

中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

051807

1atm-大氣壓力相關性探討

學校名稱：桃園市立武陵高級中等學校

作者： 高二 張鎮捷 高二 陳以哲 高二 林家鴻	指導老師： 游彥辰
---	------------------

關鍵詞：大氣壓力均勻程度、相關長度、
pair correlation function

摘要

可以由生活中的經驗發現：儘管在同一水平高度，氣壓均勻與否(相關性)的現象仍足以巨觀的影響著液氣交界面的平衡狀態。在此研究中，首先提出了數學模型推導平衡時的條件、並以裝有液體的倒立有孔容器之實驗來相互印證，檢視本篇研究中理論假設的正確性-----氣壓的相關性直接影響了開孔的幾何圖形(開孔個數，大小，和形狀)。且在大小形狀皆異的開孔圖形中，我們發現「代表長度 D 」可以描述各圖形所覆蓋範圍的相關性。

壹、研究動機

排便不順時，想飲上幾瓶幫助腸胃蠕動的養樂多，不料戳開鋁箔封口時，錯估了開孔大小，導致養樂多僅能斷斷續續的流出，壞了效率。

面對此現象面我們都知道「大氣壓力」為其謎底-----76 公分汞柱高的大氣壓力扮演了抑制養樂多流下的角色。不過同一現象的另一面卻也揭露了一項光是力平衡也無法解釋的事實：斷斷續續流出的養樂多又憑什麼斷斷續續的「流出」？

這並不是一個「瓶身傾斜與否」的問題。

經驗再次告訴了我們，縱使瓶身鉛直朝下，不該流下的還是會流下!本人因此重新檢視了力平衡的條件：瓶高不過十公分的液高，乘上僅略高於食鹽水的密度，根本無法與 76 公分汞柱高的大氣壓力相提並論，理論上離臨界的平衡條件還很遠，為什麼養樂多卻會流下呢？

「開口大小」是經驗給我們的唯一線索-----若戳開封口時，僅以半徑不過小吸管的圓形面積為開口時，大氣壓力成功的如上述預期般支撐著養樂多。顯然，開口的大小在此問題背後，勢必隱藏著什麼物理秘密。

開口孔徑為控制變因、溶液流下與否為應變變因-----我們探討大氣相關性(均勻程度)的研究隨之開始。

貳、研究目的

- 一、透過理論分析和實驗探討，找出溶液平衡時、恰平衡時、以及不平衡時的條件和狀態，說明氣壓相關性對力平衡的貢獻，並希望以此推廣至任意容器。
- 二、藉由已知的研究可知，氣壓的相關性和參考點的距離(一維)息息相關，且前人已寫有兩函數 Pair Correlation Function & Radial Distribution Function 來描述其(一維)相關性。我們希

望為占有面積(二維)的開孔找到合理的轉換方式，以描述該圖形範圍的氣壓相關性。

三、探討開有兩孔洞的容器，量測其在溶液恰平衡時的兩孔洞間距。若將開孔孔徑逼近至零(即視兩開孔為兩點)，則此幾何關係退化成一維，方可使用 Pair Correlation Function & Radial Distribution Function 解釋其關係。

參、研究設備及器材

一、實驗器材：液體表面張力係數測定儀、罐子、有孔蓋、自製器材、相機、水平儀

二、實驗溶液：水、飽和糖水、飽和鹽水、飽和麩胺酸鈉溶液 (將於 陸.討論 中提及使用此四種溶液之理由)



圖（一）液體表面張力係數測定儀



圖（二）矩形孔蓋



圖（三）圓形孔蓋



圖（四）自製器材

肆、研究過程及方法

一、研究原理介紹

(一) 計算溶液未落下時 (平衡) 的各項狀態

如圖 (五) 所示 (圖 (五) 為自製儀器的簡圖):

→ 令 P 為瓶內氣壓、 h 為瓶內液高、 θ 為接觸角、 r 為孔洞半徑、 R 為容器底面半徑、 P_0 為大氣壓力

值、 S 為溶液和大氣的接觸面積、 V 為瓶外溶液體積

→ 在此, 若 θ 甚小, 瓶外溶液形狀可近似為圓錐形, 則有:

$$\text{表面積 } S(\theta) = \pi \cdot (r \sec \theta)^2 \cdot \frac{r}{r \sec \theta} = \pi r^2 \sec \theta$$

$$\text{體積 } V(\theta) = \frac{1}{3} \pi r^3 \tan \theta$$

→ 平衡時, 系統須滿足 1. 鉛直軸力平衡 2. 虛功原理

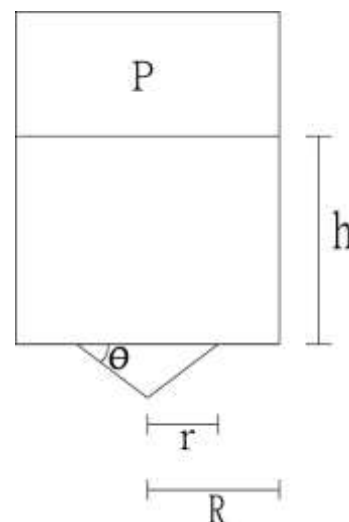


圖 (五)

1. 鉛直軸力平衡:

$$T \cdot 2\pi r \cdot \sin \theta + P_0 \cdot S \cdot \cos \theta - (P + \rho gh) \cdot \pi r^2 - \rho \cdot V \cdot g = 0$$

$$\therefore T \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot r \cdot (P_0 - P - \rho gh) - \frac{1}{6} \cdot \rho g r^2 \cdot \tan \theta = 0 \dots \dots \dots \text{(式一)}$$

2. 虛功原理:

表面張力作功+重力作功+容器內氣體作功+容器外氣體作功=0

其中的狀態變化極小(由 θ 變至 $\theta + \delta \theta$, 其中 $\delta \theta \rightarrow 0$)

$$-T \cdot \delta S(\theta) - \delta U + P \cdot \delta V(\theta) - P_0 \cdot \delta V(\theta) = 0$$

$$\therefore -T \cdot \pi r^2 \cdot \delta \sec \theta + \left\{ \begin{array}{l} \rho \cdot \pi R^2 \cdot h \cdot g \cdot \frac{h}{2} - \rho \cdot \pi R^2 \cdot (h + \delta h) \cdot g \cdot \frac{h + \delta h}{2} \\ \rho \cdot V(\theta + \delta \theta) \cdot g \cdot \frac{r \cdot \tan(\theta + \delta \theta)}{4} - \rho \cdot V(\theta) \cdot g \cdot \frac{r \cdot \tan \theta}{4} \end{array} \right. + (P - P_0) \frac{1}{3} \pi r^3 \delta \tan \theta = 0$$

考慮一個函數 $f(x)$,

在函數值為 $f(x + \delta x)$ 的近似值為 $f(x + \delta x) \approx \frac{df(x)}{dx} \cdot \delta x + f(x)$, 其中 $\delta x \rightarrow 0$ 。則

上式可改寫為:

$$-T \cdot \pi r^2 \cdot \frac{d \sec \theta}{d\theta} \delta\theta - \rho \cdot g \cdot \pi R^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{dh^2}{dh} \delta h + \frac{1}{12} \cdot \rho \cdot g \cdot \pi r^3 \cdot \frac{d \tan^2 \theta}{d\theta} \delta\theta + (P - P_0) \cdot \frac{1}{3} \pi r^3 \cdot \frac{d \tan \theta}{d\theta} \delta\theta = 0$$

$$\therefore T \sin \theta + \frac{1}{3} \cdot r \cdot (P_0 - P - \rho gh) - \frac{1}{6} \cdot \rho g r^2 \cdot \tan \theta = 0 \dots \dots \dots \text{(式二)}$$

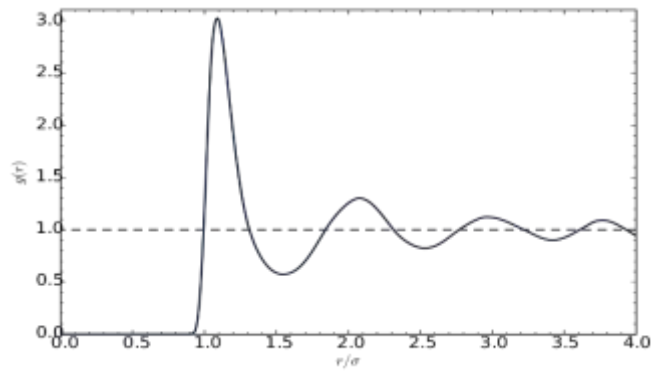
由(式一) & (式二) 等價可知:

$$\begin{cases} P + \rho gh = P_0 \dots \dots \dots \text{(結論一)} \\ \cos \theta = \frac{\rho g r^2}{6T} \dots \dots \dots \text{(結論二)} \end{cases}$$

→ (結論一) 適用於任何溶液未落下時的系統狀態 (未必是臨界狀態), 此結論將由實驗二證明。另外 (結論二) 僅適用於 θ 甚小時的任何平衡狀態, 且推測臨界 r (溶液恰好落下時) 是由氣壓不均勻造成的 (將由實驗二、三說明)

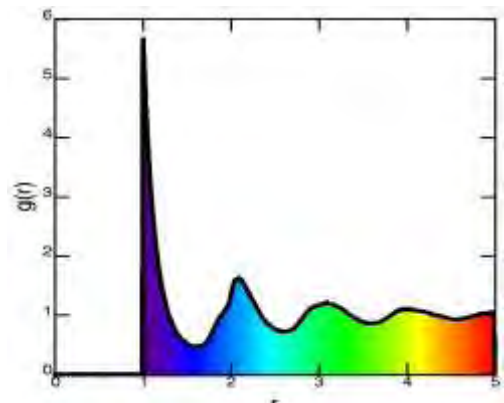
(二) 臨界 r (溶液恰好落下時) 與大氣均勻程度有關

Pair Correlation Function & Radial Distribution Function 是兩個描述氣壓相關性的函數, 所謂相關性即是指氣壓的均勻程度, 我們推測其造成溶液無法平衡(即溶液恰好落下時, 臨界 r 和氣壓均勻程度相



圖(六) Radial Distribution Function

關), 但是由於 Pair Correlation Function & Radial Distribution Function 僅能描述相距任意長度的兩點的相關性, 因此對於佔有一個面積的孔洞, 我們希望找到一個轉換方式, 將開孔圖形轉換至某一具長度性質的量值 (需和圖形的面積與幾何形狀有關)。而對於任意孔洞圖形, 水恰好落下時氣壓不均勻程度應相同, 所以上述由圖形轉換的長度量值(為求方便, 命此長度為「代表長度 D 」)應相同。



圖(七) Pair Correlation Function

(三) 找出合理的「代表長度 D 」

下述計算皆是建立在溶液跟空氣的接觸面是平面而非曲面時，因此若（結論二）的 $\cos \theta$ 值趨近於 1，下述的計算會成立。我們考慮兩個將於實驗中用到的孔洞圖形（圓形與矩形），則上述描述圖形的代表長度 D 之計算方法為：對圖形內所有點到圖形邊界的距離平均。

1. 圓形之代表長度 D

→ 令圖形內任一點 P 到圓心距離為 r ， P 點到邊界任一點距離為 $a(\theta)$ 、圓半徑為 R

→ 由幾何關係可知：

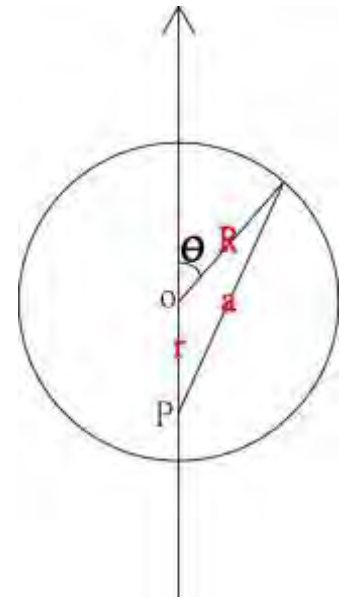
$$a(\theta)^2 = r^2 + R^2 + 2rR \cos \theta$$

→ 給定一點 P ，將其到邊界的距離平方對邊界平均：

$$\frac{\oint a(\theta)^2 \cdot dl}{\oint dl} = \frac{\int_0^{2\pi} [r^2 + R^2 + 2rR \cos \theta] \cdot r d\theta}{2\pi R} = r^2 + R^2$$

→ 將上述平均值對圓內 P 的所有可能位置做平均，即為 D^2 ：

$$D^2 = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 + R^2) \cdot dr \cdot d\theta}{\int_0^R dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta} = \frac{4}{3} R^2$$



圖(八)

2. 矩形之代表長度 D

→ 令 $P(x_p, y_p)$ 為圖形內任一點，其到邊界的距離為 a ，圖形為一 $U \times V$ 的矩形

→ 由幾何關係可知：

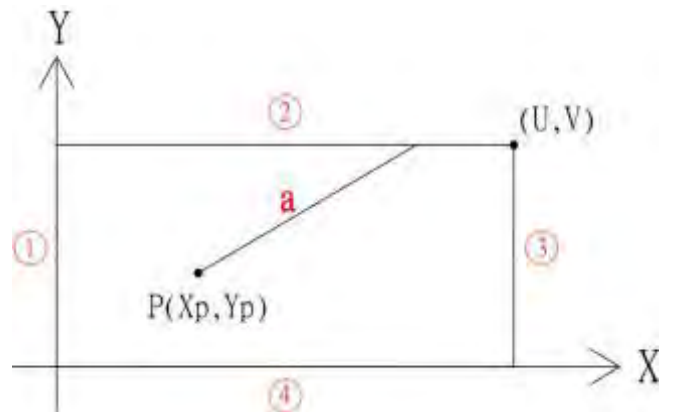
$$a_1^2 = x_p^2 + (y - y_p)^2$$

$$a_2^2 = (x - x_p)^2 + (y_p - V)^2$$

$$a_3^2 = (x_p - U)^2 + (y - y_p)^2$$

$$a_4^2 = (x - x_p)^2 + y_p^2$$

→ 給定一點 P ，將其到邊界的距離平方對邊界平均：



圖(九)

$$\frac{\oint a^2 \cdot dl}{\oint dl} = \frac{\int_0^V a_1^2 \cdot dy + \int_0^U a_2^2 \cdot dx + \int_0^V a_3^2 \cdot dy + \int_0^U a_4^2 \cdot dx}{2U+2V} = \frac{f(x_p, y_p)}{2U+2V}$$

→將上述平均值對矩形內P的所有可能位置做平均，即為D的平方：

$$D^2 = \frac{\int_0^V \int_0^U \frac{f(x_p, y_p)}{2U+2V} \cdot dx_p \cdot dy_p}{\int_0^U dx_p \cdot \int_0^V dy_p} = \frac{1}{6}(U^2 + U \cdot V + V^2)$$

二、實驗中不易避免的影響「開洞」

室內氣壓計的量測可能僅因為進出該空間時的微擾，而造成量測值的劇烈跳動。對於尺度遠小於屋內容積的量測的大氣相關性研究，我們面臨到一項不易避免的影響：溶液和大氣的接觸面(在接觸角甚小時，接觸面即為開孔圖形)受「開洞」此一步驟的影響不可忽略，並直接成為了將下述實驗分為實驗二、三的原因之一（另一原因於目的三中提及）。

三、實驗操作說明

(一) 實驗一：利用「液體表面張力係數測定儀」，測出四種溶液的表面張力。

(二) 實驗二：用「自製器材」做實驗（開孔為圓形）：操縱變因為圓形開孔的孔徑。

步驟一：將裝滿水的容器倒立，並在溶液流下的過程中、流光前尋找平衡位置。(此動作的初衷即是源於避免開洞的步驟)

步驟二：先後調整水壓和氣壓（杯口針筒調整水壓，杯底針筒調整瓶內氣壓，以達到杯口開孔處總壓力一致），直至一定值時停止調整。

步驟三：不斷更換更大的蓋子孔徑，重複上述步驟直到找到在步驟二的調整階段停止前就崩潰的孔徑大小，即為臨界孔徑（溶液恰落下）。

(三) 實驗三：用開孔形狀為矩形之容器做實驗：操縱變因為矩形之一邊邊長，應變變因為量測到之矩形另一邊邊長。

步驟一：將蓋子開出矩形的洞，拿一片薄片蓋住杯口之矩形開孔（此時瓶子倒立）。

步驟二：將蓋子從一側抽開，紀錄水恰滴下時，開孔的幾何形狀。

將多組之實驗結果的代表長度 D 相互比較，並再與實驗二中圓形開孔的實驗結果比較。

(四) 實驗四：用開有兩個等大孔洞的容器做實驗（兩孔洞圖形皆為圓形）：操縱變因為開孔孔徑，應變變因為兩開孔間距。

步驟一：將蓋子開出兩等大孔洞，並進行實驗二中的步驟一和步驟二（分別對孔徑為 6mm, 8mm, 10mm 的三組做實驗）。

步驟二：每組實驗中，不斷更換間距更大的蓋子，直到溶液恰好落下，記錄其間距（在此定義兩開孔的間距為圓心距）。

伍、研究結果

一、實驗一：利用「液體表面張力係數測定儀」，測出四種溶液的表面張力

此實驗之原理是以扭矩測到的最大角度計算，各溶液的表面張力量值正比於此最大角。

(由於此實驗與大氣壓力之相關性較無關係，故詳細的實驗原理將於討論中才介紹)

溶液種類	扭矩測到之最大角（度）					最大角之平均值	表面張力 (mJ/m^2)
水	211±1	222±1	244±1	217±1	226±1	224.0±12.5	72.75(已知)
飽和麩胺酸鈉溶液	189±1	177±1	194±1	192±1	174±1	185.2±9.1	60±3
飽和食鹽水	236±1	213±1	238±1	244±1	232±1	232.6±11.8	75±4
飽和糖水	202±1	212±1	217±1	220±1	218±1	214.8±7.2	69±3

二、實驗二：用「自製器材」做實驗

此實驗中，我們調整容器內液壓及氣壓時，發現：

注入溶液時，等量的溶液從開孔處低落；抽出空氣時，等量的氣體隨即從開孔處注入容器內。

由此得知容器內始終維持一定值，與（結論一）相符合，且其定值為一大氣壓。其等價含義為：在實驗步驟一的尋求平衡位置階段，不論同一溶液是在何時（任一的 P 和 h ）達到平衡狀態，大氣壓力相關程度的影響皆相同，因為瓶內總壓不變；換句話說，所有代表長度 D 小於臨界代表長度 D 之開孔，必可在實驗步驟一階段中達到平衡（反之則否），因此這個實驗便是以「十次實驗中可否有任一次達到平衡」的方式進行。僅一次的平衡就意味著該開孔之代表長度 D 尚未超過臨界代表長度 D ，藉此便得以測出臨界開孔及其對應的代表長度 D 。臨界開孔之選取方式為：所有可平衡次數不為零的開孔中代表長度 D 最大者。

(一) 水 (密度: 997 kg/m^3) (表面張力 72.75 mN/m)

孔洞直徑(mm)	12.6	12.8	13.0	13.2	13.4	13.6	13.8	14.0
可平衡(次數)	10	10	10	9	10	4	0	0
流光(次數)	0	0	0	1	0	6	10	10

根據上述之臨界開孔之選取方式，得 $2R=13.60 \pm 0.05 \text{ mm}$ 為臨界孔徑 (由於所選之切割器材，孔洞直徑的精密度為：最小單位為 0.2 mm)，所以臨界代表長

度 D 的平方為 $\frac{4}{3}R^2 = 61.6 \pm 0.5$

(二) 飽和麩胺酸鈉溶液 (密度: 1118.6 kg/m^3) (表面張力: 60 mN/m)

孔洞直徑(mm)	10.6	10.8	11.0	11.2	11.4	11.6	11.8	12.0
可平衡(次數)	10	10	10	9	0	0	0	0
流光(次數)	0	0	0	1	10	10	10	10

根據上述之臨界開孔之選取方式，得 $2R=11.20 \pm 0.05 \text{ mm}$ 為臨界孔徑，所以臨

界代表長度 D 的平方為 $\frac{4}{3}R^2 = 41.8 \pm 0.4$

(三) 飽和食鹽水 (密度: 1189.5 kg/m^3) (表面張力: 75 mN/m)

孔洞直徑(mm)	11.4	11.6	11.8	12.0	12.2	12.4	12.6	12.8
可平衡(次數)	10	10	10	10	9	2	0	0
流光(次數)	0	0	0	0	1	8	10	10

根據上述之臨界開孔之選取方式，得 $2R=12.40 \pm 0.05 \text{ mm}$ 為臨界孔徑，所以臨

界代表長度 D 的平方為 $\frac{4}{3}R^2 = 51.2 \pm 0.5$

(四) 飽和糖水 (密度： 1215.4 kg/m^3) (表面張力： 69 mN/m)

孔洞直徑(mm)	11.2	11.4	11.6	11.8	12.0	12.2	12.4	12.6
可平衡(次數)	10	10	10	9	0	0	0	0
流光(次數)	0	0	0	1	10	10	10	10

根據上述之臨界開孔之選取方式，得 $2R=11.80 \pm 0.05 \text{ mm}$ 為臨界孔徑，所以界

代表長度 D 的平方為 $\frac{4}{3}R^2 = 46.4 \pm 0.4$

三、實驗三：用開孔形狀為矩形之容器做實驗

由於開洞得擾洞會影響實驗結果，因此我們須找出擾洞程度較小得開洞方式，在此我們將比較緩慢的開洞和迅速的開洞。若其中一種方式可測得較大的臨界代表長度 D，則根據實驗二的發現（一旦某孔徑能達到一次以上的平衡次數，就表示該開孔未達臨界開孔），我們可知該方式可量測到較準確的臨界開孔。

	矩形的相鄰兩邊表示為（長，待測的寬），單位 mm					
	(9,待測值)	(10,待測值)	(11,待測值)	(12,待測值)	(13,待測值)	(14,待測值)
緩慢開洞	12.87 ± 0.05	11.91 ± 0.05	11.16 ± 0.05	9.91 ± 0.05	8.82 ± 0.05	7.64 ± 0.05
迅速開洞	12.13 ± 0.05	11.44 ± 0.05	10.23 ± 0.05	9.63 ± 0.05	8.47 ± 0.05	6.84 ± 0.05

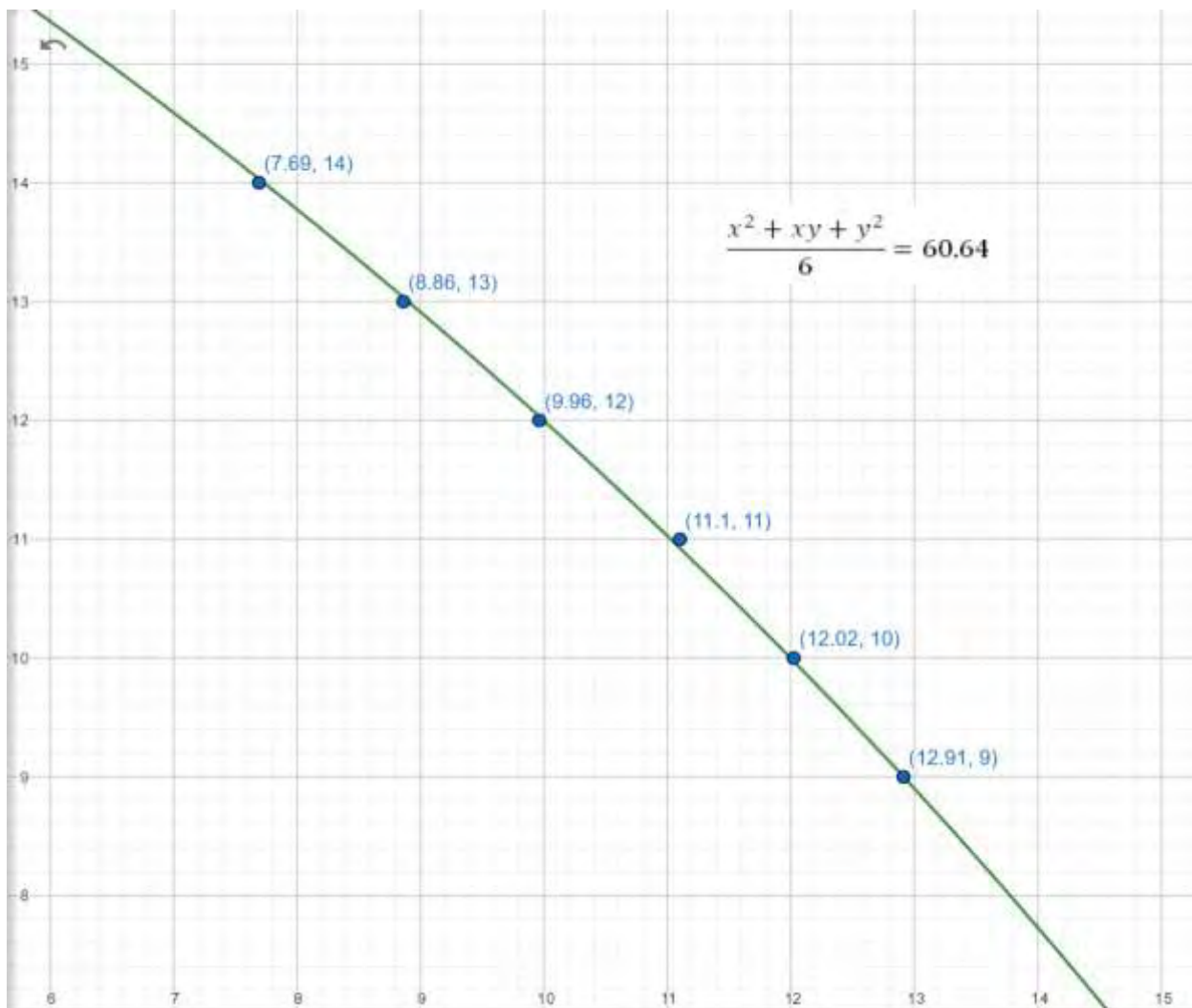
緩慢開洞的方式可測到較大的臨界開孔，因此我們將此方式選為開洞方式。

我們將緩慢得開洞，且數據會以下述方式表達：將六組臨界矩形之數據架上座標(寬與長分別為 x 軸與 y 軸)，並畫出此六點的最佳擬合曲線（曲線的方程式為矩形代表長度 D 的轉換公式， $\frac{1}{6}(U^2 + U \cdot V + V^2) = \text{平均量測值}$ ）。

(一) 水

長(mm)	寬(單位：mm)					平均值	D^2
9	12.97±0.05	12.95±0.05	12.83±0.05	12.89±0.05	12.91±0.05	12.91±0.08	60.6±0.2
10	12.07±0.05	12.01±0.05	12.05±0.05	11.95±0.05	12.01±0.05	12.02±0.07	60.7±0.1
11	11.20±0.05	11.17±0.05	11.07±0.05	11.08±0.05	11.00±0.05	11.10±0.09	61.0±0.2
12	10.03±0.05	9.94±0.05	9.90±0.05	10.04±0.05	9.90±0.05	9.96±0.09	60.4±0.2
13	8.89±0.05	8.81±0.05	8.97±0.05	8.82±0.05	8.80±0.05	8.86±0.09	60.4±0.1
14	7.66±0.05	7.63±0.05	7.69±0.05	7.68±0.05	7.78±0.05	7.69±0.08	60.4±0.1

此六組實驗結果彼此間 D^2 皆十分接近；且與實驗二中圓形之 61.6 ± 0.5 亦十分接近。

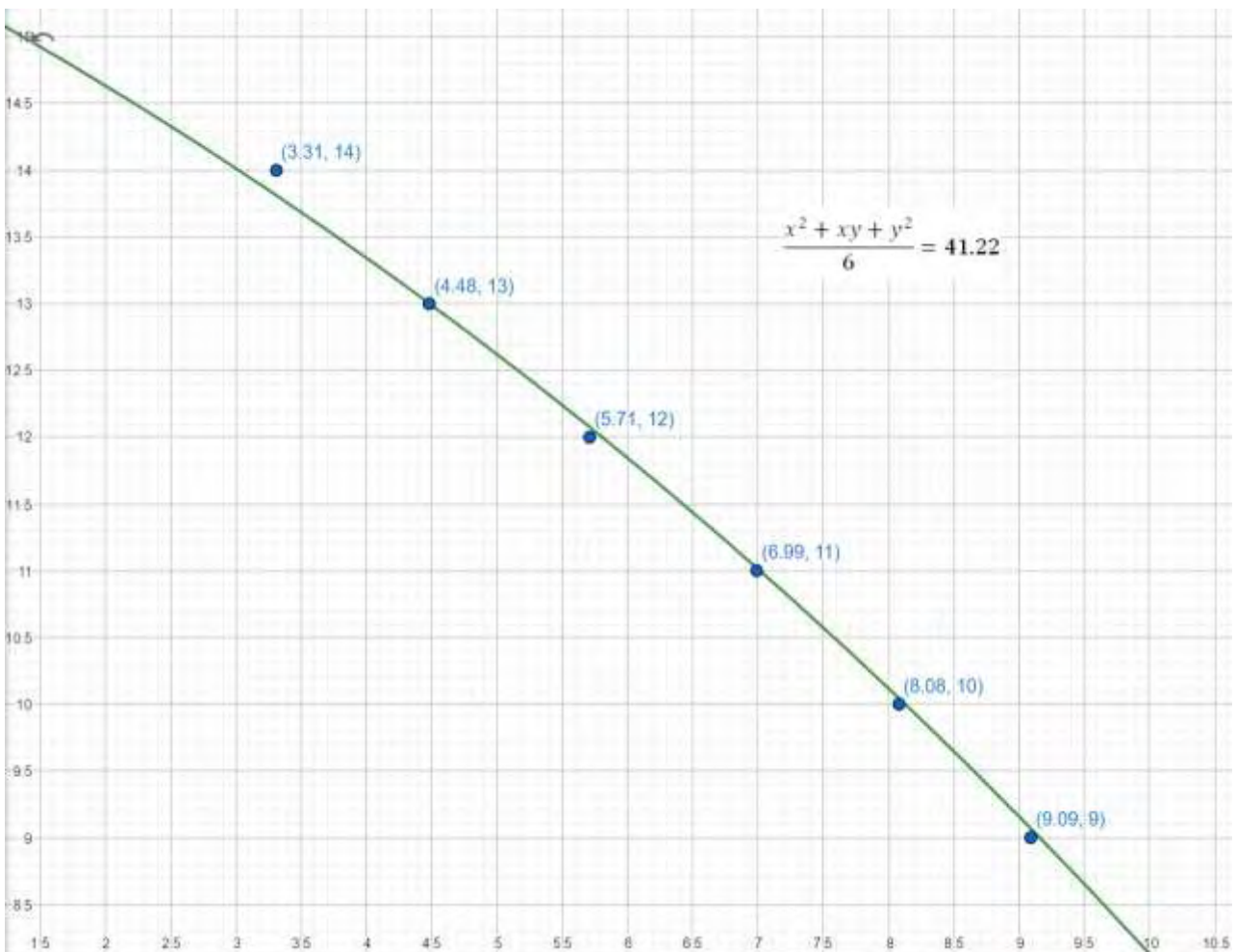


圖(十) 橫軸為平均寬度(mm)、縱軸為長度(mm)

(二) 飽和麩胺酸鈉溶液

長(mm)	寬(單位：mm)					平均值	D^2
9	9.14±0.05	9.07±0.05	9.08±0.05	9.02±0.05	9.12±0.05	9.09±0.07	40.9±0.1
10	8.09±0.05	8.13±0.05	8.07±0.05	8.10±0.05	8.03±0.05	8.08±0.06	41.0±0.1
11	6.94±0.05	6.98±0.05	7.08±0.05	6.98±0.05	7.01±0.05	6.99±0.07	41.13±0.09
12	5.74±0.05	5.81±0.05	5.71±0.05	5.64±0.05	5.66±0.05	5.71±0.09	40.8±0.1
13	4.47±0.05	4.41±0.05	4.44±0.05	4.56±0.05	4.53±0.05	4.48±0.08	41.22±0.08
14	3.08±0.05	3.31±0.05	3.39±0.05	3.25±0.05	3.34±0.05	3.31±0.08	42.22±0.08

此六組實驗結果彼此間 D^2 皆十分接近；且與實驗二中圓形之 $41.8±0.4$ 亦十分接近。

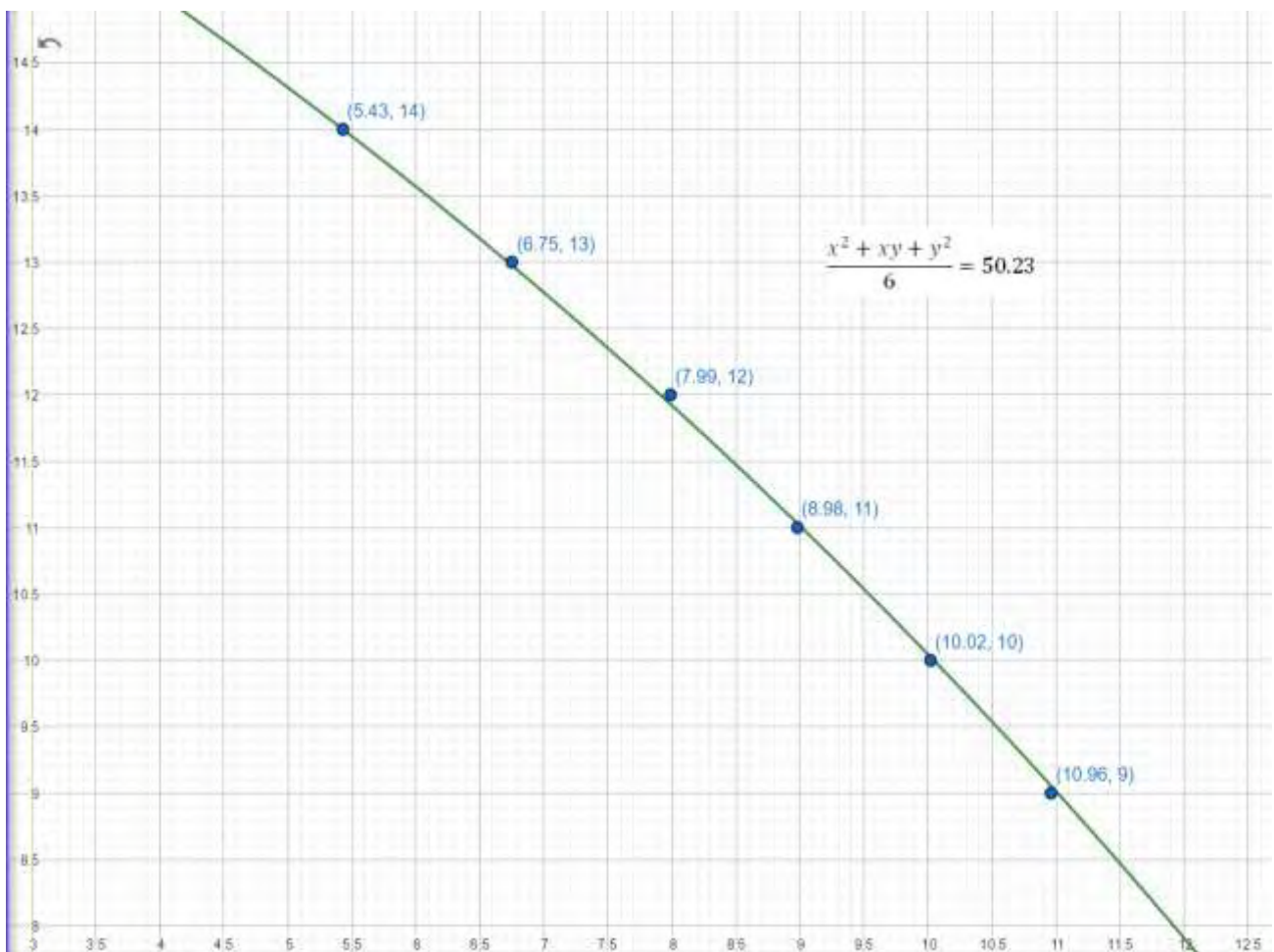


圖(十一) 橫軸為平均寬度(mm)、縱軸為長度(mm)

(三) 飽和鹽水

長 (mm)	寬(單位：mm)					平均值	D^2
9	11.02±0.05	11.04±0.05	10.91±0.05	10.97±0.05	10.87±0.05	10.96±0.08	49.9±0.2
10	9.98±0.05	10.04±0.05	9.92±0.05	10.08±0.05	10.09±0.05	10.02±0.08	50.1±0.2
11	9.07±0.05	8.89±0.05	8.93±0.05	9.05±0.05	8.97±0.05	8.98±0.09	50.0±0.1
12	7.86±0.05	7.99±0.05	8.03±0.05	8.09±0.05	7.98±0.05	7.99±0.08	50.62±0.09
13	6.74±0.05	6.69±0.05	6.80±0.05	6.81±0.05	6.72±0.05	6.75±0.07	50.39±0.08
14	5.49±0.05	5.46±0.05	5.35±0.05	5.41±0.05	5.45±0.05	5.43±0.07	50.25±0.08

此六組實驗結果彼此間 D^2 皆十分接近；且與實驗二中圓形之 51.2 ± 0.5 亦十分接近。

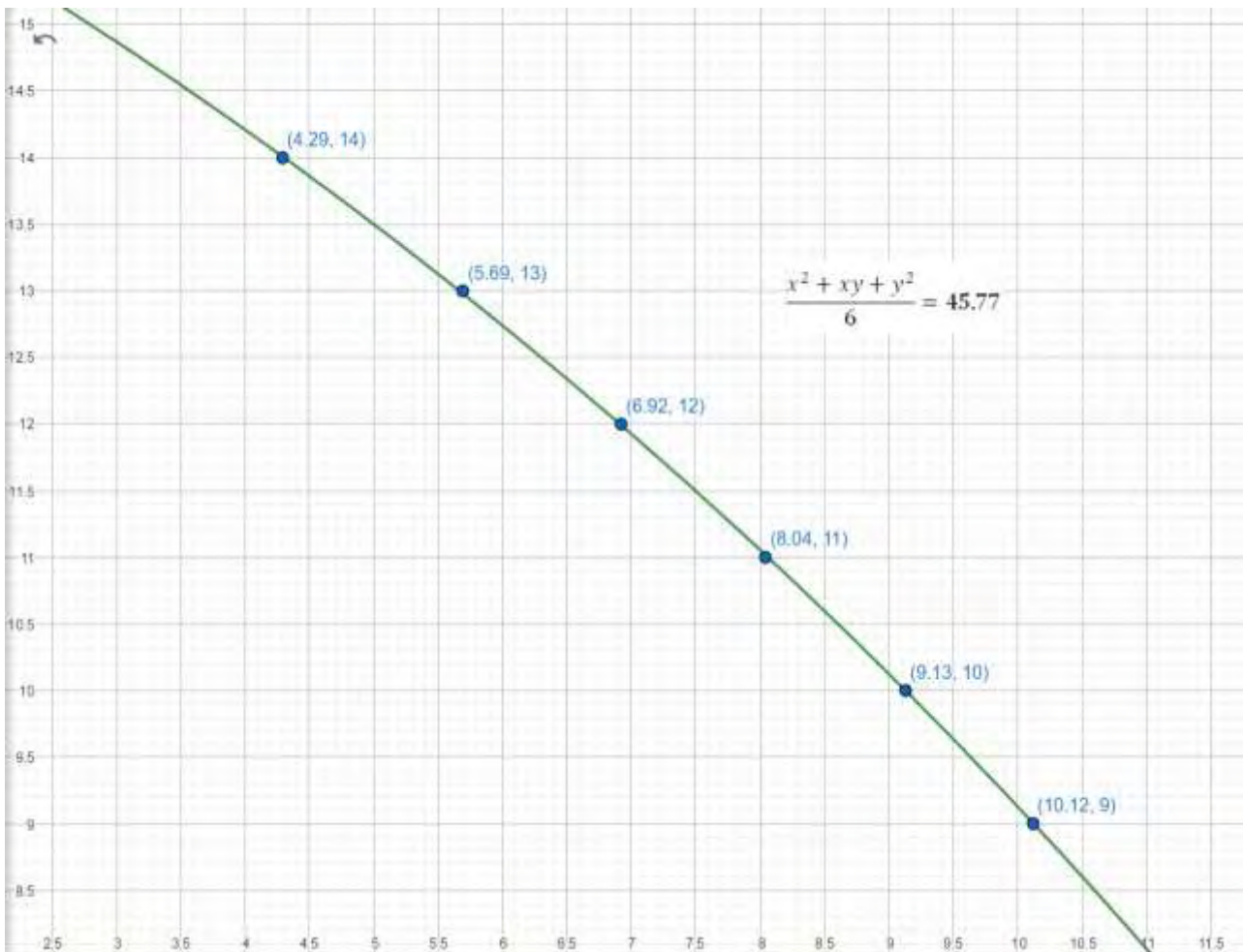


圖(十二) 橫軸為平均寬度(mm)、縱軸為長度(mm)

(四) 飽和糖水

長(mm)	寬(單位：mm)					平均值	D^2
9	10.19±0.05	10.08±0.05	10.15±0.05	10.12±0.05	10.06±0.05	10.12±0.07	45.7±0.1
10	9.10±0.05	9.17±0.05	9.13±0.05	9.09±0.05	9.19±0.05	9.13±0.06	45.77±0.09
11	8.01±0.05	8.06±0.05	7.96±0.05	8.10±0.05	8.11±0.05	8.04±0.08	45.68±0.09
12	6.91±0.05	6.88±0.05	6.86±0.05	6.91±0.05	6.97±0.05	6.92±0.07	45.82±0.08
13	5.70±0.05	5.74±0.05	5.62±0.05	5.71±0.05	5.67±0.05	5.69±0.07	45.90±0.08
14	4.36±0.05	4.29±0.05	4.21±0.05	4.24±0.05	4.33±0.05	4.29±0.08	45.70±0.08

此六組實驗結果彼此間 D^2 皆十分接近；且與實驗二中圓形之 46.4 ± 0.4 亦十分接近。



圖(十三) 橫軸為平均寬度(mm)、縱軸為長度(mm)

四、實驗四：用開有兩個等大孔洞的容器做實驗

與實驗二相同，以「十次實驗中可否有任一次達到平衡」的方式進行。僅一次的平衡就意味著該開孔之代表長度D尚未超過臨界代表長度D，藉此便得以測出臨界開孔及其對應的代表長度D。

臨界開孔之選取方式為：所有可平衡次數不為零的開孔中代表長度D最大者。

(一) 水

兩開孔直徑皆為 6mm (代表長度 D 相加後小於同種溶液的臨界代表長度 D)：

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	10	10	10	10	10	10	10
流光(次數)	0	0	0	0	0	0	0	0

兩開孔直徑皆為 8mm (代表長度 D 相加後小於同種溶液的臨界代表長度 D)：

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	10	10	10	10	10	10	10
流光(次數)	0	0	0	0	0	0	0	0

兩開孔直徑皆 10mm (代表長度 D 相加後大於同種溶液的臨界代表長度 D)：

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	10	10	3	0	0	6	10
流光(次數)	0	0	0	7	10	10	4	0

(二) 飽和麩胺酸鈉溶液

兩開孔直徑皆為 6mm (代表長度 D 相加後小於同種溶液的臨界代表長度 D)：

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	10	10	10	10	10	10	10
流光(次數)	0	0	0	0	0	0	0	0

兩開孔直徑皆為 8mm (代表長度 D 相加後大於同種溶液的臨界代表長度 D) :

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	10	10	0	0	0	9	10
流光(次數)	0	0	0	10	10	10	1	0

兩開孔直徑皆 10mm(代表長度 D 相加後極大於同種溶液的臨界代表長度 D) :

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	7	0	0	0	0	0	0
流光(次數)	0	3	10	10	10	10	10	10

(三) 飽和鹽水

兩開孔直徑皆為 6mm (代表長度 D 相加後小於同種溶液的臨界代表長度 D) :

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	10	10	10	10	10	10	10
流光(次數)	0	0	0	0	0	0	0	0

兩開孔直徑皆為 8mm (代表長度 D 相加後小於同種溶液的臨界代表長度 D) :

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	10	10	10	10	10	10	10
流光(次數)	0	0	0	0	0	0	0	0

兩開孔直徑皆 10mm (代表長度 D 相加後大於同種溶液的臨界代表長度 D) :

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	10	1	0	0	0	10	10
流光(次數)	0	0	9	10	10	10	0	0

(四) 飽和糖水

兩開孔直徑皆為 6mm (代表長度 D 相加後小於同種溶液的臨界代表長度 D):

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	10	10	10	10	10	10	10
流光(次數)	0	0	0	0	0	0	0	0

兩開孔直徑皆 8mm (代表長度 D 相加後相近於同種溶液的臨界代表長度 D):

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	10	10	10	0	0	10	10
流光(次數)	0	0	0	0	10	10	0	0

兩開孔直徑皆 10mm (代表長度 D 相加後大於同種溶液的臨界代表長度 D):

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	10	10	1	0	0	0	8
流光(次數)	0	0	0	9	10	10	10	2

陸、討論

一、選取實驗的四種溶液時，我們刻意選取這四種接觸角甚小的溶液，理由為：代表長度D的轉換計算過程中，平面較曲面易為分析，且此四種溶液接觸角甚小也可從研究原理介紹中的（結論二） $\cos \theta = \frac{\rho g r^2}{6\gamma}$ 驗證：

（一）水： $\theta = \cos^{-1} \frac{\rho g r^2}{6\gamma}$ 驗證：

$$\text{（一）水：}\theta = \cos^{-1} \frac{\rho g r^2}{6\gamma} = \cos^{-1} \frac{997(\text{kg}/\text{m}^3) \times 9.8(\text{m}/\text{s}^2) \times 0.0068^2(\text{m}^2)}{6 \times 0.072(\text{J}/\text{m}^2)} \approx 0$$

$$\text{（二）飽和麩胺酸鈉溶液：}\theta = \cos^{-1} \frac{\rho g r^2}{6\gamma} = \cos^{-1} \frac{1118(\text{kg}/\text{m}^3) \times 9.8(\text{m}/\text{s}^2) \times 0.0056^2(\text{m}^2)}{6 \times 0.060(\text{J}/\text{m}^2)} \approx 0$$

$$\text{（三）飽和食鹽水：}\theta = \cos^{-1} \frac{\rho g r^2}{6\gamma} = \cos^{-1} \frac{1189(\text{kg}/\text{m}^3) \times 9.8(\text{m}/\text{s}^2) \times 0.0062^2(\text{m}^2)}{6 \times 0.075(\text{J}/\text{m}^2)} \approx 0$$

$$\text{（四）飽和糖水：}\theta = \cos^{-1} \frac{\rho g r^2}{6\gamma} = \cos^{-1} \frac{1215(\text{kg}/\text{m}^3) \times 9.8(\text{m}/\text{s}^2) \times 0.0059^2(\text{m}^2)}{6 \times 0.069(\text{J}/\text{m}^2)} \approx 0$$

二、實驗一（表面張力的測定）中，表面張力係數測定儀的實驗原理為：施予一線性變化力（施力儀器為扭矩）在一細環上，隨著細環緩慢地拉起，溶液也隨之被拉起，表面張力便在接觸面變化時做功，此功大小正比於扭矩量測到的角度，由角度的比值及已知水的表面張力可計算出其餘溶液之表面張力。

三、比較實驗二和實驗三：實驗二中，雖避免了開洞的擾動，但受限於切割開孔的技術，量測精密度僅到 0.2mm；實驗三中，雖然量測可精密至 0.01mm，但開洞之擾動僅能由接近準靜態之方式縮小，無法完全避免開洞之擾動。

四、實驗二中無法以實驗三的方式（以十分緩慢的開洞來檢視其是否達到臨界開孔）進行，其原因為：實驗三中，我們可以透過緩慢開洞將矩形的待測邊開至臨界值，所以此實驗的精密度就是量測儀器的最小刻度；然而，實驗二的圓形開孔再開洞時，只有「全開」和「無法全開」兩個結果，造成在接近臨界孔徑時，無法全開的開孔圖形將難以量測和表示，因此實驗二需要避免開洞的影響。

柒、結論

一、實驗二的結果可證明研究原理介紹中的（結論一） $P + \rho gh = P_0$ ：調整瓶內總壓力階段中，注入溶液調整時，等量的溶液隨即從開口處滴落，而在溶液滴落的下一瞬間，系統又立即回到平衡狀態，因此可得知瓶內總壓（ $P + \rho gh$ ）不變，且由理論分析後得知此定值即為大氣壓力量值 P_0 。

二、實驗三中，緩慢的開洞方式較迅速的方式更能準確量測到臨界開孔，我們推測其原因為：緩慢抽開封口較接近準靜態的過程。

三、實驗三同一種溶液中，各組臨界開孔矩形的代表長度 D 皆十分接近（差異皆小於1%），且其量值和實驗二中同種溶液的圓形代表長度 D 也十分相近（差異皆小於4%）。可以合理推論臨界開孔的大小和圖形與大氣壓力的相關性密切相關——由 Pair Correlation Function & Radial Distribution Function 得知：兩參考點間的距離會唯一決定氣壓相關程度，反之亦是如此。因此，溶液恰落下的臨界狀態應是取決於接觸面能承受的最低氣壓相關程度，對於同一種溶液，此最低的相關性應相同，所以不論開孔之幾何形狀為何，代表長度 D 的量值應相近，符合研究結果。

四、實驗四中，開孔情形大致可分為三類：

（一）兩開孔的代表長度 D 相加後「小於」同種溶液的臨界代表長度 D ：不論圓心距的大小，系統都可平衡，代表此一類型的兩開孔尚未達到臨界狀態。

（二）兩開孔的代表長度 D 相加後「大於」同種溶液的臨界代表長度 D ：較短的圓心距的實驗結果符合：隨著圓心距增大，兩開孔的氣壓相關程度也越來越低，因此當圓心距增大到臨界狀態時，系統無法平衡；然而，當圓心距持續增加到某一量值時，系統又可平衡，我們推測此時兩開孔的距離已足夠遠，整個容器可分成兩個獨立系統。

（三）兩開孔的代表長度 D 相加後「極大」於同種溶液的臨界代表長度 D ：當兩代表長度 D 相加的量值遠大於臨界 D 時，不再發生「兩獨立系統」的現象。

捌、未來展望

- 一、希望本研究能藉著電腦的輔助計算，將任意平面和曲面轉換，以提供氣壓相關性一項更為全面的說明。
- 二、薄膜科技在能源、水資源、環保、醫藥等永續生活所須面對的重大議題的發展將扮演舉足輕重的角色，例如溫室氣體的減量和處理、工業用水和民生飲用水的淨化回收、生物材料和新劑型醫藥的開發，醫療事業使用的靜脈注射裝置和血液透析膜等，薄膜科技已成為 21 世紀的顯學。然而薄膜的設計與製備卻是備受考驗，能量和物質交換的交界面結構強度便是其一，本研究便提供了一種研究方法：以比較的方式，賦予氣體壓力的微觀差異（源於氣體分子間的運動與碰撞）一項宏觀的分析方式。在以流質為薄膜材料的研究領域，上述影響更顯重要，希望本研究對其有應用層面的幫助。

玖、參考資料及其他

一、圖片

（一）維基百科・取自：https://en.wikipedia.org/wiki/Radial_distribution_function

（二）EMORY COLLEGE OF ARTS AND SCIENCES・取自：

<http://www.physics.emory.edu/faculty/weeks/idl/pics/gr2b.gif>

二、參考網站

（一）THE PAIR CORRELATION OF ZEROS OF THE ZETA FUNCTION・取自

<http://www-personal.umich.edu/~hlm/paircor1.pdf>

（二）維基百科・取自：

<https://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%88%86%E5%AD%90%E8%BF%90%E5%8A%A8%E8%AE%BA>

【評語】 051807

以液滴在洞口平衡探討平衡時液滴體積的代表臨界長度，有新穎內涵。實驗認定打洞之液體流出與大氣壓力不均勻度的擾動有關，簡易自製實驗裝置，即可達到實驗主軸數據，能討論實驗設計與內涵。物理參數的涵蓋或改變範圍可再擴充。對氣體與流體的 pair distribution function 應採更謹慎的認定。作者對容器開洞之液體流下的原因理解，應該用更多實驗數據來支持。

壹、研究動機

喝養樂多戳開鋁箔封口時，不料錯估了開孔大小，導致養樂多僅能斷斷續續的流出。我們都知道「大氣壓力」為其謎底-----76公分汞柱高的大氣壓力扮演了抑制養樂多流下的角色。不過同一現象卻也揭露了光是力平衡也無法解釋的事：斷斷續續流出的養樂多又憑什麼斷斷續續的「流出」？

這並不是一個「瓶身傾斜與否」的問題。縱使瓶身鉛直朝下，養樂多還是會流下！我們重新檢視了力平衡的條件：瓶高不過十公分的液高，乘上僅略高於食鹽水的密度，根本無法與76公分汞柱高的大氣壓力相提並論，理論上離臨界狀態還很遠，為什麼養樂多卻會流下呢？「開口大小」是我們的唯一線索-----若戳開封口時，我們以半徑僅不過小吸管的圓形為開口時，大氣壓力成功的如預期般支撐著養樂多。顯然，開口的大小勢必隱藏著什麼物理秘密，我們認為開口範圍的大氣相關性是關鍵。

貳、研究目的

- 一、透過理論分析和實驗探討，找出溶液平衡時、恰平衡時、以及不平衡時的條件和狀態，說明氣壓相關性對力平衡的貢獻，並希望以此推廣至任意容器。
- 二、藉由已知的研究可知，氣壓的相關性和參考點的距離(一維)息息相關，且前人已寫有兩函數Pair Correlation Function & Radial Distribution Function來描述其(一維)相關性。我們希望為占有面積(二維)的開孔找到合理的轉換方式，以描述該圖形範圍的氣壓相關性。
- 三、探討開有兩孔洞的容器，量測其在溶液恰平衡時的兩孔洞間距。若將開孔孔徑逼近至零(即視兩開孔為兩點)，則此幾何關係退化成一維，方可使用Pair Correlation Function & Radial Distribution Function解釋其關係。

參、研究設備及器材

- 一、實驗器材：液體表面張力係數測定儀、罐子、有孔蓋、自製器材、相機、水平儀
- 二、實驗溶液：水、飽和糖水、飽和鹽水、飽和麩胺酸鈉溶液 (將於 陸、討論 中提及使用此四種溶液之理由)



液體表面張力係數測定儀



圓形、矩形孔蓋



自製器材

肆、研究過程及方法

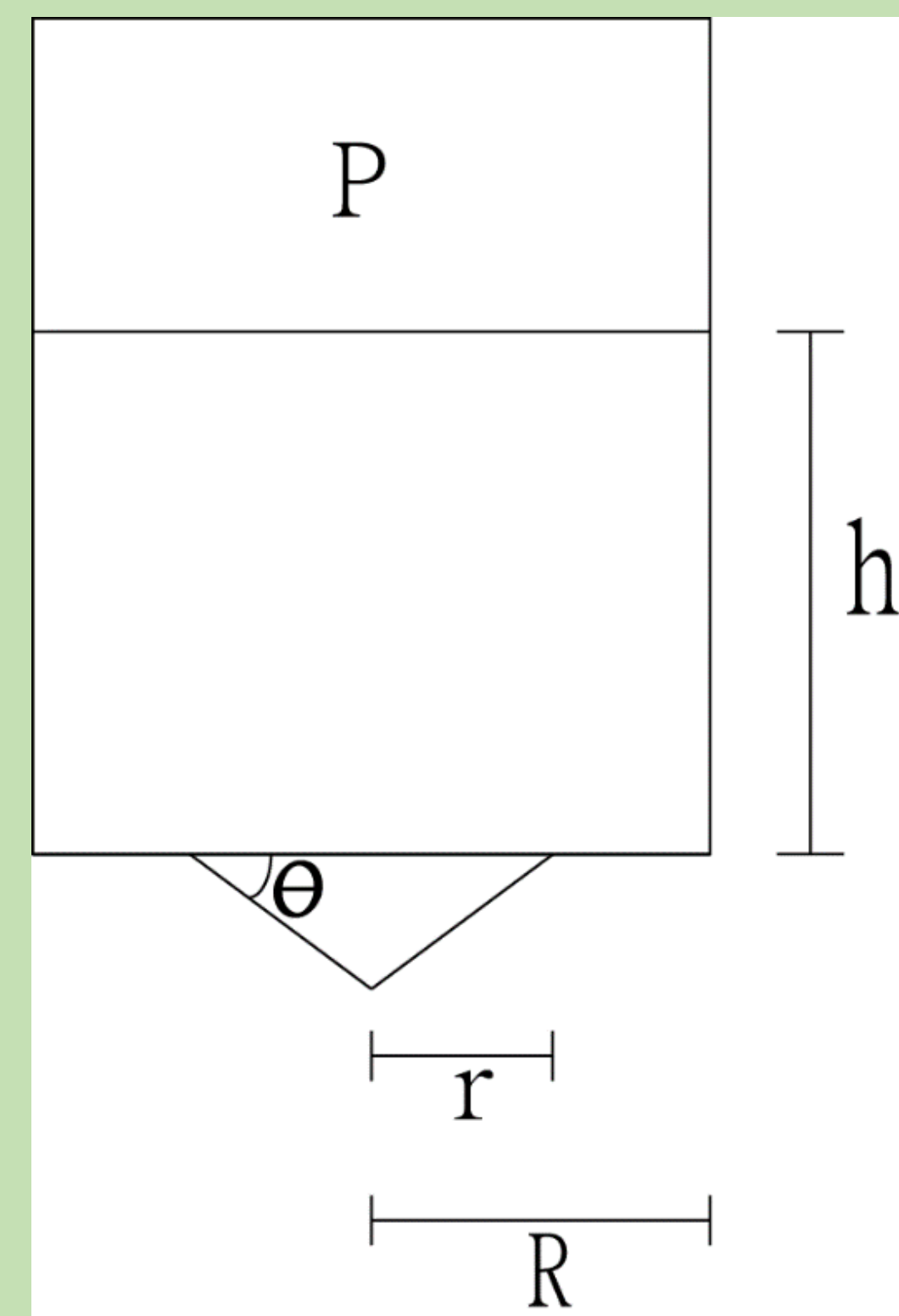
一、研究原理介紹

(一) 計算溶液未落下時 (平衡) 的各項狀態

$$1. \text{鉛直軸力平衡} : T \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot r \cdot (P_0 - P - \rho gh) - \frac{1}{6} \cdot \rho gr^2 \cdot \tan \theta = 0$$

$$2. \text{虛功原理} : T \cdot \sin \theta + \frac{1}{3} \cdot r \cdot (P_0 - P - \rho gh) - \frac{1}{6} \cdot \rho gr^2 \cdot \tan \theta = 0$$

$$\text{由上兩式等價可知} : \begin{cases} P + \rho gh = P_0 \dots\dots\dots (\text{結論一}) \\ \cos \theta = \frac{\rho gr^2}{6T} \dots\dots\dots (\text{結論二}) \end{cases}$$



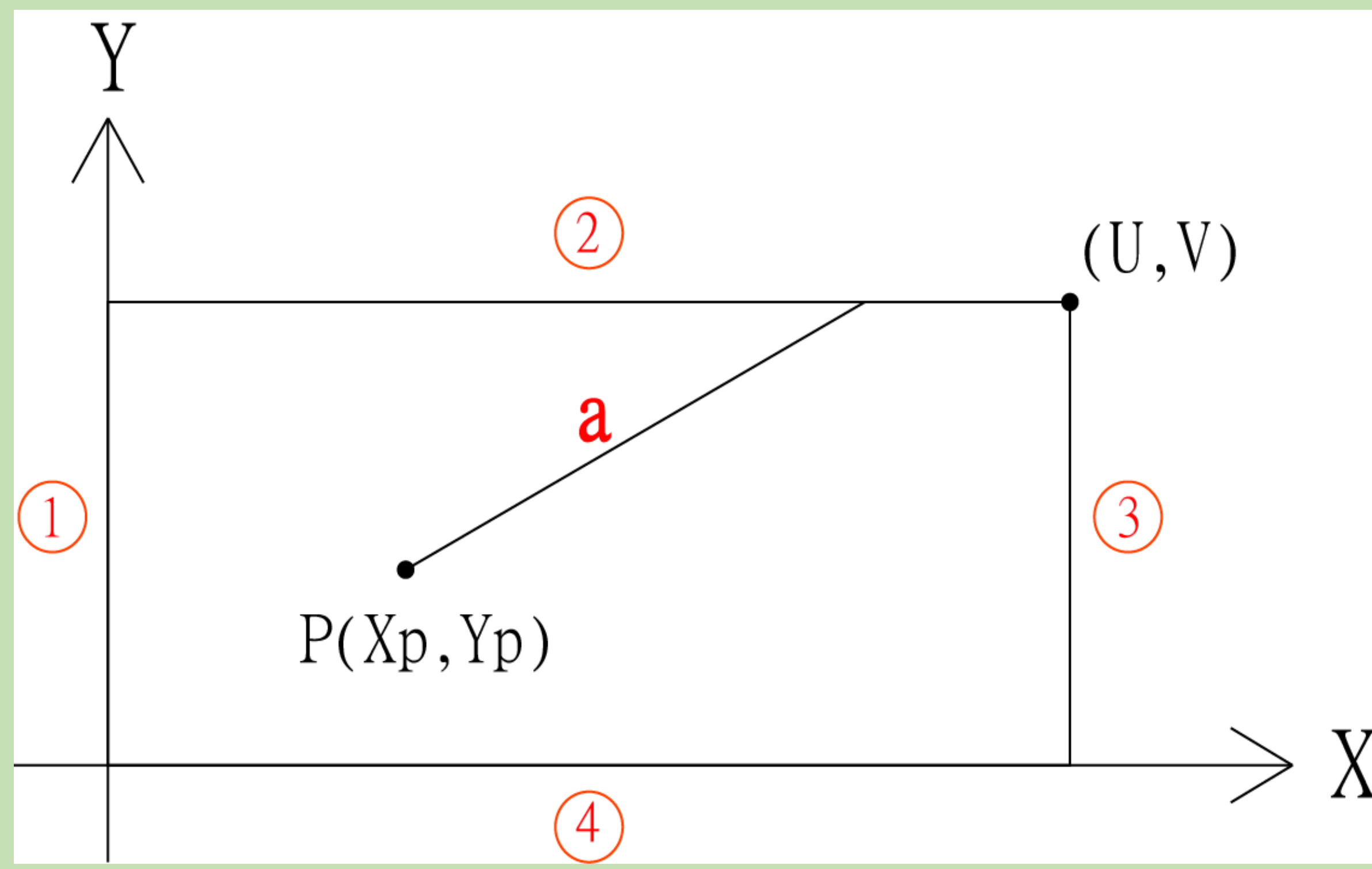
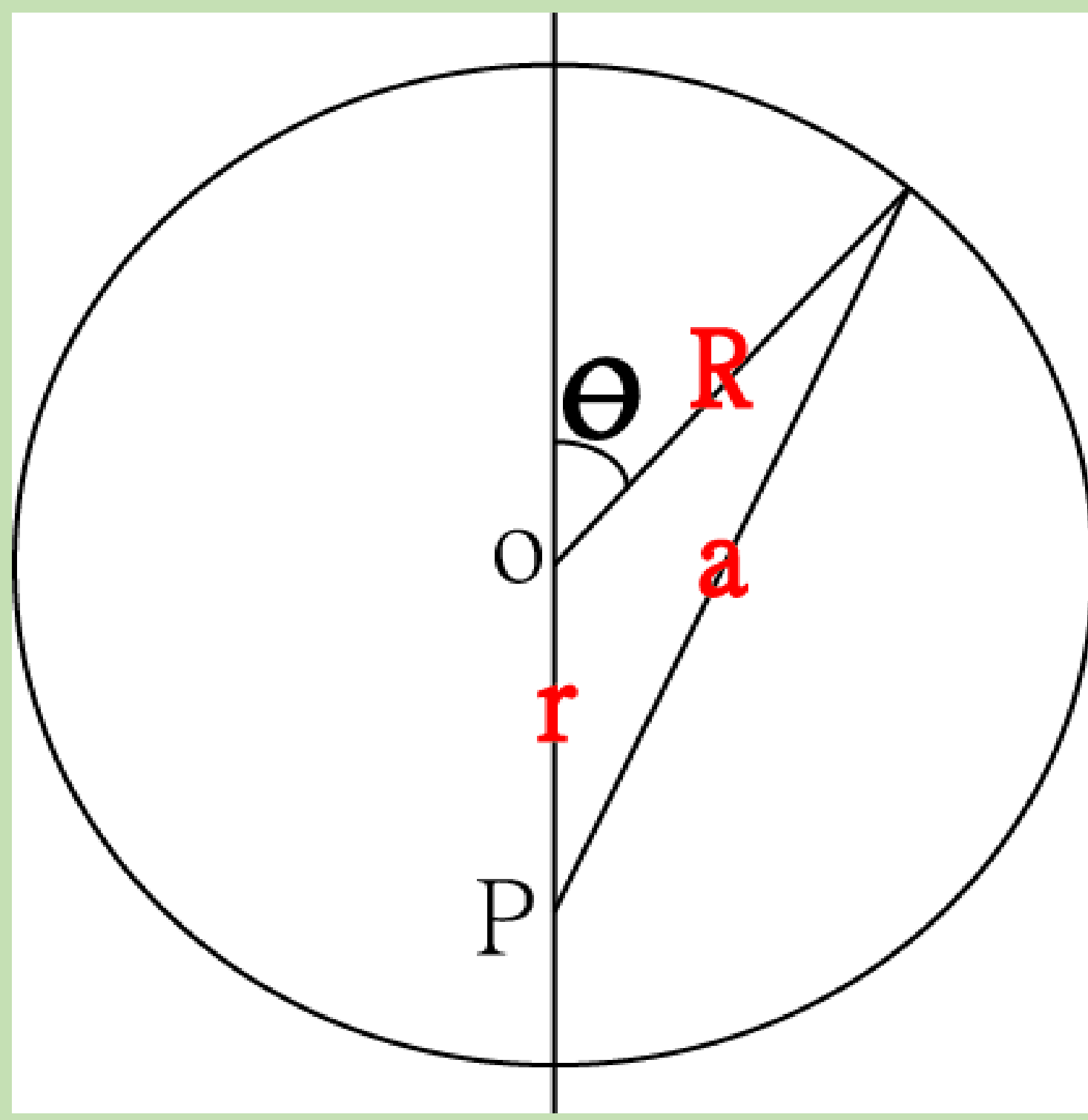
(二) 臨界 r (溶液恰好落下時) 與大氣均勻程度有關

對於佔有一個面積的孔洞，我們希望找到一個轉換方式，將開孔圖形轉換至某一具長度性質的量值 (需和圖形的面積與幾何形狀有關)。而對於任意孔洞圖形，水恰好落下時氣壓不均勻程度應相同，所以上述由圖形轉換的長度量值 (命此長度為「代表長度D」) 應相同。

(三) 找出合理的「代表長度D」

1. 圓形之代表長度D：
$$D^2 = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^R (r^2 + R^2) \cdot dr \cdot d\theta}{\int_0^R dr \cdot \int_0^{2\pi} d\theta} = \frac{4}{3} R^2$$

2. 矩形之代表長度D：
$$D^2 = \frac{\int_0^V \int_0^U \frac{f(x_p, y_p)}{2U+2V} \cdot dx_p \cdot dy_p}{\int_0^U dx_p \cdot \int_0^V dy_p} = \frac{1}{6} (U^2 + U \cdot V + V^2)$$



二、實驗中不可控且不易避免的影響「開洞」

我們面臨到一項不易避免的影響：溶液和大氣的接觸面（在接觸角甚小時，接觸面即為開孔圖形）受「開洞」此一步驟的影響不可忽略，並直接成為了將下述實驗分為實驗二、三的原因之一（另一原因於目的三中提及）。

三、實驗操作說明

實驗一：利用「液體表面張力係數測定儀」，測出四種溶液的表面張力。

實驗二：用「自製器材」做實驗（開孔為圓形）：杯口針筒調整水壓，杯底針筒調整瓶內氣壓，以達到杯口壓力一致。

實驗三：用開孔形狀為矩形之容器做實驗

實驗四：用開有兩個等大孔洞的容器做實驗（兩孔洞圖形皆為圓形）：操縱變因為開孔孔徑，應變變因為兩開孔間距。

伍、研究結果

一、實驗一：利用「液體表面張力係數測定儀」，測出四種溶液的表面張力

溶液種類	扭矩測到之最大角（度）					最大角之平均值	表面張力 (mJ/m ²)
水	211	222	244	217	226	224±12.5	72.75(已知)
飽和麩胺酸鈉溶液	189	177	194	192	174	185±9.1	60.08
飽和食鹽水	236	213	238	244	232	232±11.8	75.67
飽和糖水	202	212	217	220	218	214±7.2	69.50

二、實驗二：用「自製器材」做實驗

(一) 水（密度：997kg/m³）（表面張力72.75mN/m）：得2R=13.6mm，D² = $\frac{4}{3} R^2 = 61.65$

(二) 飽和麩胺酸鈉溶液（密度：1118.6kg/m³）（表面張力：60.08mN/m）：得2R=11.2 mm，D² = $\frac{4}{3} R^2 = 41.81$

(三) 飽和食鹽水（密度：1189.5kg/m³）（表面張力：75.67mN/m）：得2R=12.4 mm，D² = $\frac{4}{3} R^2 = 51.25$

(四) 飽和糖水（密度：1215.4kg/m³）（表面張力：69.50mN/m）：2R=11.8 mm，D² = $\frac{4}{3} R^2 = 46.41$

三、實驗三：用開孔形狀為矩形之容器做實驗

(一) 水

長(單位：mm)	寬(單位：mm) 平均值	D ²
9	12.91±0.06	60.64
10	12.02±0.05	60.78
11	11.10±0.08	61.05
12	9.96±0.07	60.45
13	8.86±0.07	60.45
14	7.69±0.06	60.47



四、實驗四：用開有兩個等大孔洞的容器做實驗(方式與實驗二相同)

(一) 水：兩開孔直徑皆10mm (代表長度D相加後「大於」同種溶液的臨界代表長度D)

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	10	10	3	0	0	6	10
流光(次數)	0	0	0	7	10	10	4	0

(二) 飽和麩胺酸鈉溶液：兩開孔直徑皆10mm(代表長度D相加「極大於」同種溶液的臨界代表長度

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	7	0	0	0	0	0	0
流光(次數)	0	3	10	10	10	10	10	10

(三) 飽和鹽水：兩開孔直徑皆10mm (代表長度D相加後「大於」同種溶液的臨界代表長度D)

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	10	1	0	0	0	10	10
流光(次數)	0	0	9	10	10	10	0	0

(四) 飽和糖水：兩開孔直徑皆10mm (代表長度D相加後「大於」同種溶液的臨界代表長度D)

兩開孔間圓心距(mm)	10.0	10.5	11.0	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5
可平衡(次數)	10	10	10	1	0	0	0	8
流光(次數)	0	0	0	9	10	10	10	2

陸、討論

一、我們選取這四種接觸角甚小的溶液，理由為：代表長度D的轉換計算過程中，平面較曲面易

為分析，且此四種溶液接觸角甚小的事實也從研究原理介紹中的(結論二) $\cos \theta = \frac{\rho g r^2}{6T}$ 驗證。

柒、結論與未來展望

一、實驗二的結果可證明研究原理介紹中的(結論一) $P + \rho g h = P_0$ ：調整瓶內總壓力，無論注入空氣或溶液，都會有些許溶液從開口處滴落，而在溶液滴落的下一瞬間，系統又立即回到平衡狀態，因此我們得知瓶內總壓 ($P + \rho g h$) 不變，且由理論分析後得知此定值即為大氣壓力量值 P_0 。

二、實驗三，可以合理推論臨界開孔的大小和圖形與大氣壓力的相關性密切相關：兩參考點間的距離會唯一決定氣壓相關程度，反之亦是如此。因此，溶液恰落下的臨界狀態應是取決於接觸面能承受的最低氣壓相關程度，對於同一種溶液，此最低的相關性應相同，所以不論開孔幾何形狀為何，代表長度D的量值應相近，符合四種不同溶液之研究結果。

三、實驗四中，開孔情形可以 $\frac{\text{兩開孔的代表長度D的和}}{\text{同種溶液的臨界代表長度D}}$ 的值分為三類：

(一) 小於1：不論圓心距的大小，系統都可平衡，代表此一類型的兩開孔尚未達到臨界狀態。

(二) 大於1：較短的圓心距的實驗結果符合：隨著圓心距增大，兩開孔的氣壓相關程度也越來越低，因此當圓心距增大到臨界狀態時，系統無法平衡；然而，當圓心距持續增加到某一量值時，系統又可平衡，我們推測此時兩開孔的距離已足夠遠，整個容器可分成兩個獨立系統。

(三) 極大於1：當兩代表長度D相加的量值遠大於臨界D時，不再發生「兩獨立系統」的現象。

捌、參考資料

(一) 維基百科·取自：

https://en.wikipedia.org/wiki/Radial_distribution_function

(二) EMORY COLLEGE OF ARTS AND SCIENCES·取自：

<http://www.physics.emory.edu/faculty/weeks//idl/pics/gr2b.gif>

(三) THE PAIR CORRELATION OF ZEROS OF THE ZETA FUNCTION·取自：