

中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第二名

051808

蝸牛球

學校名稱：新北市立板橋高級中學

作者： 高二 董宥言 高二 王博玄 高二 李冠陞	指導老師： 茅崇德 郭柔含
---	-----------------------------

關鍵詞：蝸牛球、黏滯液體、滾動

摘要

蝸牛球是一種科學教具，以壓克力圓柱容器為主體，在容器中加入黏滯液體及重物。在滾動時利用黏滯液體的摩擦力將容器中的重物帶到相對容器重心的後方，使重物的重力對容器產生相對於滾動方向相反的力矩，造成容器減速的現象，實驗裝置如圖 1、圖 2 所示。本實驗想探討黏滯液體的體積、軌道傾斜角度與金屬圓柱材質、體積及重量等變因對滾動變化的影響。

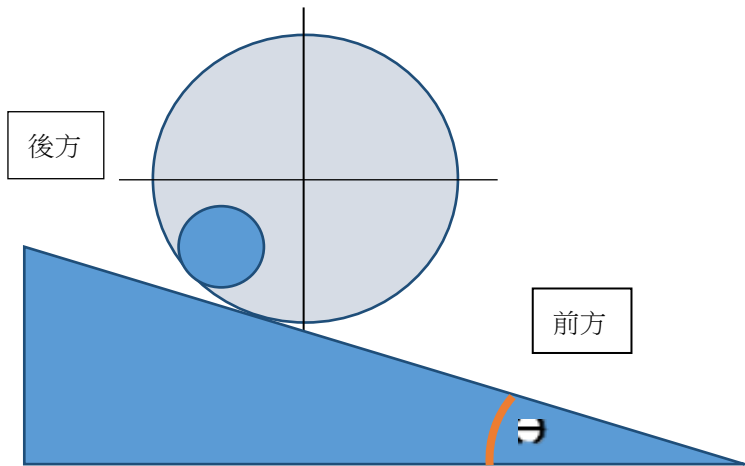


圖 1



圖 1-1

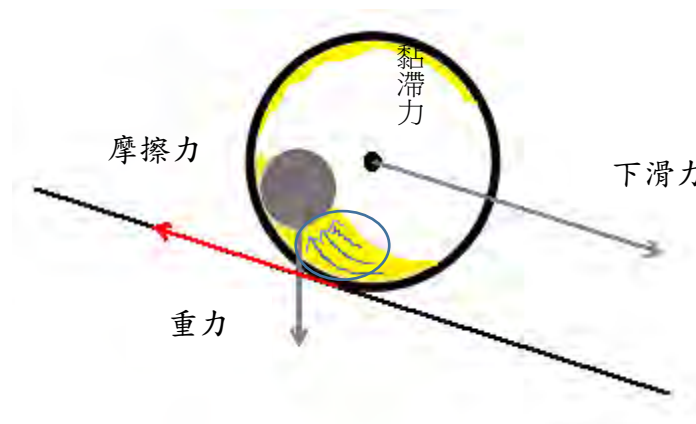
壹、研究動機

我們在網路上看到了一段有趣的科學玩具影片，影片中他將兩顆大小相等的黑色球體容器，其中一個中空，而另一個盛裝蜂蜜及鐵球，同時從斜坡上滾落，發現其中盛裝蜂蜜及鐵球的黑色球體在滾落時並不是等加速度，而是滾落一小段距離後會停下幾秒，之後就重複著上述的現象緩慢的滾落，我們對這個現象感到好奇，想深入探究這個物理現象，因此我們就選了這個主題來研究。

我們在找參考資料時，發現全國科展 56 屆國中物理科第一名的作品『電池跳、挑電池～探討 3 號鹼性電池電量與電池彈跳及滾動行為之關聯性』內容與我們有部分相關，不過他們研究的是不同放電程度電池電解液對滾落時間的影響，而我們研究的是在不同變因下容器滾落情形的變化。

貳、研究目的

- 研究一 探討黏滯液體的體積對容器滾動情形的影響
- 研究二 找出斜面角度與容器滾動情形的影響
- 研究三 找出重物的重量對容器滾動情形的影響
- 研究四 找出黏滯係數對容器滾動情形的影響
- 研究五 將柱體重物換成球體重物的差別



參、研究設備及器材



圖 2-1 壓克力容器

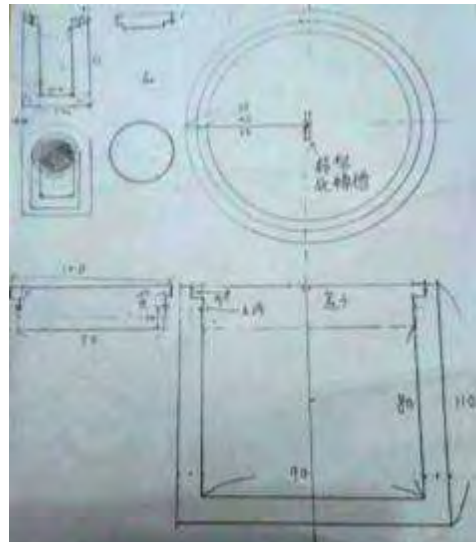


圖 2-2 設計圖

表一

重量(含蓋)	內徑	外徑	深度	容積(含蓋)	高
630gw	90mm	110mm	80mm	162π mL(約 509mL)	110mm



A 柱

B 柱

C 柱

D 柱

E 柱

圖 2-3 重物(金屬柱)

表二

	A 柱	B 柱	C 柱	D 柱	E 柱
體積	98.772(mL)	100.531(mL)	100.531(mL)	98.772(mL)	25.133 (mL)
重量	802gw	810gw	274gw	280gw	177gw
體積佔容積百分比	19.4%	19.8%	19.8%	19.4%	4.9%



圖 2-3 自製軌道(斜坡)



	甲球
體積	65.45gw
重量	563gw
體積佔容積百分比	12.86%

圖 2-4 甲球



圖 2-5 自製啟動器(俯視)



圖 2-6 自製啟動器(側面圖)



表三

蜂蜜密度
1.4(g/mL)

圖 2-7 黏滯液體(蜂蜜)



圖 2-8 防水膠帶(防黏滯液體漏出)



圖 2-9 利用 Angle Meter 測量角度畫面



圖 2-10 黏滯係數測定儀器

肆、研究過程和方式

先使用手機程式 Angle Meter 調整軌道角度，再於斜面軌道起點處，利用自製簡易啟動器擋住容器，再使用啟動器讓裝有黏滯液體與重物之容器自由滾落，利用相機錄影後，以 tracker 程式追蹤容器的軌跡、藉由影像分析觀察其運動行為，並將其繪製成 $x-t$ 圖 (x 方向如圖 14) 及 $v-t$ 圖，再以 $v-t$ 圖找出減速次數，其中 $v-t$ 圖的峰值是下滑過程中減速的時刻，如圖 15-1 所示。

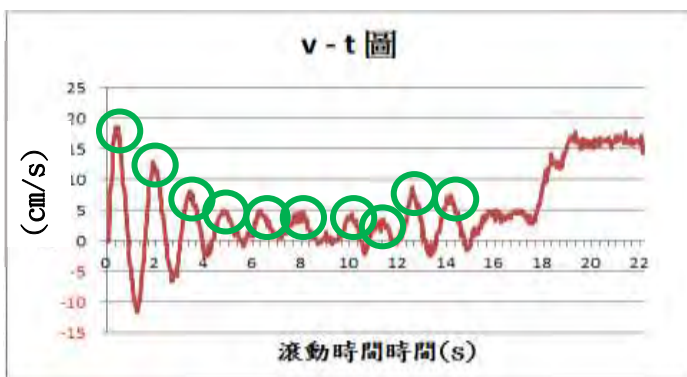


圖 3-1 此為減速次數 10 次的情況

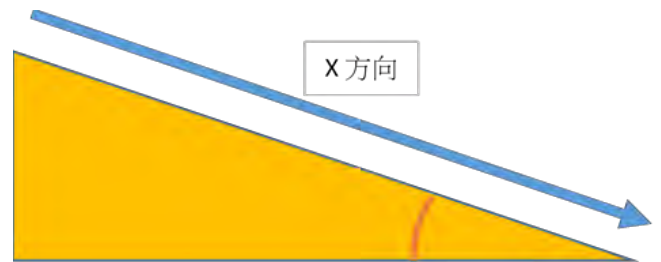


圖 3-2

名詞解釋

蝸牛球：本實驗的主要觀察對象，由一個材質輕且中空的球體，把黏滯液體和重球放入其中，而組成的玩具，因為要便於觀察所以我們把它從球體改為柱體。

黏滯力：簡單來講就是液體中的摩擦力，阻止液體運動、形變。

黏滯係數：將黏滯力量化後所得到的數據。

$$\text{黏滯係數計算公式 } \eta = \frac{mgR^2t}{4\pi HS} \left[\frac{1}{R_A^2} - \frac{1}{R_B^2} \right]$$

形狀係數：物體形狀對物體在流體中阻力的因素。

阻尼比：系統在受到擾動後振盪及衰減的情形

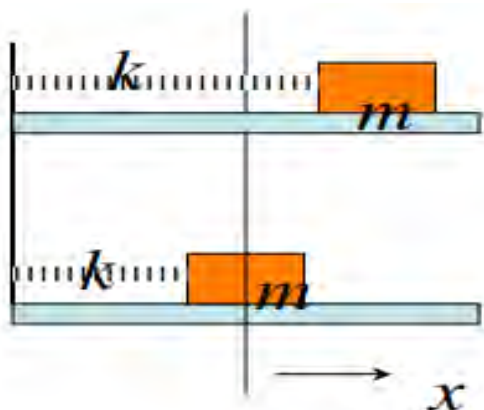
包絡線：圖形各個頂點的擬合線。

指數衰變：某個量的下降速度和它的值成比例，此指相鄰兩個同向最大速度的衰變。

阻尼震盪：任何振動系統在振動中，由於外界作用（如流體阻力、摩擦力等）和/或系統本身固有的原因引起的振動幅度逐漸下降。

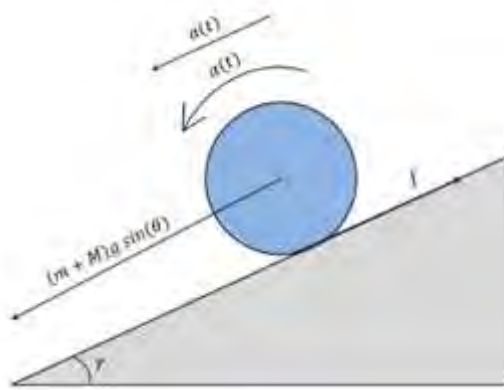
實驗原理

利用黏稠液體將容器中的金屬柱帶到一定高度，對容器造成力矩，使容器減緩速度甚至停頓或回滾



彈簧阻尼震盪公式：
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

圓柱在斜面的滾動方程式推導



當液體不旋轉， $\omega = 0$

$$\frac{v^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}$$

如果考慮液體旋轉 $v =$

$$\begin{aligned} \frac{-v^2}{r} &= R\dot{\omega} \cos(\theta - \gamma) - g \sin(\theta) - \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -R\dot{\omega} \sin(\theta - \gamma) - g \cos(\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) \\ (m + M)a &= (m + M)g \sin(\gamma) - f \\ MR^2 \frac{\partial \omega}{\partial t} &= fR - T \\ a &= R \frac{\partial \omega}{\partial t} \\ \left(\frac{m + 2M}{4\pi\mu h} \right) \frac{\partial \omega}{\partial t} &= -g(t) + \left(\frac{m + 2M}{4\pi\mu h} \right) g \end{aligned}$$

v : 液體的速度 / p : 壓力 / r : 與球心的距離 / ω : 角速度 / $\dot{\omega}$: 角加速度

θ : 液體轉動的角度 / m : 重物質量 / M : 容器質量 / f : 摩擦力 / T : 力矩

$$p(r, \theta, \tau) = p_s(r, \theta, \tau) + p_d(r, \tau)$$

$$p_s(r, \theta, \tau) = (R\dot{\omega} \cos(\theta - \gamma) - g \sin(\theta))r$$

$$(m + 2M) \frac{d\Omega_{\omega}^{\omega}}{dt} = -T + (m + M) \bar{g} R_{\omega}$$

以包絡線求得阻尼震盪係數之推導：

underdamped

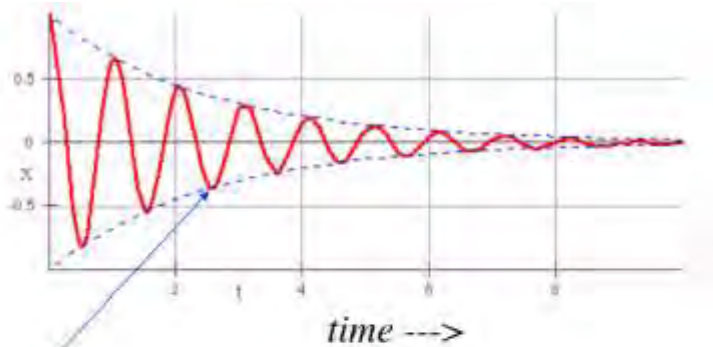
$$\beta < \omega_0$$

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}}$$

$$p = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm i\omega_1$$

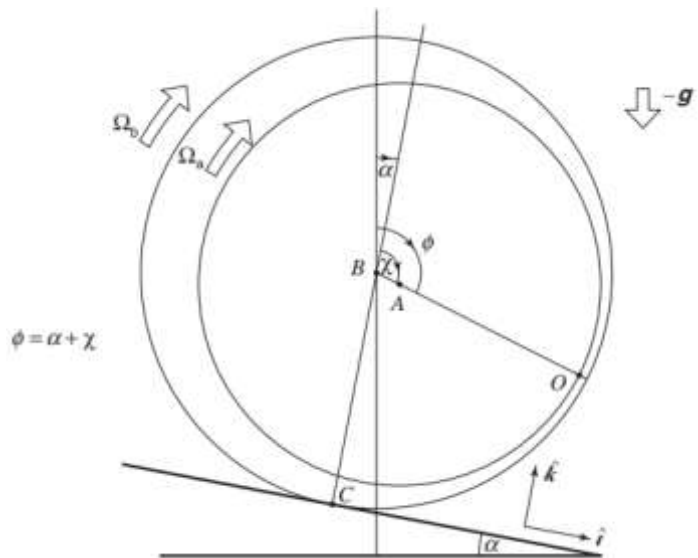
$$x(t) = C e^{-\beta t + i\omega_1 t} + C^* e^{-\beta t - i\omega_1 t} \quad \text{Keep } x(t) \text{ real}$$

$$x(t) = A e^{-\beta t} [\cos(\omega_1 t + \delta)] \quad \text{complex } \leftrightarrow \text{ amp/phase}$$

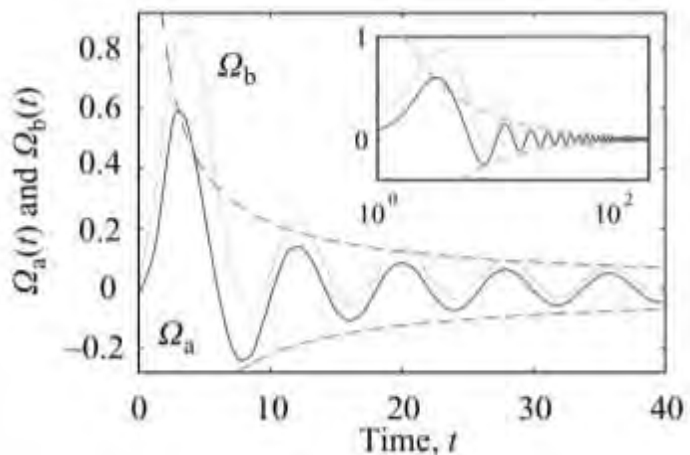


充滿黏滯液體的
蝸牛球之力圖示意

- A: 重物圓心
- B: 圓柱圓心
- C: 與介接觸點
- Ω : 角加速度
- Φ : 液體轉動的角度
- α : 斜面角度
- x : 兩連心線對於 Y 軸的夾角



圓柱容器與內部重物的擺動
所製成之包絡曲線：



伍、目前研究結果

研究一 探討黏滯液體的體積對容器滾動情形的影響

控制變因：B 柱，斜面傾角 6 度，22°C

操縱變因：60mL 蜂蜜

液量佔容積百分比：11.79%

重物質量/裝置總質量(容器+重物+蜂蜜)：810g/1524g

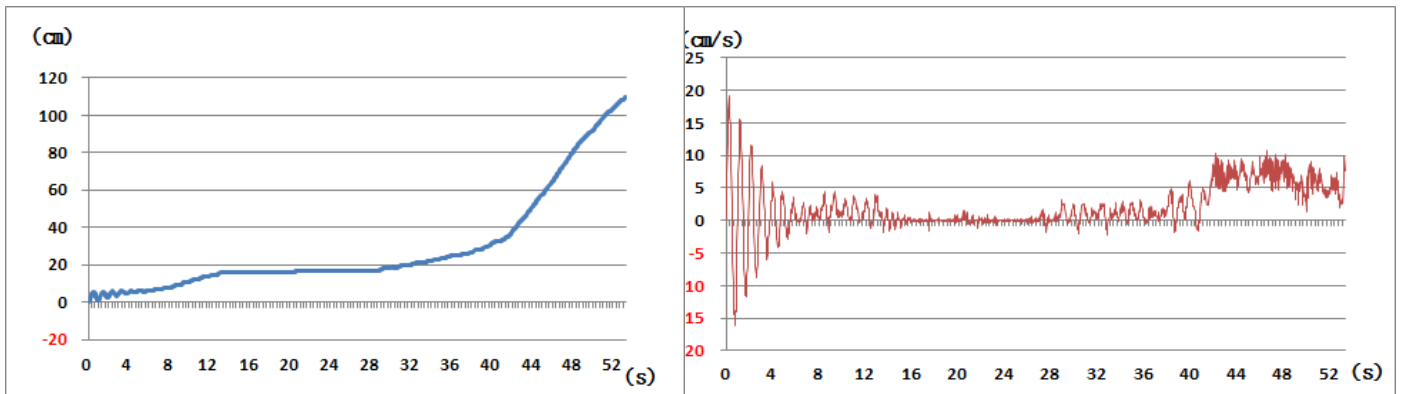


圖 4-1 位置與時間關係圖

圖 4-2 速度與時間關係圖

控制變因：B 柱，斜面傾角 6 度，22°C

操縱變因：120mL 蜂蜜

液量佔容積百分比：23.57%

重物質量/裝置總質量(容器+重物+蜂蜜)：810g/1608g

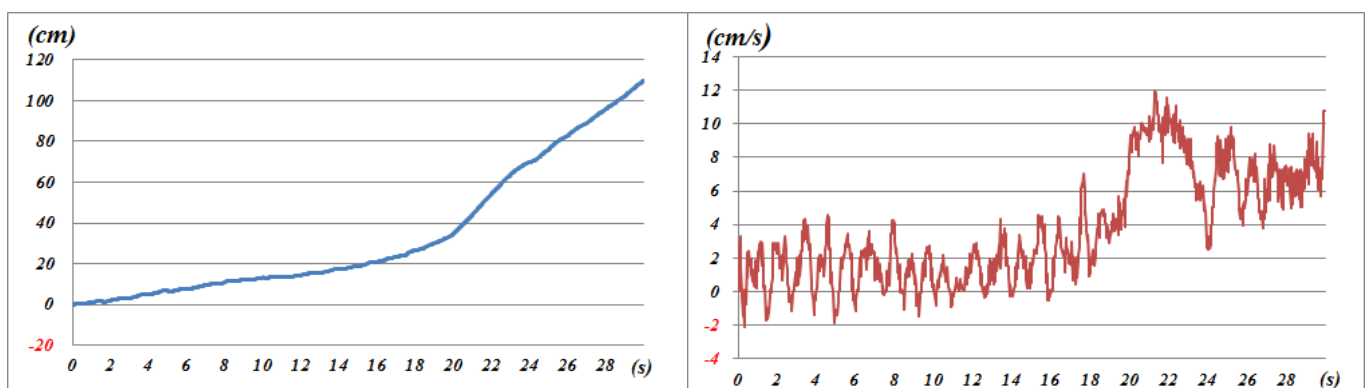


圖 5-1 位置與時間關係圖

圖 5-2 速度與時間關係圖

1. 在一次的速度的變化的週期內上方面積大於下方面積
2. 起始時黏滯液體體積較小的一組速度的變化量與速度極值皆大於另一組

研究二 探討斜面的角度對容器滾動情形的影響

控制變因：B 柱，60mL 蜂蜜，22°C

操縱變因：斜面傾角 6 度

液量佔容積百分比：11.79%

重物質量/裝置總質量(容器+重物+蜂蜜)：810g/1524g

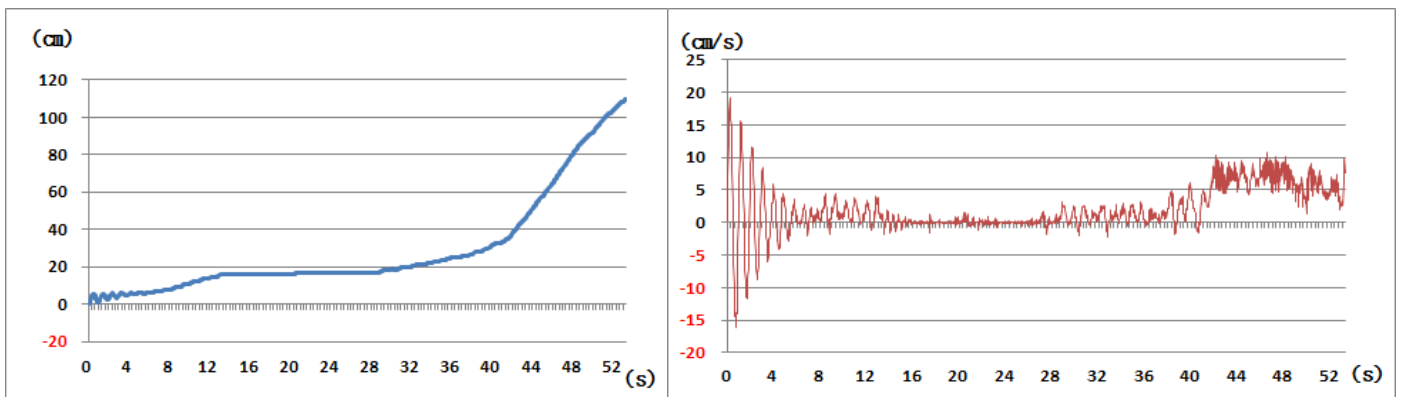


圖 6-1 位置與時間關係圖

圖 6-2 速度與時間關係圖

控制變因：B 柱，60mL 蜂蜜，22°C

操縱變因：斜面傾角 8 度

液量佔容積百分比：11.79%

重物質量/裝置總質量(容器+重物+蜂蜜)：810g/1524g

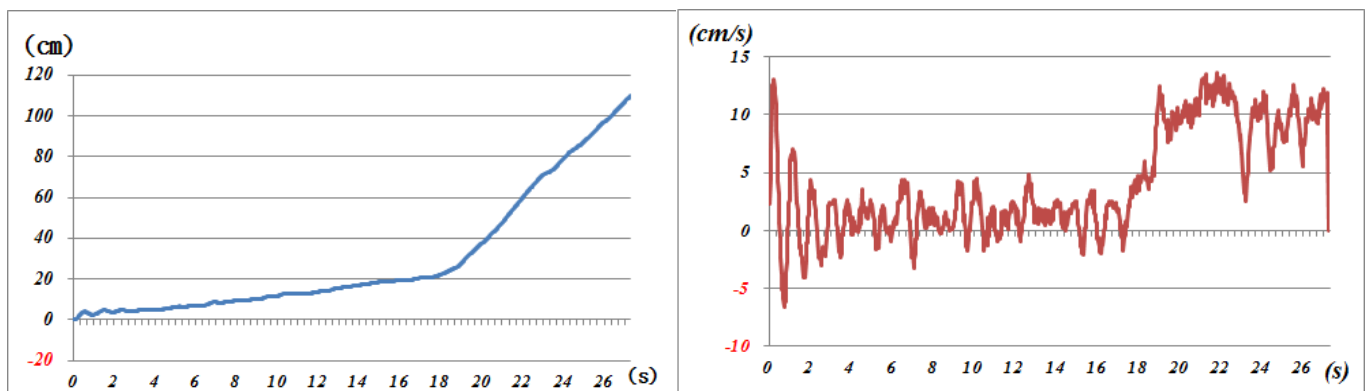


圖 7-1 位置與時間關係圖

圖 7-2 速度與時間關係圖

1. 在斜面傾角 6 度的實驗中發現減速次數會大於斜面傾角 8 度時的情況
2. 斜面傾角 8 度的實驗時間較斜面傾角 6 度那組短
3. 起始時斜坡角度較小的一組速度的變化量與速度極值皆大於另一組

研究三 找出重物的重量對容器滾動情形的影響

控制變因：r=2cm，60mL 蜂蜜，斜面傾角 6 度，22°C

操縱變因：B 柱(合金)

液量佔容積百分比：11.79%

重物質量/裝置總質量(容器+重物+蜂蜜):810g/1524g

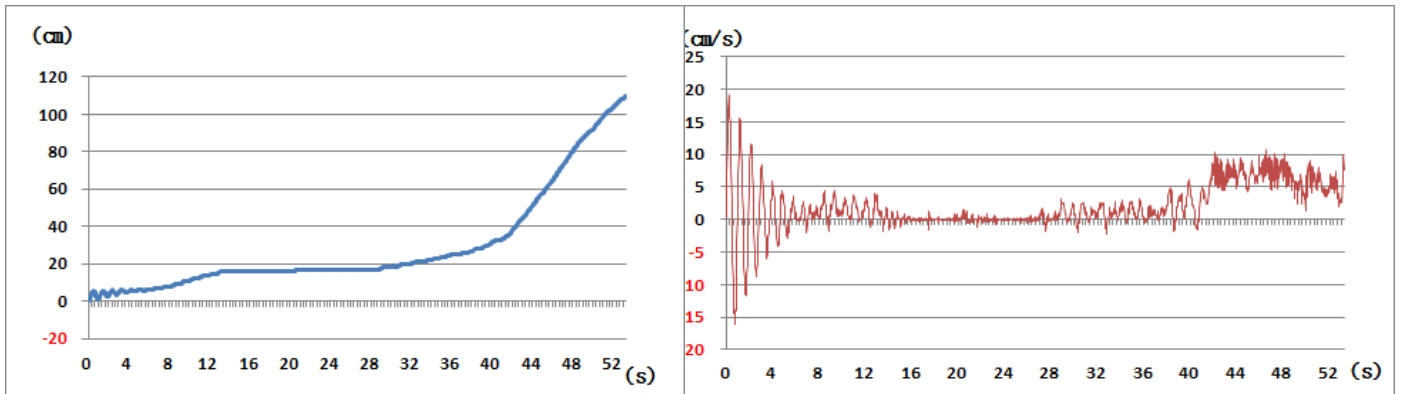


圖 8-1 位置與時間關係圖

圖 8-2 速度與時間關係圖

控制變因：r=2cm，60mL 蜂蜜，斜面傾角 6 度，22°C

操縱變因：C 柱(鋁)

液量佔容積百分比：11.79%

鋁柱質量/裝置總質量(容器+鋁柱+蜂蜜):274g/988g

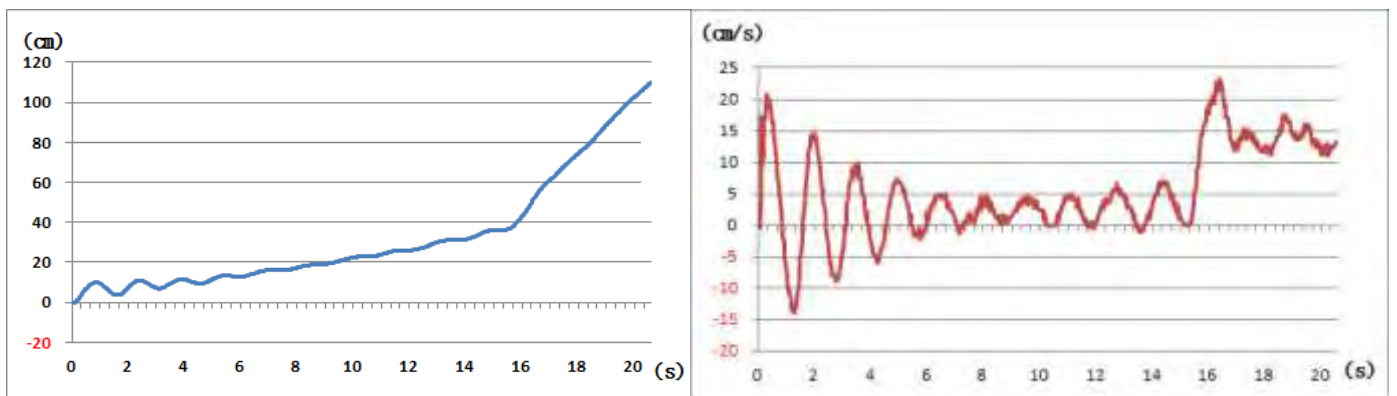


圖 9-1 位置與時間關係圖

圖 9-2 速度與時間關係圖

1. 重物重量較輕的那組減速現象比較單純
2. 兩組的實驗時間差異顯著
3. 容器滾至一定距離後將不再出現蝸牛球現象

研究四 找出黏滯係數對容器滾動情形的影響

控制變因：E 柱，60mL 蜂蜜，斜面傾角 6 度

操縱變因：22°C

液量佔容積百分比：11.79%

重物質量/裝置總質量(容器+重物+蜂蜜):177g/891g

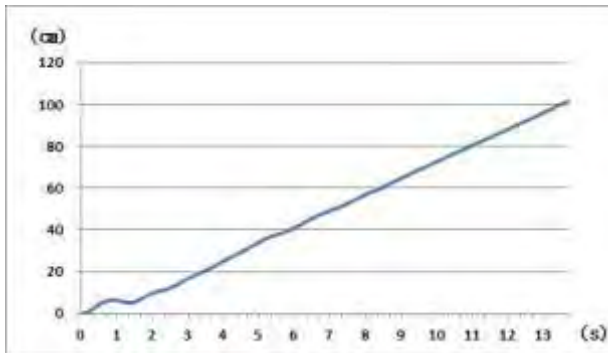


圖 10-1 位置與時間關係圖

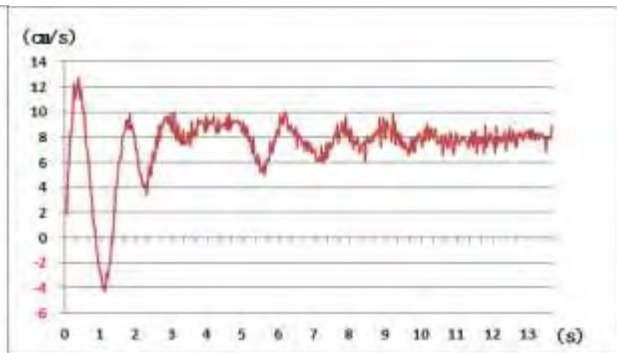


圖 10-2 速度與時間關係圖

控制變因：E 柱，60mL 蜂蜜，斜面傾角 6 度

操縱變因：30°C

液量佔容積百分比：11.79%

重物質量/裝置總質量(容器+重物+蜂蜜):177g/891g

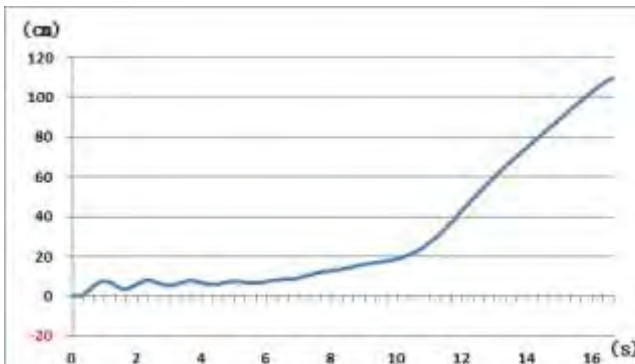


圖 11-1 位置與時間關係圖

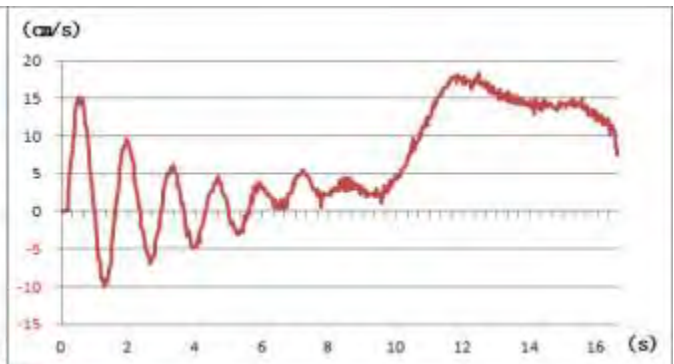


圖 11-2 速度與時間關係圖

1. 裝置溫度較高的那組滾落時間較短
2. 裝置溫度較高的那組減速次數較少
3. 兩組後半段時間的速度變化情形相似

研究五 將柱體重物換成球體重物的差別

實驗條件：甲球，265mL 蜂蜜，22°C 斜面傾角 2 度、3 度、7 度

操縱變因：斜面傾角 2 度、3 度、7 度

液量佔容積百分比：52.14%

重物質量/裝置總質量(容器+重物+蜂蜜):563g/1277g

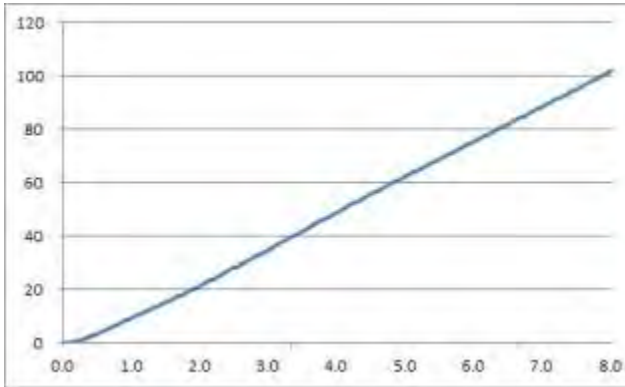


圖 12-1 位置與時間關係圖

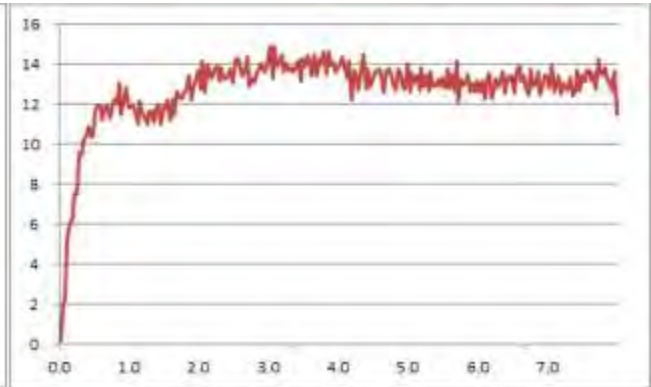


圖 12-2 速度與時間關係圖

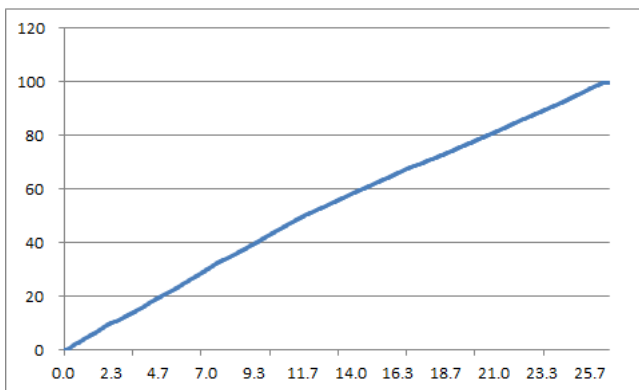


圖 13-1 位置與時間關係圖

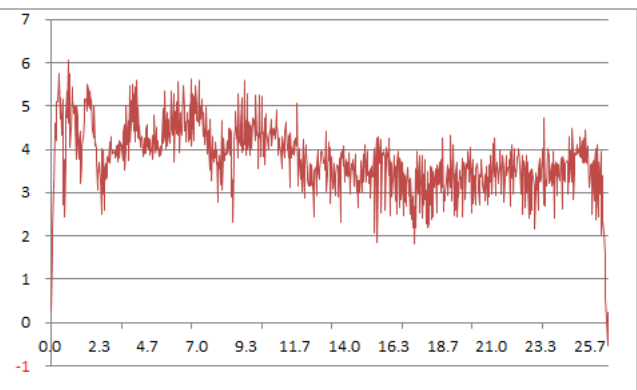


圖 13-2 速度與時間關係圖

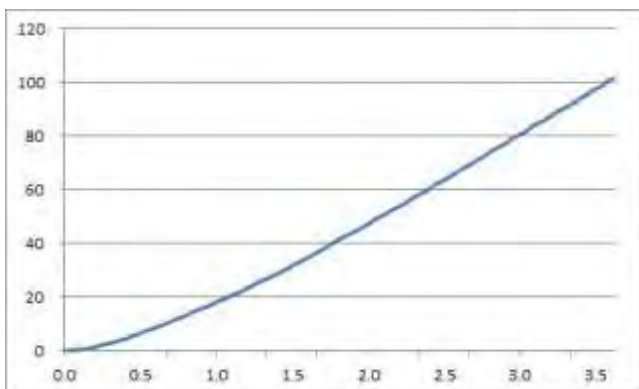


圖 14-1 位置與時間關係圖

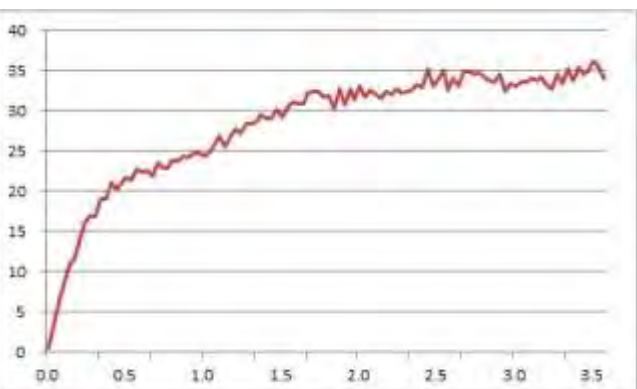


圖 14-2 速度與時間關係圖

C 柱，斜面傾角 6 度，22°C，圖和數據

表四

金屬	液量	編號	減速次數	平均減速次數	歷
Al	30mL	1	7.00	6.33	16.
		2	4.00		17.
		3	8.00		20.
	60mL	1	8.00	8.33	22.
		2	10.00		20.
		3	7.00		19.
	90mL	1	10.00	9.00	22.
		2	8.00		21.
		3	9.00		20.
	120mL	1	7.00	7.33	17.
		2	8.00		18.
		3	7.00		18.
	150mL	1	3.00	3.00	12.
		2	3.00		11.
		3	3.00		11.

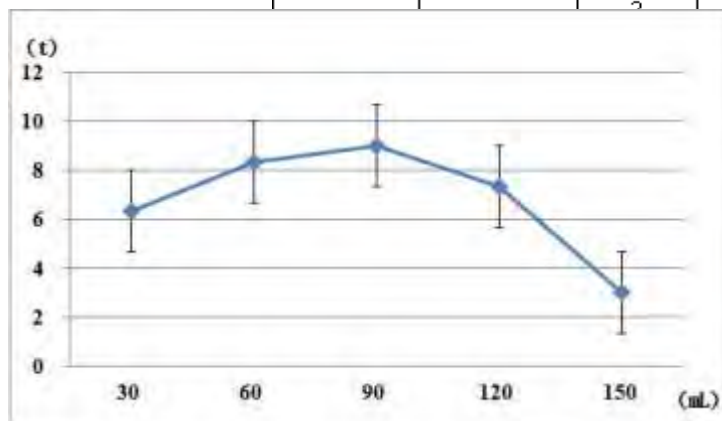


圖 15-1 黏滯液體體積與平均減速次數關係圖

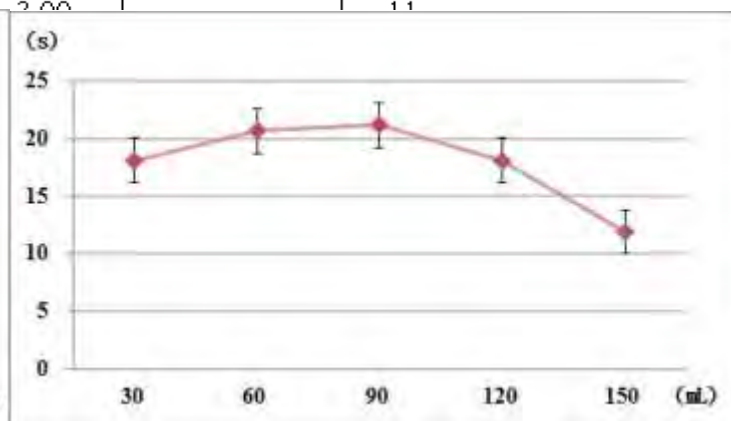


圖 15-2 黏滯液體體積與時間關係圖

1. 減速次數在液體體積為 90mL 時有高峰

B 柱，斜面傾角 6 度，22°C，數據

表五

(編號)	編號	減速次數	平均減速次數
mL	1	9.00	7.00
	2	8.00	
	3	7.00	
	4	3.00	
	5	4.00	
	6	5.00	
	7	10.00	
	8	8.00	
	9	9.00	
mL	1	8.00	4.75
	2	4.00	
	3	3.00	
	4	3.00	
	5	9.00	
	6	6.00	
	7	5.00	
mL	1	11.00	6.25
	2	5.00	
	3	5.00	
	4	9.00	
	5	5.00	
	6	6.00	
	7	4.00	
	8	5.00	
)mL	1	18.00	16.33
	2	11.00	
	3	20.00	
	1	9.00	

B 柱，斜面傾角 6 度，22°C 數據折線圖

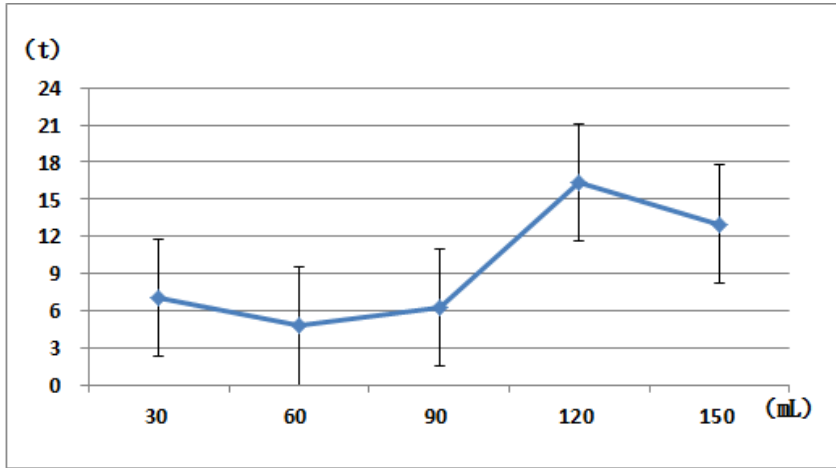


圖 16-1 黏滯液體體積與平均減速次數關係圖

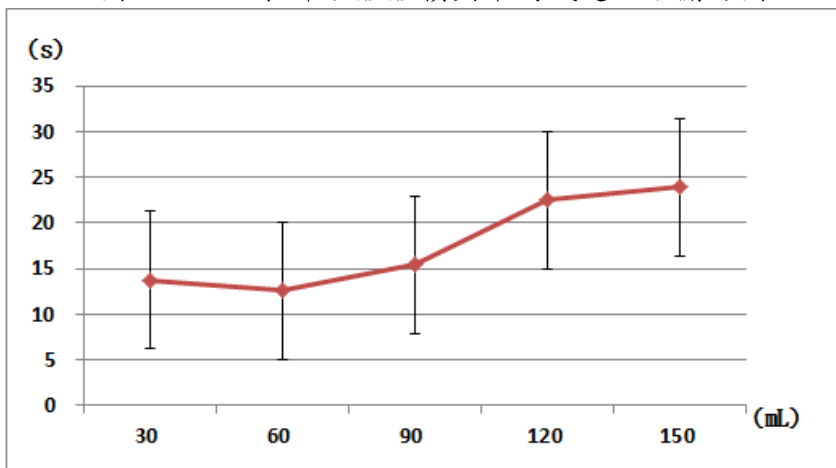


圖 16-2 黏滯液體體積與時間關係圖

1. 減速次數在液體體積為 120mL 時有高峰

E 柱，22°C，數據(變因為黏滯液體體積)

表六

柱	角度	編號	減速次數	平均減速次數
J	6°	1	3	3.00
		2	3	
		3	3	
	7°	1	1	1.75
		2	1	
		3	3	
		4	2	
K	6°	1	5	3.00
		2	2	
		3	2	
	7°	1	3	2.60
		2	2	
		3	5	
		4	2	
		5	1	
L	6°	1	5	5.00
		2	6	
		3	4	
	7°	1	3	2.67
		2	3	
		3	2	
L	6°	1	4	4.60
		2	3	
		3	5	
		4	6	
		5	5	

E 柱，22°C 數據折線圖

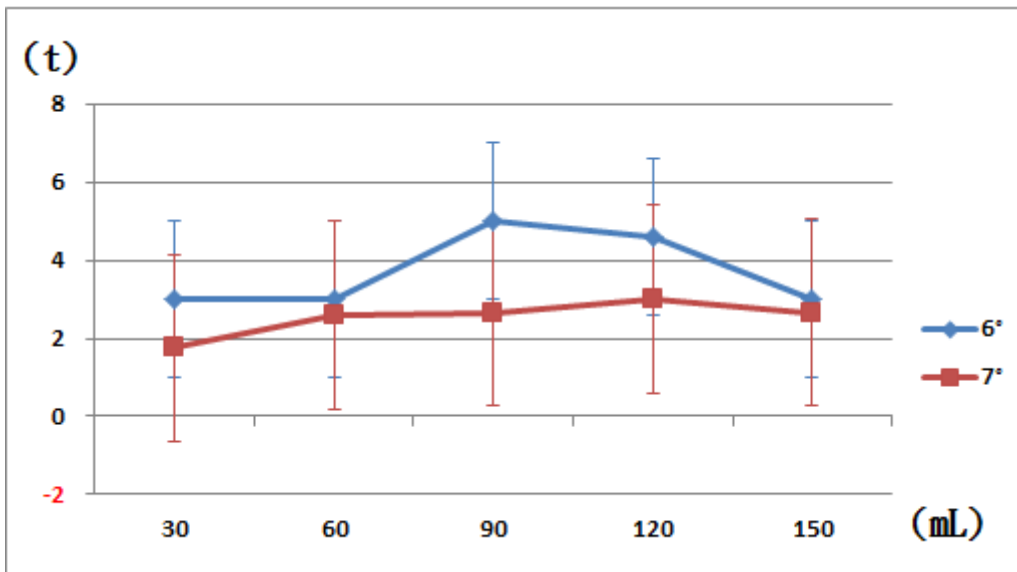


圖 17-1 黏滯液體體積與平均減速次數關係圖

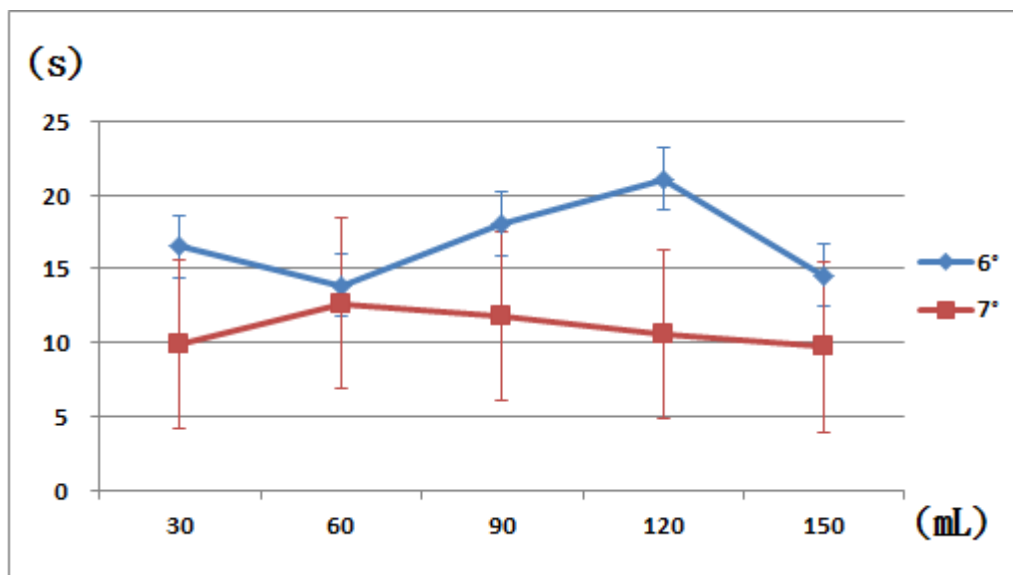


圖 17-2 黏滯液體體積與時間關係圖

1. 斜面傾角 6 度時的容器滾落時間在液體體積為 120mL 時有高峰，而減速次數高峰是在 90mL
2. 斜面傾角 6 度的滾落時間均比斜面傾角 7 度的長

E 柱，30°C，數據(變因為黏滯液體體積)

表七

液量	角度	編號	減速次數	平均減速次數	層
30mL	6度	1	3.00	1.67	9
		2	1.00		9
		3	1.00		8
50mL		1	4.00	4.33	15
		2	4.00		14
		3	5.00		16
30mL		1	5.00	4.67	15
		2	4.00		14
		3	5.00		15
20mL		1	3.00	3.33	13
		2	4.00		12
		3	3.00		10
50mL	1	4.00	3.67	11	
	2	3.00		11	
	3	4.00		12	
30mL	7度	1	2.00	1.67	6
		2	2.00		5
		3	1.00		4
50mL		1	3.00	3.67	10
		2	4.00		11
		3	4.00		10
30mL		1	3.00	3.33	8
		2	4.00		10
		3	3.00		9
20mL		1	2.00	2.00	8
		2	2.00		7
		3	2.00		7
50mL	1	2.00	2.00	7	
	2	2.00		7	
	3	2.00		7	
30mL		1	1.00	0.67	4
		2	1.00		3
		3	0.00		3
50mL		1	2.00	1.33	7
		2	1.00		5
		3	1.00		5
		1	2.00		7

E 柱，30°C 數據折線圖（變因為黏滯液體體積）

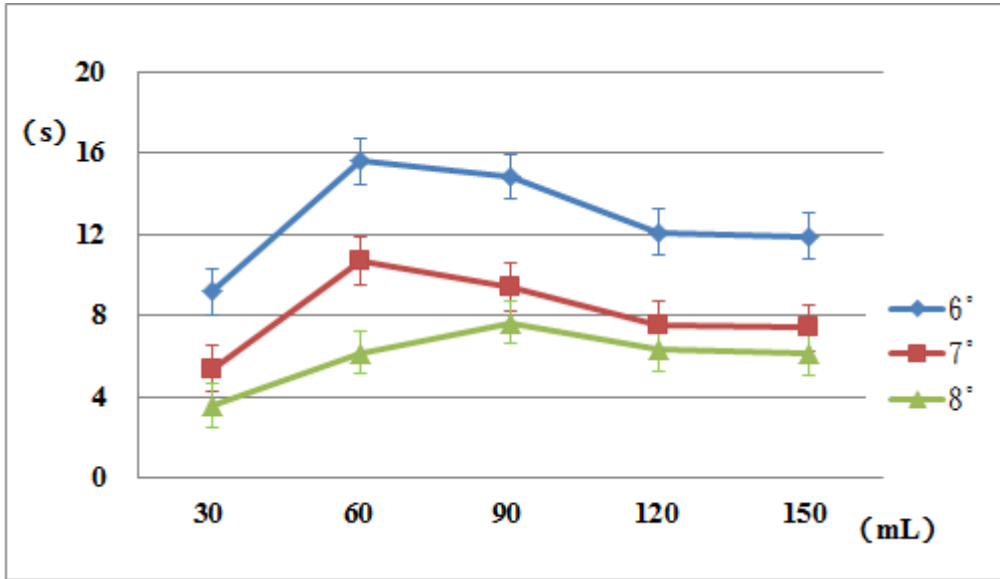


圖 18-1 時間與黏滯液體體積關係圖

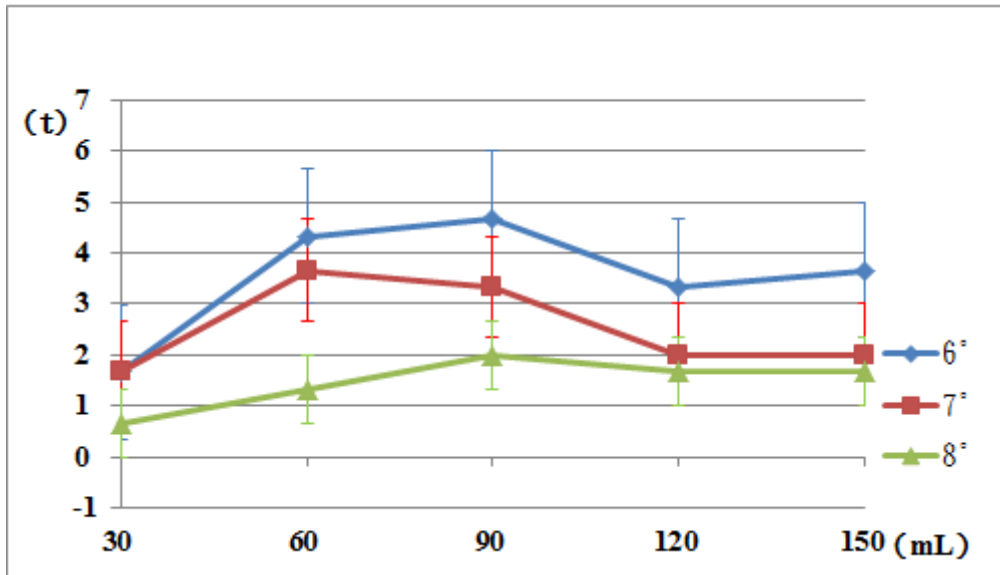


圖 18-2 黏滯液體體積與減速次數關係圖

1. 斜面傾角 6 度的容器滾落時間是在三種角度中最長的
2. 斜面傾角 6 度黏滯液體體積 90mL 的減速次數是最多的

E 柱，30°C 數據折線圖(變因為角度)

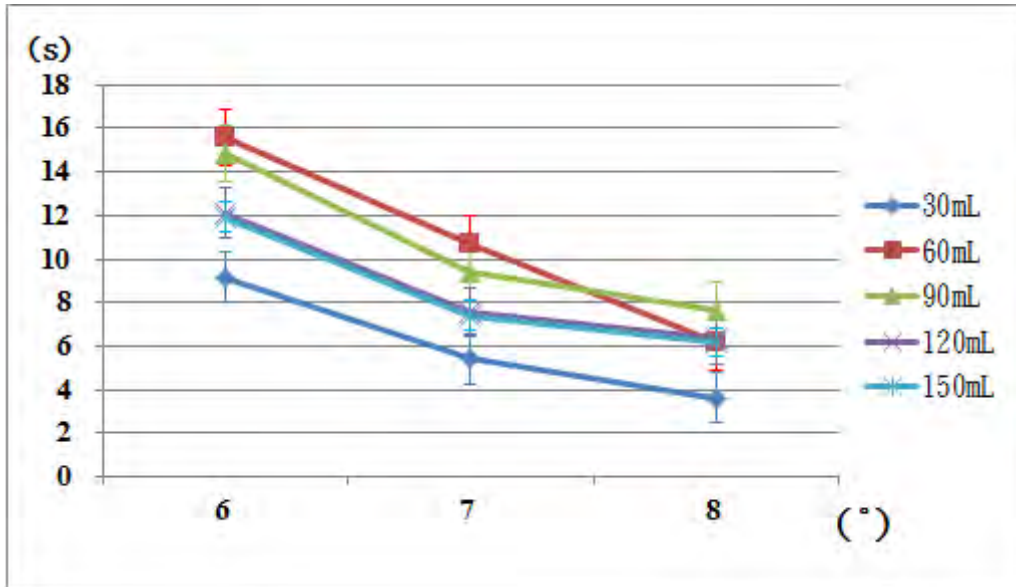


圖 18-3 時間與角度關係

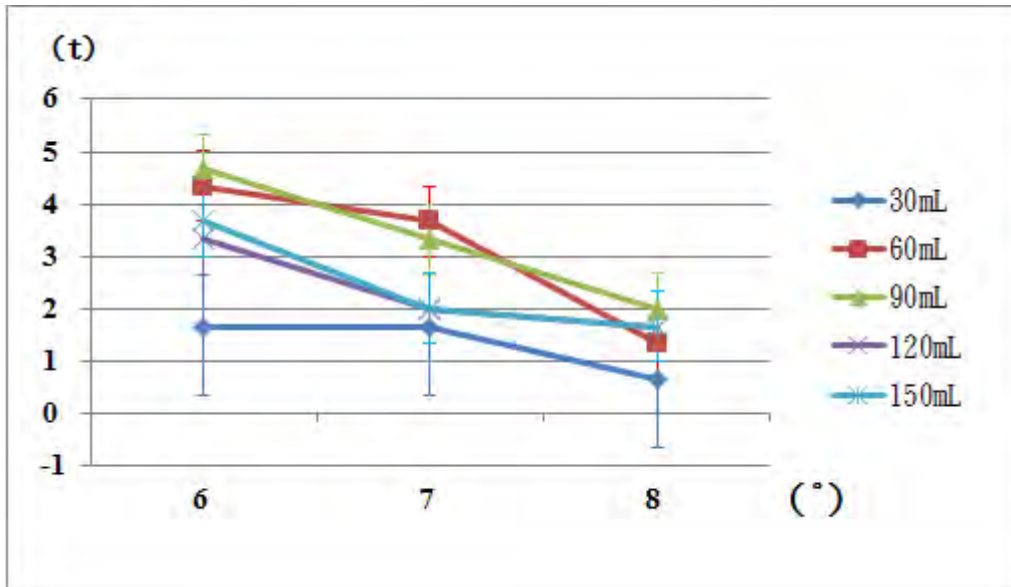


圖 18-4 減速次數與角度關係圖

1. 黏滯液體體積為 30mL、90mL、120mL、150mL 隨斜面傾角增加而減少的时间幅度相近

黏滯係數計算公式
$$\eta = \frac{mgR^2t}{4\pi HS} \left[\frac{1}{R_A^2} - \frac{1}{R_B^2} \right]$$

表八

變因	輸入欄	輸入欄	固定值					輸入欄	輸入欄	黏滯係數 η	η
	液體溫度	砝碼m	重力g	轉輪軸半徑R	圓柱高H	圓柱半徑R _A	外筒內半徑R _B	掉落距離S	掉落時間t		
單位	°C	Kg	m/s ²	m	m	m	m	m	s	(m ⁻¹ ·kg·s ⁻²) s	cP
1	21.9	0.250	9.8067	0.0169	0.075	0.025	0.0309	0.40	8.9703	9.2082	9208.2330
2	21.9	0.249	9.8067	0.0169	0.075	0.025	0.0309	0.40	9.0340	9.2365	9236.5487
5	22.3	0.249	9.8067	0.0169	0.075	0.025	0.0309	0.40	9.2696	9.4774	9477.3898
6	22.3	0.249	9.8067	0.0169	0.075	0.025	0.0309	0.40	8.9028	9.1024	9102.3868
7	24.5	0.190	9.8067	0.0169	0.075	0.025	0.0309	0.40	9.5716	7.4674	7467.3904
8	25.9	0.190	9.8067	0.0169	0.075	0.025	0.0309	0.40	8.6003	6.7096	6709.6059
9	28.0	0.190	9.8067	0.0169	0.075	0.025	0.0309	0.40	9.3194	7.2706	7270.6420
10	30.1	0.190	9.8067	0.0169	0.075	0.025	0.0309	0.40	5.3430	4.1684	4168.4157
11	30.8	0.190	9.8067	0.0169	0.075	0.025	0.0309	0.40	6.8168	5.3182	5318.1836
12	31.0	0.190	9.8067	0.0169	0.075	0.025	0.0309	0.40	7.1712	5.5947	5594.7111
13	31.1	0.190	9.8067	0.0169	0.075	0.025	0.0309	0.40	5.6514	4.4090	4409.0013
14	31.5	0.190	9.8067	0.0169	0.075	0.025	0.0309	0.40	5.6608	4.4163	4416.3036
15	31.6	0.190	9.8067	0.0169	0.075	0.025	0.0309	0.40	5.9350	4.6302	4630.2311

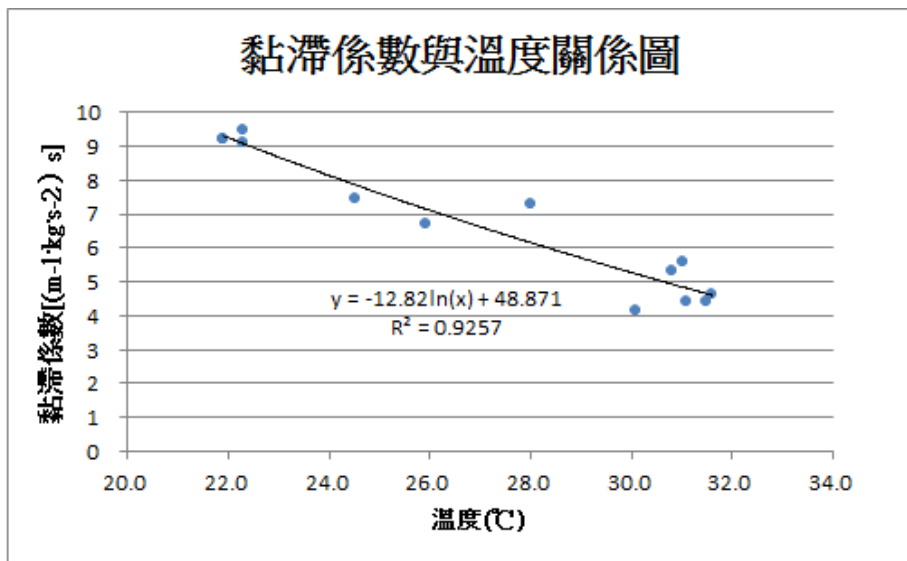


圖 19

蜂蜜的黏滯係數和溫度成高度負相關

陸、討論

經多次實驗發現，在軌道前半段時，容器會進行規律的運動，而經過整理後我們發現這種規律的運動是類似於次阻尼的擺盪(如下圖 18)，當黏滯液體完全流至重物前方後，容器便沒有減速的現象。而容器移動時，液體會慢慢流向前方，而流向前方液體體積和重物半徑呈負相關。由此可知，半徑越大的重物減速的次數越多，當次阻尼擺盪現象消失後，容器會逐漸加速，而後重物會因為黏滯液體的摩擦力而被帶往容器後方(如下頁圖 19 所示)，而其造成的力矩會使容器的速度漸趨穩定。而且我們發現，溫度對蜂蜜的黏滯係數有顯著的影響。

以 B 柱, , 蜂蜜 60mL, 斜面傾角 6 度, 溫度 22°C 為例

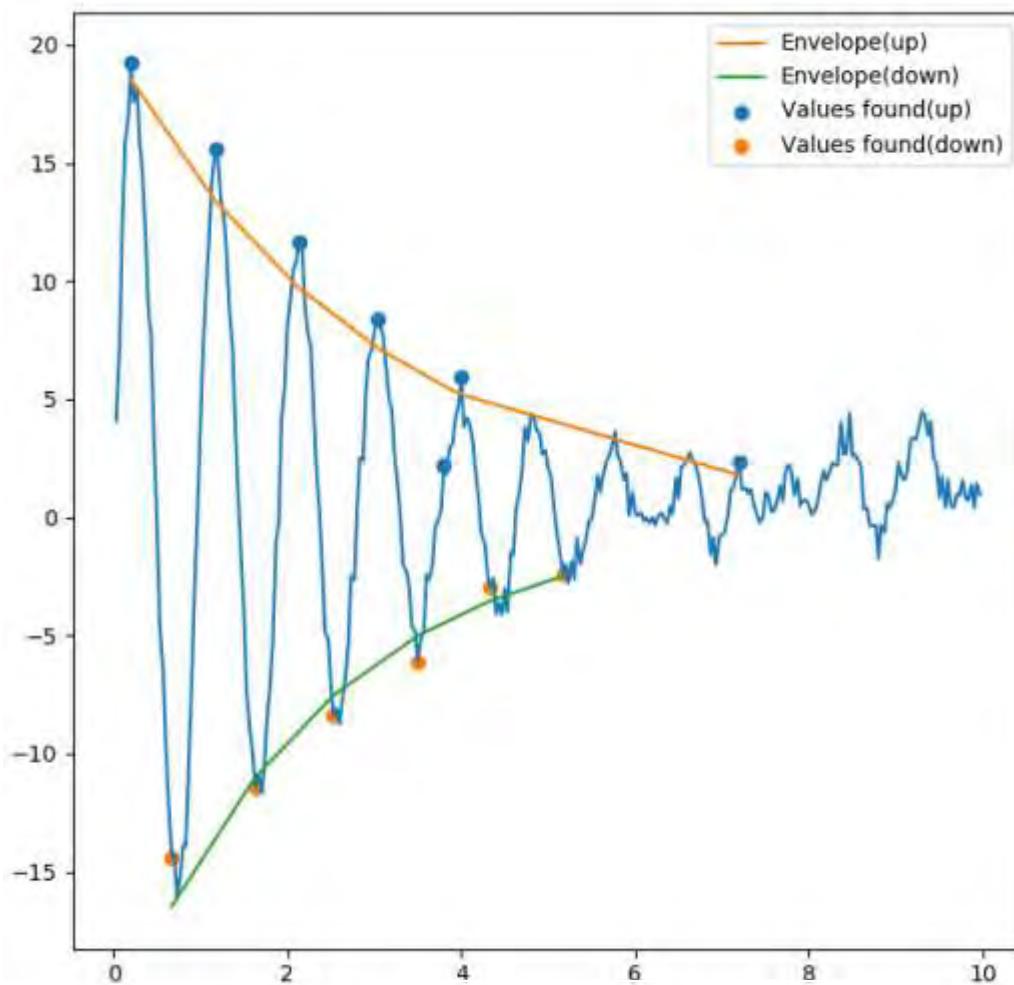
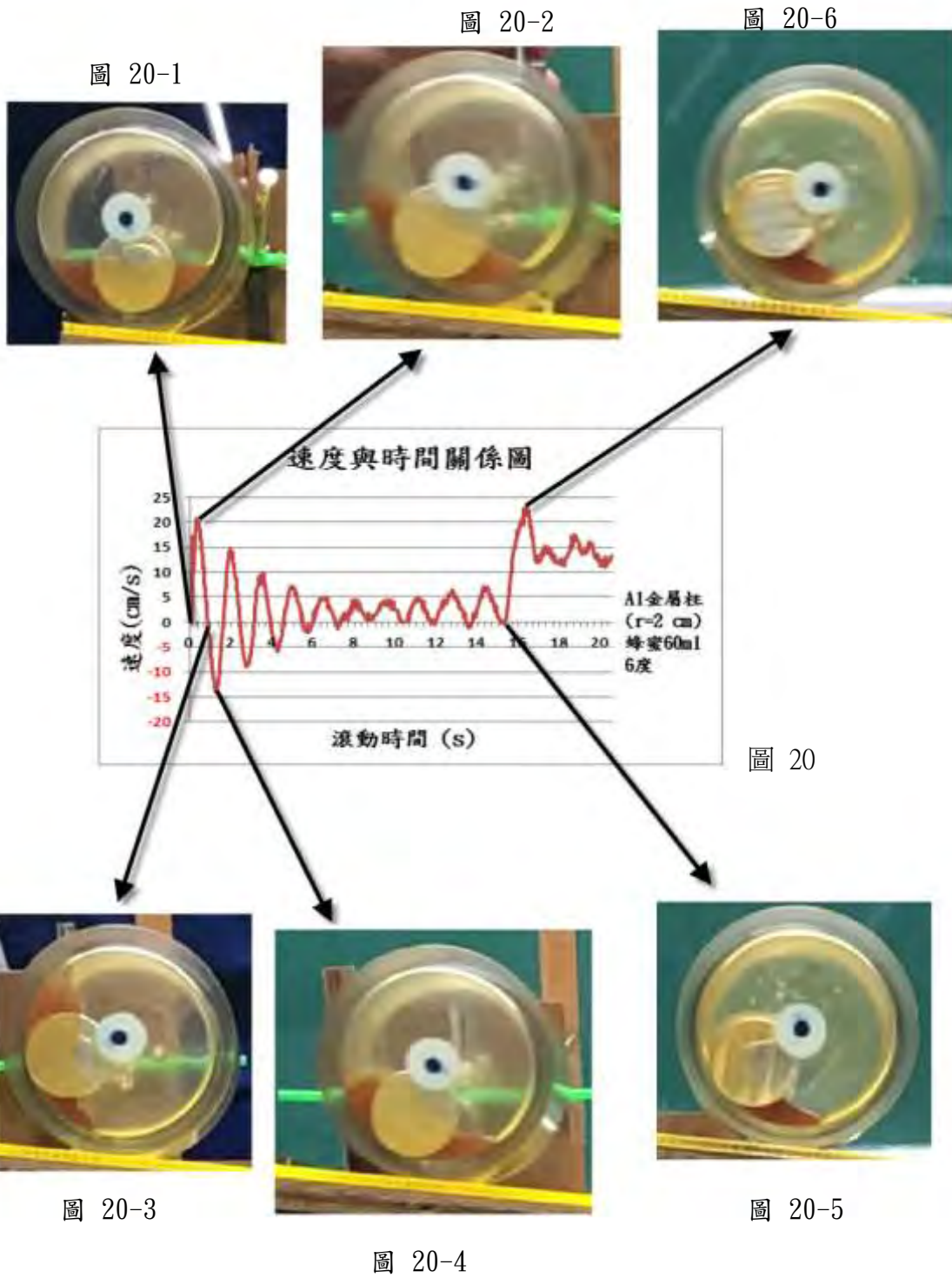
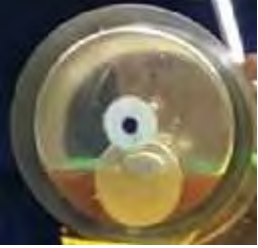

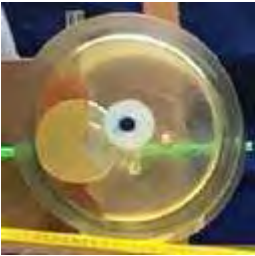





圖 20

以 C 柱, , 蜂蜜 60mL, 斜面傾角 6 度, 溫度 22°C 為例



 <p style="text-align: center;">圖 20-1</p>	<p>圖20-1. 起始點</p> <p>容器固定在斜坡最頂端，在靜止的狀態下，重物和蜂蜜停留在容器最底端處。</p>
 <p style="text-align: center;">圖 20-2</p>	<p>圖20-2. 第一次正向速度最大值</p> <p>此為開始運動後速度第一次達到最大值時的照片，因為此時加速度=0，故認為：對容器圓心而言，圓柱與斜面間的摩擦力造成的力矩與重物和黏滯液體的重力力矩相抗衡。</p>
 <p style="text-align: center;">圖 20-3</p>	<p>圖20-3. 運動折返點</p> <p>速度第一次回到零，由正向的速度要變往負向，由圖中可清楚看出重物和蜂蜜在容器中的相對位置。</p>
 <p style="text-align: center;">圖 20-4</p>	<p>圖20-4. 第一次負向速度最大值時</p> <p>開始運動後速度第二次達到最大值，此時因為此時加速度=0，故認為：對容器圓心而言，圓柱與斜面間的摩擦力造成的力矩與重物和黏滯液體的重力力矩相抗衡。(與[圖20-2]相同但速度方向相反)。</p>
 <p style="text-align: center;">圖 20-5</p>	<p>圖20-5. 急遽加速前</p> <p>蜂蜜幾乎附著在容器壁上，重物後方已沒有蜂蜜，蜂蜜無法把重物帶起至更高處，使重物相對於圓心的重力力矩不足，造成整個容器加速向前。</p>
 <p style="text-align: center;">圖 20-6</p>	<p>圖20-6. 第二次正向速度最大值</p> <p>因為容器壁上的蜂蜜集中到金屬柱前方，所以重物能被帶到較(圖20-5)高的位置，造成更大的力矩，使加速的現象消失。</p>

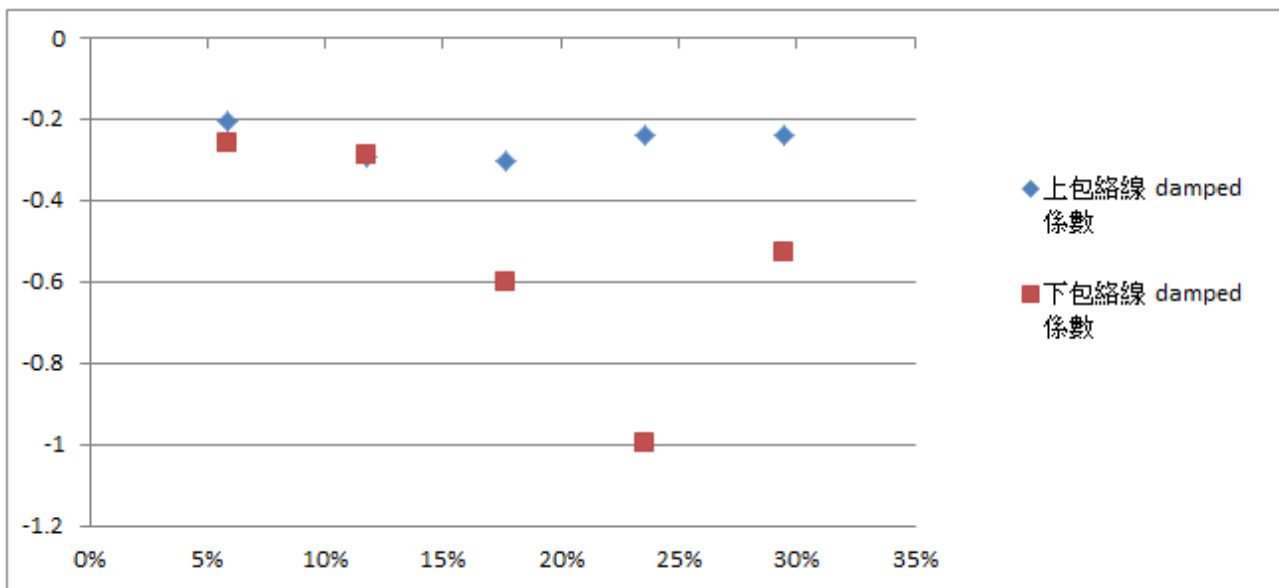


圖 21-1 C 柱液量佔容積百分比對包絡線 damped 係數關係圖

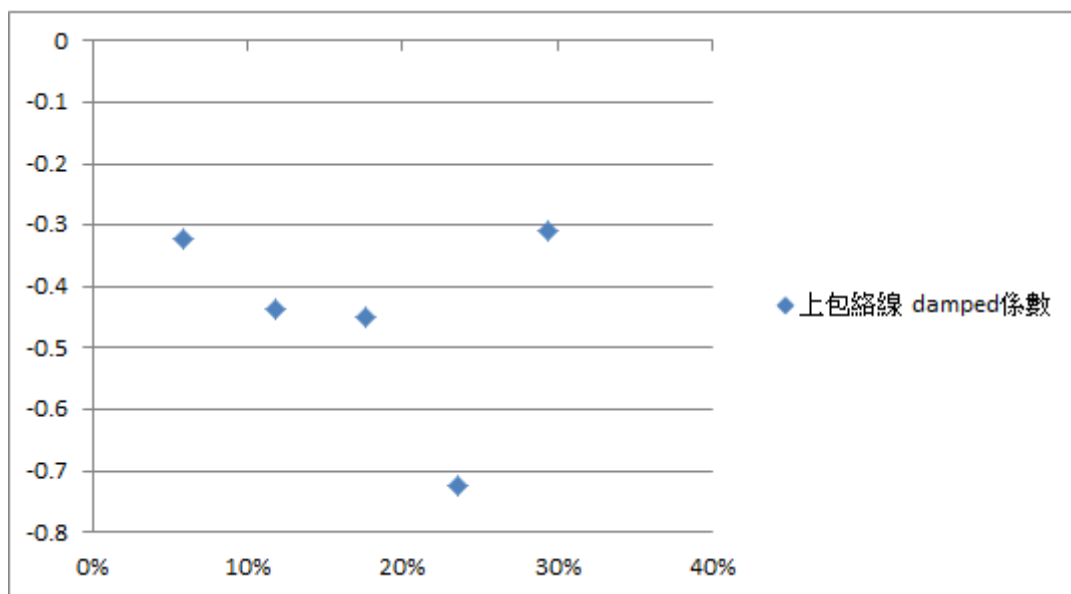


圖 21-2 B 柱液量佔容積百分比對包絡線 damped 係數關係圖

柒、結論

- 一、我們發現在在每一筆數據中，會有一種體積有最好的減速效果，例如：E 柱(177g/891g)和 C 柱(274g/988g)中，60 毫升的資料有最大的減速效果，而在 B 柱中的情況時則是在 120 毫升(810g/1608g)有最大的減速效果。
- 二、我們發現不論是何種重物，斜面傾角越大，容器的滾動速度越快，時間越短，平均減速次數也越少。
- 三、溫度越高，蜂蜜(黏滯液體)的黏滯係數越低，蝸牛球的減速次數也越少，滾落時間少於溫度低的另一組實驗數據。
- 四、根據我們的實驗結果發現在 B 柱，斜面傾角 6° ，蜂蜜 60mL 的狀況時有最好的減速效果，如圖 22 所示。
- 五、因為球體的形狀係數較小，所以無法被黏滯液體牽引，以至於達不到像柱體一樣的減速效果。
- 六、未來將探討非牛頓流體對蝸牛球運動影響之探討

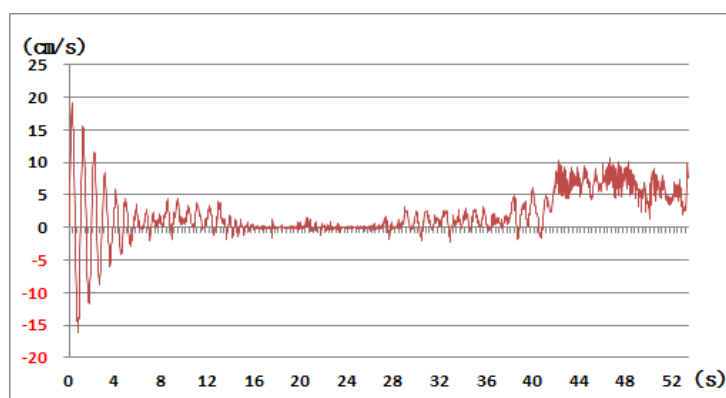


圖 22 B 柱，斜面傾角 6° ，蜂蜜 60mL 速度與時間關係圖

捌、參考資料及其他

1. 蝸牛球，[維基百科](#)
2. NTCU 科學遊戲 Lab：怪怪球，國立台中教育大學 NTCU 科學教育與應用學系科學遊戲實驗室
3. 『電池跳、挑電池～探討 3 號鹼性電池電量與電池 彈跳及滾動行為之關聯性』，全國科展 56 屆國中物理科第一名作品
4. ”液兒液兒瓶中轉”，中華民國第 58 屆中小學科學展覽會物理與天文學科第一名
5. Rohit Supekar, Mahesh V. Panchagnula, Dynamics and stability of a fluid filled cylinder rolling on an inclined plane, August 2014
6. Neil J. Balmforth, John W M Bush, Dissipative descent: Rocking and rolling down an incline, in Journal of Fluid Mechanics 590:295 - 318 · November 2007

【評語】 051808

本實驗探討裝有液體之球的滾動，是滾動同時搖動交互進行的複雜運動，是已知現象的深入討論，用以開發量測動態黏滯係數。能以簡易自製實驗裝置，可達到實驗主軸數據。重複實驗所獲取數據，常相差甚多，顯示實驗裝置的準確性不佳，有改進空間。以數次重複實驗取算數平均，非精準實驗，有可議之處。實驗還是以測量歸納為主，對此運動有一些歸納的了解，應可憑藉更多的理論論述與實驗連結。

壹、研究動機

我們在網路上看到了一段有趣的科學玩具影片，影片中他將兩顆大小相等的黑色球體容器，其中一個中空，而另一個盛裝蜂蜜及鐵球，同時從斜坡上滾落，發現其中盛裝蜂蜜及鐵球的黑色球體在滾落時並不是等加速度，而是滾落一小段距離後會停下幾秒，之後就重複著上述的現象緩慢的滾落，我們對這個現象感到好奇，想深入探究這個物理現象，因此我們就選了這個主題來研究。

貳、研究目的

1. 探討黏滯液體的體積對容器滾動情形的影響
2. 找出斜面角度與容器滾動情形的影響
3. 找出重物的重量對容器滾動情形的影響
4. 將柱體重物換成球體重物的差別
5. 找出黏滯係數對容器滾動情形的影響

參、研究設備與器材

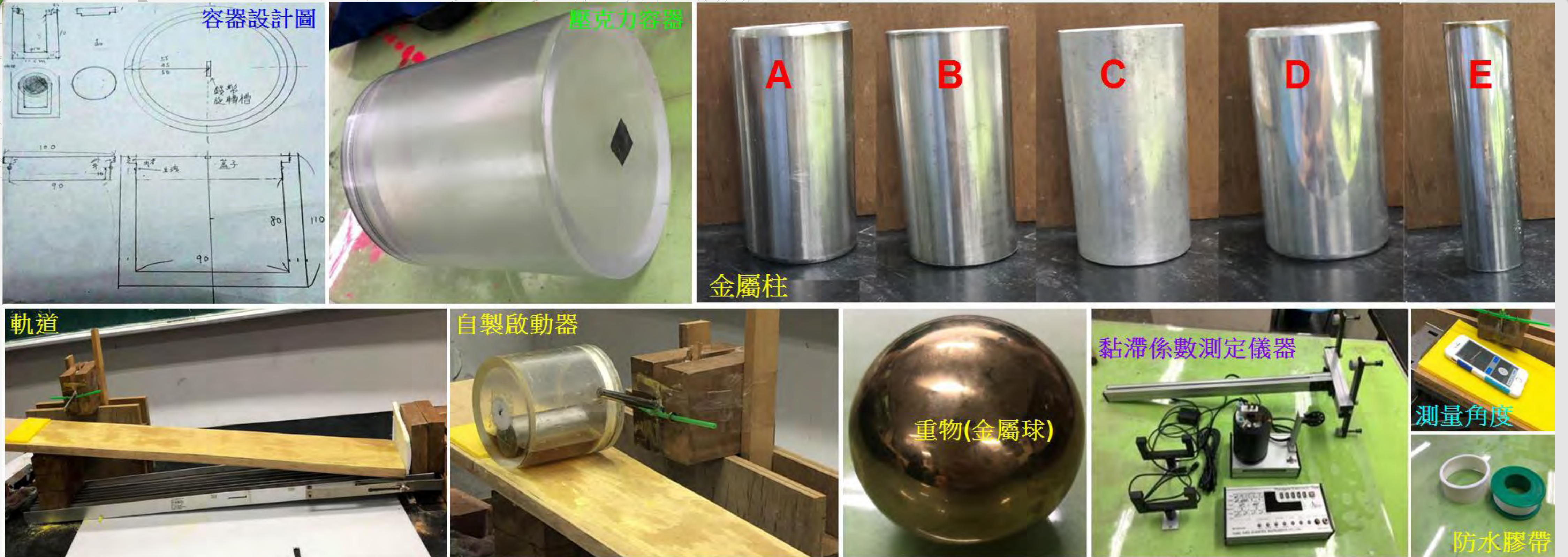


圖1: 實驗設備及量測器材

表 1-1 容器規格

重量(含蓋)	內徑	外徑	深度	容積(含蓋)	高
630 g	90 mm	110 mm	80 mm	162πmL (約509 mL)	110 mm

表 1-2 重物(金屬棒)規格

	A柱	B柱	C柱	D柱	E柱
半徑 (cm)	2	2	2	2	1
體積 (mL)	98.772	100.531	100.531	98.772	25.133
重量 (gw)	802	810	274	280	177
體積所佔容積百分比(%)	19.4	19.8	19.8	19.4	4.9

表 1-3 重物(金屬球)規格

	甲球
半徑(cm)	2.5
體積(mL)	65.45
重量(gw)	563
體積佔容積百分比(%)	12.86

肆、研究過程及方法

先使用手機程式Angle Meter調整軌道角度，再於斜面軌道起點處，利用自製簡易啟動器擋住容器，再使用啟動器讓裝有黏滯液體與重物之容器自由滾落，利用相機錄影後，以tracker程式追蹤容器的軌跡、藉由影像分析觀察其運動行為，並將其繪製成x-t圖及v-t圖，再以v-t圖找出減速次數，其中v-t圖的峰值是下滑過程中減速的時刻，訂出減速次數為多次的情況。

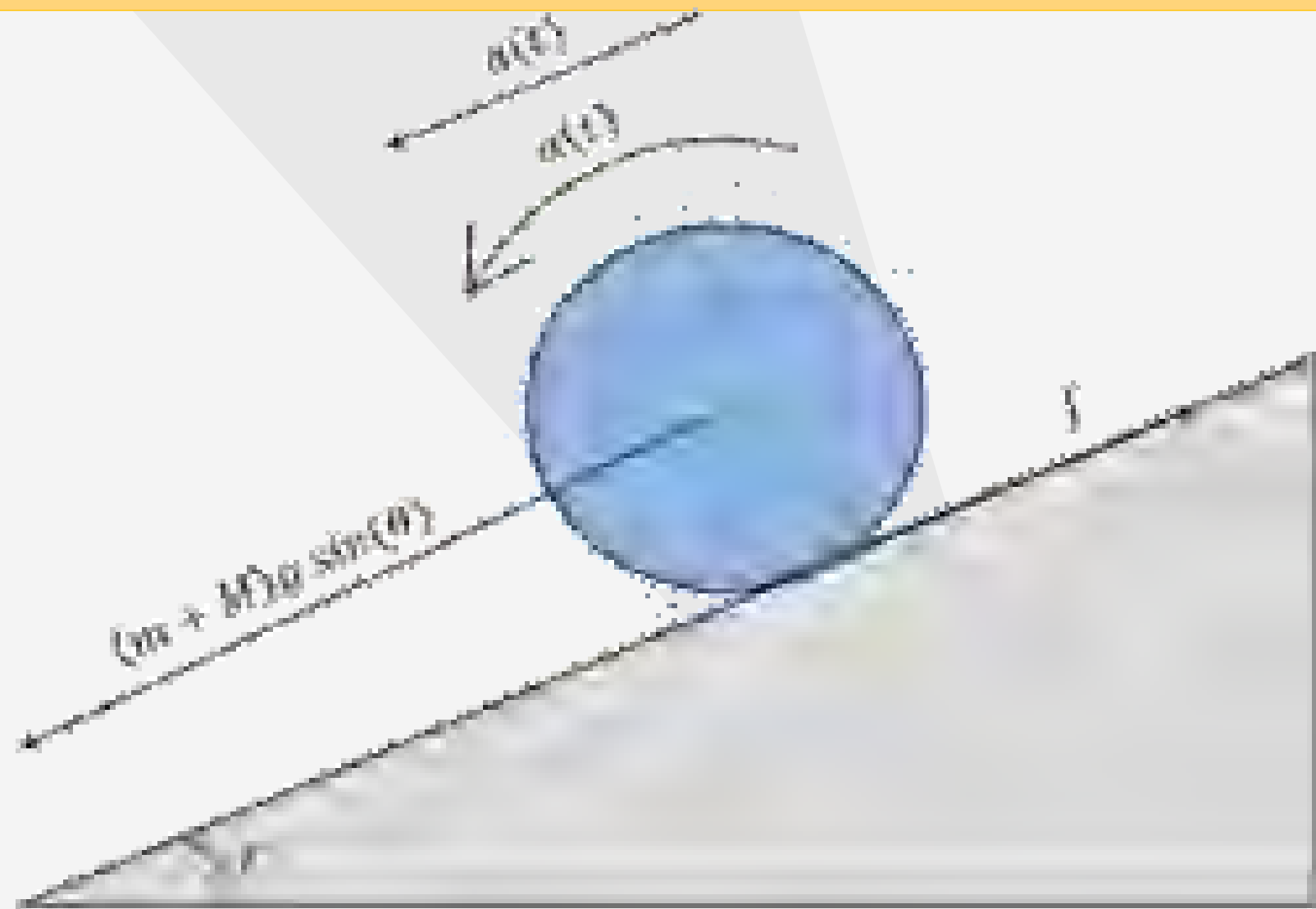


圖2: 圓柱在斜面的滾動示意圖

圓柱在斜面的滾動方程式推導

如果考慮液體不旋轉 $\frac{v^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}$ (3)

$$\frac{-v^2}{r} = R\dot{\omega} \cos(\theta - \gamma) - g \sin(\theta) - \frac{\partial p}{\partial r} \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -R\dot{\omega} \sin(\theta - \gamma) - g \cos(\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) \quad (5)$$

$$\left(\frac{m + 2M}{4\pi\mu h} \right) \frac{\partial \omega}{\partial t} = -g(t) + \left(\frac{m + 2M}{4\pi\mu h} \right) g \quad (6)$$

$$(m + M)g \sin(\gamma) - f = (m + M)a \quad (7)$$

$$fR = MR^2 \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (8)$$

名詞解釋

蝸牛球：本實驗的主要觀察對象，由一個材質輕且中空的球體，把黏滯液體和重球放入其中，而組成的玩具，因為要便於觀察所以我們把它從球體改為柱體。

黏滯力：簡單來講就是液體中的摩擦力，阻止液體運動、形變。

黏滯係數：將黏滯力量化後所得到的數據。

形狀係數：物體形狀對物體在流體中阻力的因素。

阻尼比：系統在受到擾動後振盪及衰減的情形

包絡線：圖形各個頂點的擬合線。

指數衰變：某個量的下降速度和它的值成比例，此指相鄰兩個同向最大速度的衰變。

阻尼震盪：任何振動系統在振動中，由於外界作用（如流體阻力、摩擦力等）和/或系統本身固有的原因引起的振動幅度逐漸下降。

實驗原理：利用黏稠液體將容器中的金屬柱帶到一定高度，對容器造成力矩，使容器減緩速度甚至停頓或回滾

彈簧阻尼震盪公式：
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

黏滯係數計算公式：
$$\eta = \frac{mgR^2t}{4\pi HS} \left[\frac{1}{R_A^2} - \frac{1}{R_B^2} \right] \quad (2)$$

(4) (5) (6)
如果考慮液體旋轉
(7) (8) 外部圓柱力
學計算

v: 液體的速度/p: 壓力/r: 與球心的距離/ω: 角速度/ω̇: 角加速度/a: 加速度/θ: 液體轉動的角度/R: 容器半徑/γ: 斜面角度/m: 重物質量/M: 容器質量/f: 摩擦力/T: 力矩/μ: 動態黏度/h: 容器柱高

- A:重物圓心
- B:圓柱圓心
- C:與介面接點
- Ω :角加速度
- Φ :液體轉動的角度
- α :斜面角度
- x :兩連心線對於Y軸的夾角

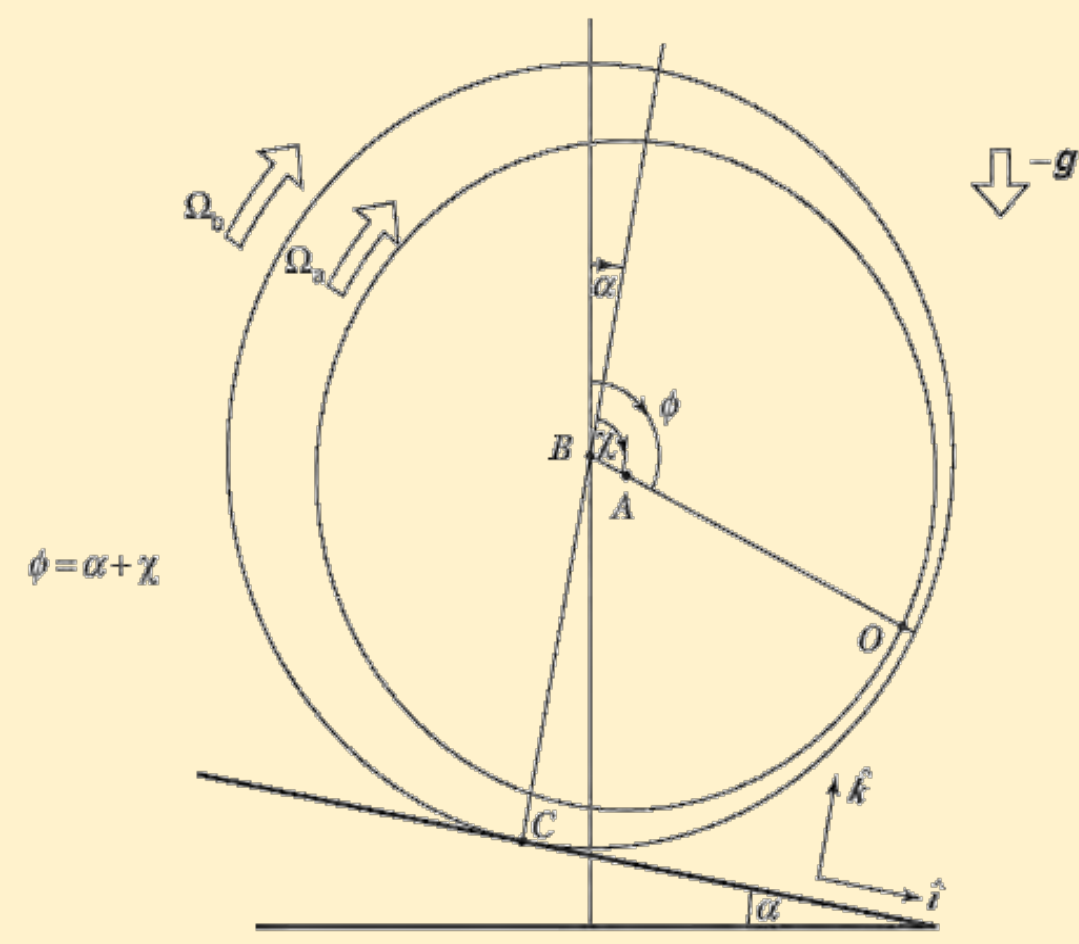


圖 3 充滿黏滯液體的蝸牛球之力圖示意

underdamped
 $\beta < \omega_0$

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\omega_0^2}}$$

$$p = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm i\omega_1$$

$$x(t) = Ce^{-\beta t + i\omega_1 t} + C^* e^{-\beta t - i\omega_1 t} \quad \text{Keep } x(t) \text{ real}$$

$$x(t) = Ae^{-\beta t} [\cos(\omega_1 t + \delta)] \quad \text{complex} \leftrightarrow \text{amp/phase}$$

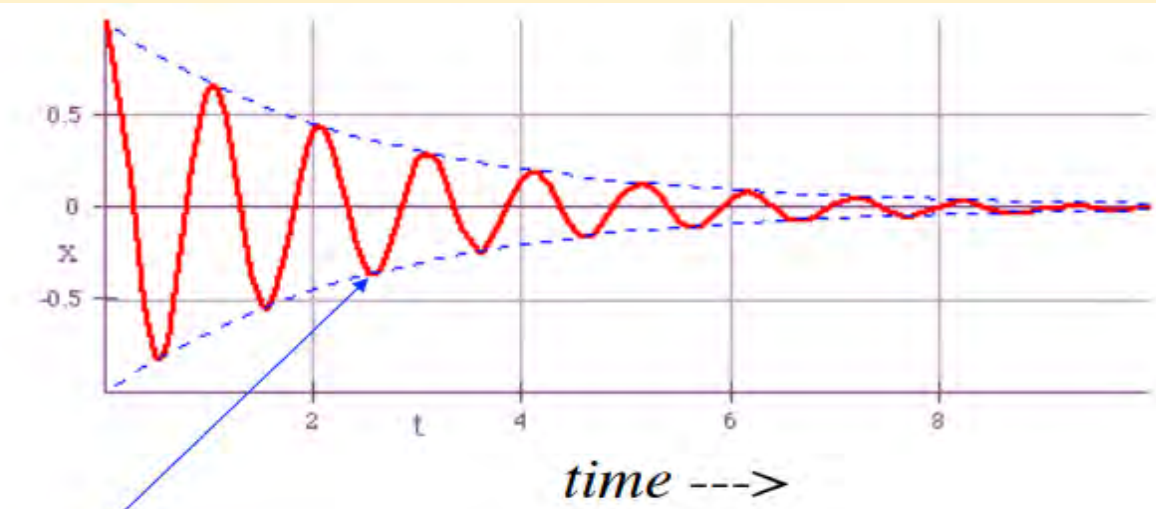


圖 4 以包絡線求得阻尼震盪係數之推導

伍、目前研究結果

對照組

控制變因: $r=2$, 合金柱, 斜面傾角6度, 溫度22 °C, 液量60ml
液量佔容 積百分比:11.79%
重物質量/裝置總質量(容器+重物+蜂蜜):810g/1524g

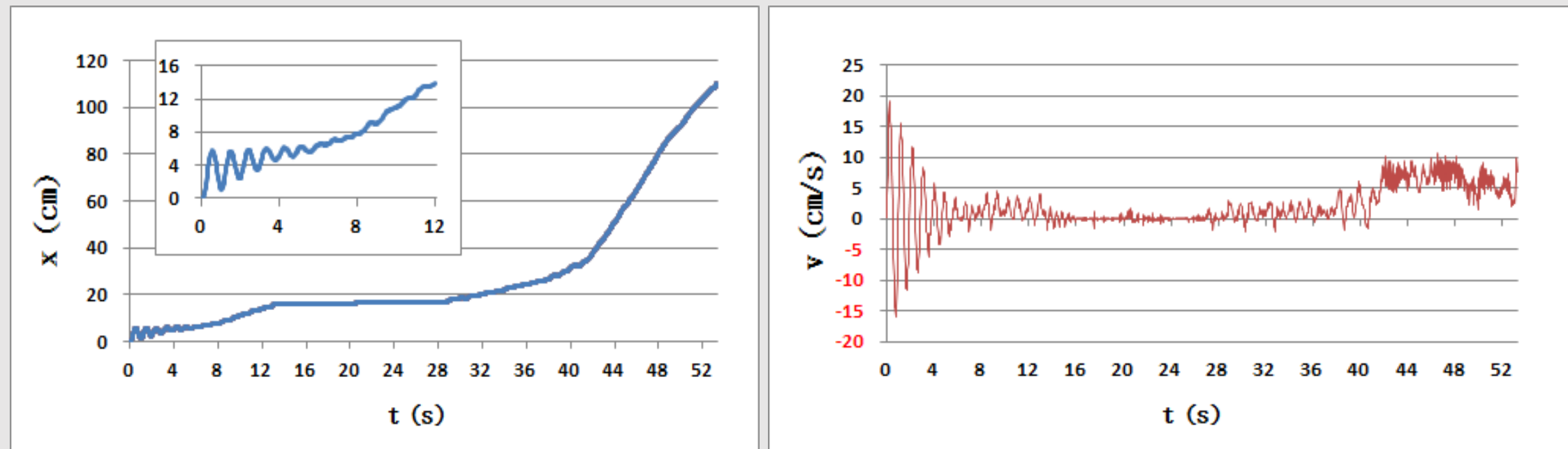


圖5-1 位置與時間關係圖

圖5-2 速度與時間關係圖

實驗一 (操縱變因:黏滯液體的體積)

控制變因: $r=2$, 合金柱, 斜面傾角6度, 溫度22 °C
操縱變因: 液量120ml, 液量佔容積百分比:23.57%
重物質量/裝置總質量(容器+重物+蜂蜜):810g/1608g

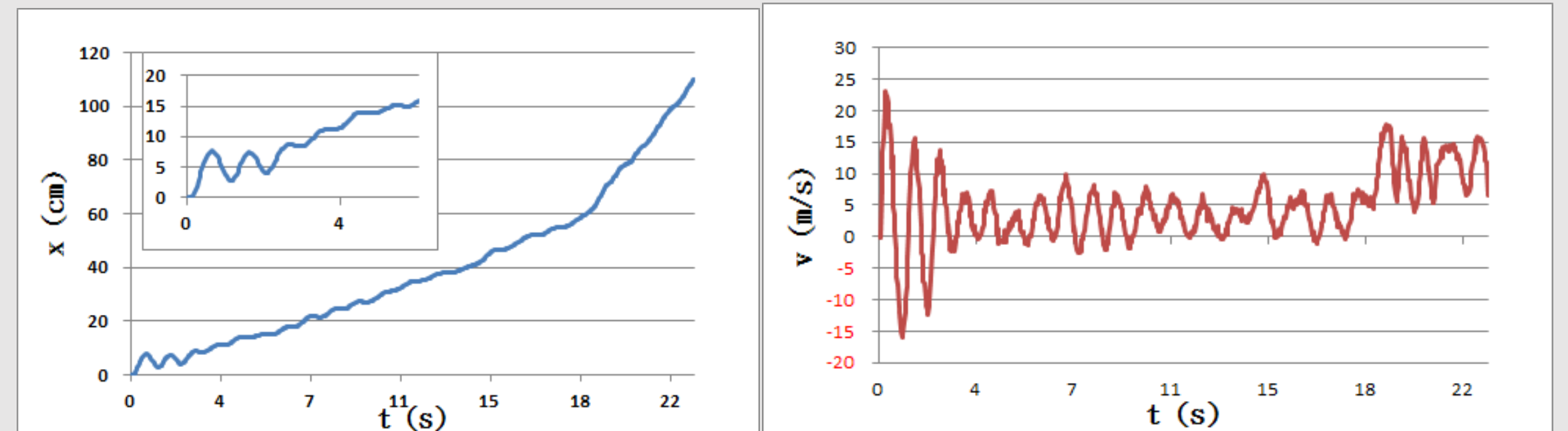


圖6-1 位置與時間關係圖

圖6-2 速度與時間關係圖

實驗二(操縱變因:斜面的角度)

控制變因: $r=2$, 合金柱, 溫度22 °C, 液量60ml
操縱變因: 斜面傾角8度
液量佔容積百分比:11.79%
重物質量/裝置總質量(容器+重物+蜂蜜):810g/1524g

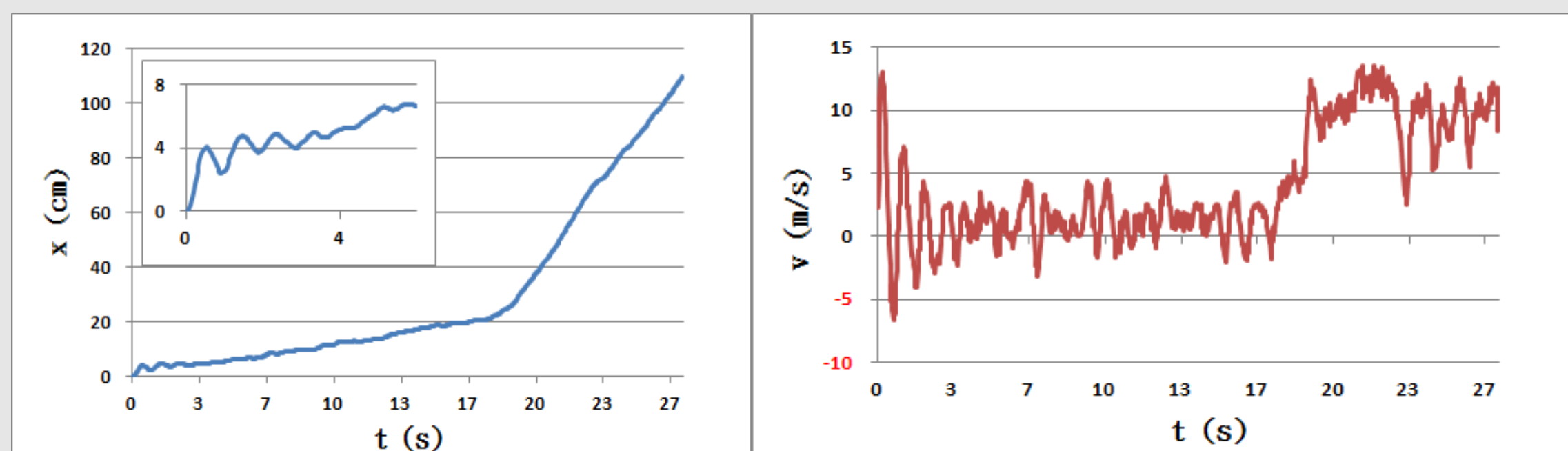


圖7-1 位置與時間關係圖

圖7-2 速度與時間關係圖

實驗三(操縱變因:重物的重量)

控制變因: 斜面傾角6度, 溫度22°C, 液量60ml
操縱變因: C柱(鋁)
液量佔容積百分比: 11.79%
鋁柱質量/裝置總質量(容器+鋁柱+蜂蜜):274g/988g

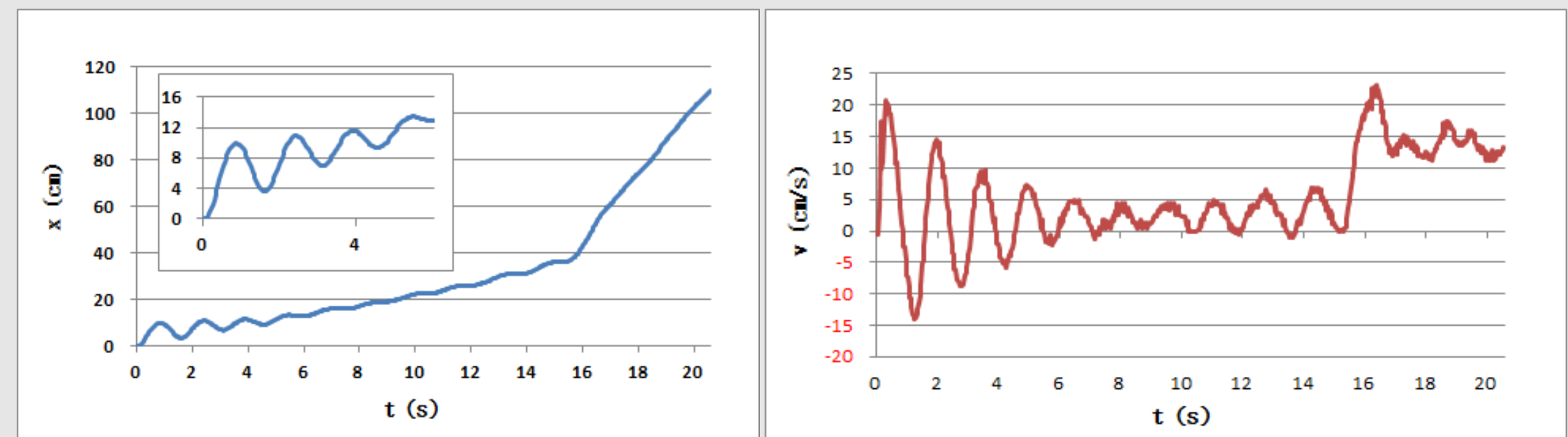


圖8-1 位置與時間關係圖

圖8-2 速度與時間關係圖

實驗四 (將柱體重物換成球體重物(對照組))

控制變因: 甲球, 265ml蜂蜜, 溫度22°C
操縱變因: 斜面傾角2度
液量佔容積百分比: 52.14%
重物質量/裝置總質量(容器+重物+蜂蜜):563g/1277g

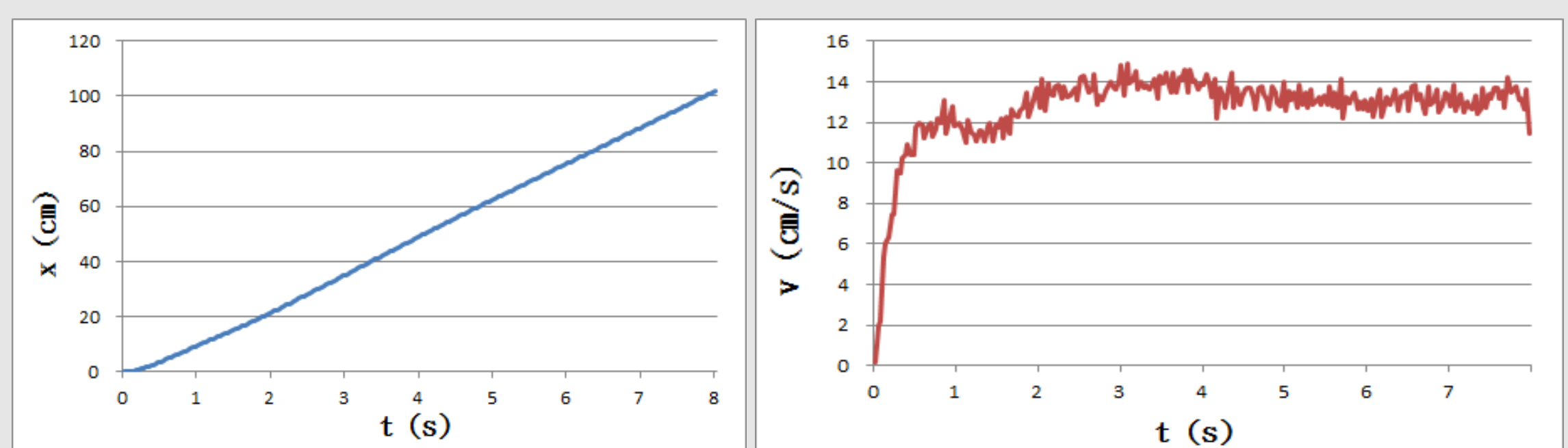


圖9-1 位置與時間關係圖

圖9-2 速度與時間關係圖

實驗五 將柱體重物換成球體重物(實驗組)

控制變因: 甲球, 265ml蜂蜜, 溫度22°C
操縱變因: 斜面傾角 7度
液量佔容積百分比: 52.14%
重物質量/裝置總質量(容器+重物+蜂蜜):563g/1277g

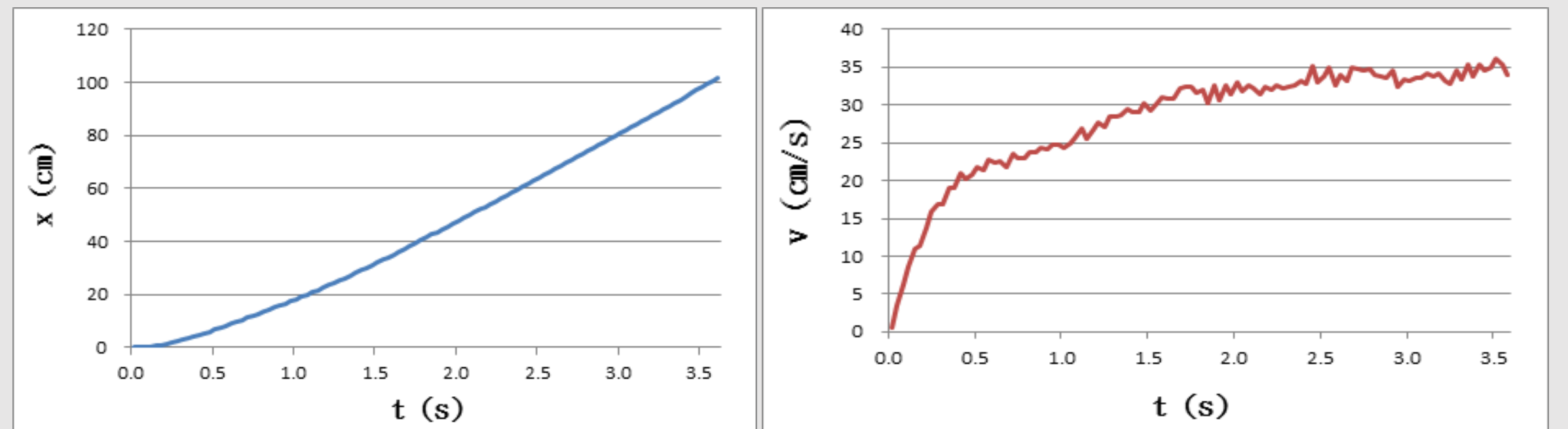


圖10-1 位置與時間關係圖

圖10-2 速度與時間關係圖

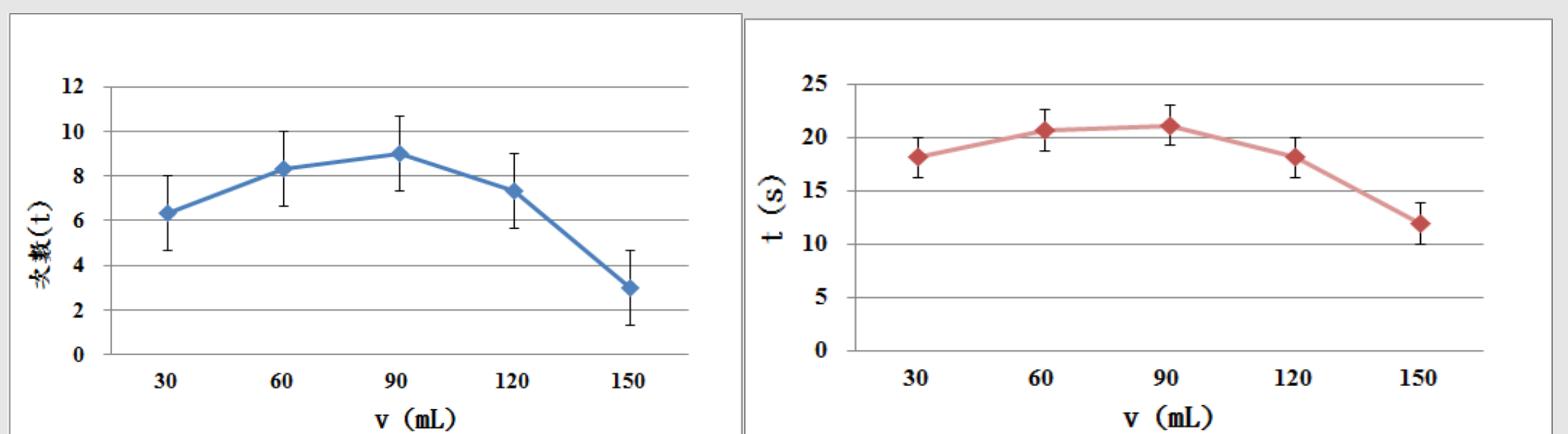


圖11-1 液體體積與減速次數關係

圖11-2 液體體積與時間關係圖

C柱, 傾角6度, 22°C, 圖表

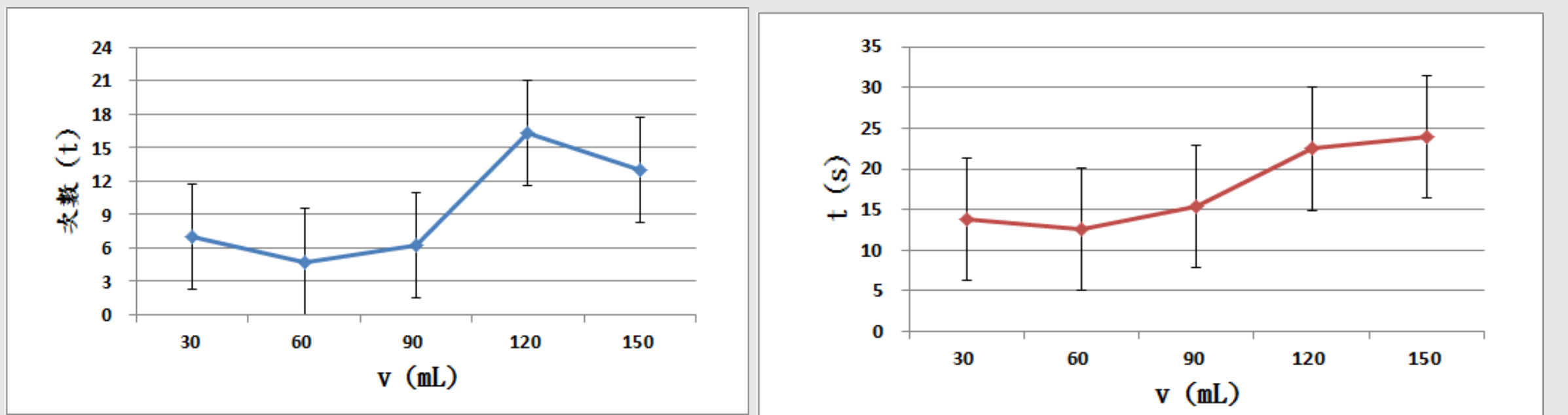


圖12-1 液體體積與減速次數關係圖

圖12-2 液體體積與時間關係圖

B柱, 傾角6度, 22°C, 圖表

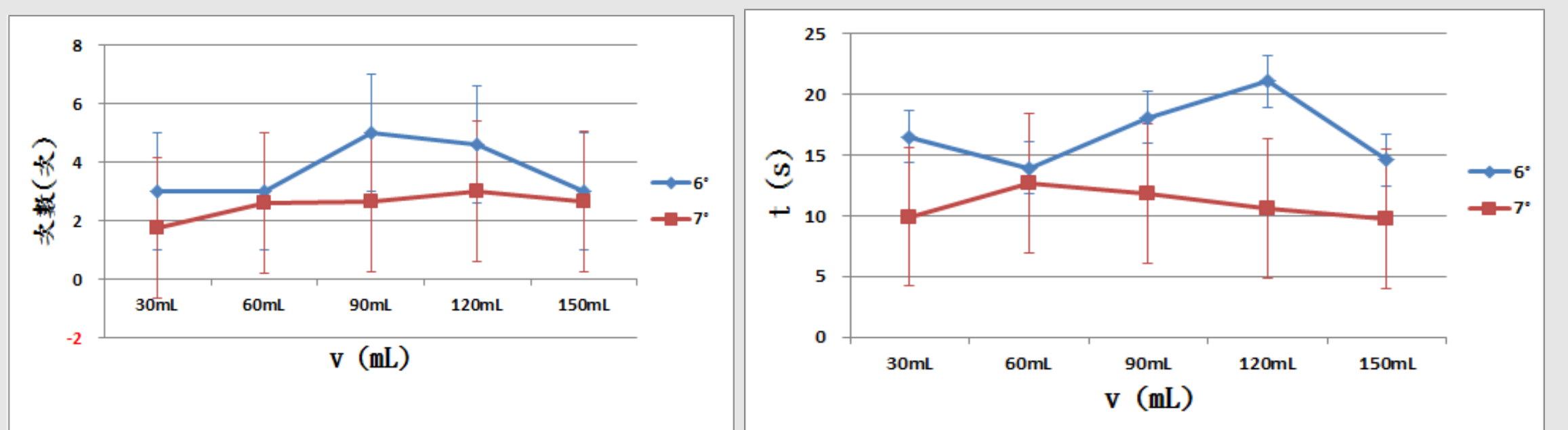


圖13-1 液體體積與減速次數關係

圖13-2 液體體積與時間關係圖

E柱, 22°C, 圖表

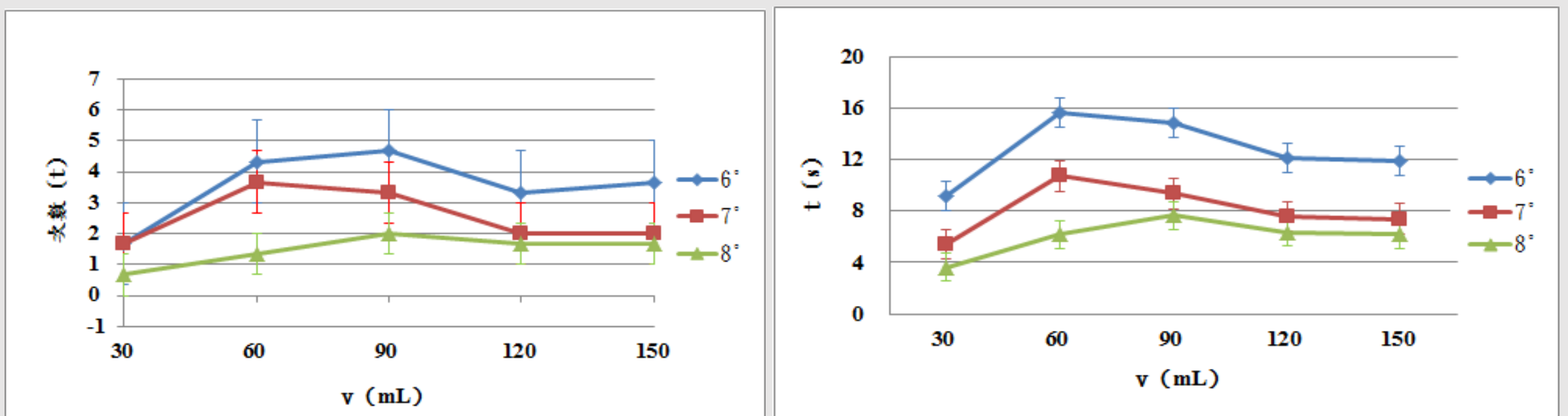


圖14-1 液體體積與減速次數關係圖

圖14-2 液體體積與時間關係圖

E柱, 30°C, 圖表

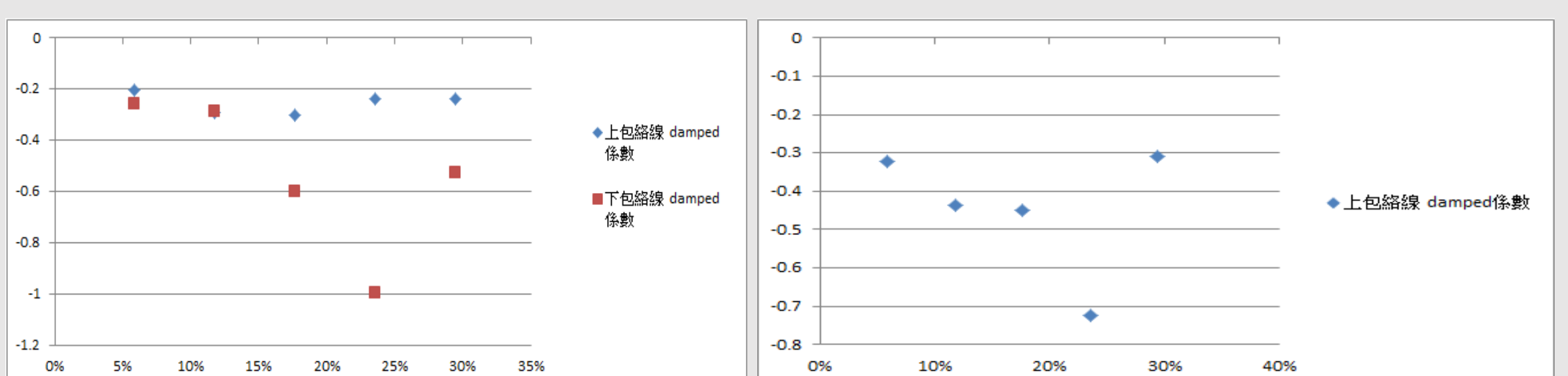


圖15-1 C柱液量佔容積百分比對包絡線阻尼係數關係圖

圖15-2 B柱液量佔容積百分比對包絡線阻尼係數關係圖

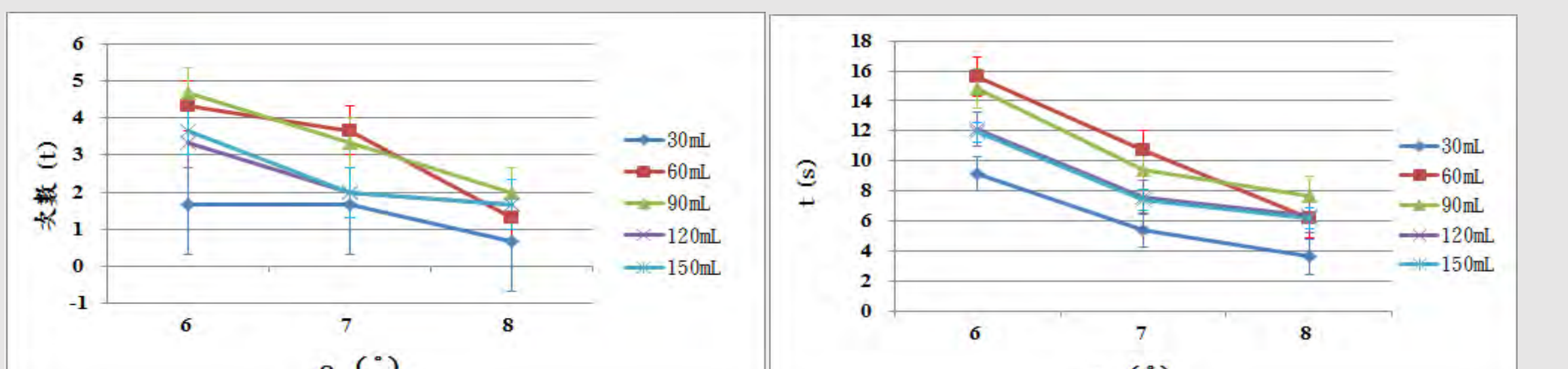


圖14-3 角度與平均減速次數關係圖

圖14-4 角度與時間關係圖

表 5 溫度與黏滯係數關係

液體溫度 °C	黏滯係數 η ($m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$) s
21.9	9.2080
21.9	9.2365
22.3	9.4774
22.3	9.1024
24.5	7.4674
25.9	6.7096
28.0	7.2706
30.1	4.1684
30.8	5.3182
31.0	5.5947
31.1	4.4090
31.5	4.4163
31.6	4.6302

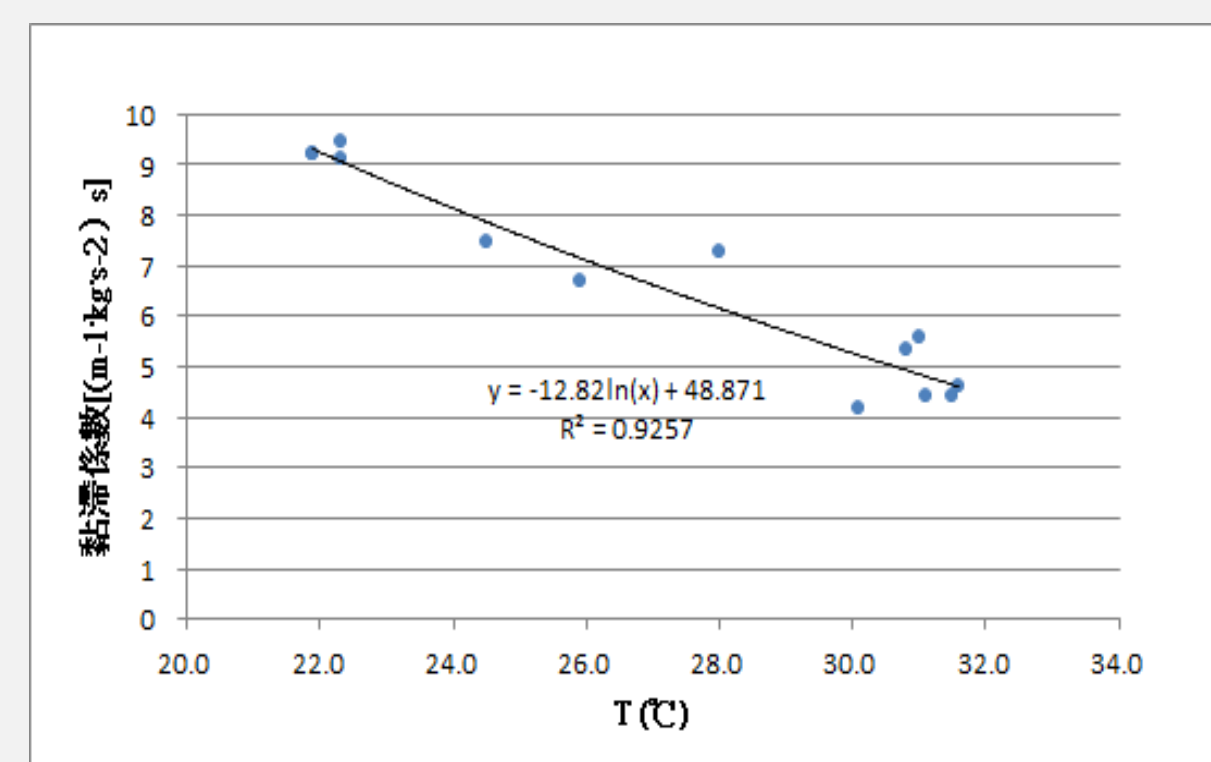


圖16 黏滯係數與溫度關係圖

黏滯係數計算公式

$$\eta = \frac{mgR^2t}{4\pi HS} \left[\frac{1}{R_A^2} - \frac{1}{R_B^2} \right]$$

陸、討論

經多次實驗發現，在軌道前半段時，容器會進行規律的運動，而經過整理後我們發現這種規律的運動是類似於次阻尼的擺盪，當黏滯液體完全流至重物前方後，容器便沒有減速的現象。而容器移動時，液體會慢慢流向前方，而流向前方液體體積和重物半徑呈負相關。由此可知，半徑越大的重物減速的次數越多，當次阻尼擺盪現象消失後，容器會逐漸加速，而後重物會因為黏滯液體的摩擦力而被帶往容器後方，而其造成的力矩會使容器的速度漸趨穩定。而且我們發現，溫度對蜂蜜的黏滯係數有顯著的影響。

r=2，合金柱, 蜂蜜60mL，斜面傾角6度，溫度22°C 為例

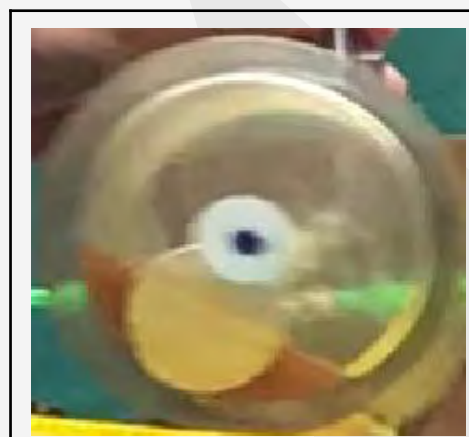


圖 16-2

2. 第一次正向速度最大值
因為此時加速度=0，故認為：對容器圓心而言，圓柱與斜面間的摩擦力造成的力矩與金屬棒和黏滯液體的重力力矩相抗衡。

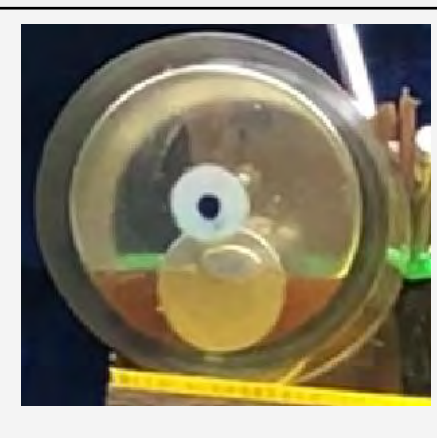


圖 16-1

1. 起始點
容器固定在斜坡最頂端，在靜止的狀態下，金屬棒和蜂蜜停留在容器最底端處。



圖 16-3

3. 運動折返點
速度第一次回到零，由正向的速度要變往負向，由圖中可清楚看出金屬棒和蜂蜜在容器中的相對位置。

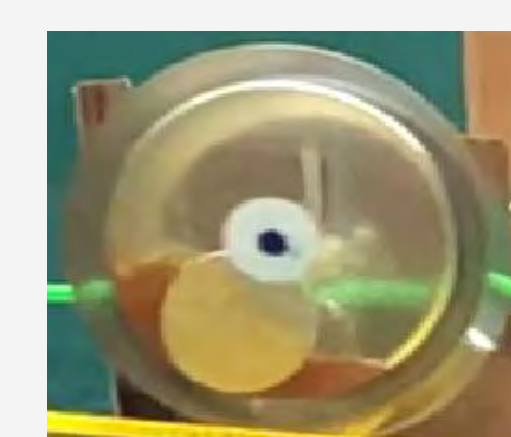
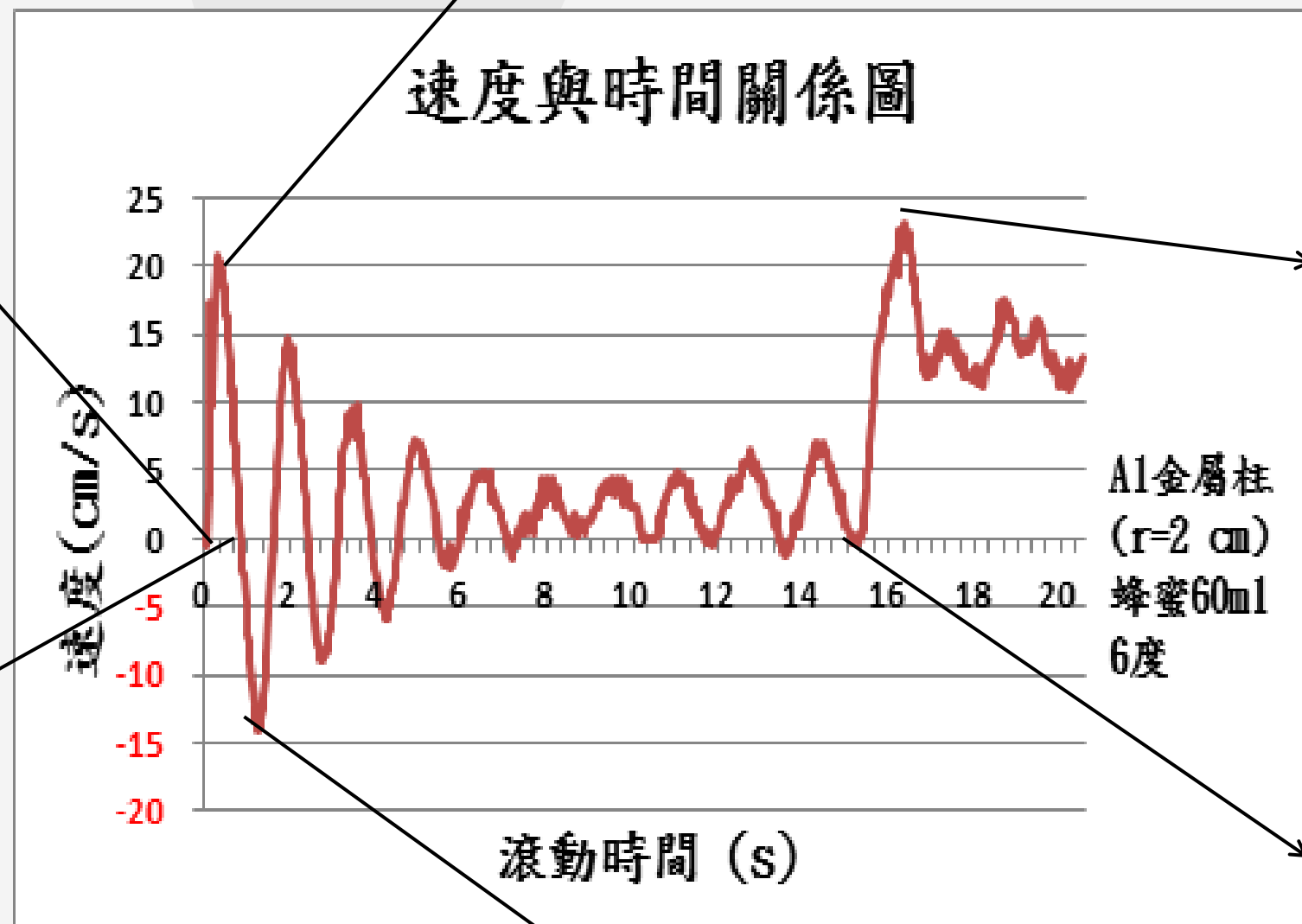


圖 16-4

4. 第一次負向速度最大值
此時因為此時加速度=0，故認為：對容器圓心而言圓柱與斜面間的摩擦力造成的力矩與金屬棒和黏滯液體的重力力矩相抗衡。

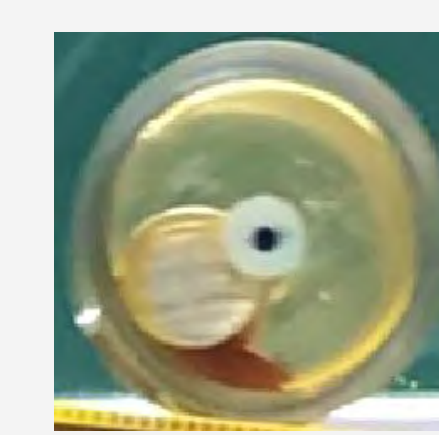


圖 16-6

6. 第二次正向速度最大值
因為容器壁上的蜂蜜集中到金屬柱前方，所以金屬棒能被帶到較高的位置，造成更大的力矩使加速的現象消失。

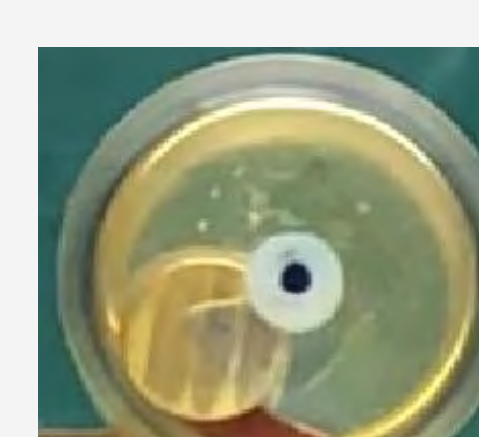


圖 16-5

5. 急遽加速前
蜂蜜幾乎附著在容器壁上，金屬棒後方已沒有蜂蜜，蜂蜜無法把金屬棒帶起至更高處，使金屬棒相對於圓心的重力力矩不足，造成整個容器加速向前

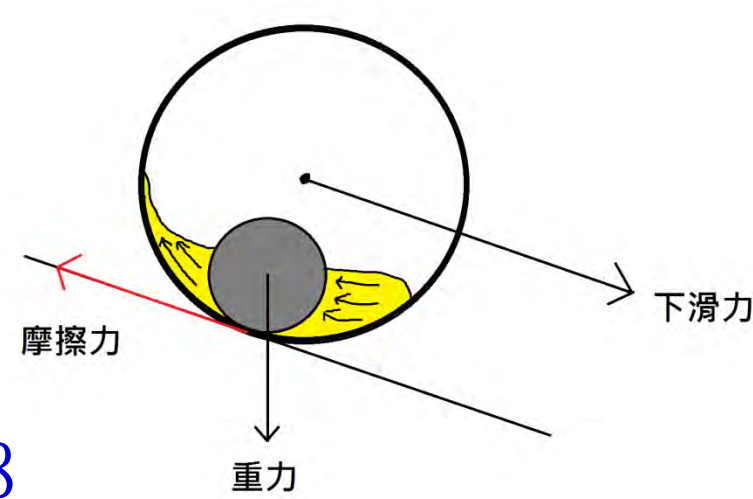


圖16-8



圖16-7

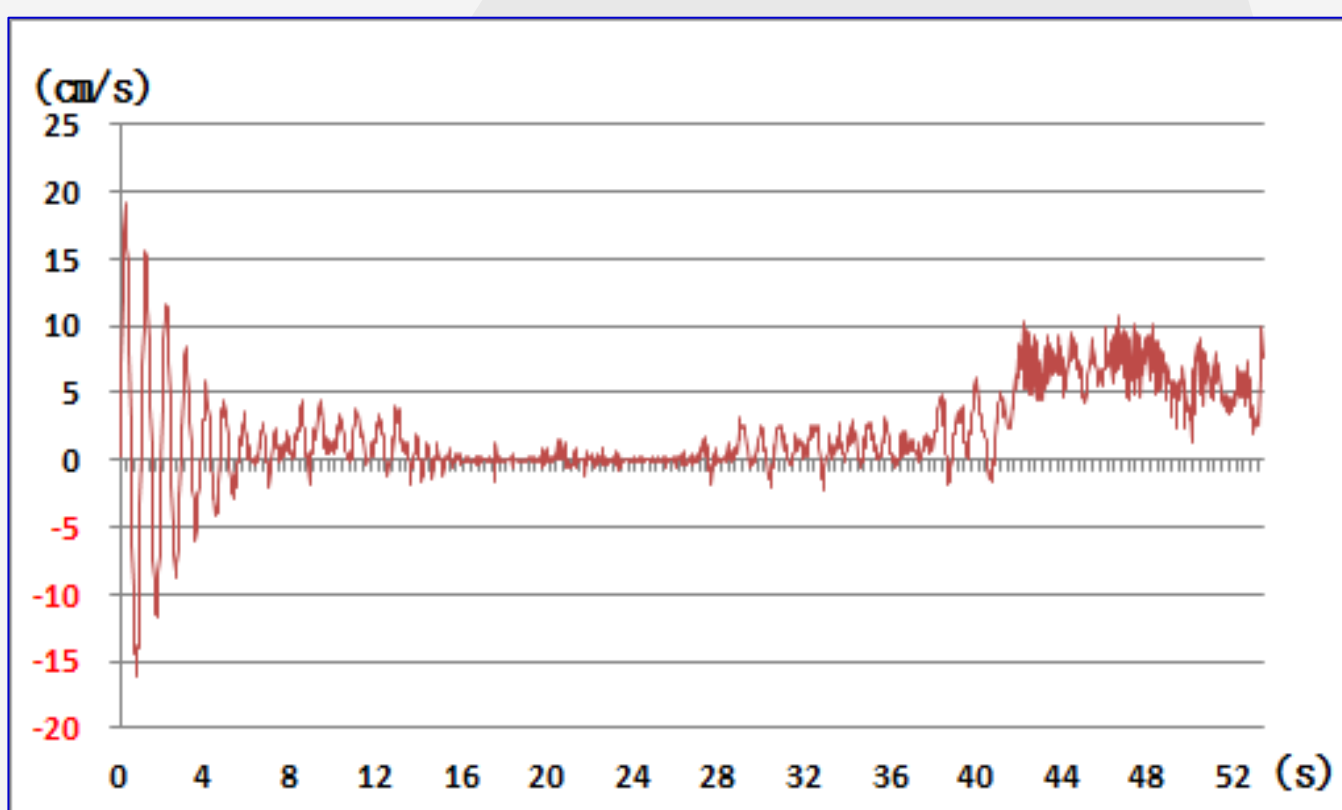


圖17-1: r=2，合金柱，斜面傾角6度，22°C，60mL蜂蜜速度與時間關係圖

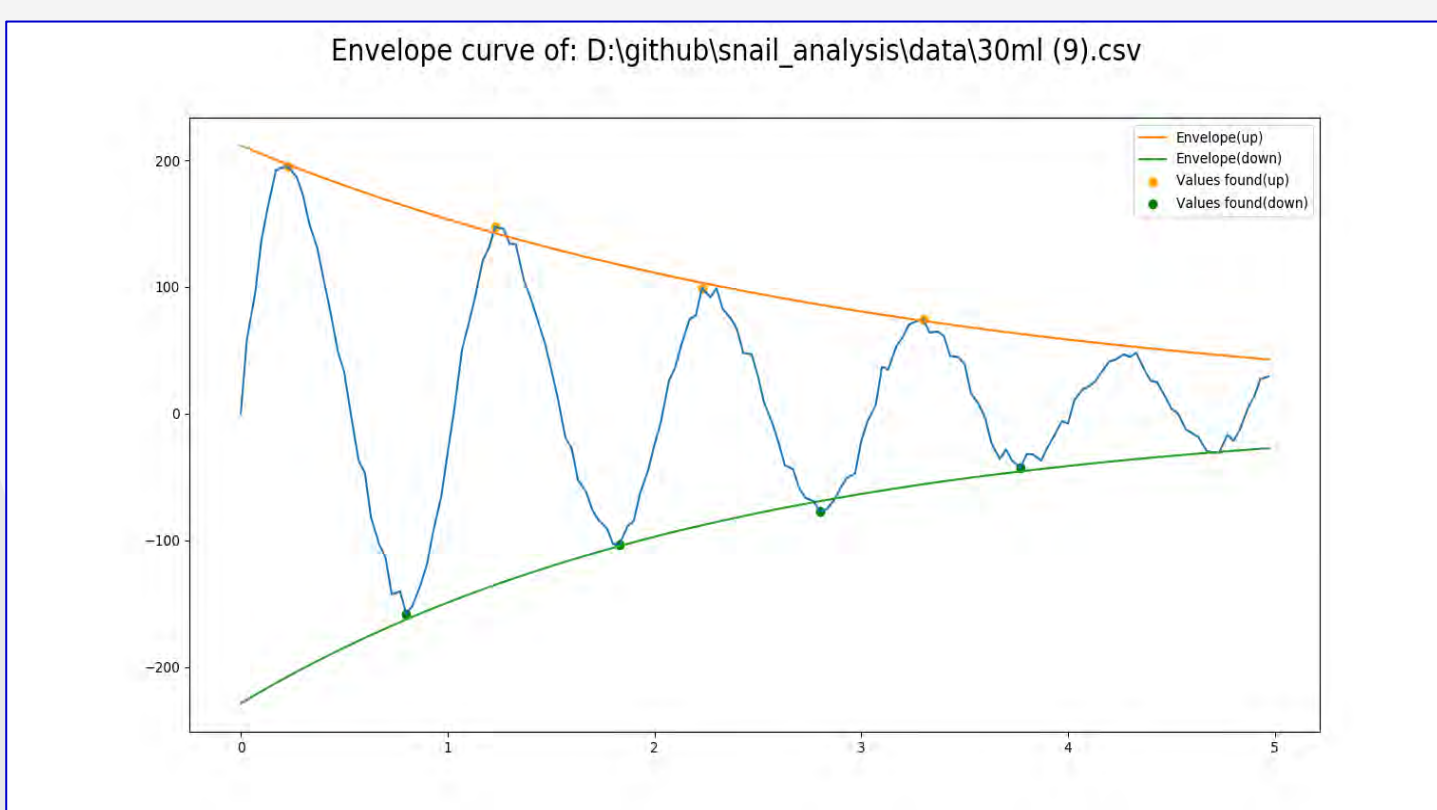


圖17-2: r=2，合金柱，斜面傾角8度，22°C，30mL蜂蜜速度與時間關係圖 $\beta = 0.321$

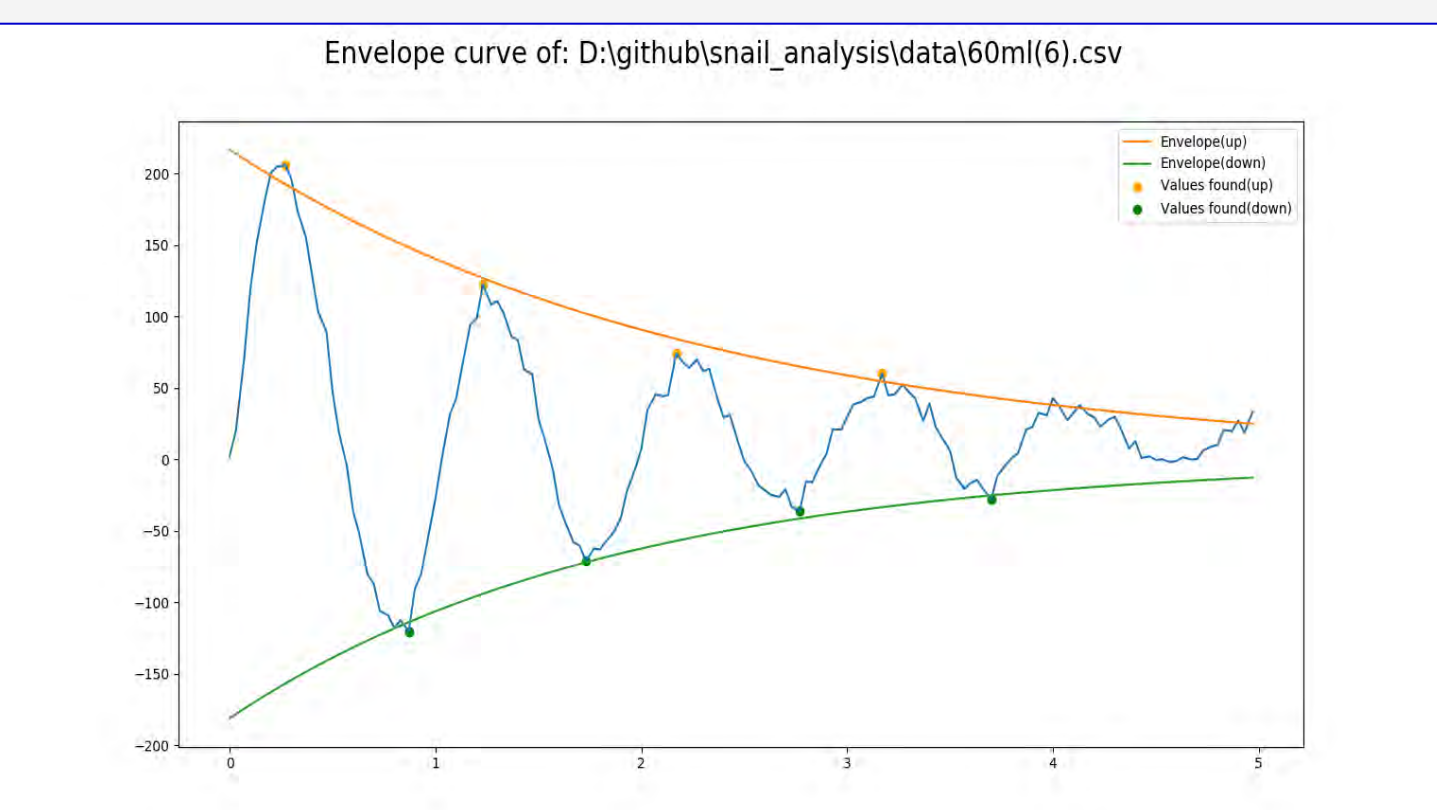


圖17-3: r=2，合金柱，斜面傾角8度，22°C，60mL蜂蜜速度與時間關係圖 $\beta = 0.434$

柒、結論

1. 我們發現在在每一筆數據中，會有一種體積有最好的減速效果。
2. 在我們的實驗數據中，我們發現，斜面傾角越大，容器的滾動速度越快，時間越短，平均減速次數也越少。
3. 蜂蜜（黏滯液體）的黏滯係數越低，蝸牛球的減速次數也越少，滾落時間少於溫度低的另一組實驗數據。
4. 我們發現在容器進行急遽加速前的震盪運動是次阻尼震盪。
5. 我們發現在容器進行急遽加速前的震盪運動的振幅隨時間呈指數衰減。
6. 因為球體的形狀係數較小，所以無法被黏滯液體牽引，以至於達不到像柱體一樣的震盪效果。

捌、參考資料及其他

1. 蝸牛球，維基百科。
2. NTCU科學遊戲Lab:怪怪球，國立台中教育大學NTCU科學教育與應用學系科學遊戲實驗室。
3. 『電池跳、挑電池～探討 3 號鹼性電池電量與電池 彈跳及滾動行為之關聯性』，全國科展56屆國中物理科第一名作品。
4. ”液兒液兒瓶中轉”，中華民國第58屆中小學科學展覽會物理與天文學科第一名。
5. Supekar, R. B., Panchagnula, M.V. (2014). Dynamics and stability of a fluid filled cylinder rolling on an inclined plane, Supekar2014DynamicsAS.
6. Neil J. Balmforth, John W M Bush, (2007). Dissipative descent: Rocking and rolling down an incline, Journal of Fluid Mechanics 590, 295-318.
7. 吳邦寧, (2019). snail_analysis. https://github.com/lawrence910426/snail_analysis.
8. 鍾少軒, (2009). 滾動液罐中液體作用之探討，