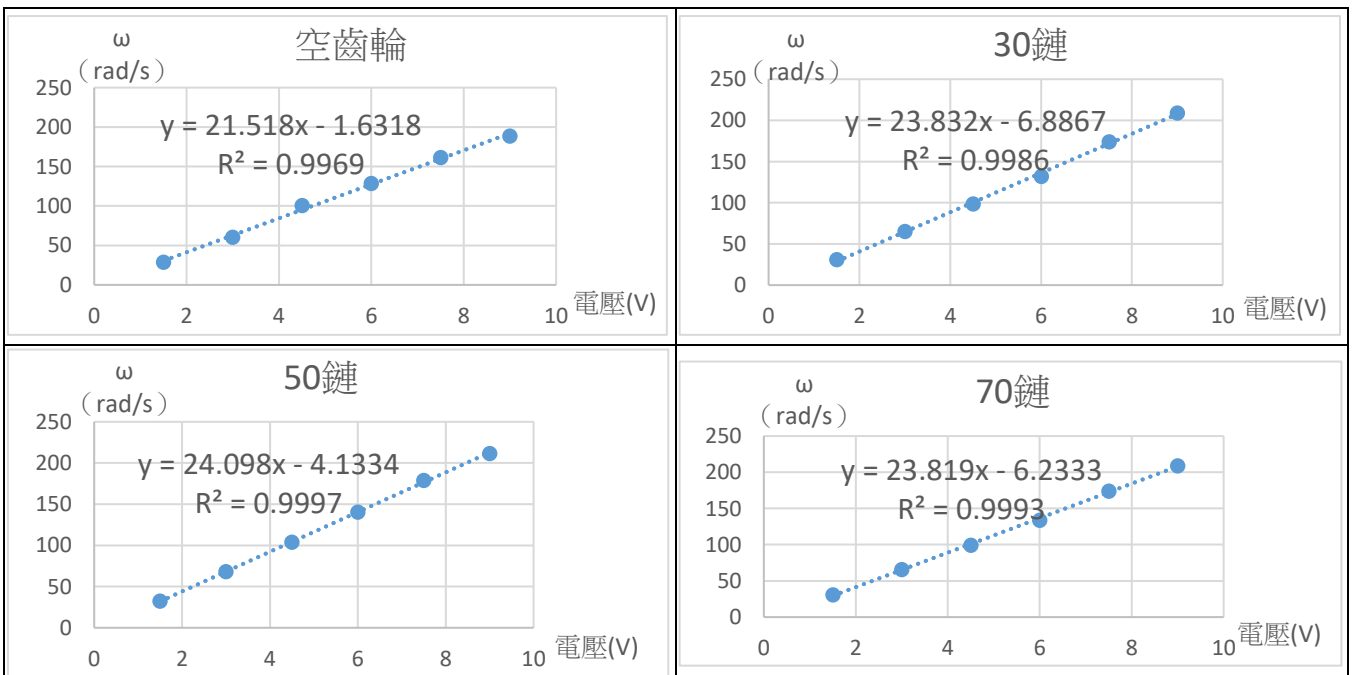
實驗 1-1：在短鏈條的情況下，電壓 V 對應齒輪轉動角速度 ω

(一) 齒輪直徑 R_1



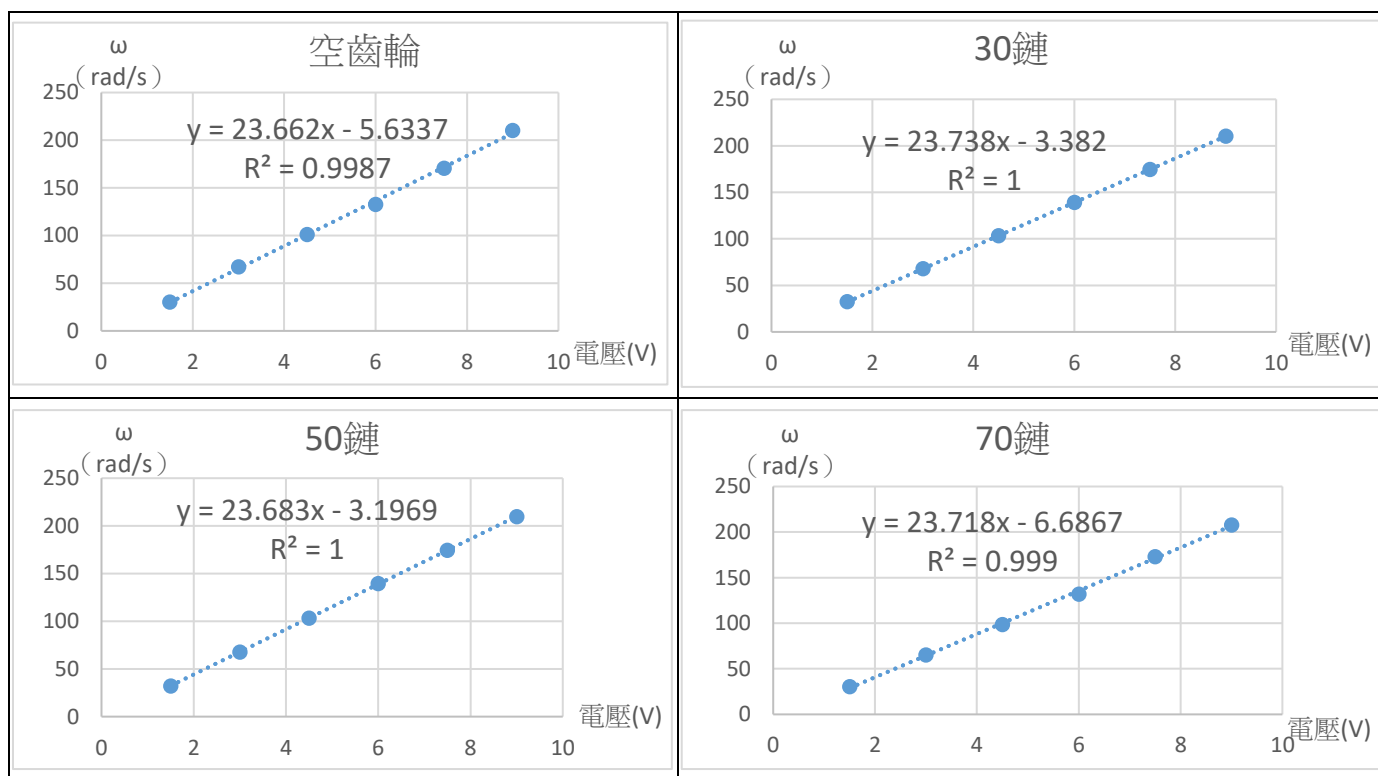
▲圖 5-1-1：電壓與角速度均呈正比，且斜率差異不大

(二) 齒輪直徑 R_2



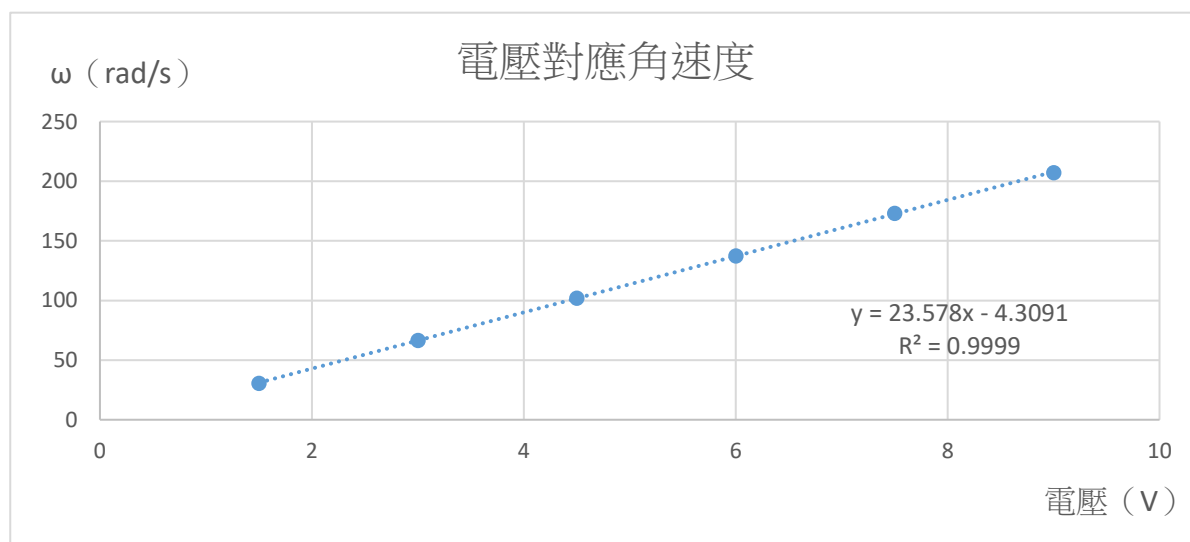
▲圖 5-1-2：電壓與角速度均呈正比，且斜率差異不大

(三) 齒輪直徑 R₃



▲圖 5-1-3：電壓與角速度均呈正比，且斜率差異不大

實驗 1-2：在長鏈條（400 鏈）的情況下，電壓 V 對應齒輪轉動角速度 ω



▲圖 5-1-4：電壓與角速度呈正比

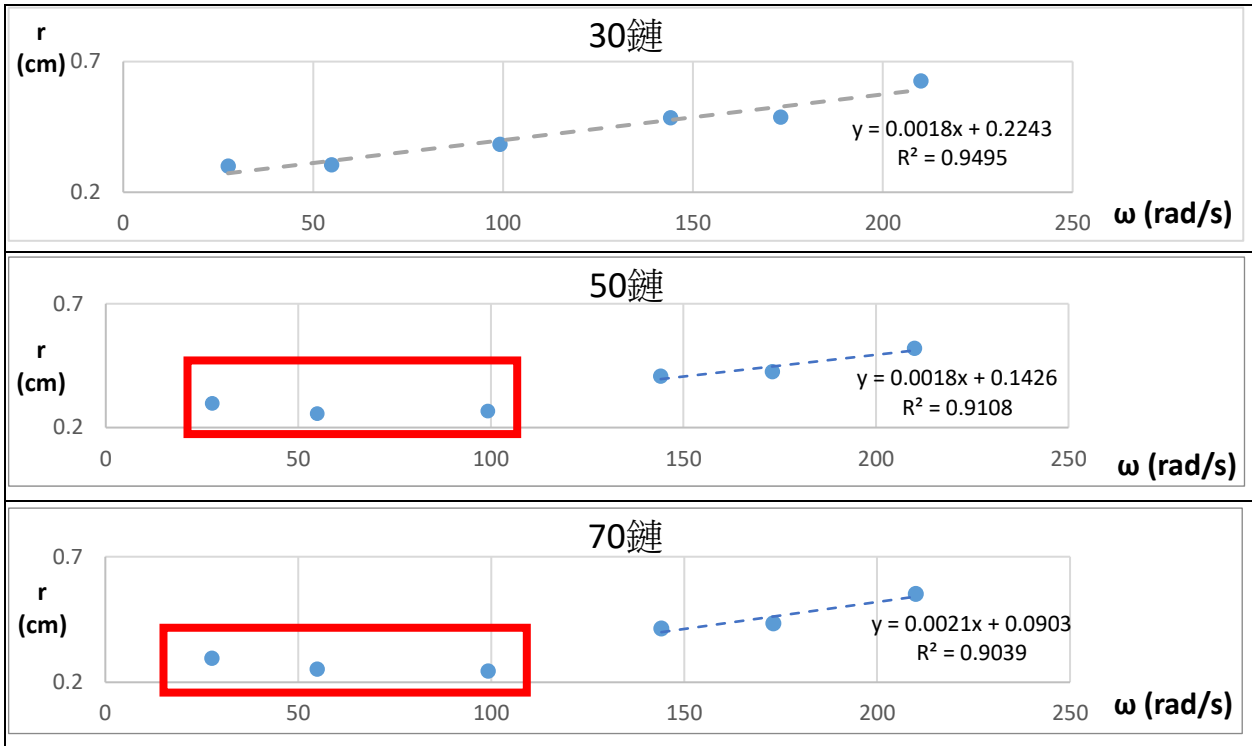
實驗二：在短鏈條的情況下，測量齒輪角速度 ω 與穩態鏈條形狀之關係

定性觀察發現齒輪角速度 ω 愈大，則鏈條形狀愈上揚。



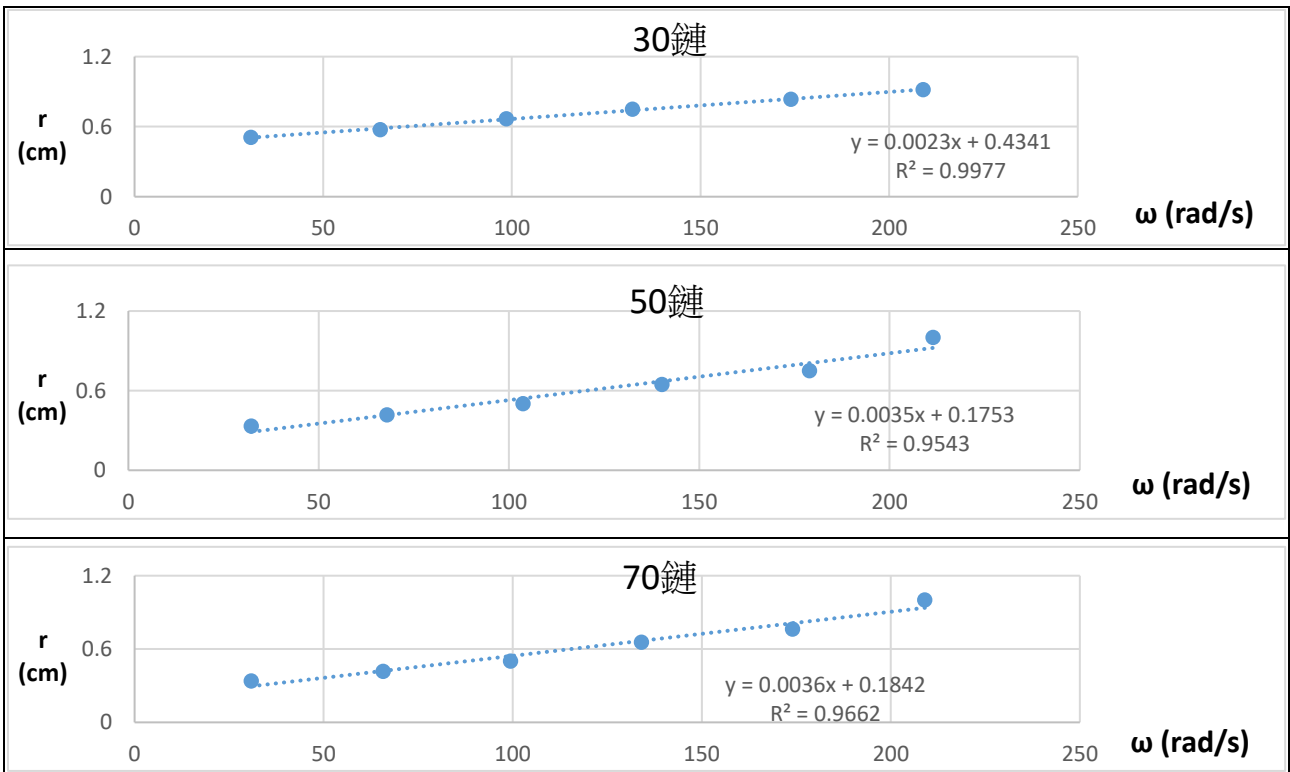
實驗 2-1：齒輪角速度 ω 對應鏈條下端曲率半徑 r

(一) 齒輪直徑 R_1



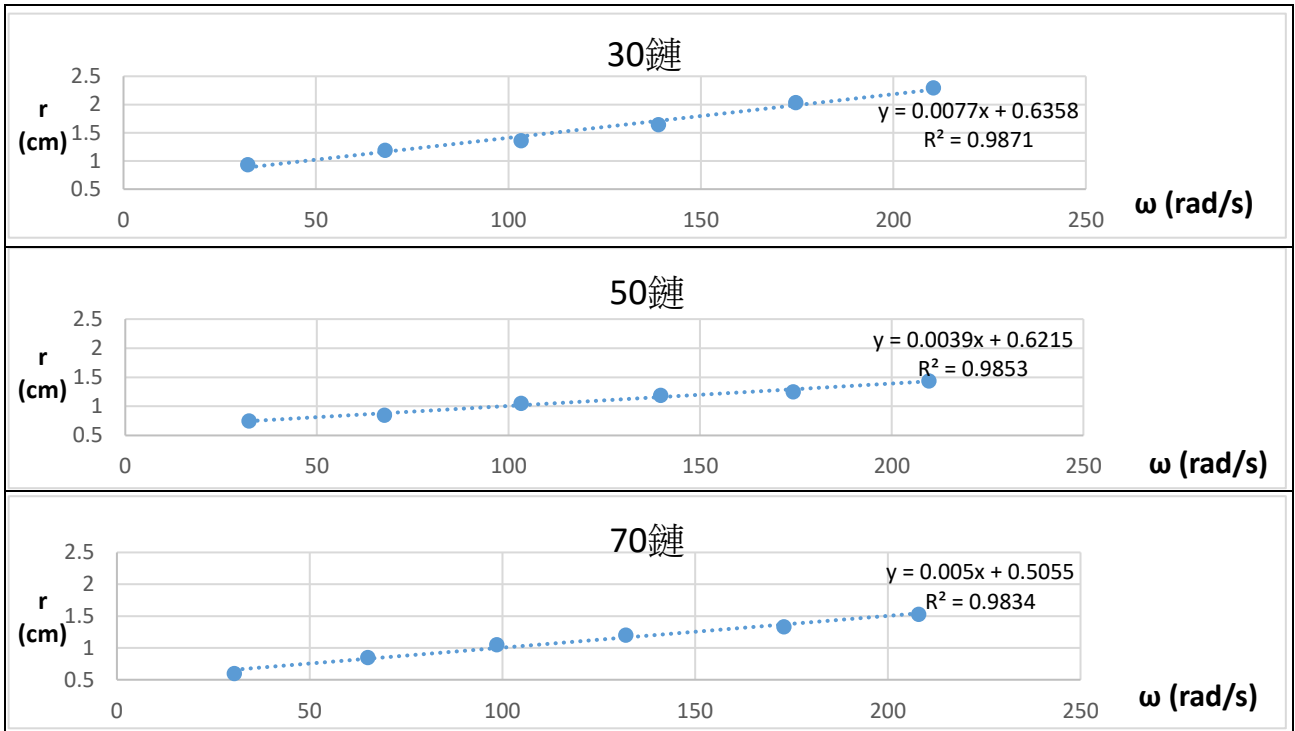
▲圖 5-2-4：在 30 鏈中角速度與曲率半徑呈線性正相關，但在低角速度時，50 鏈與 70 鏈數據較不符合（上圖紅框處）。

(二) 齒輪直徑 R_2



▲圖 5-2-5：角速度與曲率半徑均呈線性正相關

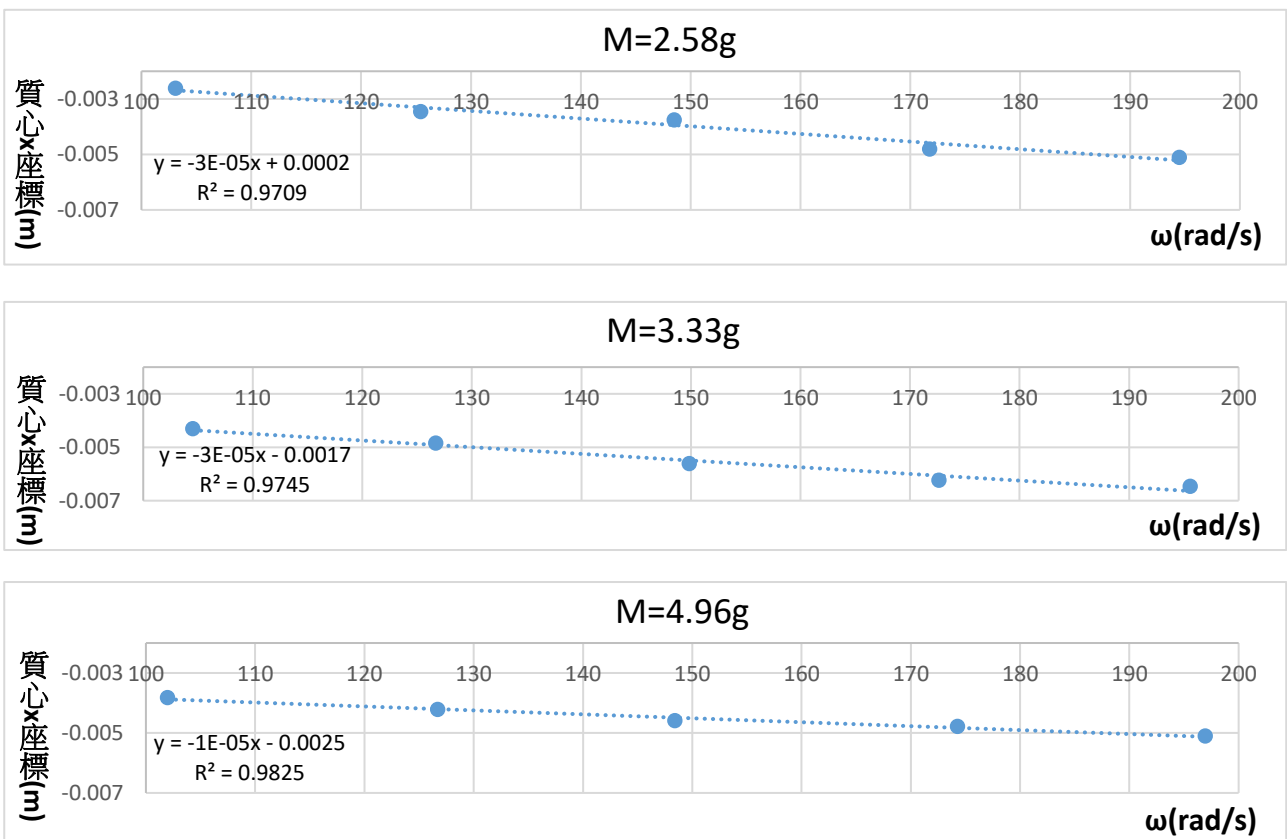
(三) 齒輪直徑 R_3



▲圖 5-2-6：角速度與曲率半徑均呈線性正相關

實驗 2-2：齒輪角速度 ω 對應鏈條之偏移量（質心 x 座標 x_{cm} ）

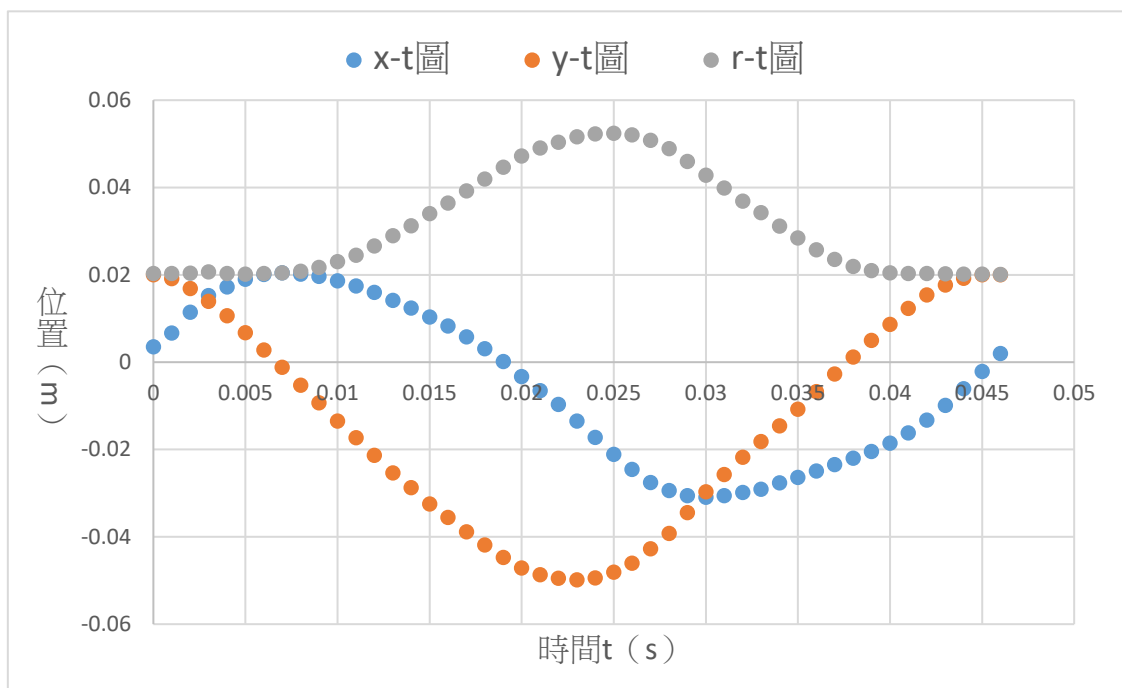
取 5 個轉動週期的 x 座標做平均，得質心 x 座標 x_{cm} ，並做出 $x_{cm} - \omega_m$ 圖。



▲圖 5-2-7：可發現 $x_{cm} \propto \omega$

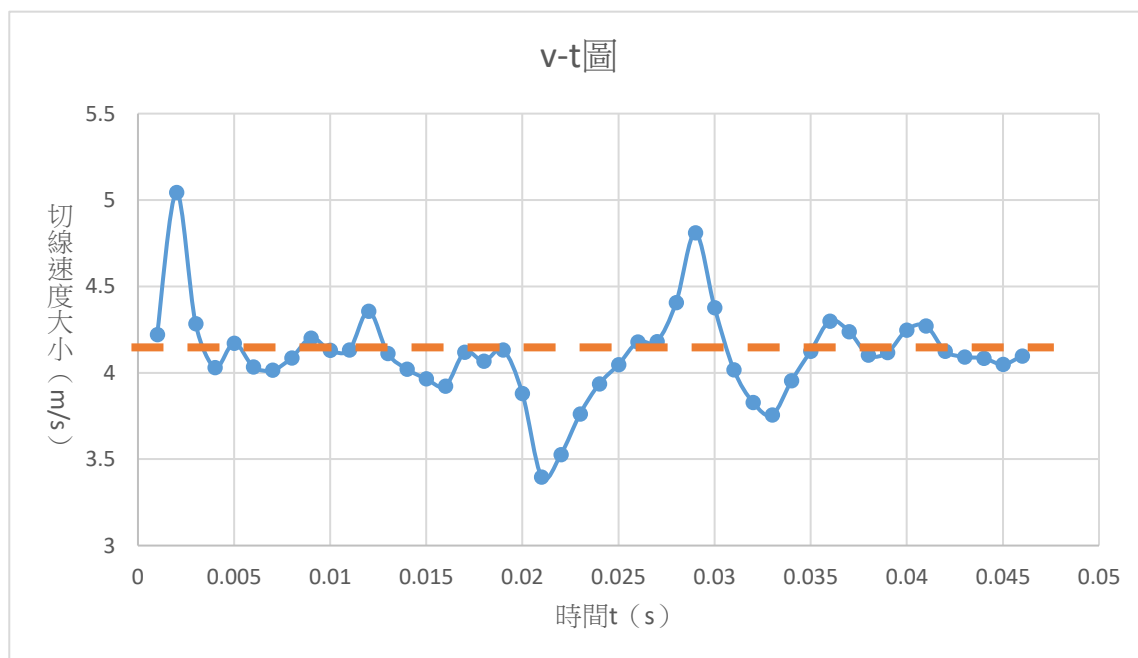
二、實驗三：測量鏈條在各點的運動狀態

(一) 在一個週期（時間 0~0.046 s）間的 x-t、y-t、r-t 圖



▲圖 5-3-1

(二) 在一個週期（時間 0~0.046 s）間的 v-t 圖

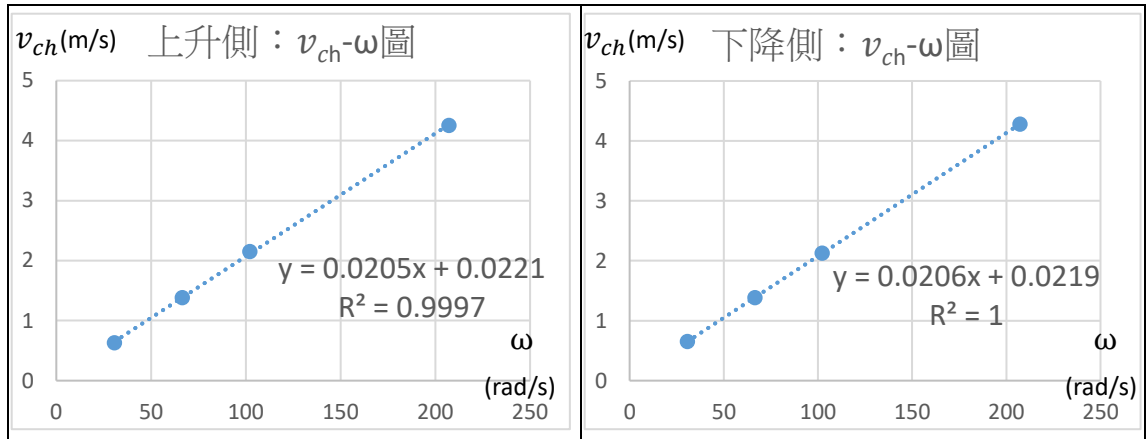


▲圖 5-3-2：速度大小大多位於定值（橘色線處），但在特定時間會有劇烈起伏

三、實驗四：在長鏈條的情況下，探討影響波動視速度的所有變因

實驗 4-1：鏈條速度大小 v_{ch} 跟齒輪角速度 ω 與鏈條位置之關聯

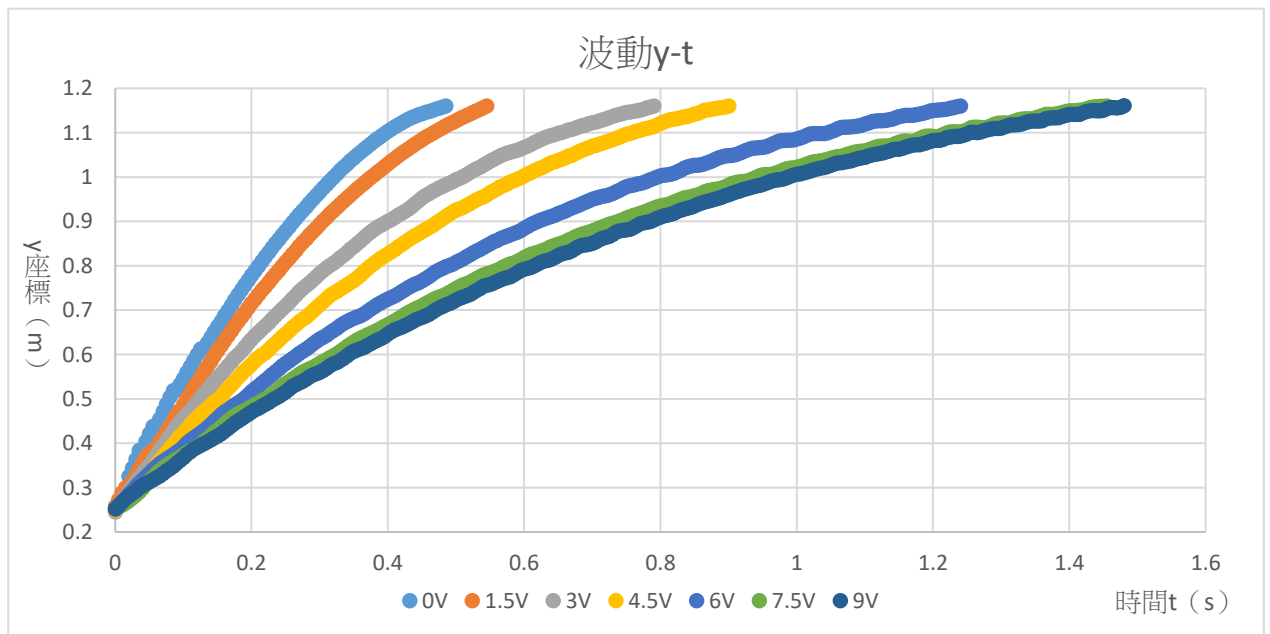
因為當供應電壓為 6V 與 7.5V 時，馬達會劇烈晃動，造成鏈條持續晃動，故無法單獨測量出鏈條速度，所以不進行此實驗。



▲圖 5-4-1：可發現兩側鏈速 v_{ch} 無差異，且正比於齒輪角速度 ω

實驗 4-2：波動視速度 v_s 跟齒輪角速度 ω 與鏈條位置之關聯

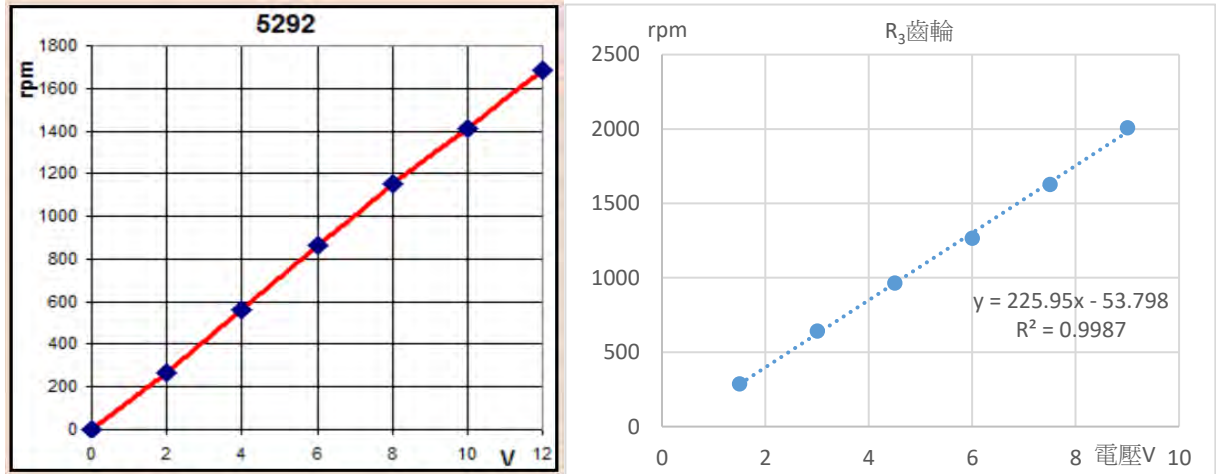
為了避免鏈條頭尾的不必要誤差，只取波動在 0.25m~1.16m（定齒輪下端鏈條為 0m）的運動數據。將不同齒輪角速度 ω （供應電壓 V 大小）疊圖比較。



▲圖 5-4-2：可發現 y-t 圖斜率隨著時間遞減

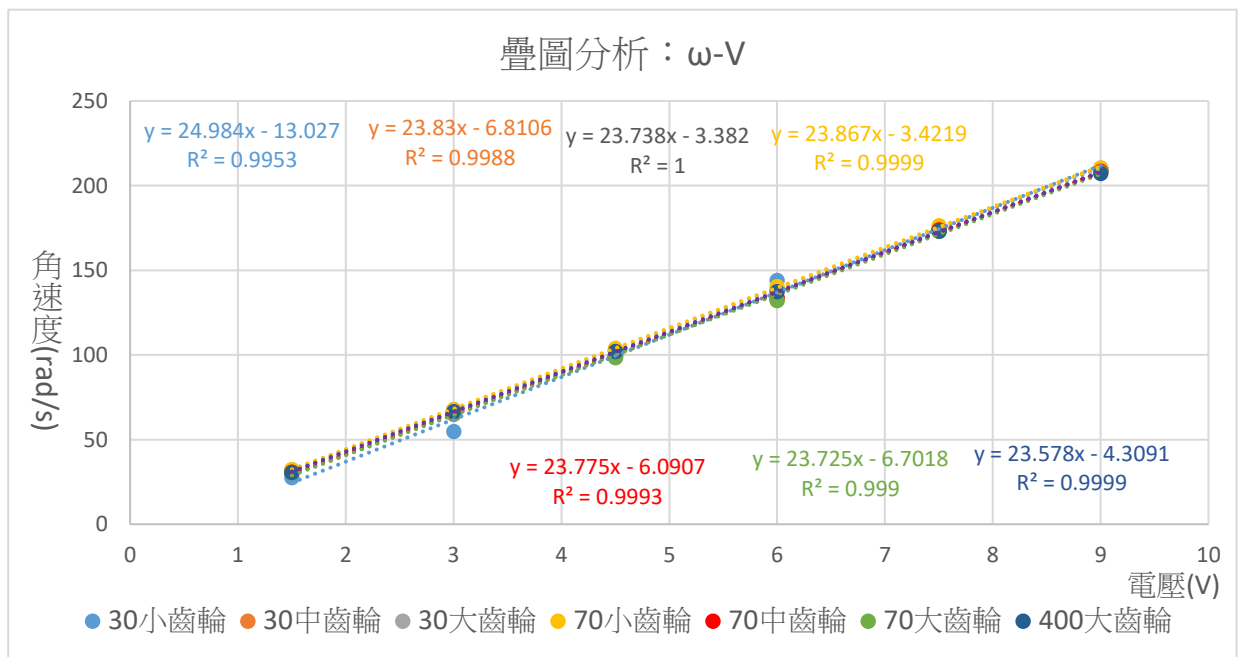
陸、 討論

一、在實驗一中，可看出電壓 V 對應角速度 ω 成正比之趨勢，上網尋找此馬達的相關資料也顯示相同趨勢（如圖 6-1、6-2）。



▲圖 6-1-1：網路上^[3]查到此馬達的資料 ▲圖 6-1-2：我們測量出的數據

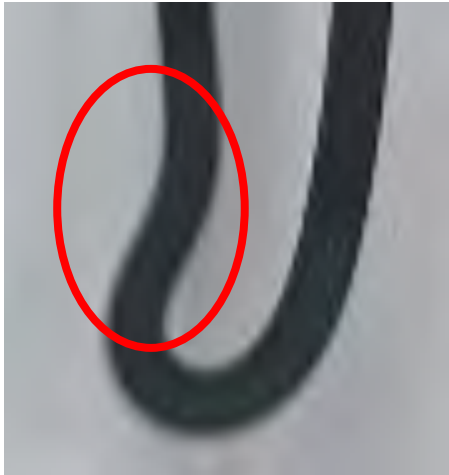
二、由實驗一中各負載結果疊圖，可看出改變鏈條長度與齒輪大小，對齒輪角速度 ω 影響不大。我們可直接調整供應電壓來控制齒輪角速度。



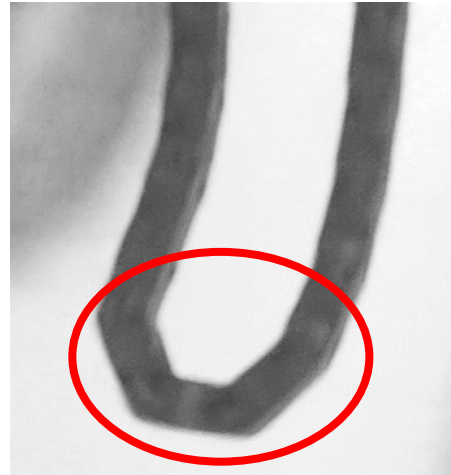
▲圖 6-2-1

三、從實驗二定性觀察得知，當齒輪角速度 ω 愈大，則鏈條形狀愈上揚。所以我們後續實驗以測量鏈條下端曲率半徑與測量鏈條 x 方向偏移量，來定量描述鏈條形狀上揚。

四、從實驗 2-1 得知，30 鏈之曲率半徑均與齒輪角速度圖呈線性關係，且在三個大小齒輪均成立。原因是當齒輪角速度 ω 增加，則鏈條切線速度大小也增加，而鏈條經下端圓週運動所需向心力增加，所以曲率半徑增加。而 50，70 鏈在大齒輪和中齒輪上也呈線性，但曲率半徑較小，原因是鏈條較長，會有鏈條內凹的情況（如下圖 6-4-1）。但在小齒輪上數據較起伏不定，原因是鏈條下端的曲率半徑已與單一鏈條長度相差不大，所以鏈條下端並非圓弧而是有夾角的（如下圖 6-4-2），在測量上較不方便。



▲圖 6-4-1：鏈條下端內凹（紅框處）

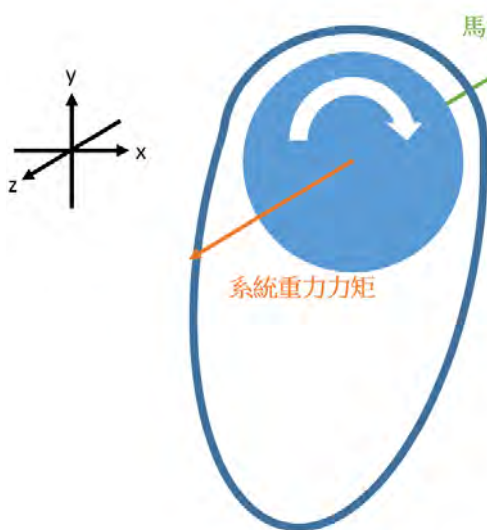


▲圖 6-4-2：鏈條下端有夾角（紅框處）

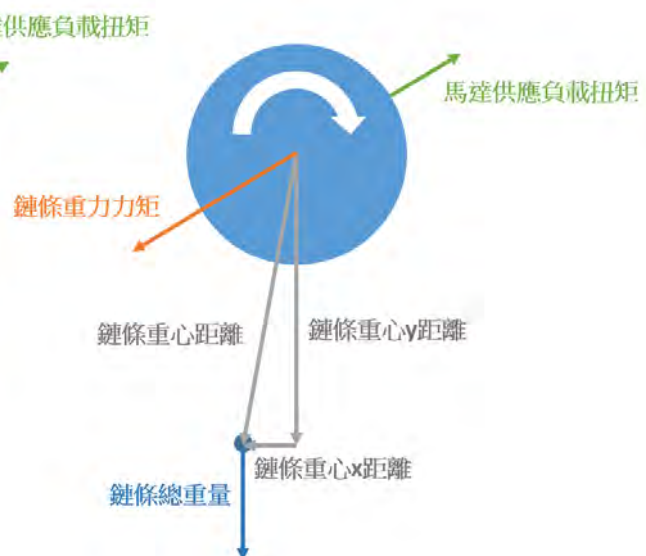
五、當系統（鏈條+齒輪）受到淨力矩 τ_{net} 作用，則系統會有一繞著轉動中心（馬達轉軸）的角加速度 α 。

$$\vec{\tau}_{net} = I\vec{\alpha} \quad (3)$$

因為齒輪對稱於馬達轉軸，所以齒輪重力力矩為零。淨力矩 τ_{net} 為馬達提供負載之扭矩 τ_m 加上齒輪總重力力矩 τ_g （如圖 6-5-1、6-5-2）。



▲圖 6-5-1



▲圖 6-5-2

假設鏈條由 n 個單位鏈條組合而成，則

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \vec{\tau}_m + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{g} \quad (4)$$

其中 τ_m 為馬達提供負載之扭矩； \vec{r}_i 與 m_i 分別為單一鏈條距原點（轉軸）之距離與質量； \vec{g} 則為重力加速度（ $-y$ 方向）。

若馬達順時針旋轉，則外積結果為

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \vec{\tau}_m + \overrightarrow{\left(g \sum_{i=1}^n x_i m_i \right)} \quad (5)$$

其中 x_i 為單一鏈條的 x 座標值， g 值為 -9.8 。

而我們也知道質心 x 座標 x_{cm} 為

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{M} = x_{cm} \quad (6)$$

M 為鏈條總質量 ($M = \sum m_i$)

且我們由式(2)也知道馬達之扭矩 τ 為

$$\vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\tau}_m + B\vec{\omega}_m$$

其中 τ 為馬達之扭矩； I 為轉動系統反映在馬達轉軸之轉動慣量； τ_m 為負載所被提供的扭矩； B 為馬達內摩擦係數； ω_m 為馬達轉軸之角速度。

因為 $\tau \propto$ 電壓 V ，且由我們先前實驗得知 $\omega_m \propto V$ ，故

$$\vec{\tau}_m = C\vec{\omega}_m - I\vec{\alpha}_m \quad (7)$$

其中 C 為一常數 ($C \geq 0$)； α_m 為馬達轉軸之角加速度。

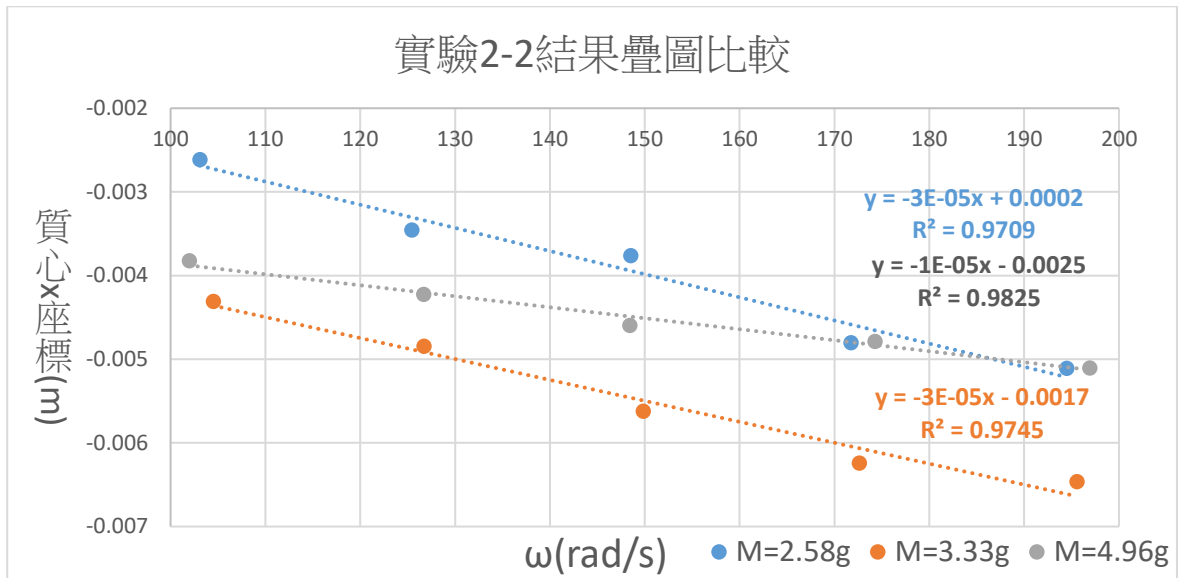
由式(3)、式(5)、式(6)、式(7)，可得

$$\vec{x}_{cm} \times M\vec{g} + C\vec{\omega}_m = I(\vec{\alpha} + \vec{\alpha}_m) \quad (8)$$

若系統達轉動平衡 ($\tau_{\text{net}} = \alpha = \alpha_m = 0$)，則

$$\vec{x}_{cm} \times M\vec{g} = -C\vec{\omega}_m \quad (9)$$

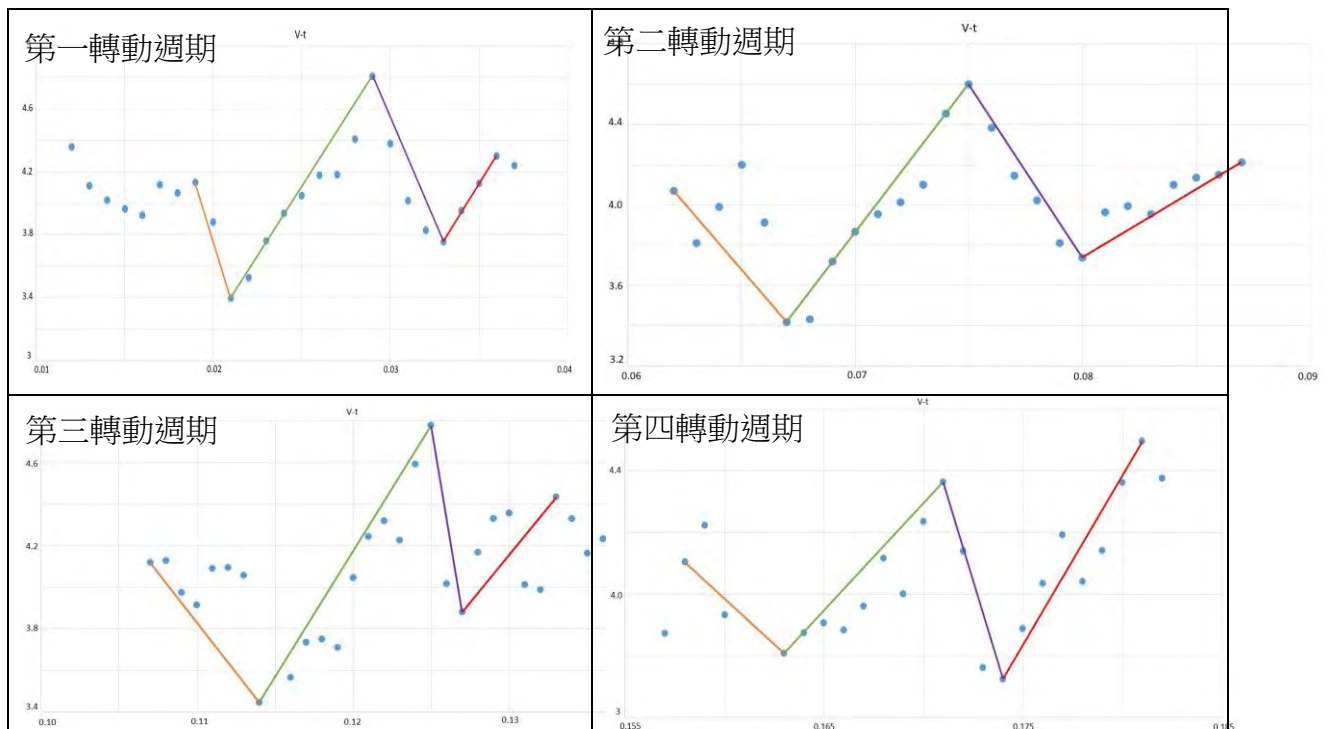
實驗 2-2 所得結果 ($x_{cm} \propto \omega_m$)，正可對應上式。



▲圖 6-5-3

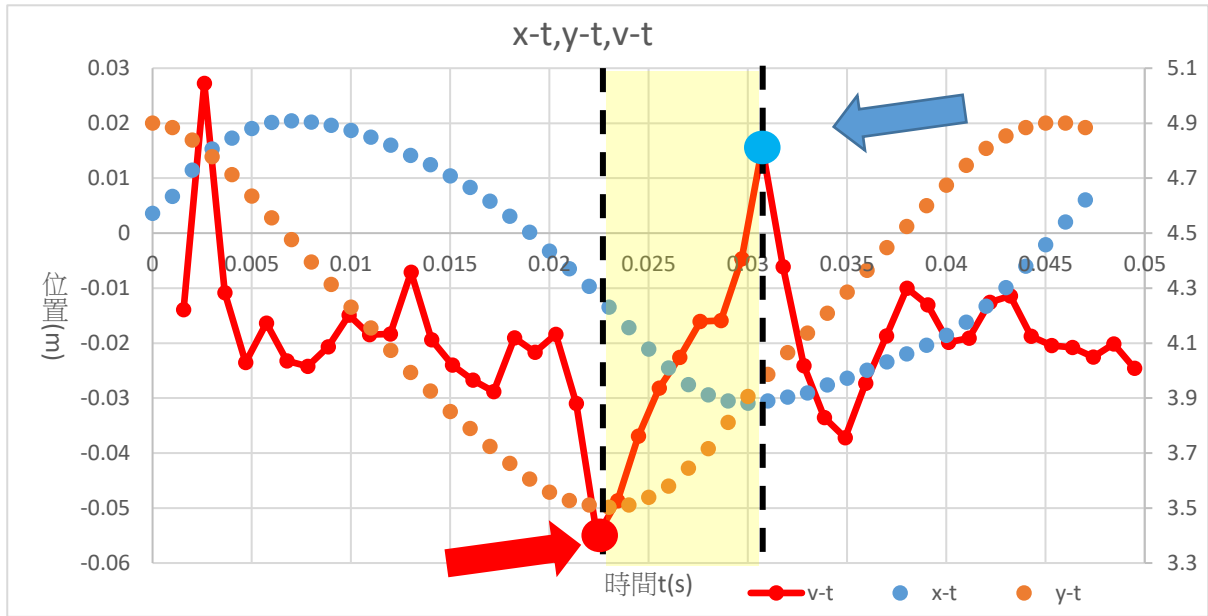
可由上圖斜率反推出 C 值為 6.99×10^{-7} , 8.16×10^{-7} , 6.39×10^{-7} ($\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$)，其中 C 與馬達性質有關。因為對於不同負載，馬達功率不同，而造成 C 值計算不同。且因為 $C \geq 0$ 且 $g < 0$ ，所以 $x_{cm} \leq 0$ ，表示當齒輪與鏈條順時針旋轉時，整體鏈條往 $-x$ 方向偏移。此結果可以對應到鏈條的上揚方向均為鏈條上拉側。

六、由實驗三 v-t 圖 (圖 6-6-1) 可發現，每一週期單位鏈條切線速率會從穩定狀態下降，隨即線性上升，再下降回復至穩定狀態。



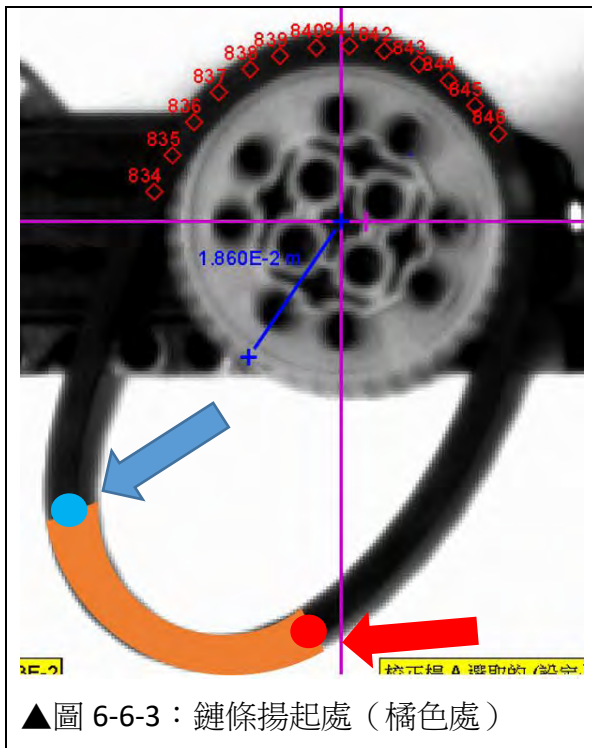
▲圖 6-6-1：每個轉動週期均會發生規律改變

將第一個週期內的 $v-t$ 時間分段，且分別對應 $x-t$ 、 $y-t$ 、 $r-t$ ，

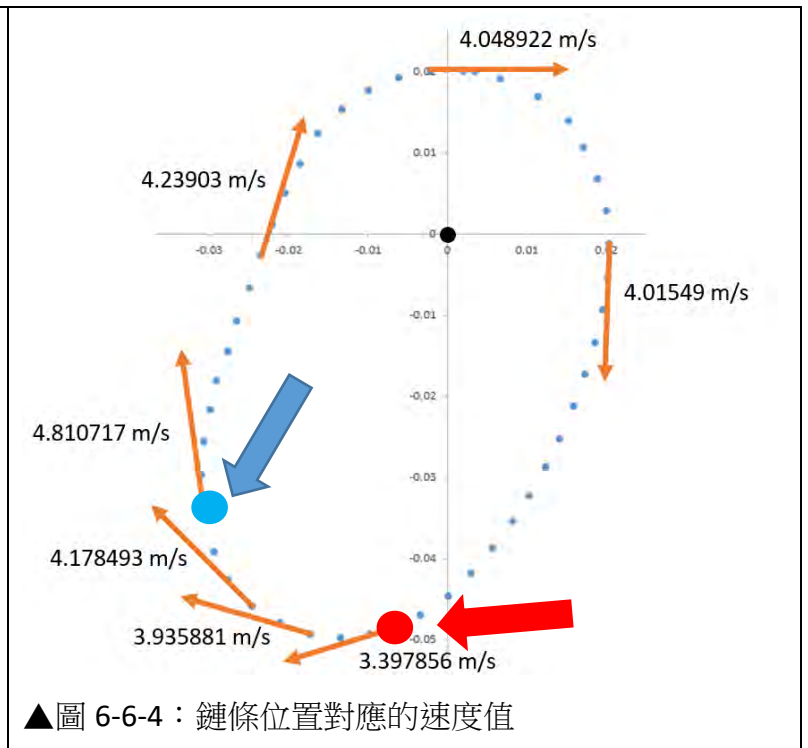


▲圖 6-6-2

可發現速度急遽上升（看似線性）的區間，由對應的 $x-t$ 、 $y-t$ 、 $r-t$ 可得知此區間在鏈條揚起處（圖 6-6-3）。



▲圖 6-6-3：鏈條揚起處（橘色處）

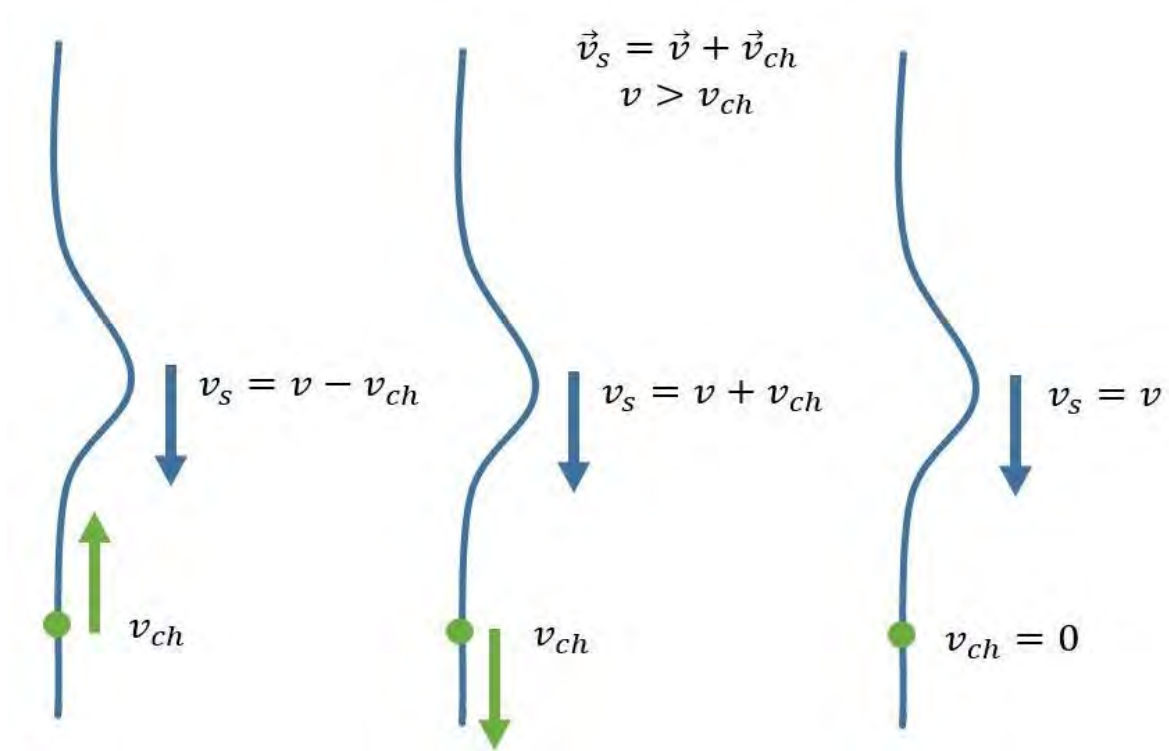


▲圖 6-6-4：鏈條位置對應的速度值

圖 6-6-3 的紅標處及藍標處分別對應到圖 6-6-2 的紅標、藍標及圖 6-6-4 的紅標、藍標。

七、在實驗四中，發現敲擊鏈條上升側所產生的波動速較慢，下降側則較快。原因為觀測到的視波速 v_s 為相對於鏈條的波速 v 加上鏈速 v_{ch} （如下式）。而上升側與下降側 v_{ch} 方向相反（如圖 6-7-1），故造成此現象。

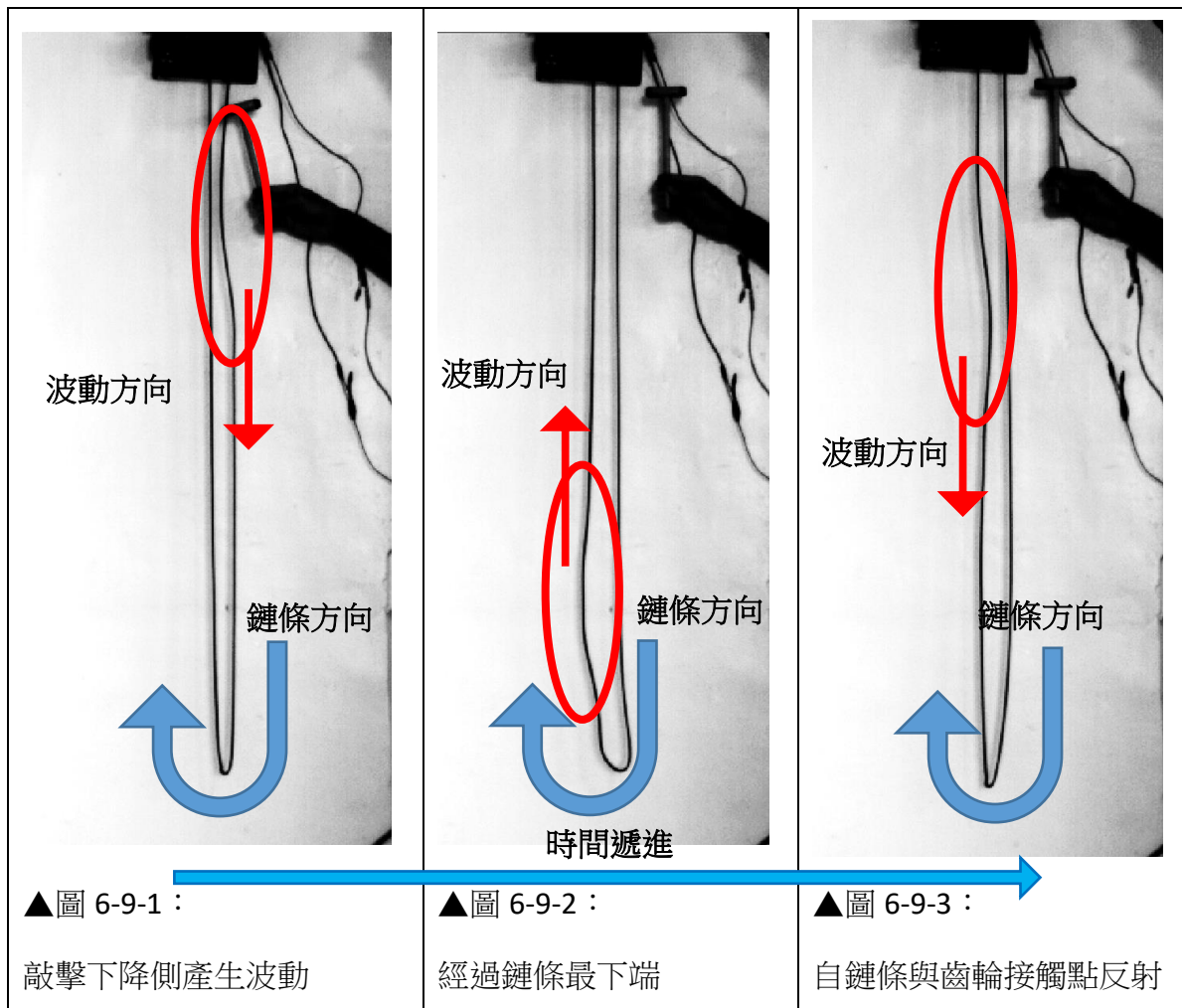
$$\vec{v}_s = \vec{v} + \vec{v}_{ch} \quad (10)$$



▲圖 6-7-1

八、在實驗四中，發現在上升側的波長較短，下降側波長較長（幾乎無法辨認有波動）。原因為兩側視波速 v_s 不一樣，而視波長也因此不同。

九、在實驗四中，發現當敲擊鏈條下降側時，波動會由下降側傳至上升側，在經過鏈條下端轉折處時，波的振幅方向會相反（如圖 6-9-1、圖 6-9-2），推測是因為波無法通過鏈條下端轉折處，而下降側鏈條撞擊上升側鏈條，產生新的波動。另外發現波動遇到鏈條與齒輪交界處後反射，波的相位也會改變 π （圖 6-9-3），因為交界處為固定端，因此反射後波的相位會改變 π 。但敲擊上升側時，均無上述兩現象，波動只會傳遞至下端便消失。推測當波動傳遞至鏈條下端，上升側鏈條撞擊下降側鏈條，卻因鏈條下端朝上升側揚起（實驗 2-2 結果）而抵銷，故無新波動產生。



十、在實驗 4-1 中發現，鏈條兩側的速度無差異，且鏈條速度與鏈條位置無關連（忽略下段轉折處）。實驗五得到齒輪角速度 ω 與供應電壓 V 成正比，在實驗六中也得到齒輪角速度 ω 與鏈條兩側速度成正比，故使用內插法得到電壓值為 6V、7.5V 時的鏈條速度，以便進行下列分析。

十一、由實驗四得知，在上升側與下降側的鏈條均為等速，代表單一鏈條合力為 0，故可知鏈條向上張力 T 等於向下張力 T 加上鏈條重量

$$T_1 = T_2 + mg \quad (11)$$

其中 T_1 與 T_2 為鏈條兩側張力，且 T_2 和 mg 同向與 T_1 反向

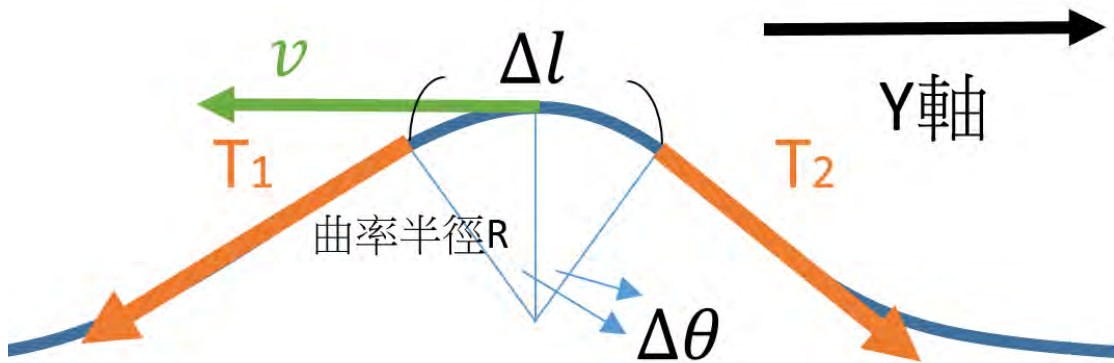
設鏈條張力 T 與 y 方向距離關係為

$$T(y) = ay + T_0$$

當 $y = y'$ ， $T(y') = ay' + T_0$ ；又知當 $y = y' + \Delta l$ （此為鏈條長度）， $T(y' + \Delta l) = a(y' + \Delta l) + T_0 = T(y') - mg$ ，可解得 $a = -\frac{m}{\Delta l}g = -\mu g$ ， μ 為鏈條線密度。故

$$T(y) = -\mu gy + T_0 \quad (12)$$

當有波動產生（如圖 6-8-1），可視為波型固定而鏈條移動，而波高遠小於鏈條總長度，又因先前實驗得知繩子瞬間速率相同，故可適用上式。



▲圖 6-11-1

向心力 $F = T(y') \sin \Delta\theta + T(y' + \Delta l) \sin \Delta\theta \approx (T(y') + T(y' + \Delta l))\Delta\theta = m \frac{v^2}{R}$

$$(T(y') + T(y' + \Delta l)) \frac{\Delta l}{2R} = \mu \Delta l \frac{v^2}{R}$$

$$(T(y') + T(y' + \Delta l)) = 2\mu v^2 = -2\mu gy' - \mu g \Delta l + 2T_0$$

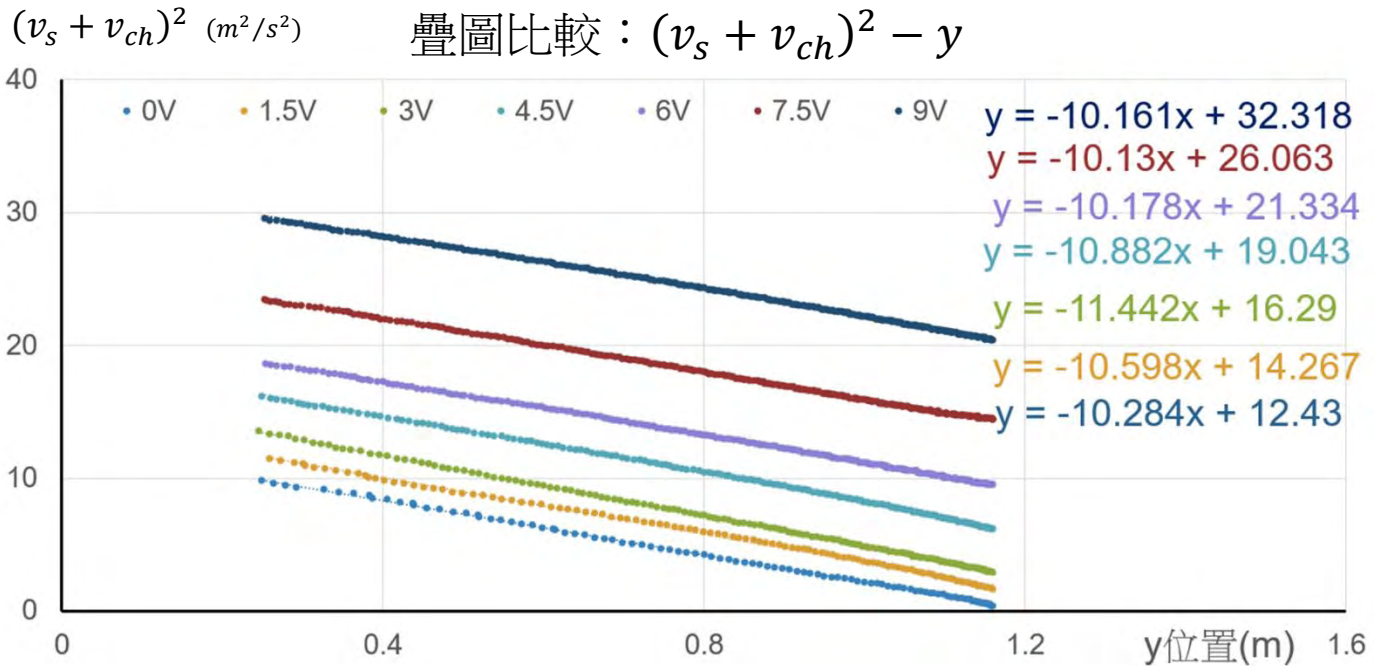
$$v^2 = -gy' - \frac{g\Delta l}{2} + \frac{T_0}{\mu}$$

當 $y = 0$ ，設 $v_0^2 = \frac{T_0}{\mu} - \frac{g\Delta l}{2}$ ，故 $v^2 = v_0^2 - gy$ 。

由式（10）得知鏈條上升側所觀察到的視速度 $v_s = v - v_{ch}$ （鏈條速度）

$$(v_s + v_{ch})^2 = -gy + v_0^2 \quad (13)$$

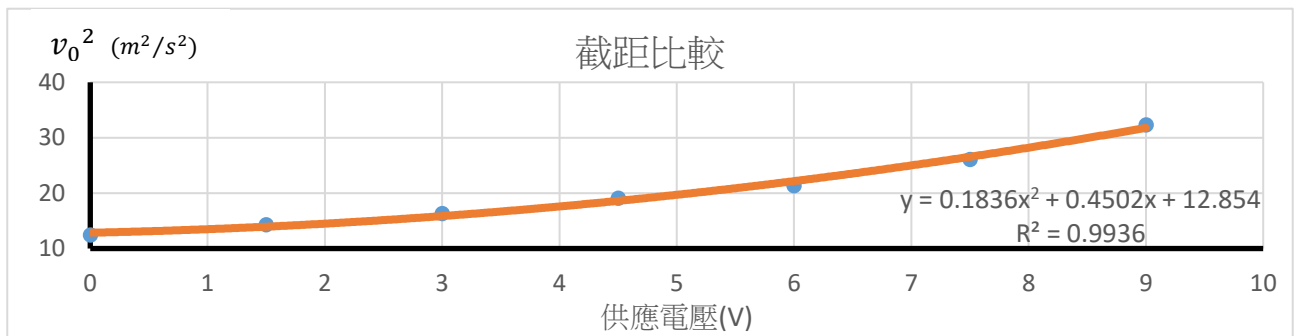
十四、 將實驗四的 $y-t$ 圖加上趨勢線，將趨勢線微分得到 v_s-t 圖。再加上由實驗六所得的 v_{ch} 來作圖： y 對應 $(v_s + v_{ch})^2$ 。



▲圖 6-14：可發現斜率均接近 $-g$ (-9.8)。

十五、 討論十五最後作圖結果，斜率均接近 $-g$ (-9.8) 符合上述，但趨勢線縱座標截距 (v_0^2) 有差異，推測是因為當改變電壓 V 時張力 T 也會改變，但張力 T 差值不變。

作圖：電壓 V 對應 v_0^2 (趨勢線縱座標截距)



▲圖 6-15-1

可看出電壓 V 與 v_0^2 具正相關，但並非單純線性。又因 $v_0^2 = \frac{T_0}{\mu} - \frac{g\Delta l}{2}$ ，而 Δl 、 g 、 μ 均非電壓 V 之函數，故可推得電壓 V 與 T_0 有次方關係。

柒、 結論

- 一、在短鏈實驗中，發現鏈條下端曲率半徑 r 與齒輪角速度 ω 呈線性正相關。
- 二、在短鏈實驗中，發現鏈條的質心座標 x_{cm} 與齒輪角速度 ω 呈正比。且關係如下：

$$\vec{x}_{cm} \times M\vec{g} = -C\vec{\omega}_m$$

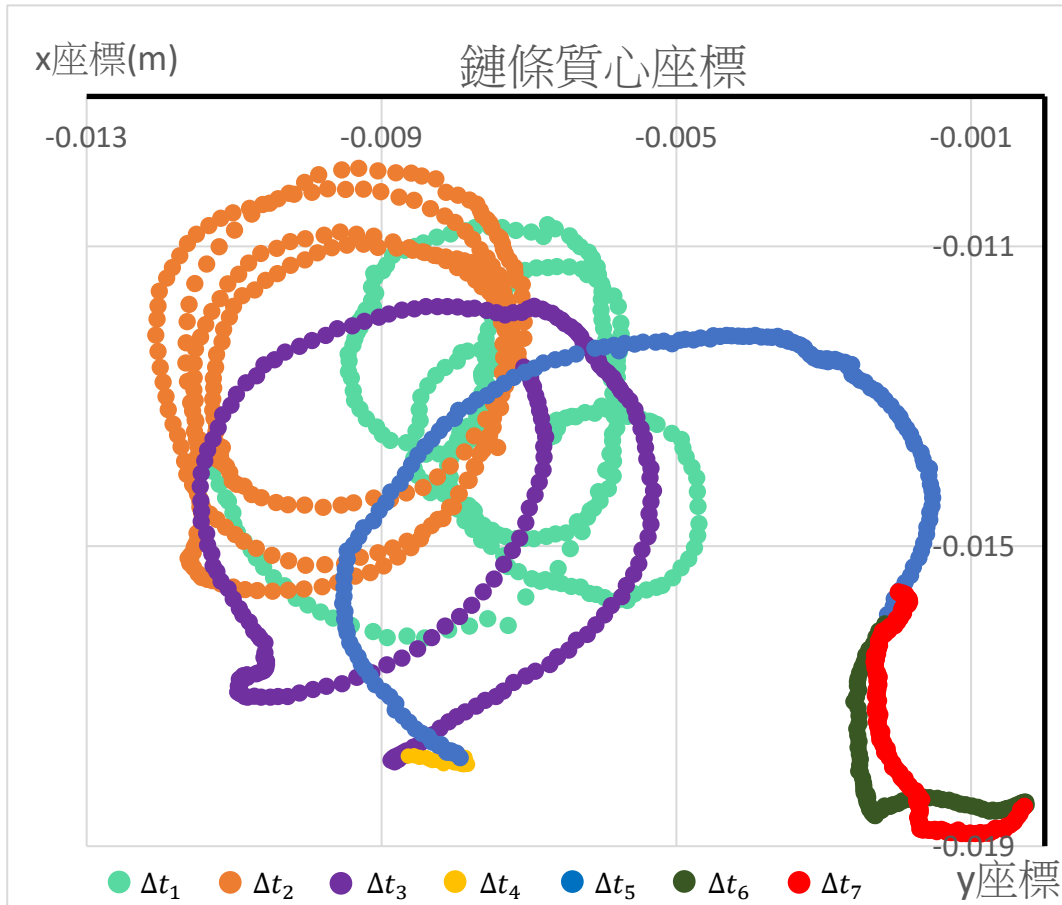
由實驗發現 C 值的數量級為 $10^{-7}(\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})$ ，與馬達特性相關。

- 三、在短鏈實驗中，發現單位鏈條運動行經下端揚起處時，切線速度大小會線性增加。
- 四、在長鏈實驗中，發現鏈條張力 T 與鏈條位置 y 關係為： $T(y) = -\mu gy + T_0$ ，且 T_0 則與齒輪角速度 ω 成次方正相關。
- 五、在長鏈實驗中，發現鏈條的視波速 \vec{v}_s 、鏈速 \vec{v}_{ch} 、波動行進位置 y 的關係為：

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{v}_s - \vec{v}_{ch})^2 = -gy + |\vec{v}_0|^2$$

捌、 未來展望

- 一、以能量觀點進行分析。
- 二、實際測量各處鏈條張力。
- 三、目前已進行齒輪等角加速度遞減實驗，而初步的鏈條質心運動軌跡圖如下



可大致發現質心有順時針轉動。但無法以目前的理論假設來解釋。

- 四、建構理論模型預測。
- 五、深入探究波動傳過鏈條下端轉折處之相關物理現象。

玖、 參考文獻及其他

一、 David Halliday、 Robert Resnick、 Jearl Walker 2016 年 08 月

Halliday 物理（力學與熱學篇） 第十版 全華出版

二、^[1] 出自：影片 Waves On A Chain

<https://www.youtube.com/watch?v=Ff8oqoYxD7U&feature=share>

三、^[2] 出自：鄒應嶼 1996 年 11 月 2 日 · 直流電動機的工作原理與特性 ·

http://pemclab.cn.nctu.edu.tw/peclub/W3cnotes/cn07/index.htm?fbclid=IwAR2mbR72ygiTQHxW_6leaNOyR99EskcaFBR-kda-AP3ZPWWd3569gWsOCTM

四、^[3] 出自：無作者 *LEGO® 9V Technic Motors compared characteristics*

<http://www.philohome.com/motors/motorcomp.htm?fbclid=IwAR3q96ZKqEiuwFolOTwhcC4QTOY6KDhObiRKSNguz4cLskHAIQovIzOV2GA>

【評語】 051811

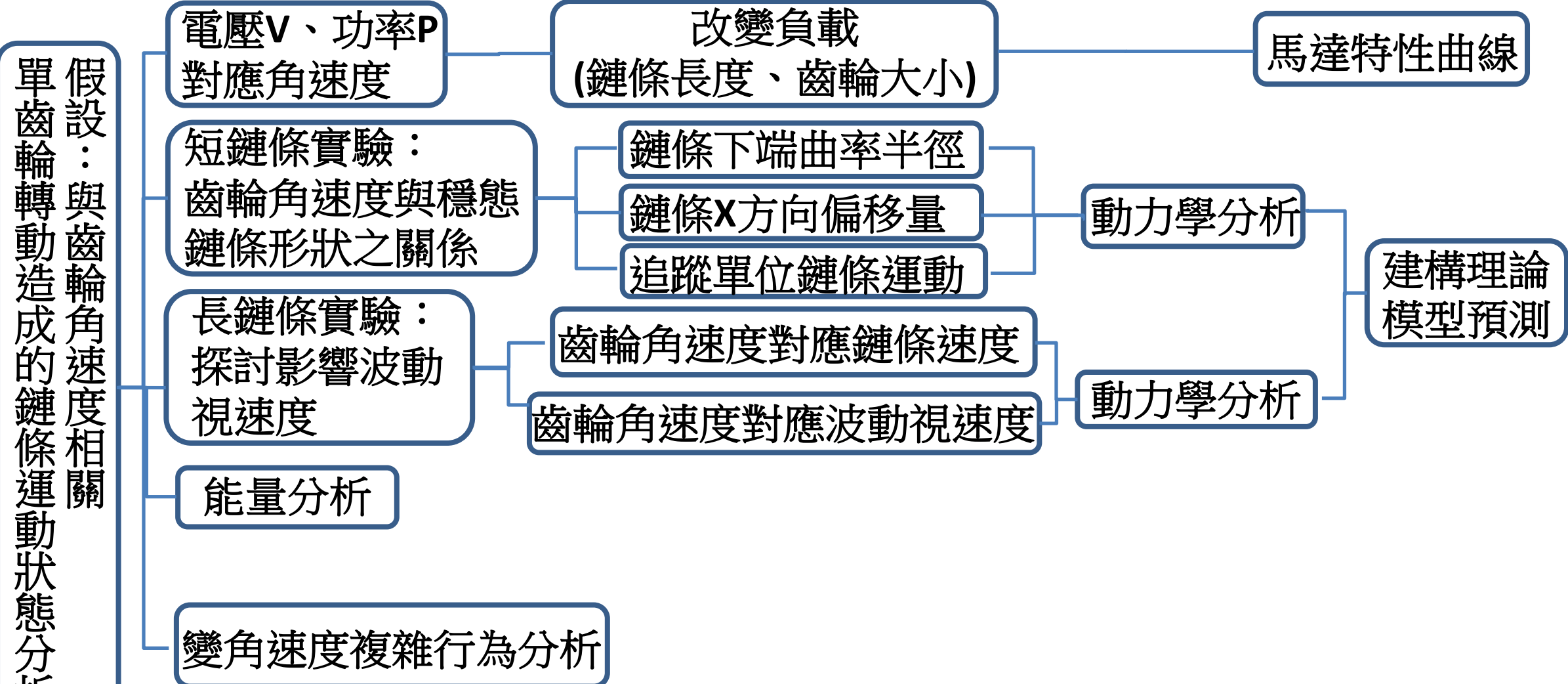
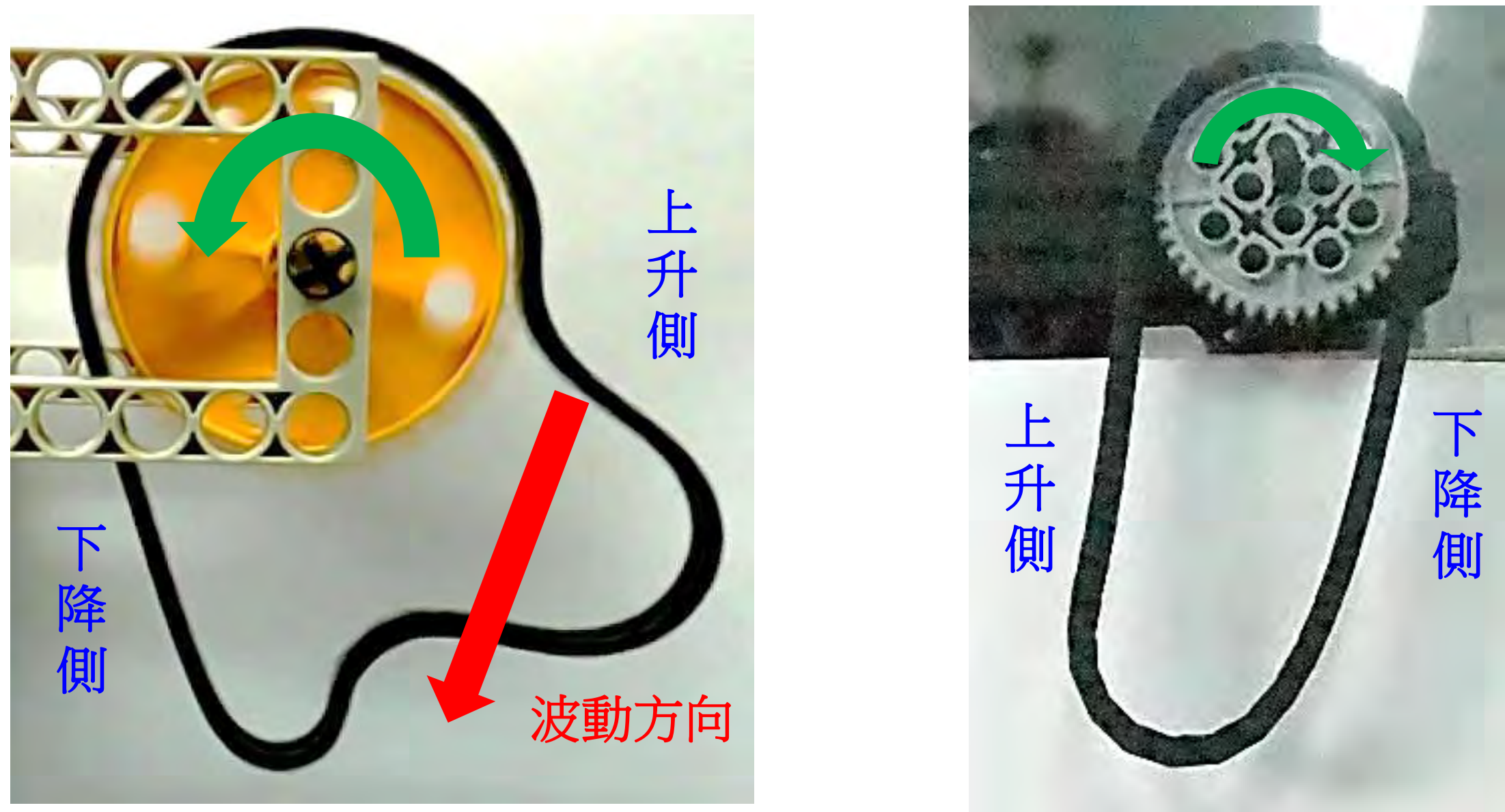
本實驗探討掛有鏈條的單齒輪轉動時鏈條的運動，透過調整直流馬達帶動單齒輪的角速度，探討局部支撐鍊條轉動未支撐部分的波動。標準流程，探討數種轉動參數及鍊條長度，討論多數變因，內容豐富，應可進一步做邏輯歸納結果，建議可以再與穩態形狀結果比較的分析預測並與實驗的比對。

摘要

一個掛有鏈條的單齒輪轉動時，鏈條有複雜運動現象。本研究將此現象簡化為兩個方向探究：固定角速度下短鏈條的運動行為與長鏈條上波動傳遞。研究分析後，發現短鏈條實驗中，鏈條下端曲率半徑與齒輪角速度呈線性正相關，而鏈條的質心座標 x_{cm} 與鏈條的關係為： $M\vec{g}\vec{x}_{cm} = -C\vec{\omega}_m$ ，由實驗得C值的數量級為 $10^{-7}(\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})$ ，與馬達特性相關。另外鏈條的視波速 \vec{v}_s 、鏈速 \vec{v}_{ch} 及波動行進位置 y 的關係為： $\vec{v}^2 = (\vec{v}_s - \vec{v}_{ch})^2 = -gy + \vec{v}_0^2$ ，且長鏈條實驗中鏈條張力 T 與鏈條位置 y 關係為： $T(y) = -\mu gy + T_0$ ，而 T_0 則與齒輪角速度 ω 成次方正相關。在找尋波動傳遞之臨界值實驗中，發現曲率半徑及鏈速皆影響波的傳遞，且此兩個因素皆和鏈條張力有關，希望將來能藉由曲率半徑回推鏈條張力，進而得知波在鏈條上傳遞的行為。

壹、研究動機

在一次的實驗課中我們發現一個掛有鏈條的單齒輪，用手轉動時，會在鏈條的上拉側產生波動，而波會往鏈條下端傳遞且波形會不斷改變。在初步實驗中，使用馬達帶動單齒輪以控制角速度 ω ，發現：一、在齒輪加速與減速時出現了上述之波動，推測此現象和角速度變化有關。二、在齒輪等角速度 ω 時鏈條會出現穩態形狀，且會因角速度 ω 不同，而使鏈條形狀改變，於是著手進行相關實驗。又在長鏈條之影片中^[1]，觀察到其波動傳遞行為與本研究欲探討行為類似，所以依據上述觀察我們將實驗分為短鏈條實驗與長鏈條實驗，分別用以探討鏈條的穩態形狀與波動傳遞的相關物理分析。



貳、研究目的

- 一、測量 ω -V、 ω -P及馬達特性曲線。
- 二、在短鏈條的情況下，測量齒輪角速度 ω 與穩態鏈條（偏移量與曲率半徑）形狀之關係。
- 三、在短鏈條的情況下，分析一轉動週期內單位鏈條的運動過程。
- 四、在長鏈條的情況下，探討影響波動速度變因。
- 五、在短鏈條情況下，測量鏈條個數與穩態鏈條形狀之關係。
- 六、在長鏈條情況下，測量下端曲率半徑與波動通過之關係。

參、研究設備及器材

研究設備			
高速攝影機 (MegaSpeed MS30K)	直流電源供應器 ($V_{max}=50V$ $A_{max}=5A$)	Electric RC Race Buggy Motor	
研究器材			
	單位鏈條 鏈條1=0.09g 鏈條2=0.10g		小齒輪： $R_1=1.325\text{cm}$ 中齒輪： $R_2=2.115\text{cm}$ 大齒輪： $R_3=3.720\text{cm}$

肆、研究過程及方法

一、實驗各項條件與物理量

(一) 物理量：

符號	SI制單位	意義	符號	SI制單位	意義
τ_m	($\text{N}\cdot\text{m}$)	負載被提供之扭矩	τ	($\text{N}\cdot\text{m}$)	馬達扭矩
Δl	(m)	單位鏈條長度	μ	(kg/m)	鏈條線密度
ω_m	(rad/s)	馬達軸心之角速度	ω	(rad/s)	角速度
I	($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)	負載的轉動慣量	τ	($\text{N}\cdot\text{m}$)	力矩
B	($\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$)	馬達阻力係數	V	(Voltage)	電壓
v	(m/s)	波動相對鏈條之波速	T	(N)	鏈條張力
v_s	(m/s)	波動視速度	v_{ch}	(m/s)	鏈條速度
r	(cm)	鏈條下端曲率半徑	x_{cm}	(m)	質心x座標

(二) 鏈條長度定義：長鏈條使用400、200個單位鏈條2組成；短鏈條由30、50、70個單位鏈條1組成，並簡稱為30鏈、50鏈、70鏈。

二、實驗前置作業

(一) 運動分析追蹤點

本實驗採用tracker動態追蹤分析 齒輪追蹤點→青色黏土
單位鏈條追蹤點→白色廣告顏料

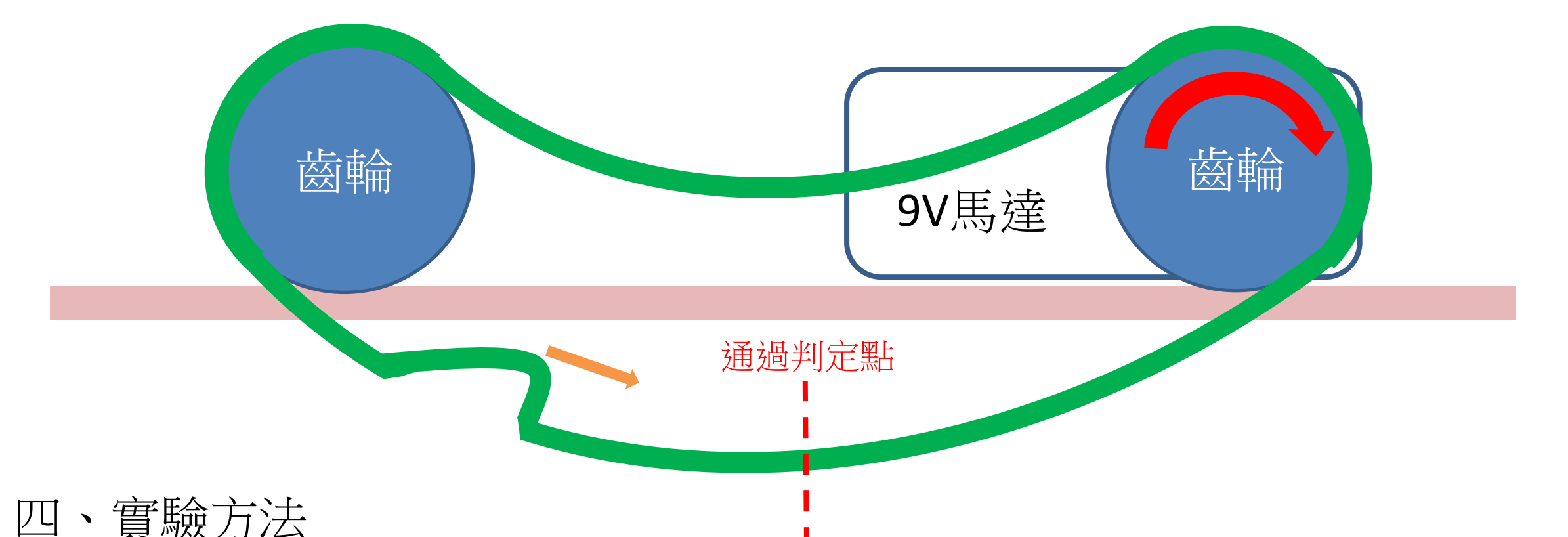
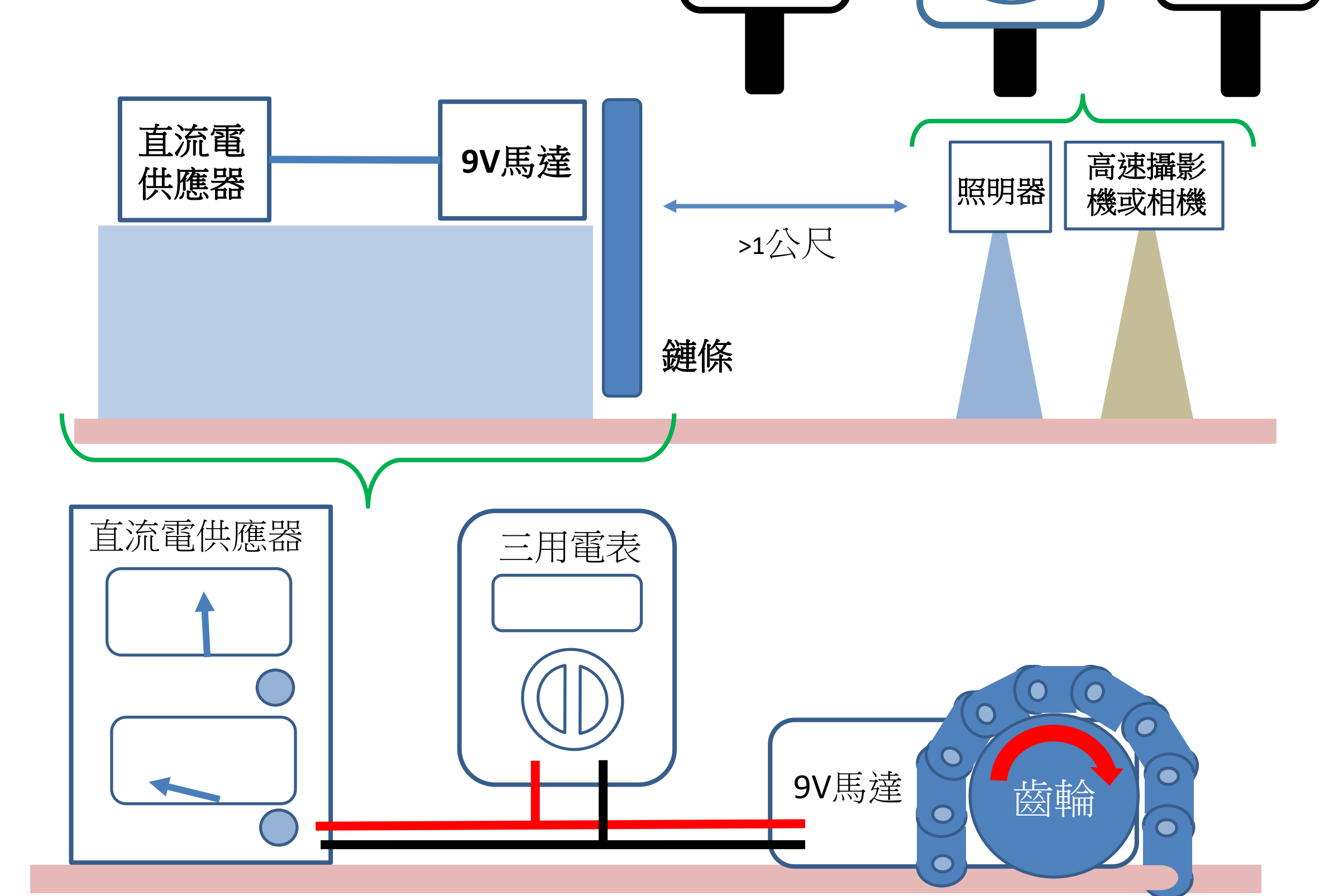
(二) 鏈條之組裝方式

組裝時，將鏈條開口端在右側且開口朝下。



三、實驗裝置架設

(一) 基本實驗器材



四、實驗方法

(一) 實驗一：馬達特性曲線測量（礙於篇幅限制，此實驗不在海報討論）

(二) 實驗二：短鏈條情況下，測量齒輪角速度 ω 與穩態鏈條形狀之關係

1. 實驗2-1：齒輪角速度 ω 對應鏈條下端曲率半徑 r

操縱變因：電壓（1.5V~9V，每次間隔1.5V）、鏈條長度（30鏈、50鏈、70鏈）、齒輪半徑（ R_1 、 R_2 、 R_3 ）。

應變變因：鏈條下端之曲率半徑 r 及齒輪角速度 ω （作 r - ω 圖）。

測量方法：相機拍攝鏈條形狀，以軟體GeoGebra分析鏈條下端曲率半徑 r 。

2. 實驗2-2：齒輪角速度 ω 對應鏈條質心之x座標 x_{cm}

操縱變因：電壓（5V~9V，每次間隔1V）、鏈條總重量（2.58、3.33、5.7公克）。

控制變因：齒輪大小（直徑） R_3 與鏈條長度30鏈。

應變變因：鏈條各質點x座標 x_{cm} 及齒輪角速度 ω （作 x_{cm} - ω 圖）。

測量方法：以高速攝影機錄製鏈條移動，其幀數為1000fps。

(三) 實驗三：測量鏈條在各點的運動狀態

控制變因：齒輪大小（直徑） R_3 、鏈條長度30鏈、電壓9V。

應變變因：鏈條速度、鏈條各質點x、y座標（作 v -t、 x -t、 r -t圖）。

測量方法：以高速攝影機錄製鏈條移動，其幀數為1000fps。

(四) 實驗四：長鏈條情況下，探討影響波動視速度變因

1. 實驗4-1：鏈條速度 v_{ch} 跟齒輪角速度 ω 與鏈條位置之關聯

操縱變因：操縱電壓：1.5V、3V、4.5V、9V。

控制變因：齒輪大小（直徑） R_3 、鏈條長度：400鏈。

應變變因：單位鏈條速度 v_{ch} 及齒輪角速度 ω （作 v_{ch} - ω 圖）。

測量方法：將鏈條劃分為三個區域（紅框處），以高速攝影機錄製鏈條移動，其幀數為1000fps。

2. 實驗4-2：波動視速度 v_s 跟齒輪角速度 ω 與鏈條位置之關聯

操縱變因：操縱電壓（1.5V~9V，每次間隔1.5V）。

控制變因：齒輪大小（直徑） R_3 、鏈條長度：400鏈。

應變變因：波形視波速度 v_s （作 v_s -t圖）。

測量方法：敲擊鏈條下降側、上拉側之頂端，以高速攝影機錄製鏈條移動，其幀數200fps。

(五) 實驗五：短鏈條情況下，測量鏈條個數與穩態鏈條形狀之關係

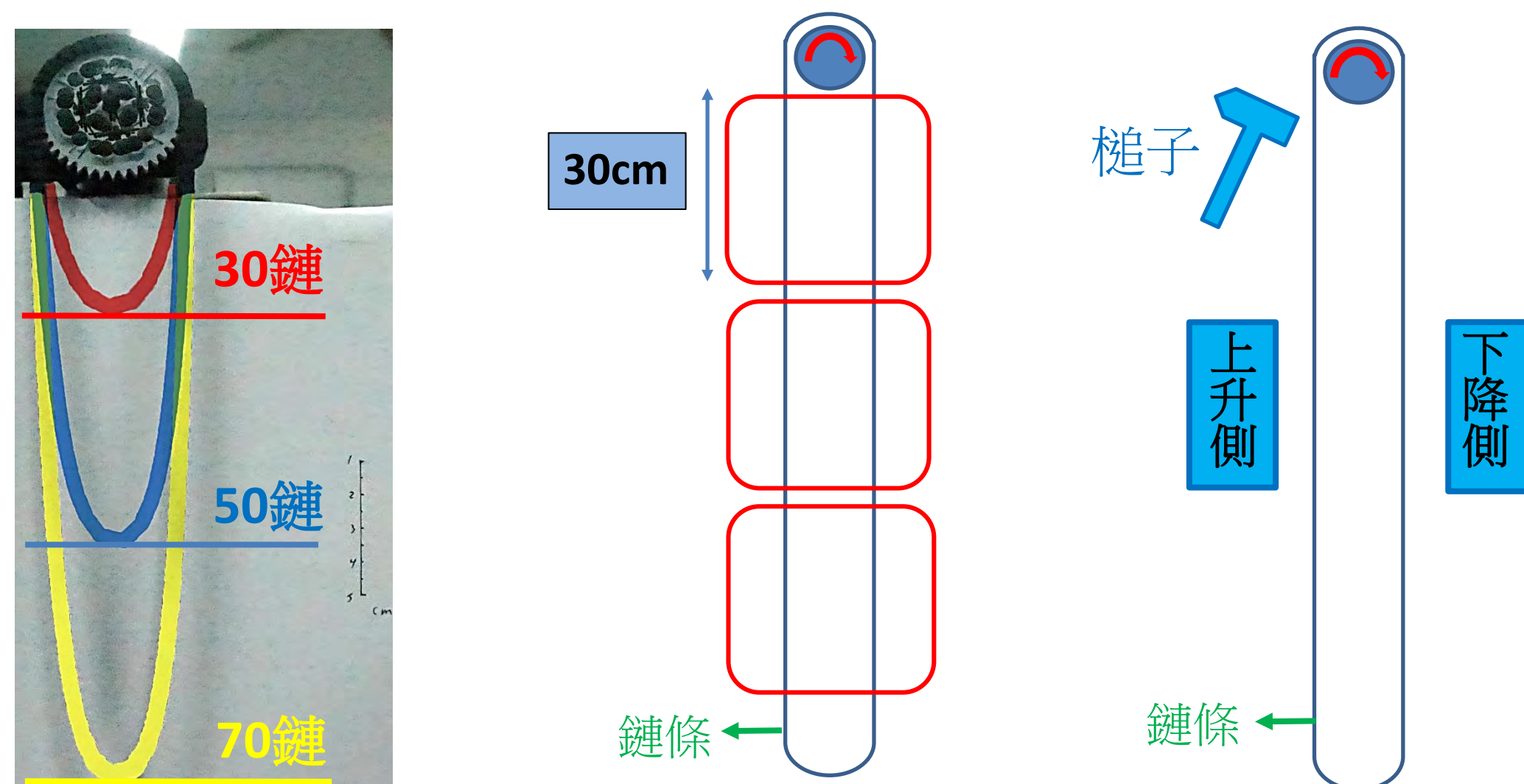
測量方法：改變單位鏈條個數（30至40個）。其餘變因如實驗二。

(六) 實驗六：長鏈條情況下，測量下端曲率半徑與波動通過之關係

操縱變因：兩齒輪之距離（10、15、20、25、30、35公分）。

控制變因：齒輪大小（直徑） R_3 。

應變變因、測量方法皆如實驗二。



伍、實驗結果

實驗二：短鏈條情況下，測量齒輪角速度 ω 與穩態鏈條形狀之關係
定性觀察發現齒輪角速度 ω 愈大，則鏈條形狀愈上揚。

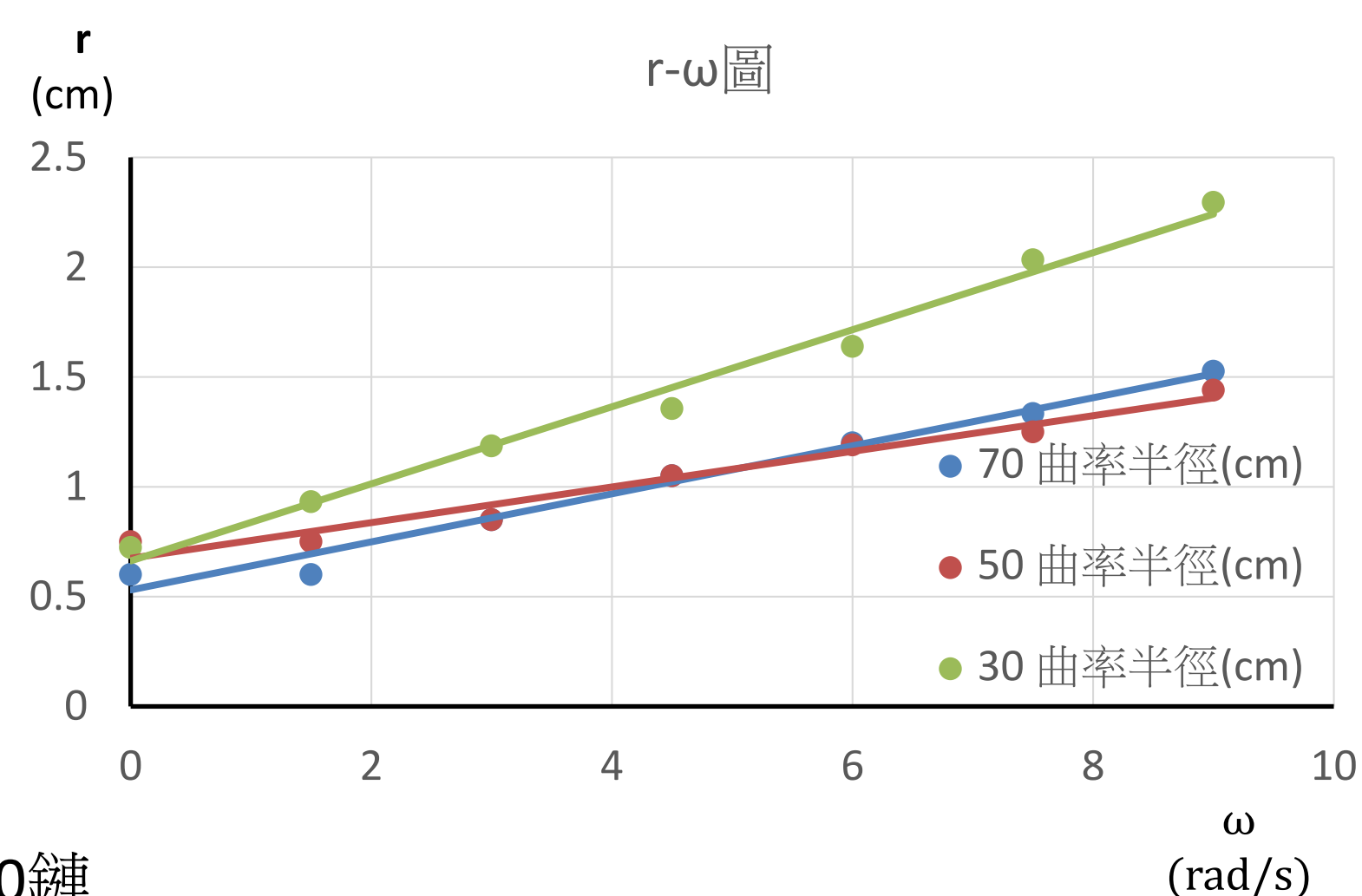


圖5-2-1：R₃齒輪30鏈

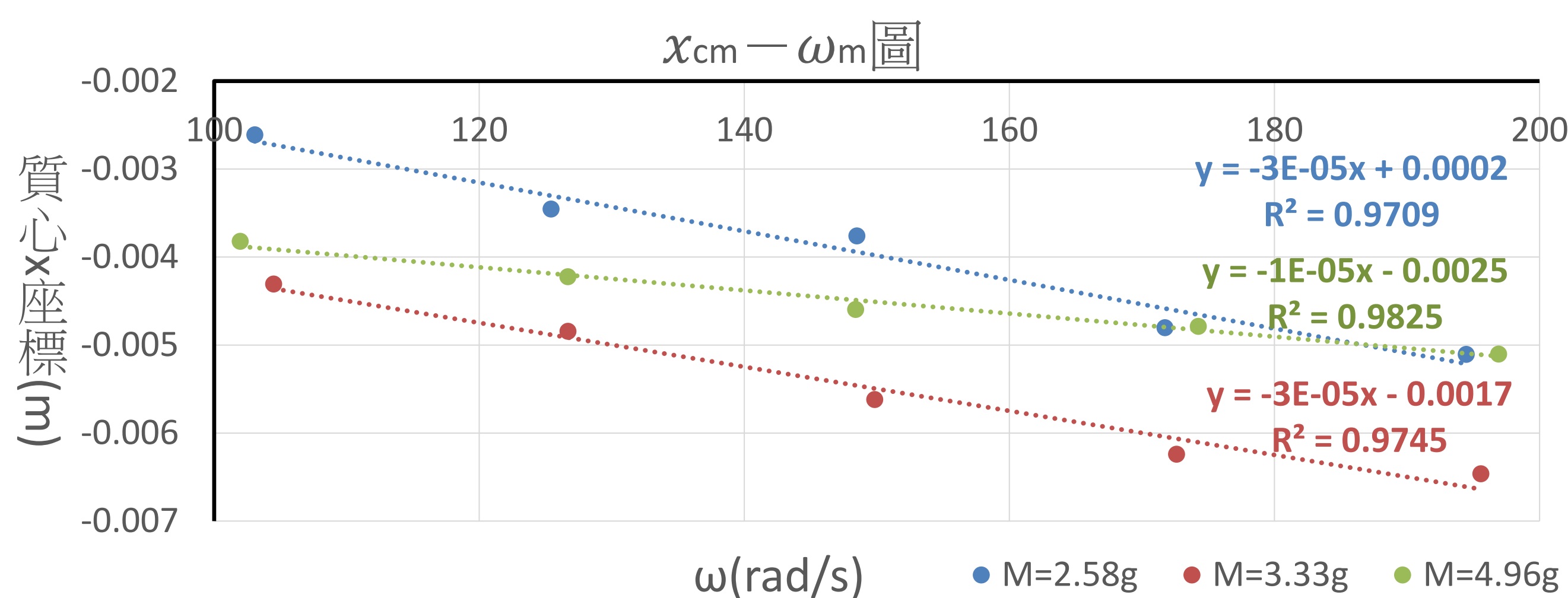
圖5-2-2：R₃齒輪50鏈 圖5-2-3：R₃齒輪70鏈

圖5-2-4：曲率半徑測量示意圖

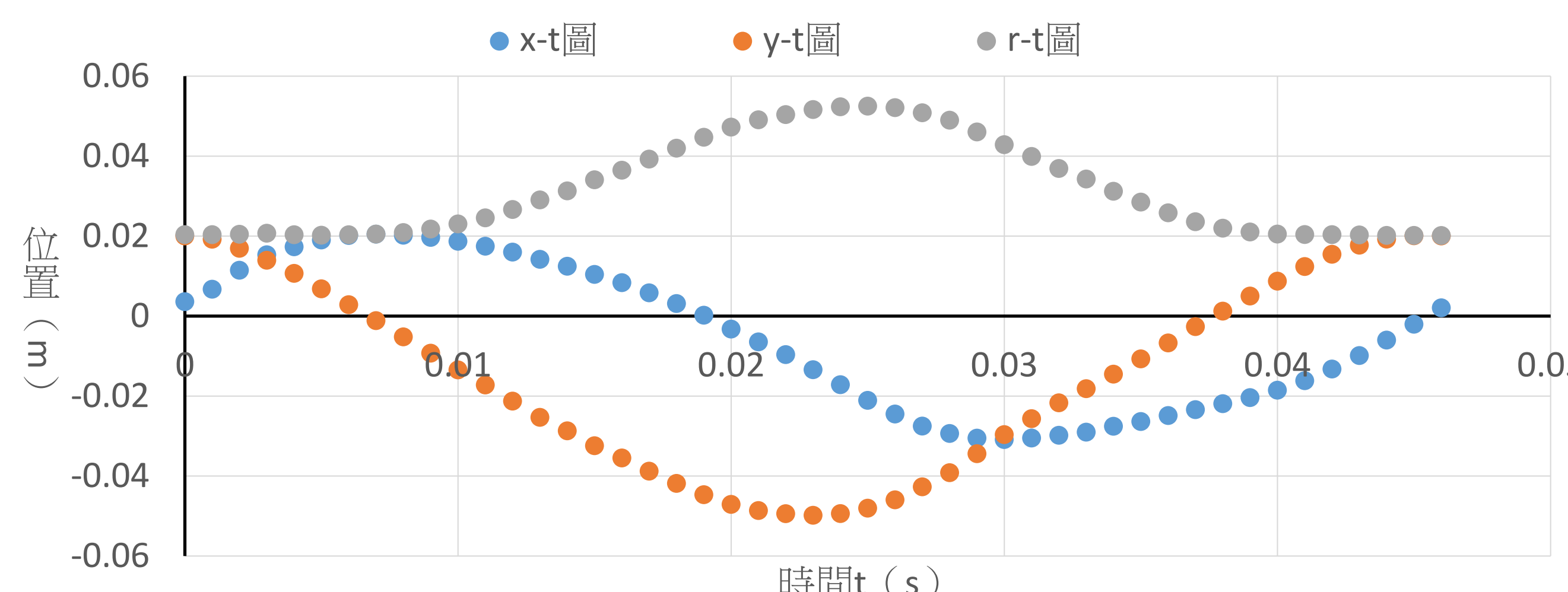
實驗2-1：齒輪角速度 ω 對應鏈條下端曲率半徑r
(一)齒輪直徑R₃ (r- ω 圖)



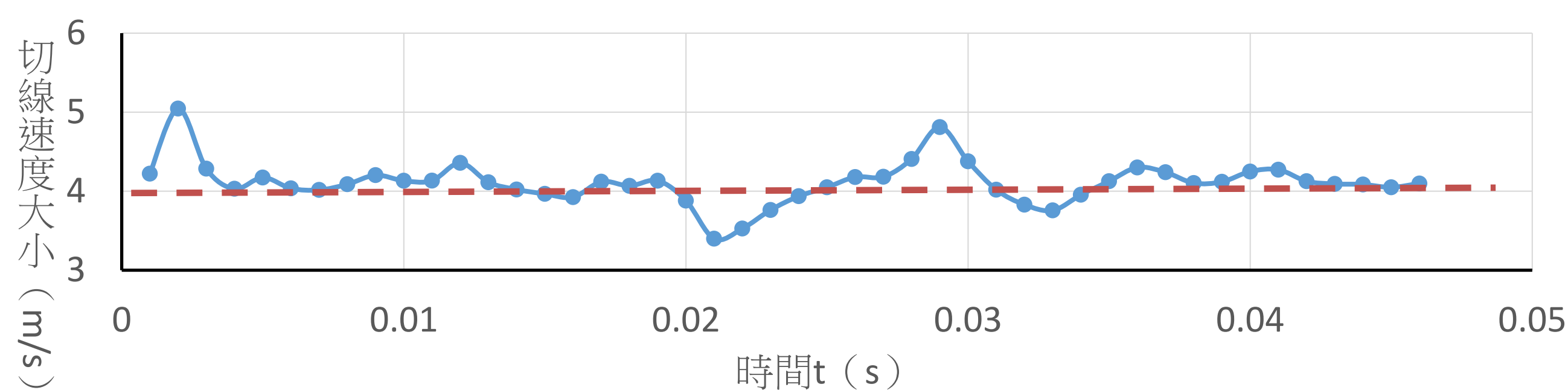
實驗2-2：齒輪角速度 ω 對應鏈條之偏移量 (x_{cm})
取5個轉動週期的x座標做平均，得質心x座標 x_{cm} 。



實驗三：測量鏈條在各點的運動狀態
(一)在一個週期範圍內 (時間0~0.046 s) 的x-t、y-t、r-t圖

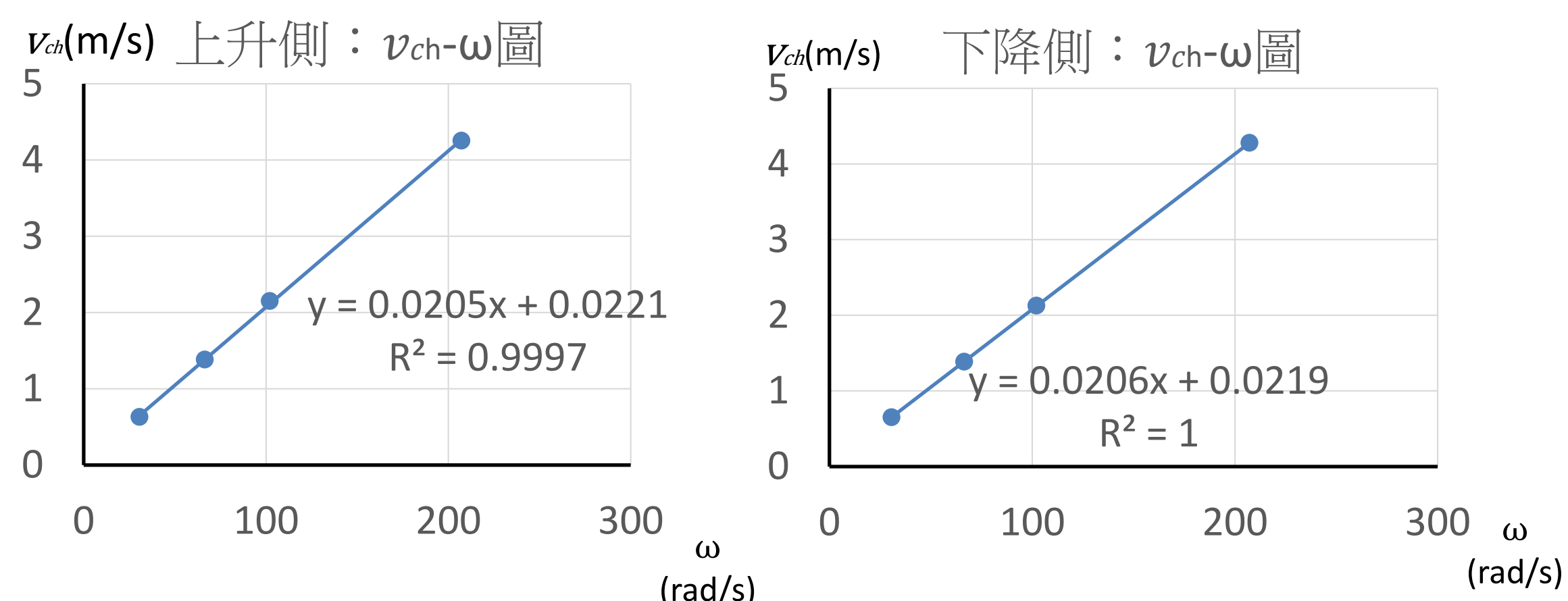


(二)在一個週期範圍內 (時間0~0.046 s) 的v-t圖

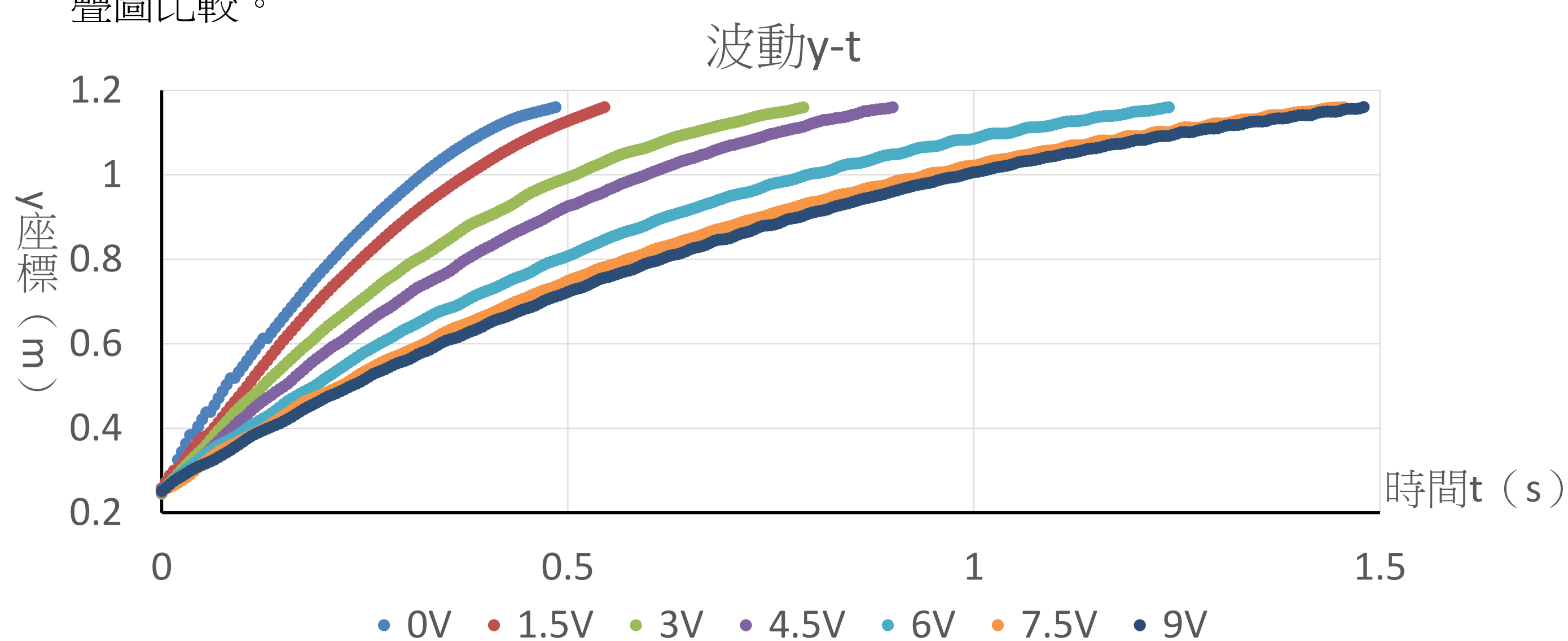


實驗四：長鏈條情況下，探討影響波動視速度的所有變因

實驗4-1：鏈條速度大小 v_{ch} 跟齒輪角速度 ω 與鏈條位置之關聯： v_{ch} 和 ω 呈線性關係。當供應電壓為6V與7.5V時，馬達會劇烈晃動，造成鏈條持續晃動，故無法單獨測量出鏈條速度，所以不進行此實驗。

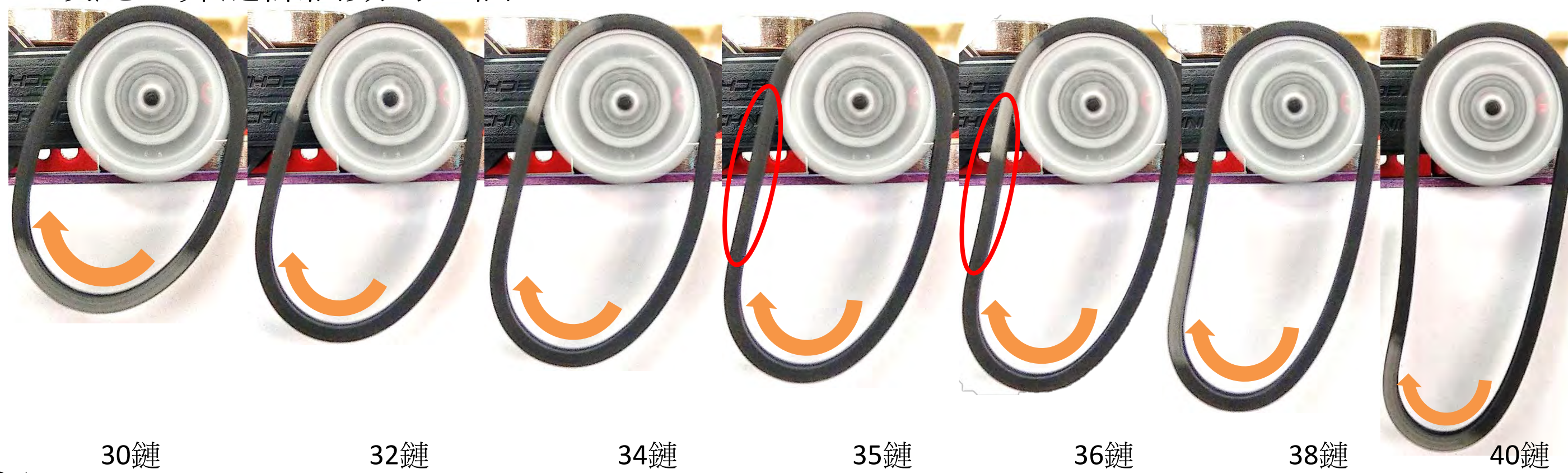


實驗4-2：波動視速度 v_s 跟齒輪角速度 ω 與鏈條位置之關聯
為了避免鏈條頭尾的不必要誤差，只取波動在位置0.25m~1.16m (定齒輪下端鏈條為0m) 的運動數據。將不同齒輪角速度 ω (供應電壓V大小) 疊圖比較。

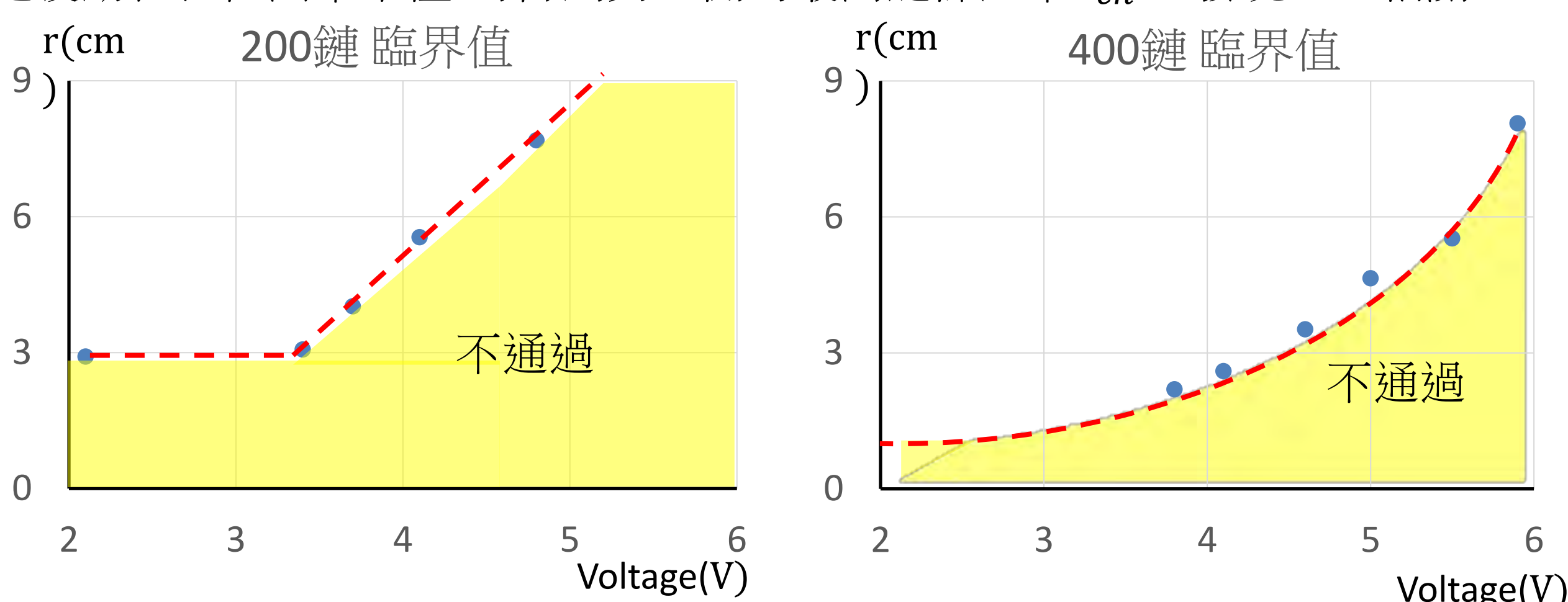


實驗五：短鏈條情況下，測量鏈條個數與穩態鏈條形狀之關係

當增加單位鏈條個數時，穩態形狀會由近似橢圓漸進變為內凹側出現。臨界值判定標準為當左側(上升側)的鏈條由直線型成為內凹型 (如下圖紅圈處)。故此臨界鏈條個數為35個。



實驗六：長鏈條情況下，測量下端曲率半徑與波動通過之關係
判定波動在各種曲率半徑r可傳到另一側的最高鏈條速率 v_{ch} 。發現呈正相關。



陸、討論

一、當系統 (鏈條+齒輪) 受到淨力矩 τ_{net} ，則系統產生角加速度 α 。

$$\vec{\tau}_{net} = I\vec{\alpha}(1)$$

齒輪重力力矩為零。

淨力矩 τ_{net} 為馬達提供負載之扭矩 τ_m 加上鏈條總重力力矩 τ_g 。

假設鏈條由n個單位鏈條組合而成，則

$$\vec{\tau}_{net} = \vec{\tau}_m + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{g}(2)$$

若馬達順時針旋轉，則外積結果為

$$\vec{\tau}_{net} = \vec{\tau}_m + (g \sum_{i=1}^n x_i m_i) \hat{z}(3)$$

M為鏈條總質量($M = \sum_{i=1}^n m_i$)，且我們也知道馬達之扭矩 τ 為^[2]

$$\vec{\tau} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\tau}_m + B\vec{\omega}_m(4)$$

因為 $\tau \propto$ 電壓V，且由我們先前實驗得知 $\omega_m \propto V$ ，故

$$\vec{\tau}_m = C\vec{\omega}_m - I\vec{\alpha}_m(5)$$

由式(1)、式(3)、式(5)，可得

$$M\vec{g}\vec{x}_{cm} + C\vec{\omega}_m = I(\vec{\alpha} + \vec{\alpha}_m)(6)$$

若系統達轉動平衡 ($\tau_{net} = \alpha = \alpha_m = 0$)，則

$$M\vec{g}\vec{x}_{cm} = -C\vec{\omega}_m(7)$$

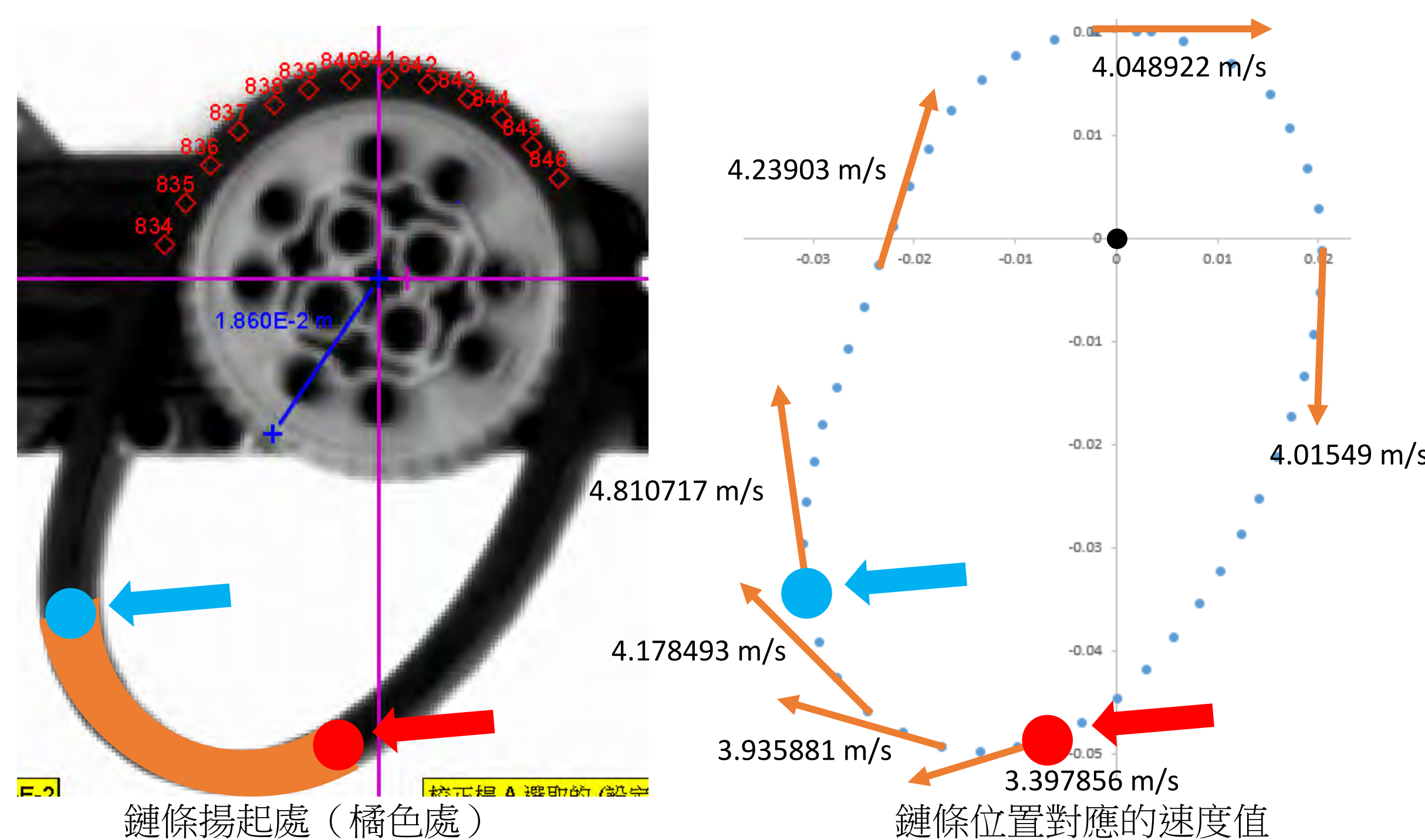
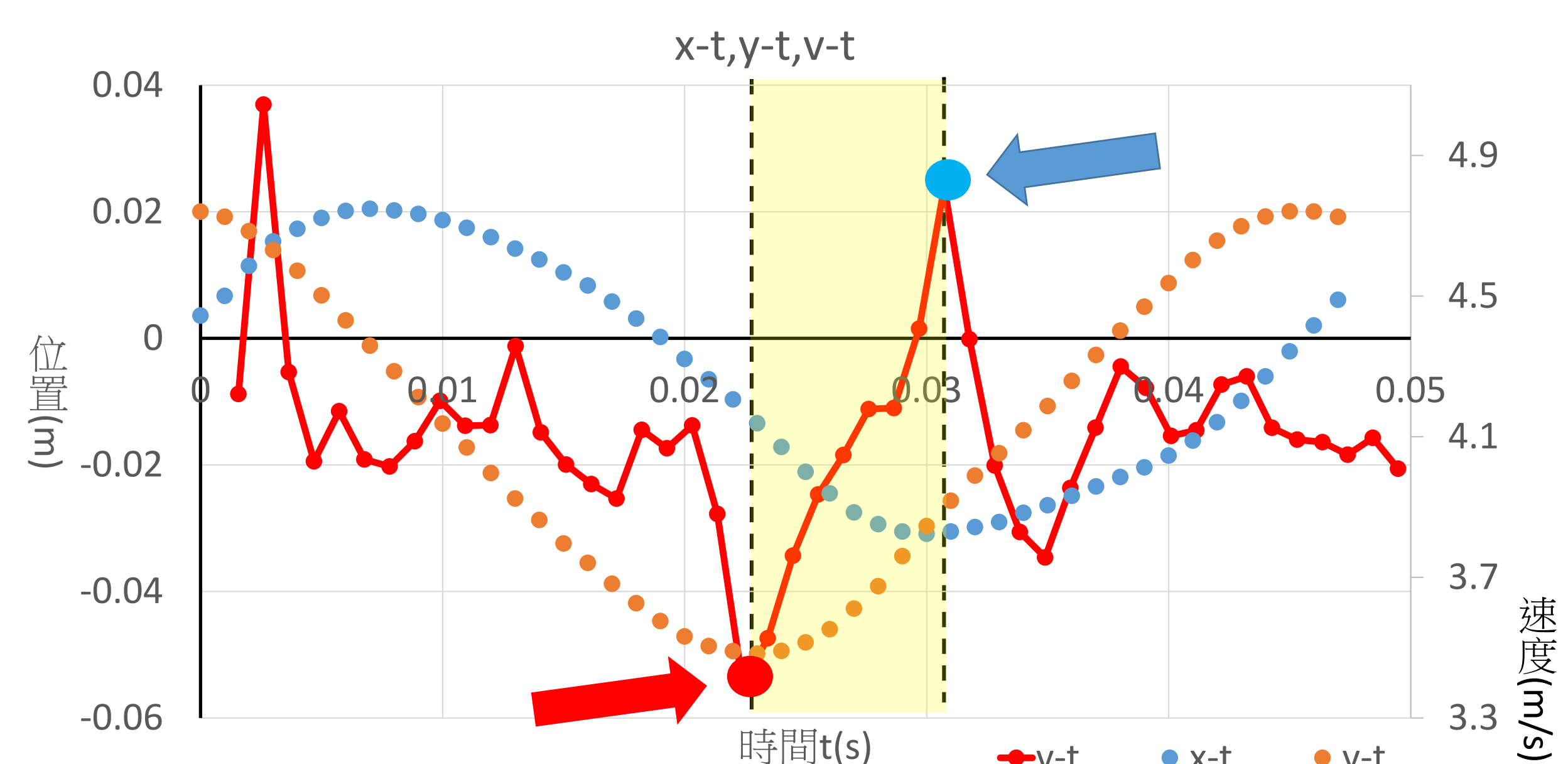
* 上式 \vec{g} 代入負值， $\vec{\omega}_m$ 由右手定則考慮正負，以算出 \vec{x}_{cm} 。

實驗2-2所得結果 ($x_{cm} \propto \omega_m$)，正可對應上式。

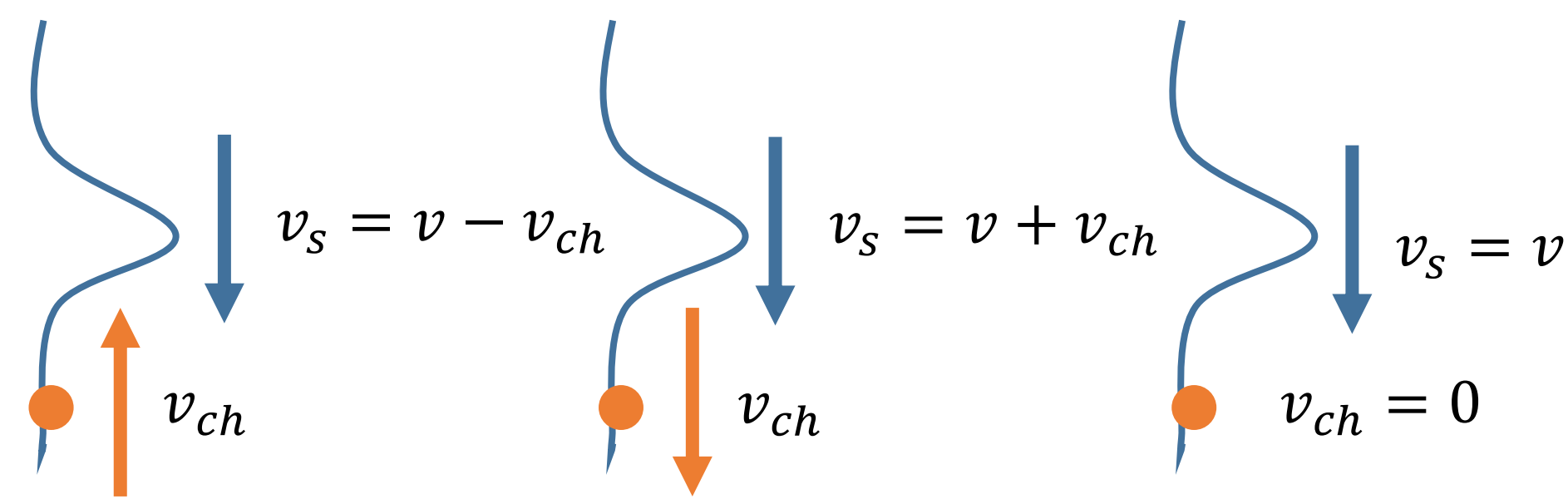
從實驗2-2斜率可知 $\frac{C}{Mg} = -0.000016008$ ，則 $C \approx 4.24 \times 10^{-7} (\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})$ ，

可由上圖斜率反推出C值為 6.99×10^{-7} ， 8.16×10^{-7} ， $6.39 \times 10^{-7} (\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})$ ，其中C與馬達性質有關。因為對於不同負載，馬達功率不同，而造成C值計算不同。且因為 $C \geq 0$ 且 $g < 0$ ，所以 $x_{cm} \leq 0$ ，表示當齒輪與鏈條順時針旋轉時，整體鏈條往-x方向偏移。此結果可以對應到鏈條的上揚方向均為鏈條上拉側。

二、將第一個週期內的v-t時間分段，且分別對應x-t、y-t，可發現速度急遽上升 (看似線性) 的區間，由對應的x-t、y-t可得知此區間在鏈條揚起處 (如下圖)。



二、在實驗四中，發現敲擊鏈條上升側所產生的波長較短，下降側波長較長（幾乎無法辨認有波動）。原因為觀測到的視波速 v_s 為相對於鏈條的波速 v 加上鏈速 v_{ch} ($\vec{v}_s = \vec{v} + \vec{v}_{ch}$)。而上升側與下降側 v_{ch} 方向相反，故造成此現象。

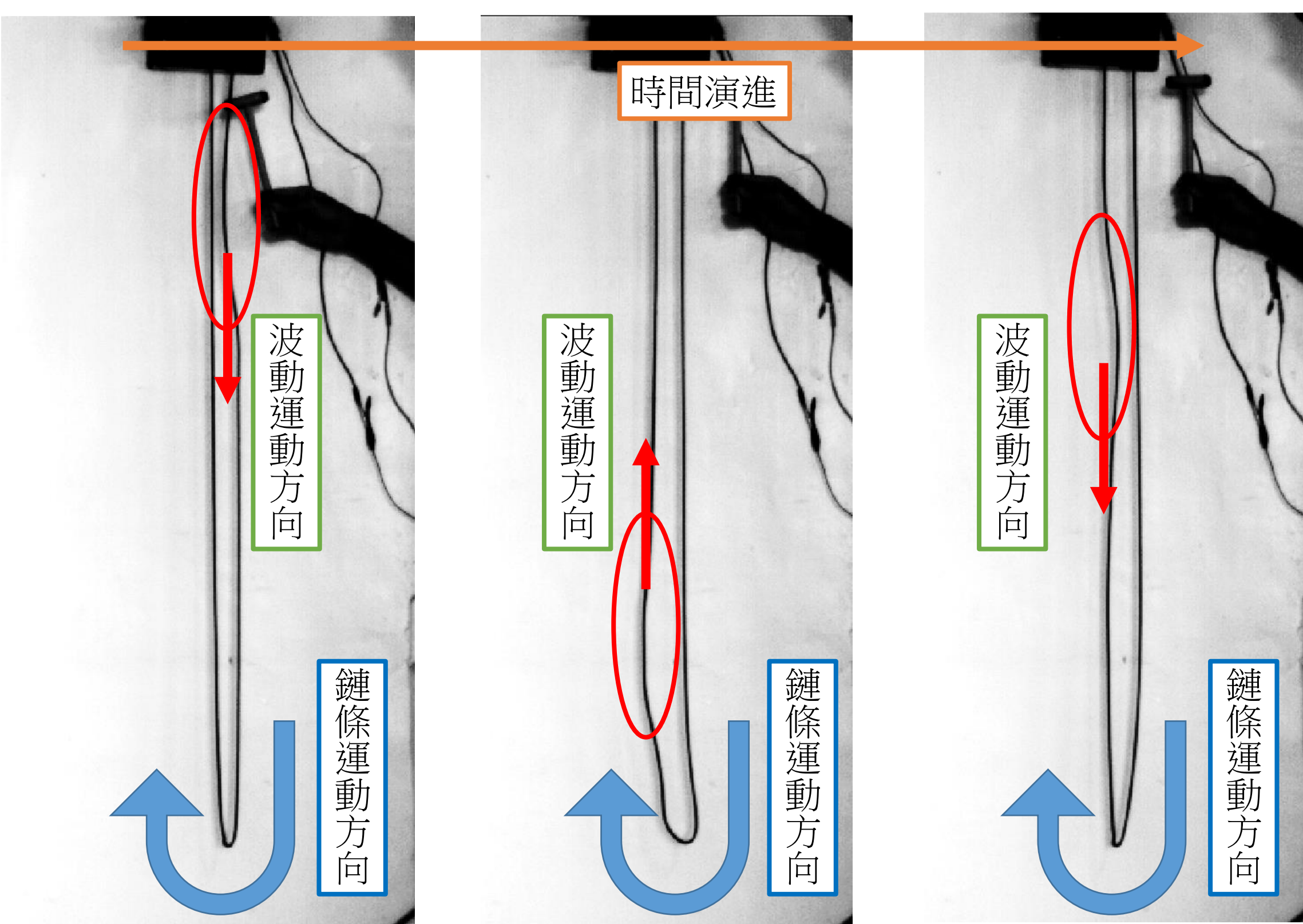


三、在實驗四中，發現當敲擊鏈條下降側時

(一) 波動會由下降側傳至上升側，在經過鏈條下端轉折處時，波的振幅方向會相反。推測是因為波無法通過鏈條下端轉折處，而下降側鏈條撞擊上升側鏈條，產生新的波動。

(二) 波動遇到鏈條與齒輪交界處後反射，波的相位也會改變 π 。是因為交界處為固定端，因此反射後波的相位會改變 π 。

但敲擊上升側時，均無上述兩現象，波動只會傳遞至下端便消失。推測當波動傳遞至鏈條下端，上升側鏈條撞擊下降側鏈條，卻因鏈條下端朝上升側揚起（實驗2-2結果）而抵銷，故無新波動產生。



敲擊下降側產生波動 經過鏈條最下端 自鏈條與齒輪接觸點反射 (振幅相反) (相位改變 π)

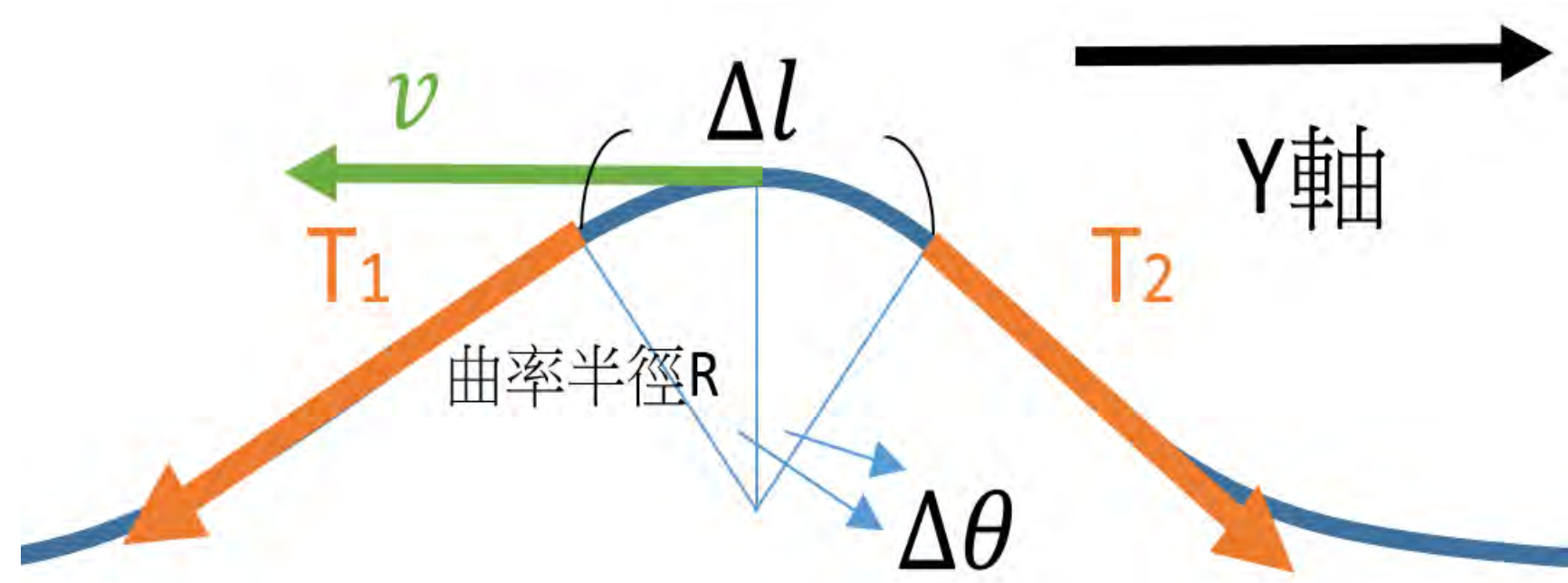
四、由實驗四得知，在上升側與下降側的鏈條均為等速，代表單一鏈條合力為0，故可知鏈條向上張力 T 等於向下張力 T 加上鏈條重量：

$$T_1 = T_2 + mg(8)$$

其中 T_1 與 T_2 為鏈條兩側張力，且 T_2 和 mg 同向與 T_1 反向。

故鏈條張力 T 與 y 方向距離關係為： $T(y) = -\mu gy + T_0(9)$

當有波動產生，可視為波型固定而鏈條移動，而波高遠小於鏈條總長度，又因先前實驗得知繩子瞬間速率相同，故可適用上式。



$$\text{向心力 } F = T(y') \sin \Delta\theta + T(y' + \Delta l) \sin \Delta\theta \approx (T(y') + T(y' + \Delta l)) \Delta\theta = m \frac{v^2}{R}$$

$$(T(y') + T(y' + \Delta l)) \frac{\Delta l}{2R} = \mu \Delta l \frac{v^2}{R}$$

$$(T(y') + T(y' + \Delta l)) = 2\mu v^2 = -2\mu gy' - \mu g \Delta l + 2T_0$$

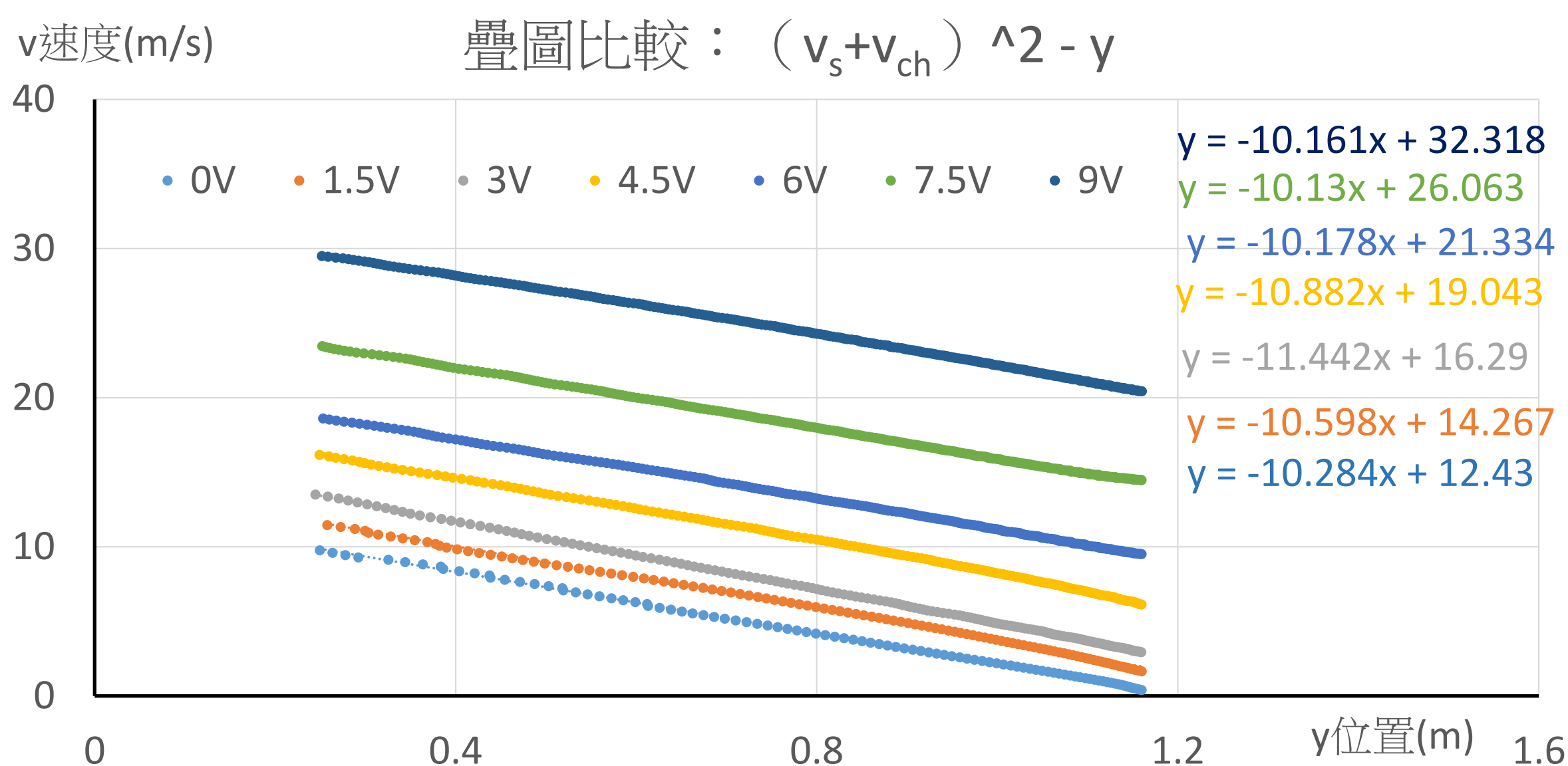
$$v^2 = -gy' - \frac{g\Delta l}{2} + \frac{T_0}{\mu}$$

當 $y = 0$ ，設 $v_0^2 = \frac{T_0}{\mu} - \frac{g\Delta l}{2}$ ，故 $v^2 = v_0^2 - gy$ 。

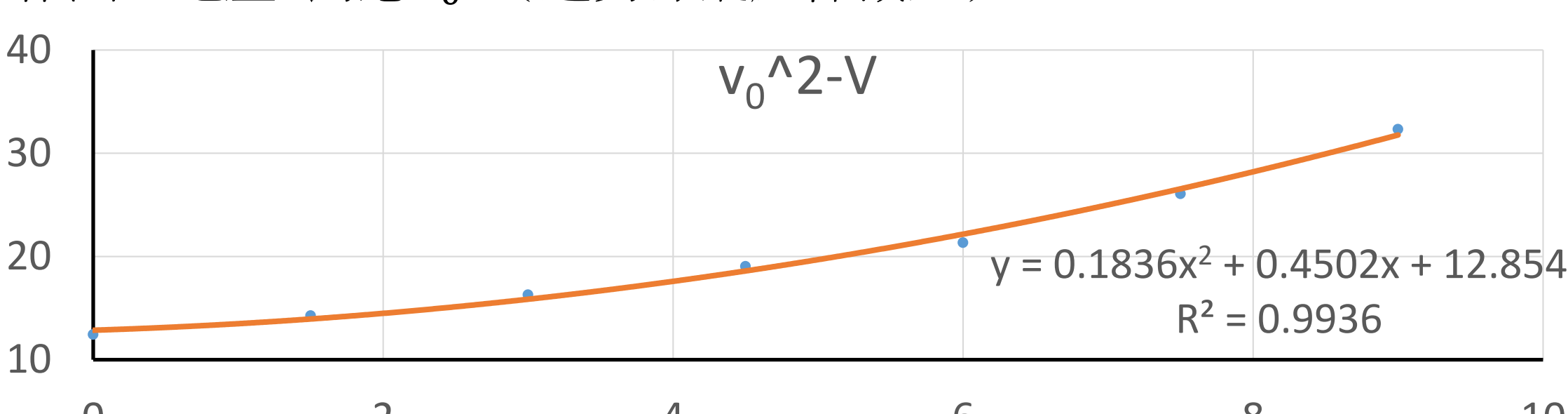
由式 ($\vec{v}_s = \vec{v} + \vec{v}_{ch}$) 得知鏈條上升側所觀察到的視速度 $v_s = v - v_{ch}$

$$(v_s + v_{ch})^2 = -gy + v_0^2(10)$$

五、將實驗四的 $y-t$ 圖加上趨勢線（2次與3次），將趨勢線微分得到 v_s-t 圖。再加上由實驗四所得的 v_{ch} 來作圖： y 對應 $(v_s + v_{ch})^2$ 。

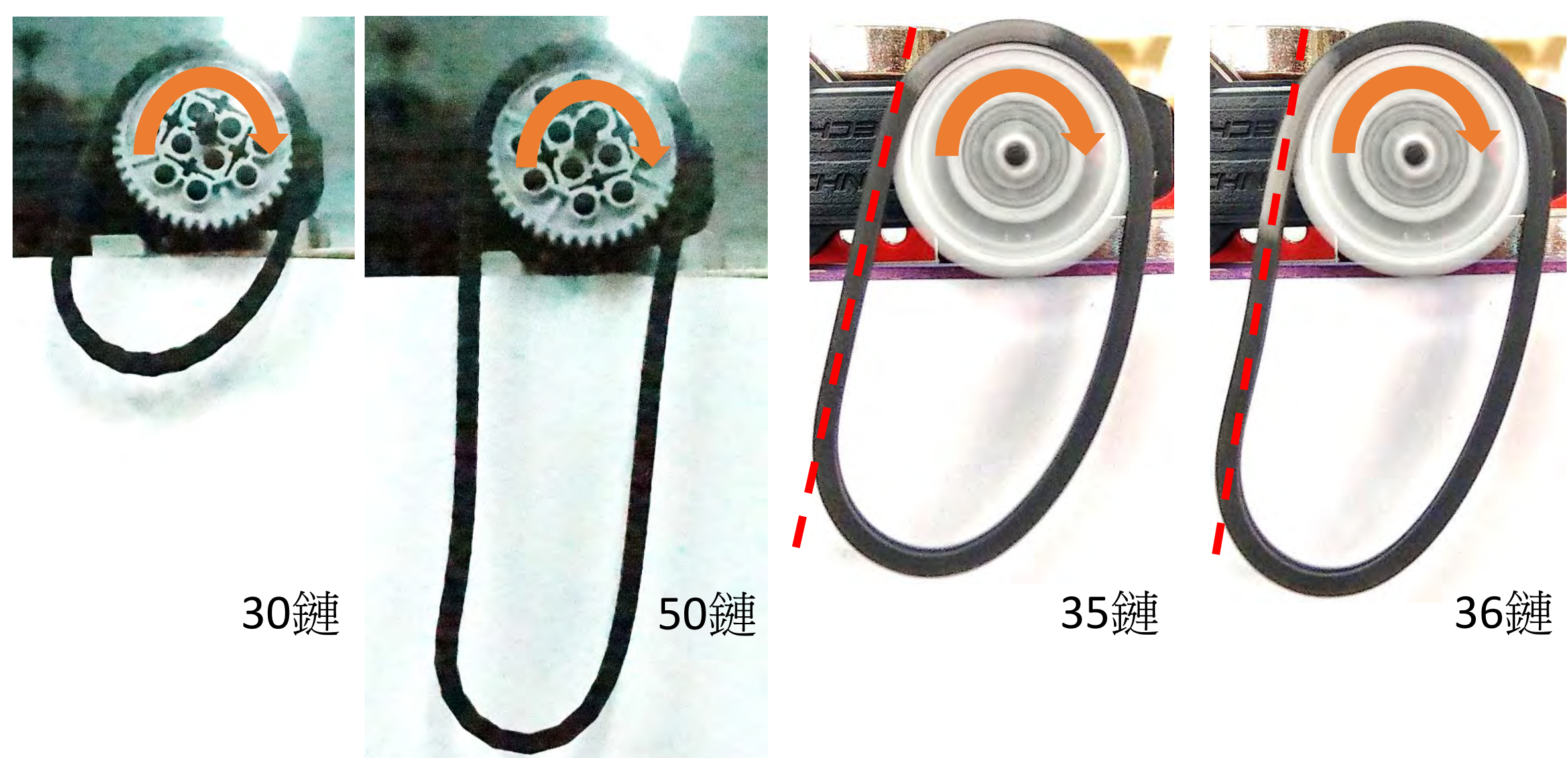


最後作圖結果，斜率均接近 $-g$ (-9.8)，但趨勢線縱座標截距 (v_0^2) 有差異，推測是因為當改變電壓 V 時張力 T 也會改變，但張力 T 差值不變。作圖：電壓 V 對應 v_0^2 (趨勢線縱座標截距)

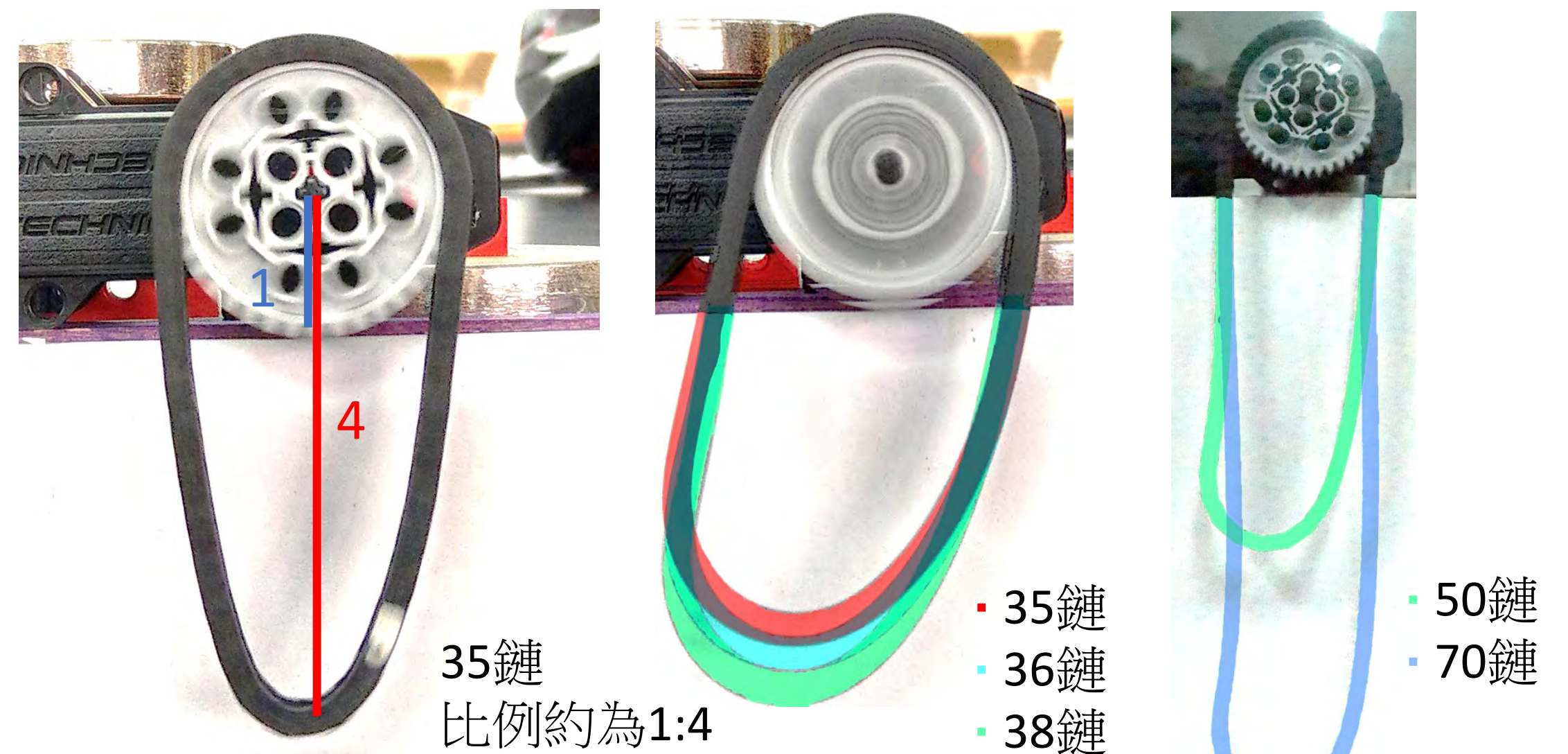


可看出電壓 V 與 v_0^2 具正相關，但並非單純線性。又因 $v_0^2 = \frac{T_0}{\mu} - \frac{g\Delta l}{2}$ ，而 Δl 、 g 、 μ 均非電壓 V 之函數，故可推得電壓 V 與 T_0 有次方關係。

六、在實驗二，我們發現穩態鏈條形狀有兩種類別，30鏈是整個鏈條上揚（如下圖左一），而50鏈以上則是部分下端鏈條上揚（如下圖左二）。因此實驗五針對30到50鏈逐一進行實驗，嘗試找出兩種鏈條型態的臨界鏈數。而經由實驗發現，35鏈的上拉側與輔助直線重合（如下圖右二），而36鏈的上拉側則內凹於輔助直線（如下圖右一）。



七、根據實驗五發現，隨著鏈條個數增加，穩態鏈條形狀會改變，而兩者的臨界鏈條為35鏈。由下圖可看到此鏈長與齒輪半徑的比例關係。推測鏈條揚起與下端轉折區塊張力分布相關，而當鏈條個數增加，下端轉折區塊也逐漸下移，故造成穩態鏈條形狀之差異。

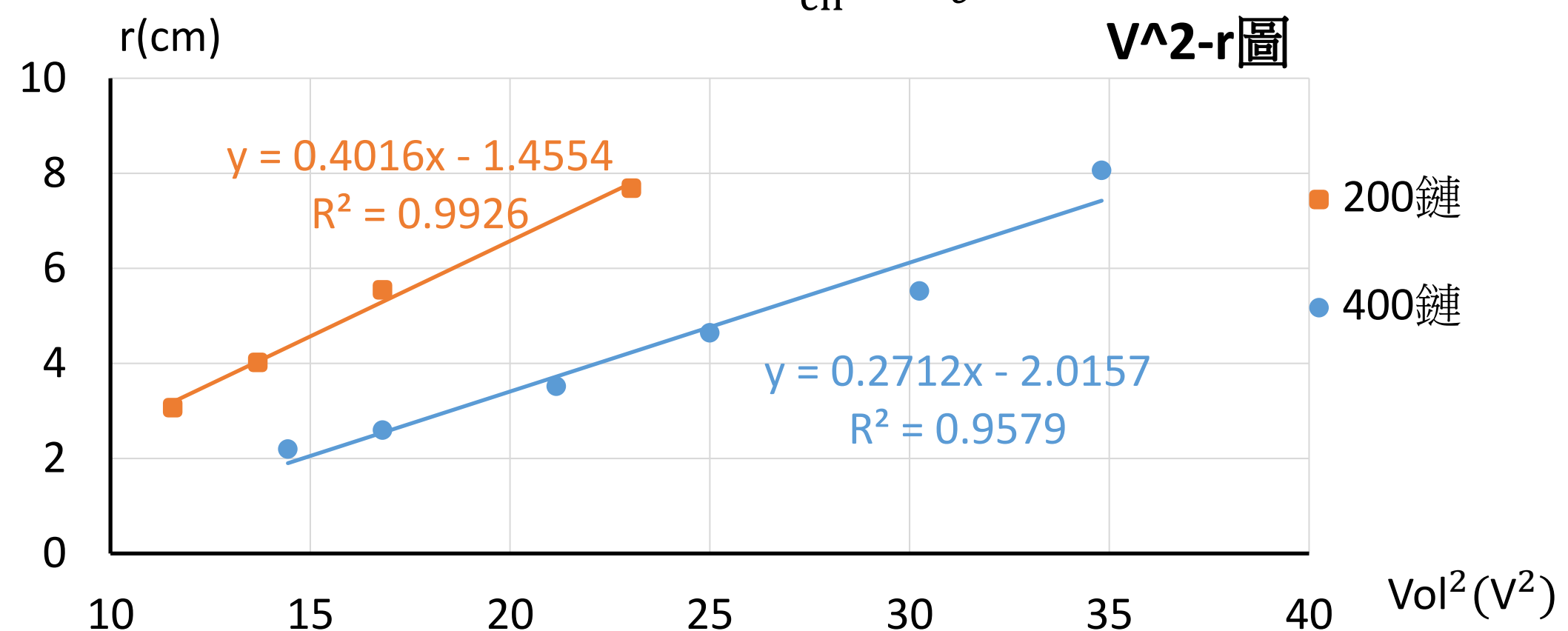


八、我們將實驗六長鏈曲率半徑對電壓平方作圖。我們從實驗一知道

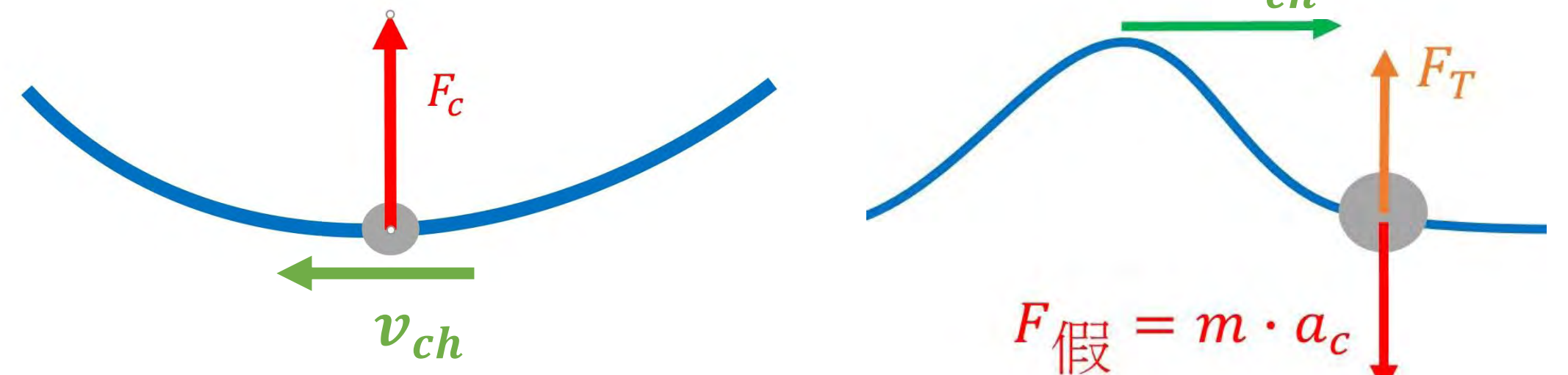
$$V^2 \propto v_{ch}^2$$

所以用電壓來作圖。其斜率 m 與向心加速度 a_c 的關係為

$$m \propto \frac{r}{V^2} \propto \frac{r}{v_{ch}^2} = \frac{1}{a_c}$$



當我們把坐標系設為鏈條下端的單位鏈條時，會受到由向心加速度產生的假想力向下，而波動在通過時會有張力將單位鏈條拉起。所以當波動鏈條張力恰等於向心力時可以把單位鏈條抬升傳遞至鏈條另一側。



由上圖斜率我們可以知道，200鏈的向心力較小，400鏈的較大，故同樣力道產生的波動200鏈較容易通過鏈條轉折處並往另一側傳遞。所以我們可以看到長鏈條比短鏈條穩定。

柒、結論

一、在短鏈實驗中，發現

- (一) 鏈條下端曲率半徑 r 與齒輪角速度 ω 呈線性正相關。
- (二) 鏈條的質心座標 x_{cm} 與齒輪角速度 ω 呈正比。且關係如下：

$$Mg\vec{x}_{cm} = -C\vec{\omega}_m$$

由實驗發現 C 值的數量級為 $10^{-7}(\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s})$ ，與馬達特性相關。

(三) 發現單位鏈條運動行經下端揚起處時，速度大小會線性增加。

二、在長鏈實驗中，發現

- (一) 鏈條張力 T 與鏈條位置 y 關係為：

$$T(y) = -\mu gy + T_0$$

且 T_0 則與齒輪角速度 ω 成次方正相關。

- (二) 鏈條的視波速 \vec{v}_s 、鏈速 \vec{v}_{ch} 、波動行進位置 y 的關係為：

$$\vec{v}^2 = (\vec{v}_s - \vec{v}_{ch})^2 = -gy + v_0^2$$

- (三) 鏈條揚起與下端轉折區塊張力分布相關。波動張力將單位

鏈條拉起，當波動鏈條張力恰等於向心力時可以把單位鏈

條抬升傳遞至鏈條另一側。

一、以能量觀點進行分析

二、實際測量各處鏈條張力。

三、建構理論模型預測。

玖、參考文獻及其他

一、David Halliday、Robert Resnick、Jearl Walker 2016年08月

Halliday 物理（力學與熱學篇）第十版 全華出版

二、[1]出自：影片 Waves On A Chain

<https://youtu.be/Ff8oqoYxD7U>

三、[2]出自：鄒應嶼 1996年11月2日•直流電動機的工作原理與特性•

<http://pemclub.cn.nctu.edu.tw/peclub/W3cnotes/cn07/index.htm>

四、出自：無作者 LEGO® 9V Technic Motors compared characteristics

<http://www.philohome.com/motors/motorcomp.htm>