

中華民國第 59 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

第三名

051804

I sink therefore I am

學校名稱：國立彰化女子高級中學

作者： 高二 黃譯萱 高二 謝苡廷 高一 劉竺臻	指導老師： 張國志
---	------------------

關鍵詞：簡諧運動、壓力、等效重力

摘要

本實驗由透明壓克力管做盛水容器，上下密封後固定於震盪器上方使其垂直振動，水中的氣泡可能會下沉而非上浮。我們觀察水中的自製人工氣泡於不同因素下的下沉運動情形，並依觀察結果推測造成其下沉的因素，我們的理論所運用的變因有容器振動時的加速度、頻率、液體的黏滯係數、氣泡的形變量（不同材質），經過實驗後我們發現頻率並不會影響人工泡泡下沉的情形。我們將不同條件下，透過 tracker 程式追蹤其下沉的軌跡和時間的關係，再經由牛頓第二運動定律、阻力公式和簡諧運動結合推導出氣泡運動公式，再將此公式寫進 Mathematica 程式，並分別討論容器座標下的人工氣泡和實驗室座標下的人工氣泡，將所得到的理論值和實驗結果數據加以討論。

壹、 研究動機

在日常生活中，我們經常見到存在於液體中的氣泡，比如：游泳池、碳酸飲料或是手搖飲料店。但當我們提到在液體中的氣泡移動狀況時，通常都會很直覺地想到：「當然是往上浮，然後啵啵啵的消失。」因為在多數時候，氣泡會受浮力的作用，浮力與重力反方向，使我們看到的氣泡大多是上浮的。但在不久前，我們在網路上看見一部神秘的影片，在音響的作用下，液體中的氣泡竟然會下沉！詳加查詢後發現和音響振動有極大的關係，適逢物理正在上簡諧運動與假想力，便決定以此作為主軸研究。這個研究以高中物理為主，討論等效重力場改變以及加速度系統中的壓力變化。主要討論頻率、振動最大加速度以及氣泡形變對氣泡運動造成的影響。

貳、 研究目的

為了探討為什麼將容器中的液體垂直振動會導致氣泡下沉？又有哪些原因影響氣泡下沉與否及其下沉時的移動軌跡？我們實驗中的變因包含振動時的加速度、頻率、氣泡的形變量（不同材質），並以壓力、簡諧運動、牛頓第二運動定律、波以耳定律、雷諾數、阻力、等效重力場、浮力、附加質量進行討論。為了解決心中的疑惑，並了解其中隱藏的深奧概念，故設計此實驗進行探討，以解心中疑惑，並研究其中深藏的科學原理。

參、 研究設備及器材

一、 研究設備

設備	用途
 <p>(圖一)</p>	(圖一) 為正弦波製造器，可調整頻率
 <p>(圖二)</p>	(圖二) 為功率放大器，可藉由調整電壓電流大小改變振幅與加速度
 <p>(圖三)</p>	(圖三) 為震盪器
 <p>(圖四)</p>	(圖四) 為上下兩端皆密封的透明壓克力管，作為裝水垂直振動用的容器。 確定震盪器上平台為水平後，將其垂直固定於震盪器上。 為了方便後續的位置追蹤，壓克力管表面以簽字筆做 1cm 長的劃記



(圖五)

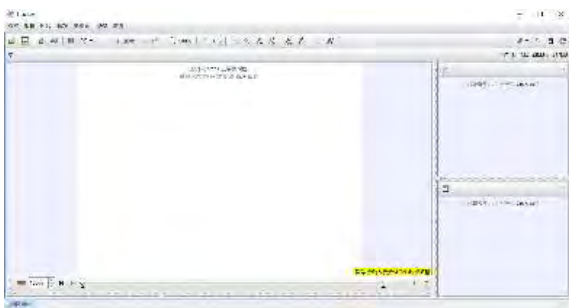
(圖五) 為人工氣泡(密度為 $0.044\text{g}/\text{cm}^3$)，是以熱熔膠製成的空心球，模擬天然氣泡。我們拉一條的細線黏在壓克力管底部，固定其初始位置。選擇此材料的原因為：熱熔膠尚未冷卻時極富延性與展性，可拉伸或吹成薄膜，且在其冷卻後仍可承受一定程度的拉力或壓力而不破裂，並在其受力的同時產生形變。

為了易於辨識，特將氣泡塗色。



(圖六)

(圖六) 為電腦程式 excel 介面，用以計算測量所得的數據並繪製圖表。



(圖七)

(圖七) 為 tracker 程式介面，用以追蹤氣泡、壓克力管隨時間變化的移動軌跡。

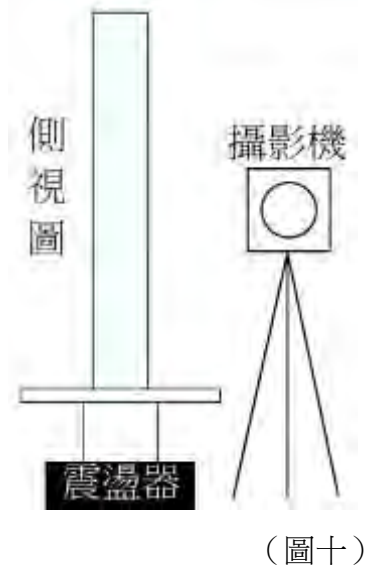


(圖八)

(圖八) 為 Mathematica 程式介面，寫入氣泡移動公式，提供理論上氣泡隨時間變化的移動軌跡，其計算出的理論值可與實驗結果進行比對。



(圖九) 為攝影機，
用以紀錄氣泡移動
軌跡。
由容器側面拍攝



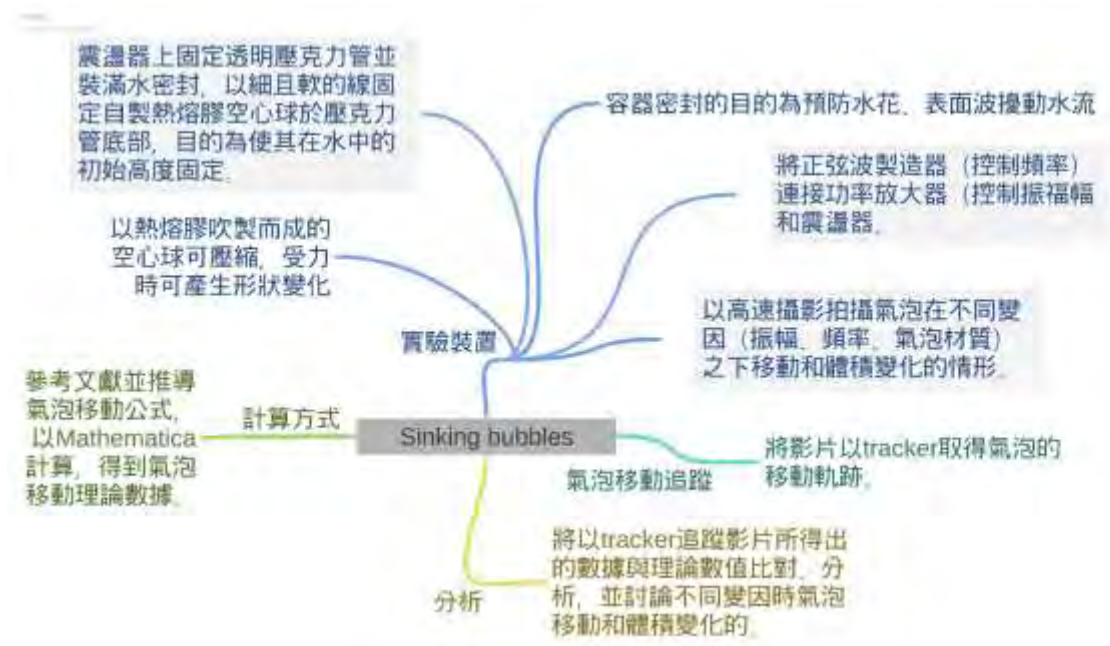
二、 實驗儀器架構



(圖十一)

肆、 研究過程及方法

一、 研究架構



(圖十二)

二、 數值取得、計算與定義

(一) 位置

使用 trackert 程式取位置數據。

1. 將影片匯入程式後，將校正桿 (比例尺) 放在壓克力管上的簽字筆記號，長度設定為 1cm。第二，設定座標軸之原點於氣泡初始位置 (在每次實驗中氣泡由同一細線固定)。之後，設定質點 A，標記在氣泡中心，開始取影片中每一幀的氣泡 (x, y) 數值。本研究氣泡指自然氣泡或是人工氣泡 (熱熔膠製作或是橡膠球)。
2. 取容器的位置時，數值取法相同，將質點標記在壓克力管上的簽字筆記號右下緣。

(二) 位移量

1. 以每一幀的氣泡位置y值減去前一幀的氣泡位置y值，得氣泡位移。
2. 以每一幀的容器位置y值減去前一幀的容器位置y值，得容器位移。

(三) 短時間內的平均速度

1. 將氣泡位移量除以每一幀的時間差，得氣泡短時間內的平均速度。
2. 將容器位移量除以每一幀的時間差，得容器短時間內的平均速度。

(四) 短時間內的平均加速度

1. 將氣泡速度除以每一幀的時間差，得氣泡短時間內的平均加速度。
2. 將容器速度除以每一幀的時間差，得容器短時間內的平均加速度。

(五) 氣泡相對於流體短時間內的平均速度

氣泡短時間內的平均速度減去容器短時間內的平均速度。

(六) 雷諾數

$$Re = \frac{\rho v l}{\mu}$$

ρ = 液體密度，水的密度是 1000 kg/m^3

v = 氣泡相對於流體的速率

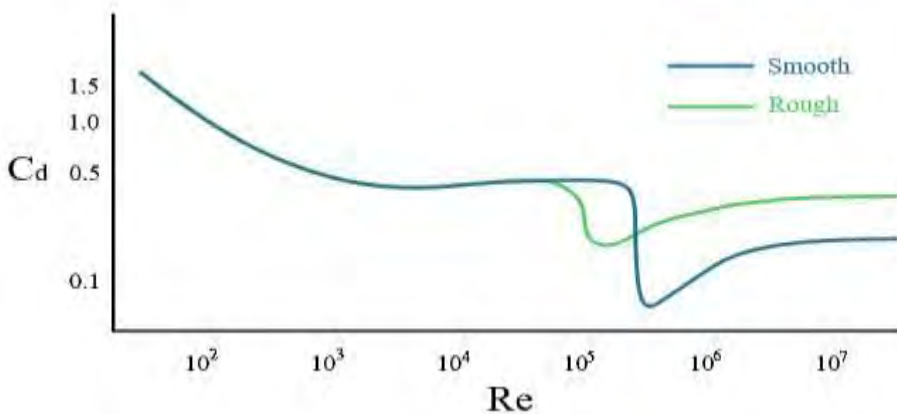
l = 特徵長度（取氣泡直徑， 0.8cm ）

μ = 黏滯係數，單位為 $\text{pa} \cdot \text{s} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \text{S}$

水的黏滯係數為 $0.001 \text{ pa} \cdot \text{s}$

(七) 阻力係數

氣泡外型接近球體，由斯托克斯阻力公式，當 $Re < 1$ ， $C_d = \frac{24}{Re}$ 。

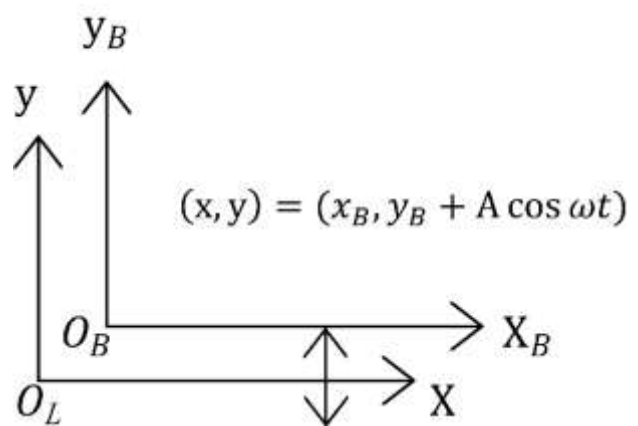


當 $Re \approx 10^3 \sim 10^5$ ， $C_d \approx 0.4$ ，幾乎與 Re 無關。

(圖十三)

(八) 實驗室座標系與容器座標系

由於容器相對於地面作簡諧運動，氣泡相對於觀察者與氣泡相對於容器的座標



轉換如下。

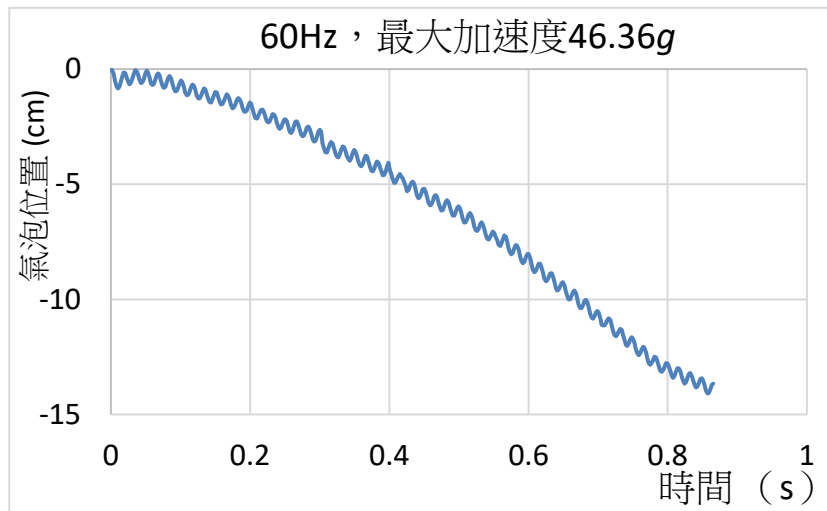
O_L = 實驗室座標系原點

O_B = 容器座標系原點

$(x, y) = (x_B, y_B + A \cos \omega t)$ A 是簡諧運動振幅

(圖十四)

三、 下沉定義



(圖十五)

(圖十五) 為由影片做移動軌跡追蹤所得的氣泡位置 y-t 圖。我們觀察到，由於容器做簡諧運動，因此氣泡行一面做上下來回運動、一面向下移動至容器底部的循環式下沉。此為我們在報告中對「氣泡下沉現象」之定義。

四、 實驗變因

(一) 實驗一：同最大加速度不同頻率

1. 控制變因：

壓克力管直徑	4cm	氣壓	1015hPa
壓克力管管長	20cm	橡膠空心球直徑	0.9cm
水柱高	20cm	橡膠空心球密度	0.69 g/cm^3
容器狀態	密閉	最大加速度	$5g$ 、 $7.24g$ 、 $5.30g$
室溫	25°C	氣泡初始位置	離水面 5cm

2. 操作變因

頻率：5g：20Hz、30Hz、40Hz、50Hz、60Hz、70Hz

7.24g：80Hz、90Hz、100Hz、110Hz、120Hz、130Hz、160Hz

10.30g：140Hz、150Hz、170Hz、180Hz

(二) 實驗二：同頻率不同最大加速度

1. 控制變因：

壓克力管直徑	4cm	氣壓	1015hPa
壓克力管管長	22.5cm	熱熔膠空心球直徑	0.8cm
水柱高	22.5cm	熱熔膠空心球密度	0.066 g/cm^3
容器狀態	密閉	頻率	60 Hz
室溫	25°C	氣泡初始位置	離水面 12.5cm

2. 操作變因

最大加速度：11.59 g、15.94 g、20.28 g、26.08 g、33.32 g、46.36 g

(三) 實驗三：無法形變的空心球(B B彈)

1. 控制變因：

壓克力管直徑	4cm	氣壓	1015hPa
壓克力管管長	22.5cm	堅硬空心球直徑	0.6cm
水柱高	22.5cm	堅硬空心球密度	0.213 g/cm^3
容器狀態	密閉	頻率	60 Hz
室溫	25°C	氣泡初始位置	離水面 12.5cm

2. 操作變因

最大加速度：11.59 g、15.94 g、20.28 g、26.08 g、33.32 g、46.36 g

(四) 實驗四：不同管徑

1. 控制變因：空心橡膠球密度=0.69g/cm³

壓克力管直徑	4cm	氣壓	1015hPa
壓克力管管長	22.5cm	最大加速度	24.09111g
水柱高	22.5cm	橡膠球初始位置	離水面 12.5cm

容器狀態	密閉	室溫	25°C
------	----	----	------

2.操作變因

不同管徑：4cm、6cm

(五) 實驗五：不同流體

1.控制變因：熱熔膠空心球密度=0.066 g/cm^3

壓克力管直徑	4cm	氣壓	1015hPa
壓克力管管長	22.5cm	最大加速度	32.19 g
水柱高	22.5cm	熱熔膠球初始位置	離水面 12.5cm
容器狀態	密閉	室溫	25°C

2.操作變因

液體種類：甘油、水

五、 理論探討

(一) 容器加速度與等效重力

我們在實驗中容器震盪的最大加速度量值比起地表附近的重力加速度 $9.8m/s^2$ 大很多，因此等效重力方向決定於容器震盪的加速度。

$$N - mg = a$$

N = 正向力

g = 地表附近的重力加速度

$A\omega^2$ = 簡諧運動最大加速度

ω = 角頻率

m = 液體質量

a = 由震盪器給予且會隨時間變化的加速度 = $-A\omega^2 \cos\omega t$

容器座標系中液體靜止所以等效重力 = $-m(g + a) = -mg'$



等效重力加速度 $\vec{g}' = \vec{g} + (-\vec{a}) = -g' = -(-A\omega^2 \cos \omega t + g)$

$g' > 0 \rightarrow \vec{g}' = -g' < 0$ 代表方向向下， $g' < 0 \rightarrow \vec{g}' = -g' > 0$ 代表方向向上

(二) 氣泡的等效重力

$$W' = -m_B g' = -m_B (g + a)$$

$$= -V_B \rho_B (g - A \omega^2 \cos \omega t)$$

W' = 氣泡等效重力

V_B = 氣泡體積

ρ_B = 氣泡密度

$A \omega^2$ = 最大加速度

ω = 角頻率

t = 時間

(三) 氣泡的等效浮力

由於容器做簡諧運動，因此氣泡等效重力方向會隨時間改變，等效浮力與等效重力相反方向，所以氣泡在等效重力場方向不斷變換時相對於容器會有上浮或是下沉的現象。

$$\mathbf{B}' = V_B \rho g'$$

$$= V_B \rho (g + a)$$

$$= V_B \rho (g - A \omega^2 \cos \omega t)$$

ρ = 液體密度

(四) 容器作簡諧運動時液體之壓力:

相對於實驗室座標系

1. 液體靜止時壓力

$$P = \frac{N}{A} = \frac{mg}{A} = h\rho g$$

N = 垂直作用力

m = 液體質量

h (或是 y_B) = 氣泡所在液面下的深度

A = 液體截面積

2. 有加速度時液體壓力

$$\sum F = ma$$

$$PA - P_0A - (Ah)\rho g = Ah\rho a$$

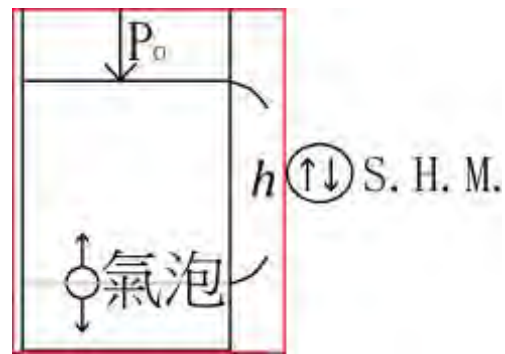
$$P - P_0 = h\rho g + h\rho a$$

$$P = P_0 + h\rho(g + a) = P_0 + h\rho g'$$

a = 容器相對於實驗室座標系之加速度

P = 氣泡所受總壓力

P_0 = 大氣壓力



(圖十六)

3. 容器作簡諧運動時的壓力

$$P = P_0 + h\rho(g - A\omega^2 \cos \omega t)$$

(五) 體積

理想氣體方程式 $PV = nRT = k$ 定量定溫時 k 為一常數

氣泡可視為定量定溫的球形氣體，因為氣泡與液體之間表面張力造成之內外壓力差很小

可以忽略，所以氣泡內之壓力和外面液體壓力視為相等 $P = P_0 + h\rho(g - A\omega^2 \cos \omega t)$ 。

所以可得

$$V_B = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{k}{P_0 + h\rho(g - A\omega^2 \cos \omega t)}$$

(六) 氣泡的截面積

由於震盪加速度及液壓不斷改變，氣泡體積和截面積也不斷變化。

$$A_{cross} = \pi R^2 = \pi \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}, \text{ 當 } P_0 \gg h\rho g' \text{ 時}$$

$A_{cross} = \tilde{A}(1 + a_0 \cos \omega t)$ ， a_0 為一正比於容器簡諧運動最大加速度 $A\omega^2$ 之常數，此式為電腦程式 Mathematica 模擬用，和真實情況有些差異。

(七) 阻力

$$F_d = \frac{1}{2} \rho \dot{y}_B^2 A C_d$$

$$= -\gamma A_{cross} \dot{y}_B^2 \operatorname{sgn}(\dot{y}_B) \quad \gamma = \frac{1}{2} \rho C_d$$

\dot{y}_B = 氣泡相對於液體（容器）的速度

C_d = 阻力係數

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -1 & : x < 0 \end{cases} \quad \text{為一判斷實數正負號的邏輯函數}$$

(八) 附加質量

對於容器座標系，由牛頓第二運動定律

$$(m + m_0)\ddot{y}_B + \dot{m}_0 \dot{y}_B = \text{阻力} + (\text{等效浮力} + \text{等效重力})$$

$$\text{附加質量（球體）} \quad m_0 = \frac{1}{2} \rho V_B = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho$$

在流體中的物體做加速度運動時造成一部分流體隨物體作加速度運動，因此欲使物體作加速度運動需施比原先更大的力，如同質量增加一般，稱為附加質量。

附加質量和截面積正相關，模擬加入附加質量後更符合實際數據。

(九) 氣泡運動方程式及模擬

對於容器座標系，由牛頓第二運動定律

$$(\rho_B V_B + m_0)\ddot{y}_B + \dot{m}_0 \dot{y}_B = V_B \rho g' + F_{drag} + (-V_B \rho_B g')$$

氣泡重力常遠小於浮力，此時最後一項可忽略不計

$$F_{drag} = -\gamma A_{cross} \dot{y}_B^2 \operatorname{sgn}(\dot{y}_B)$$

$$(\rho_B V_B + m_0)\ddot{y}_B + \dot{m}_0 \dot{y}_B = V_B \rho g' - \gamma \tilde{A}(1 + a_0 \cos \omega t) \dot{y}_B^2 \operatorname{sgn}(\dot{y}_B)$$

$\dot{y}_B =$ 氣泡的速度

$\ddot{y}_B =$ 氣泡的加速度

得最終方程式：

$$\ddot{y}_B = \frac{V_B \rho g' - \gamma \tilde{A} (1 + a_0 \cos \omega t) \dot{y}_B^2 \operatorname{sgn}(\dot{y}_B) - \dot{m}_0 \dot{y}_B}{\rho_B V_B + m_0}$$

我們將以上方程式寫入 Mathematica 程式模擬 bubbles 之運動，且轉換成實驗室坐標系 ($y=y_B + A \cos \omega t$)，與實驗數值做比較。

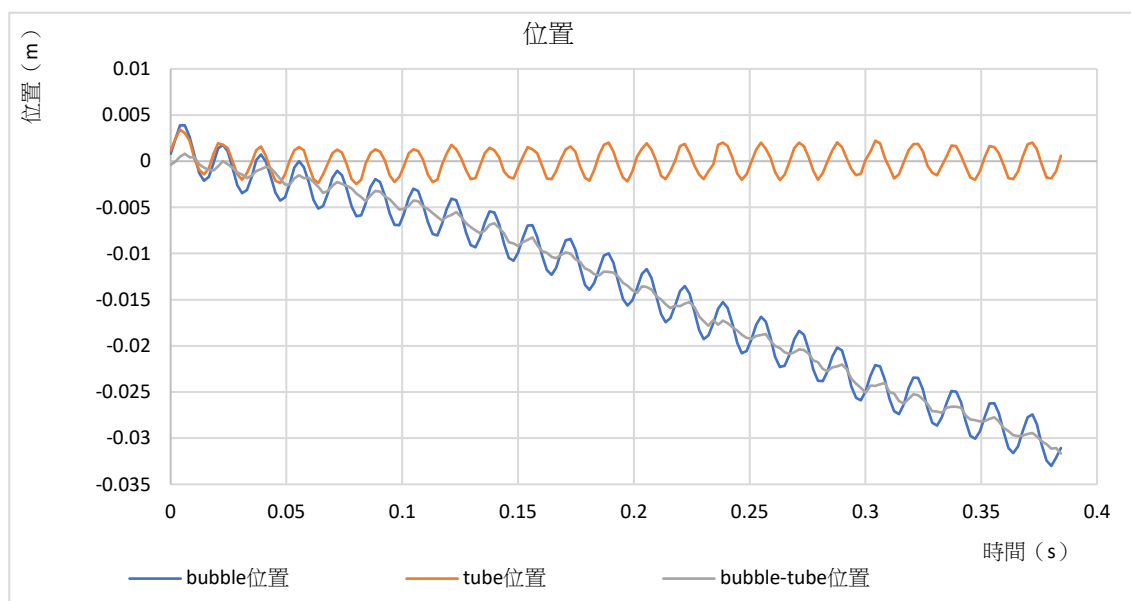
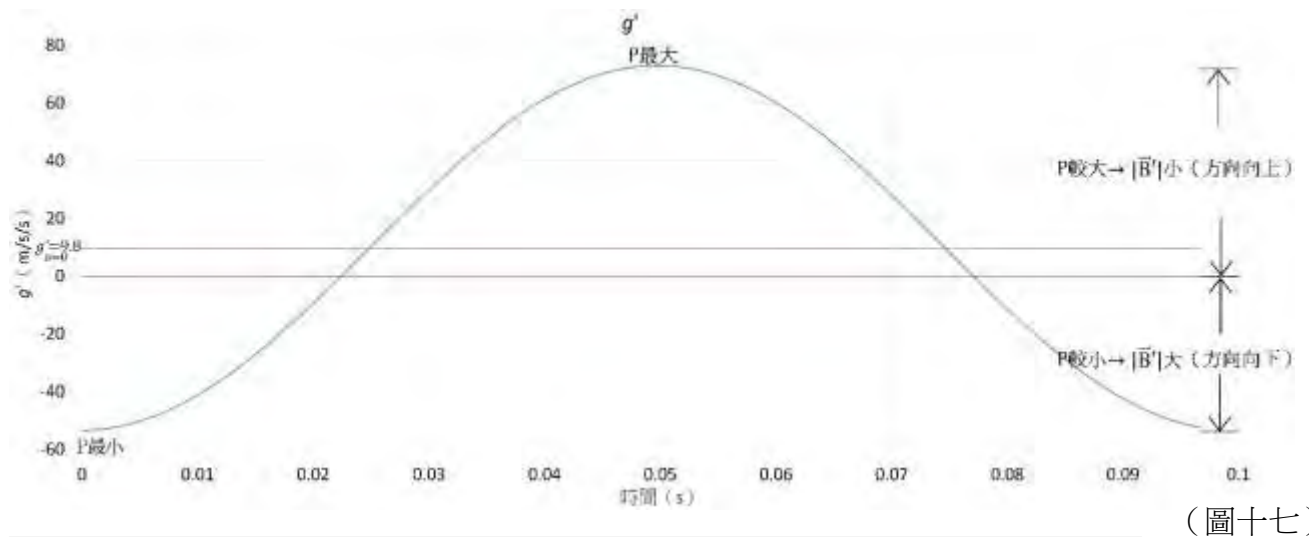
六、 下沉原因

考量在周期震盪下氣泡(自然或人工氣泡)運動之驅動力，由動量衝量定理 ($\bar{J} = \Delta \bar{P}$) 可以知道氣泡由原先靜止後來相對於容器之運動。氣泡由靜止開始運動的驅動力=等效浮力+等效重力，因為容器震盪所以氣泡相對容器忽上忽下隨時而變，計算一個周期內平均驅動力 ($\frac{1}{T} \int (B' + w') dt$) 之正負值可知氣泡相對容器最後是上升(正值)或是下沉(負值)，因為氣泡密度小於實驗時水和甘油的密度，得知等效浮力比等效重力大，氣泡合力向上或是向下由等效浮力之方向所決定，所以由一個周期內平均等效浮力 ($\frac{1}{T} \int B' dt$) 正負值即可知氣泡相對容器最後是上升(正值)或是下沉(負值)，由 mathematica 程式證實氣泡能下沉之實驗變因(適當條件下如 a_m 夠大) 符合此原理。

圖十七說明容器在足以使氣泡下沉之加速度及頻率震盪,在一個周期之內之等效重力加速度和時間之關係圖(座標數值僅用來繪圖說明為何會下沉,真正觀察到下沉需有足夠驅動力),由理想氣體方程式和等效浮力公式得到 $B' = V_B \rho g' = \frac{k\rho}{\frac{P_0}{g'} + h\rho}$ 和 g' 同號(等效重力加速度 $\bar{g}' = -g'$)，由圖可知當 $g' < 0$ (B' 向下、容器加速度向下) 之時間比較短，氣泡所受壓力比較小 \rightarrow 氣泡體積較大 \rightarrow 由程式可算出向下之等效浮力平均量值較大; 當 $g' > 0$ (B' 向上、容器加速度向上或向下較小時) 之時間比較長，壓力比較大 \rightarrow 氣泡體積較小 \rightarrow 程式算出向上等效浮力平均量值較小，綜合力量和作用時間因素，一個周期內之平均等效浮力 $\frac{1}{T} \int B' dt < 0$ ，故氣泡下沉。

如果小球體積極難壓縮而視為定值，又液體密度不變，計算可得一個周期內之平均等效浮力 $\frac{1}{T} \int B' dt = 0$ ，可知氣泡僅隨著驅動力忽上忽下而震盪，但是並不會下沉。可知震盪時液體壓力的變化程度影響氣泡體積的伸縮或形變程度，進一步影響下沉之難易，且可推知震盪頻率和最大加速度影響氣泡是否下沉，而下沉快慢和驅動力、阻力有關。

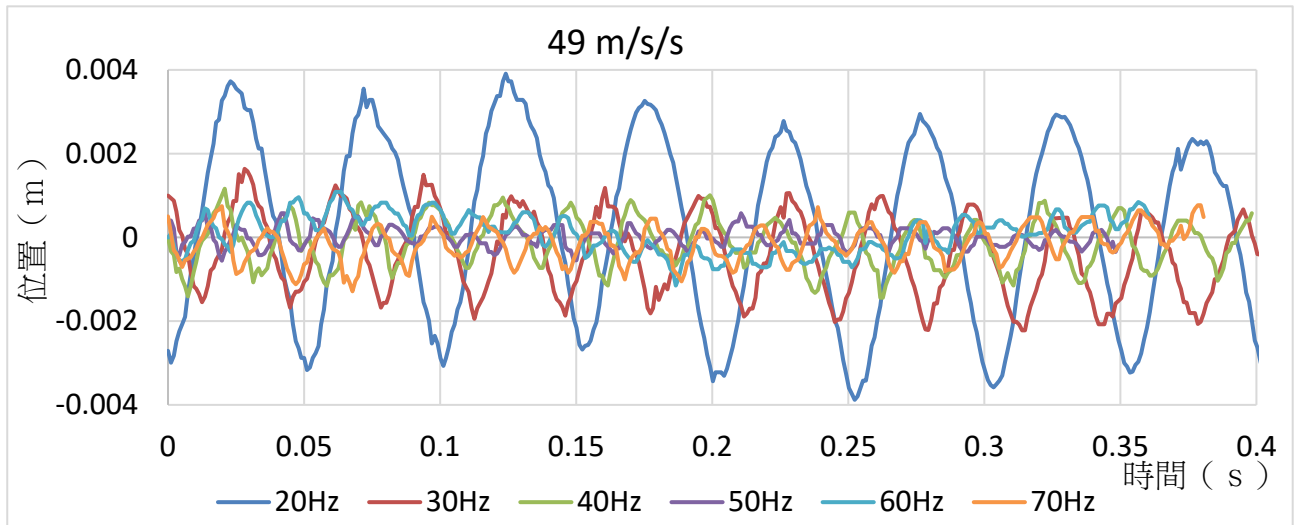
圖十八是熱熔膠小球與容器的真實運動情形，紅線為實驗室(lab)座標系看到之容器震盪，記為 y_{tL} ，綠線是在容器座標系看到的小球位置時間關係圖，記為 y_{bt} ，藍線為在實驗室座標系上看到小球下沉的位置時間關係圖，記為 y_{bL} 。 $y_{bL} = y_{bt} + y_{tL}$ ，綠線和紅線震盪的峰對峰谷對谷時間上大致相符，所以重疊之後藍線的震盪幅度比綠線的大，由此可知若小球相對於容器下沉，則相對於實驗室座標系也下沉，由上述可知氣泡循環式下沉的原理。



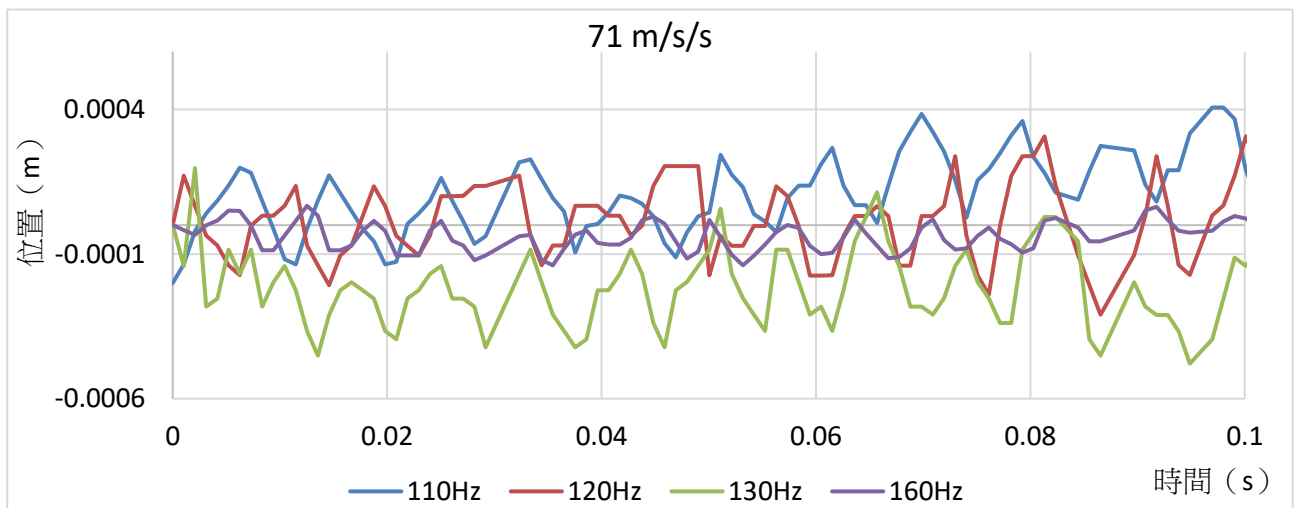
(圖十八)

伍、 研究結果

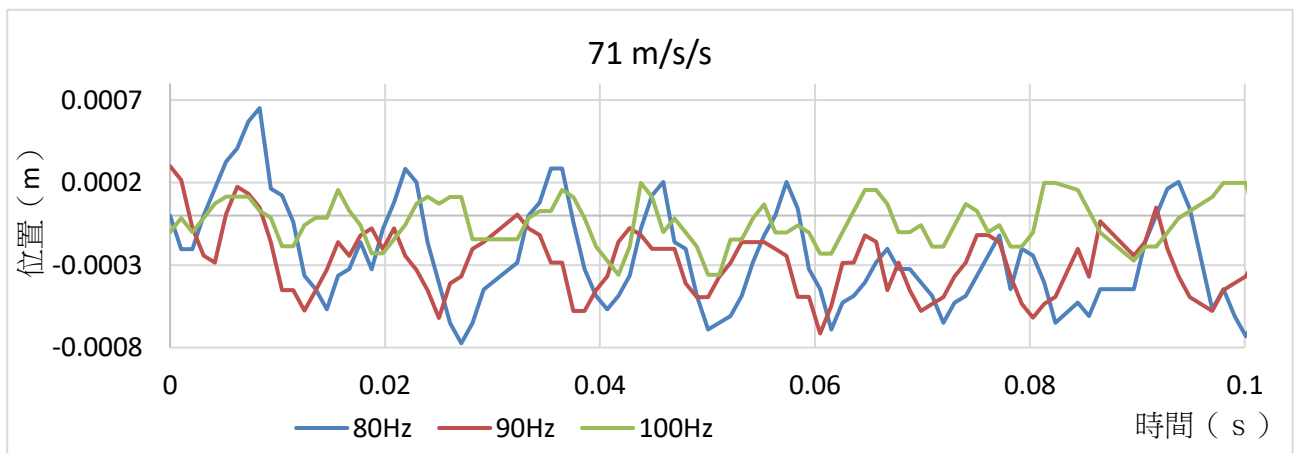
一、 最大加速度相同改變振盪頻率



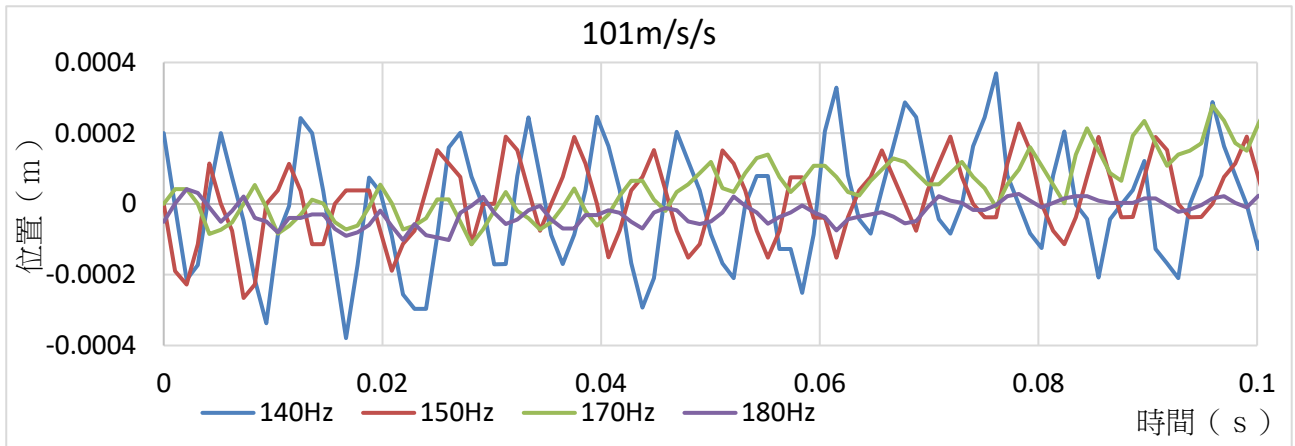
(圖十九)



(圖二十)

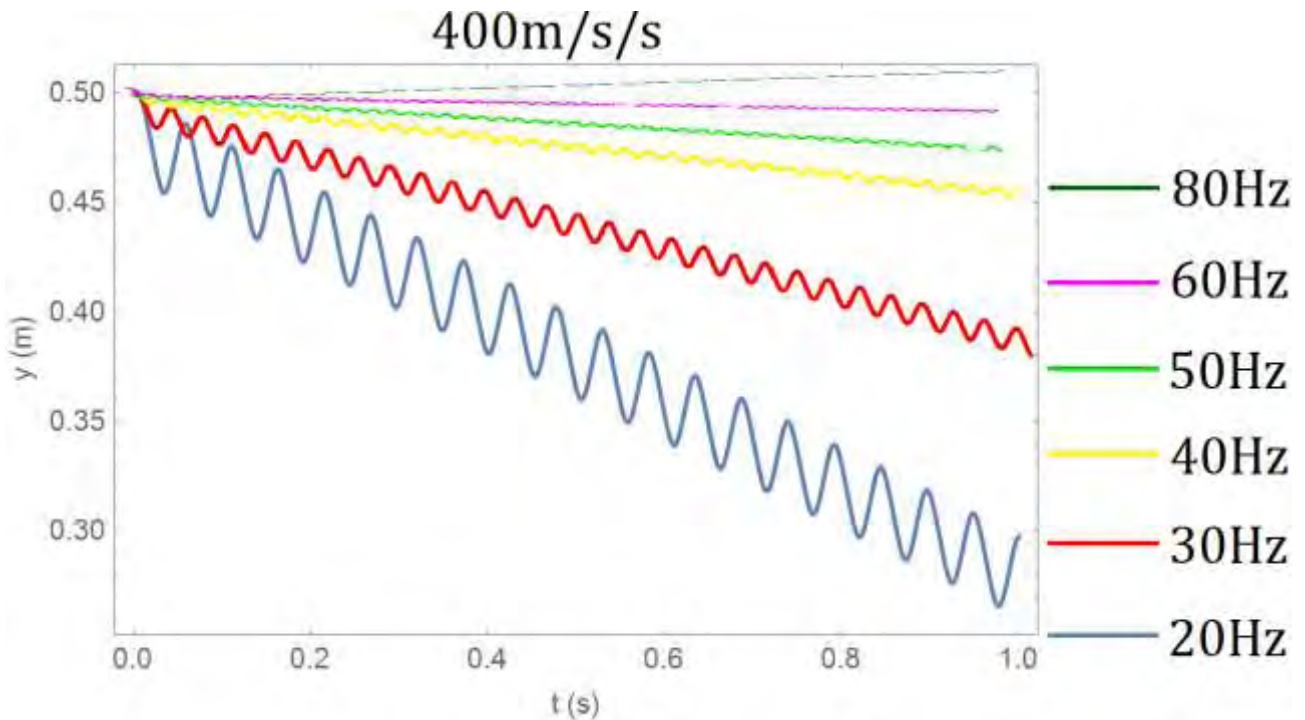


(圖二十一)



(圖二十二)

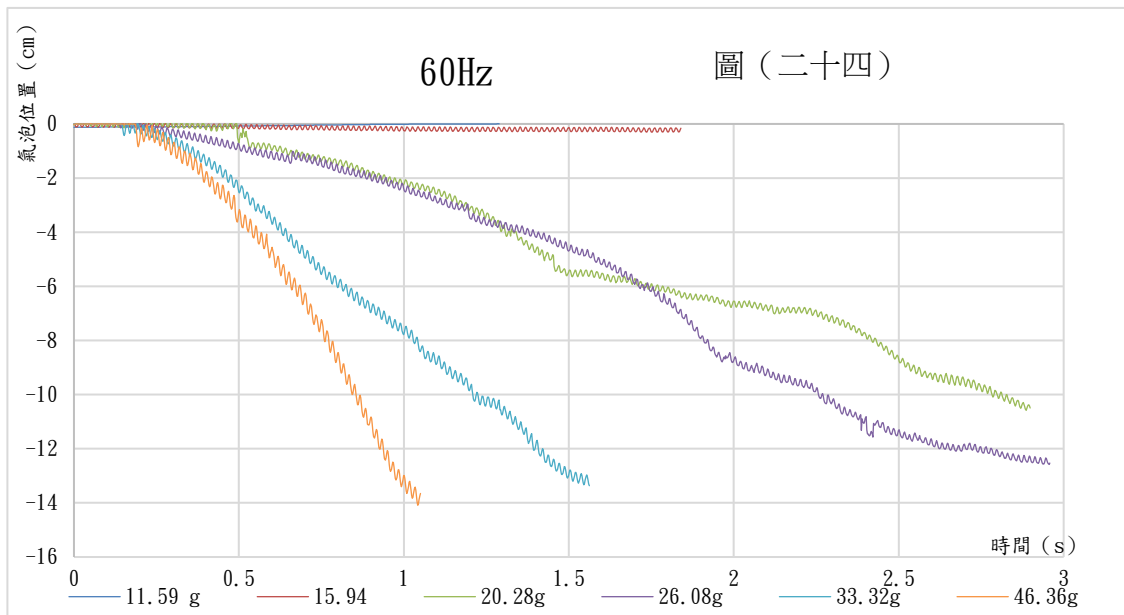
從(圖十九)到(圖二十二)的觀察，加速度相同時，容器震盪頻率越高，氣泡來回運動的頻率也越高，且振幅越小，但在實驗範圍內氣泡都不下沉。



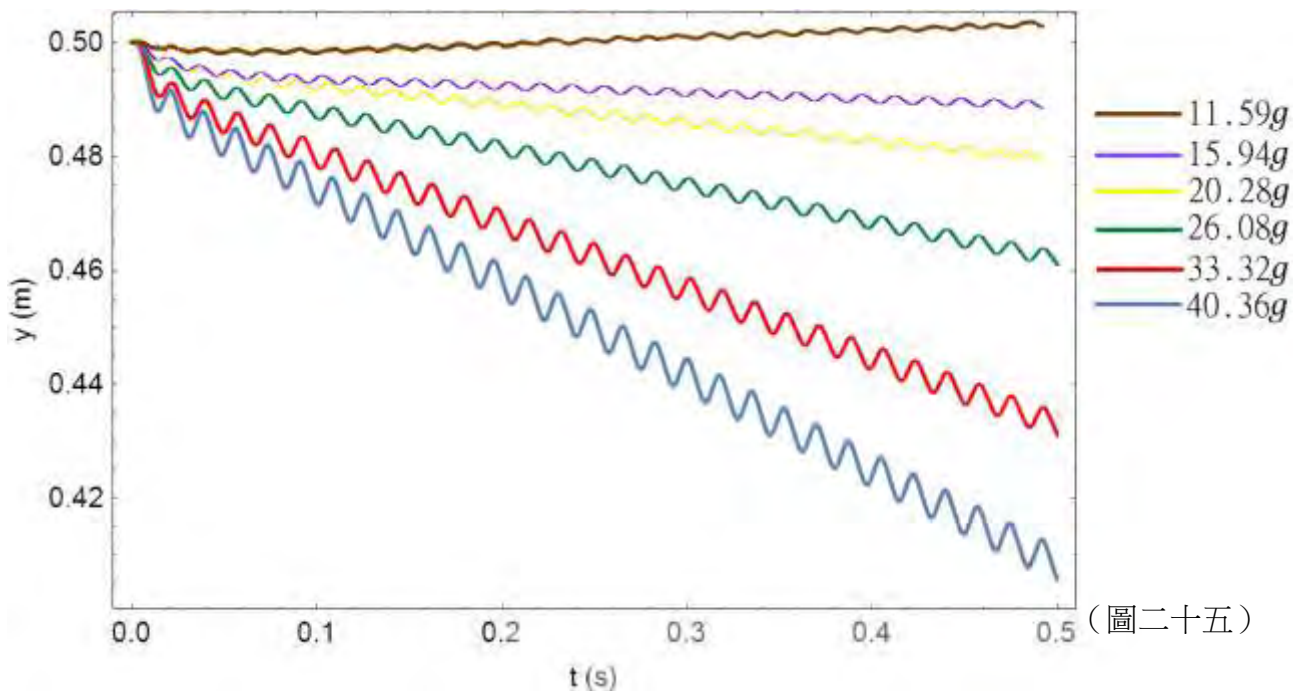
(圖二十三)

在此模擬中，可知最大加速度相同時(400m/s^2)，振盪頻率越高，震盪幅度越小且越不容易下沉，而頻率達到 80HZ 氣泡變成上浮。

二、根據實驗影片追蹤氣泡移動位置，（圖二十四）為相同頻率，不同最大加速度的氣泡運動 y-t 圖



由（圖二十四）可得知，在頻率相等時，最大加速度愈大，下沉愈快。



（圖二十五）為（圖二十四）之實驗變因以電腦計算得到的理論數據，趨勢與上圖吻合，而最大加速度=11.59g 時變成上浮。

三、根據實驗結果觀察，我們發現到熱熔膠氣泡下沉時會伴隨體積變化，壓縮狀況如下，（圖二十六）的氣泡在第一個震盪週期最高點，（圖二十七）的氣泡在下沉震盪某週期時的

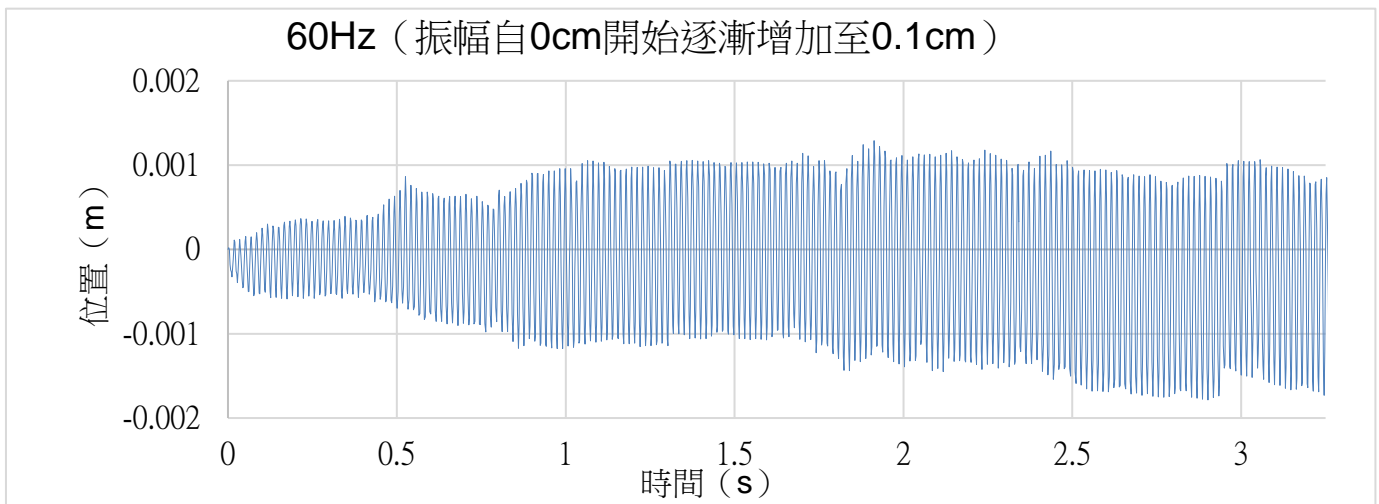
最低點。



(圖二十六) (圖二十七)

氣泡位置在較低點時體積較小形變程度較大，這和氣泡深度、震盪加速度有關。

四、為證明氣泡下沉的確和體積變化有關係，我們另取一堅硬空心BB彈做比較，其移動情形如下表(圖二十八)：

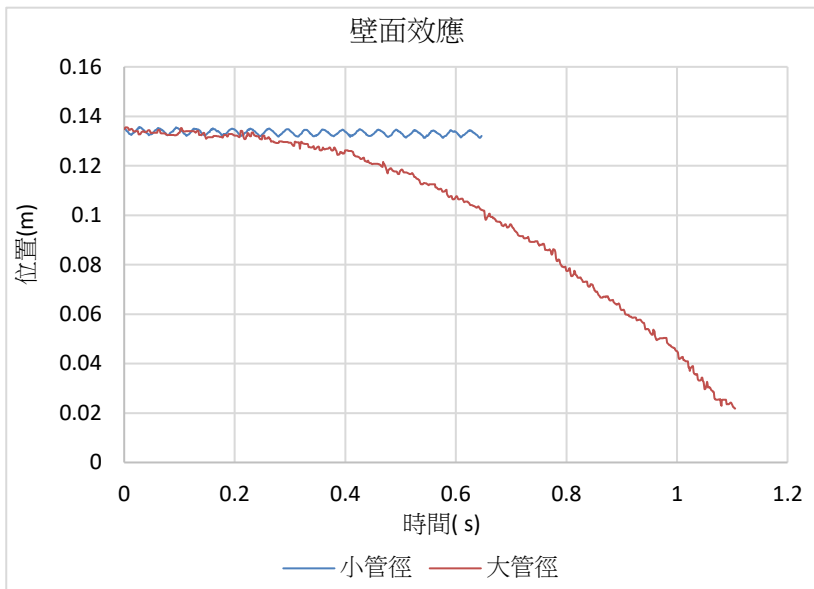


(圖二十八)

由實驗結果可知，隨著震盪幅度加劇，堅硬空心球沒有明顯下沉現象，僅會在初始位置附近上下振動。選用堅硬空心球做比較的原因為：堅硬空心球可壓縮性極小，震盪時幾乎沒有形變產生。

五、壁面效應的影響

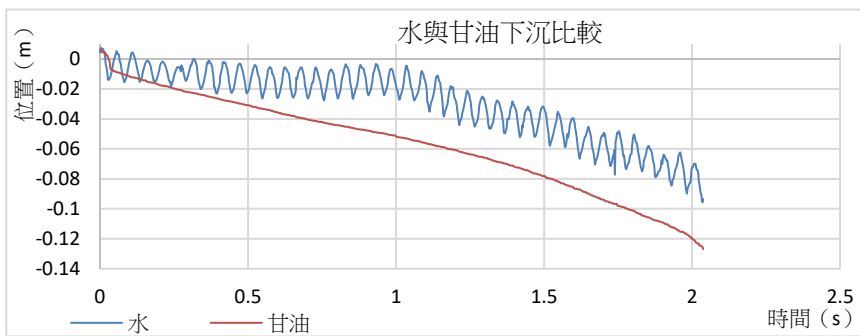
管徑較小時，壁面效應(流體和容器壁黏滯力作用多出的阻力)較明顯，較不易下沉，其情形如下圖



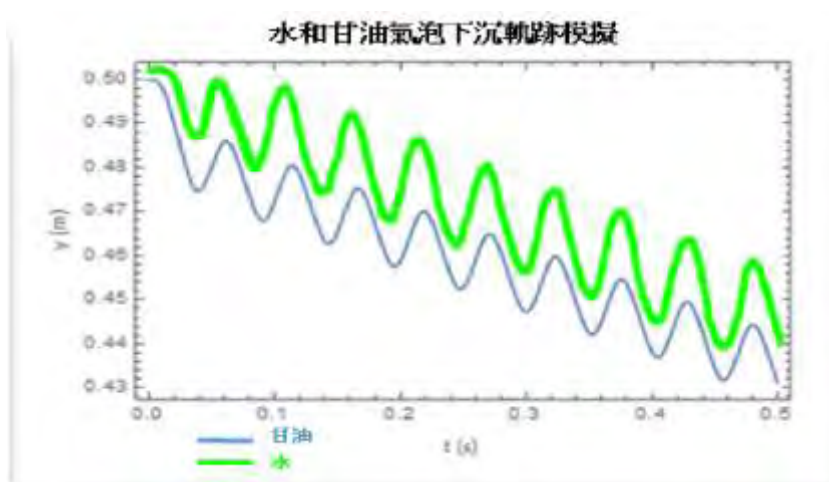
(圖二十九)

六、不同液體的影響

甘油密度較大且黏滯係數較大，氣泡震盪幅度較小且下沉較快，如下圖。



(圖三十)



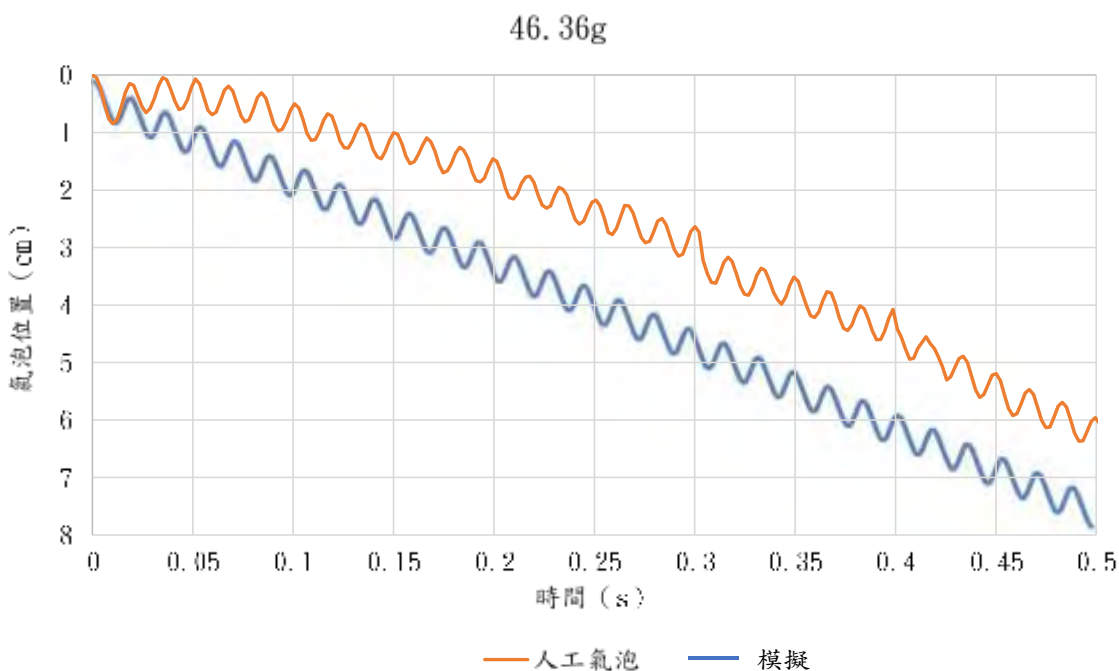
(圖三十一)

由(圖三十一)可以看出程式模擬結果和實驗結果趨勢相符。

陸、 討論

一、理論模擬與實驗結果雖有誤差，但仍有相同的趨勢，推測造成誤差的可能原因為

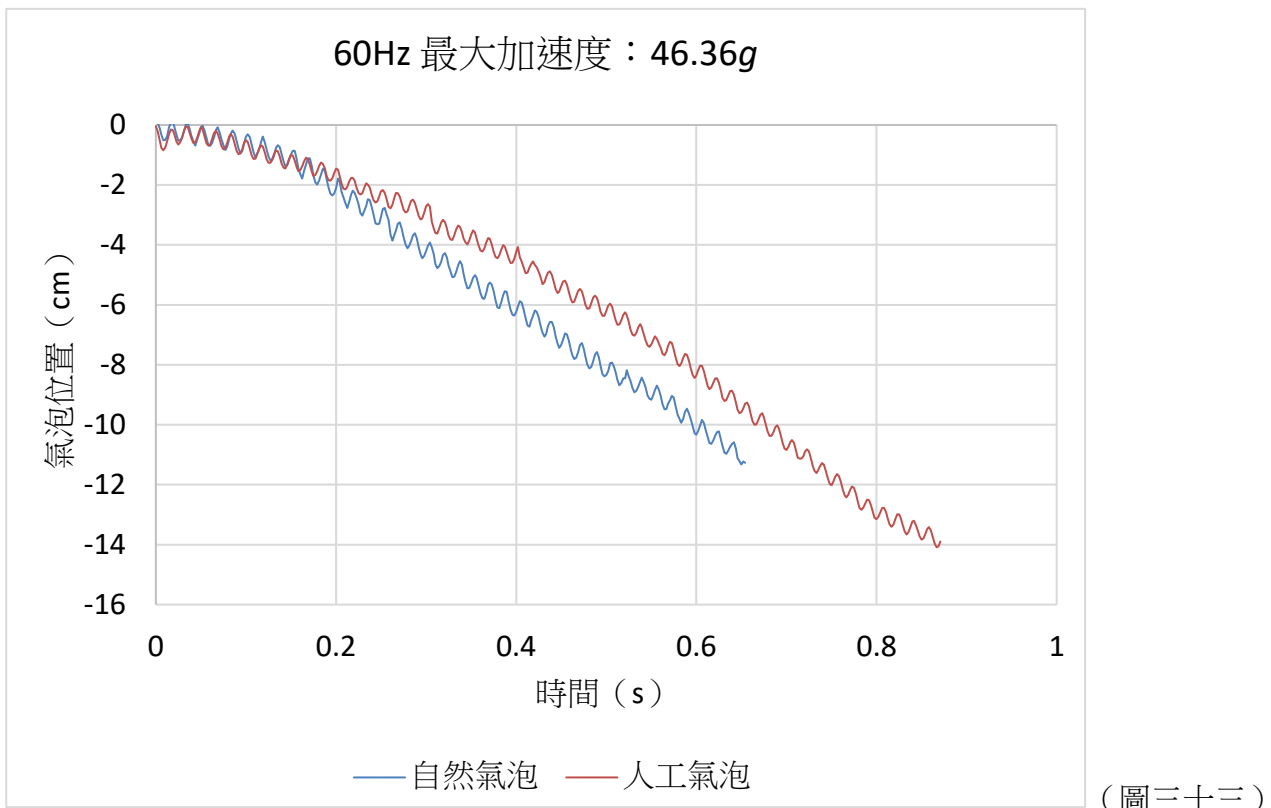
- (一) 公式 $A_{cross} = \tilde{A}(1 + a_0 \cos \omega t)$ 為電腦程式 Mathematica 模擬用，因為本研究震盪最大加速度頗大，所以與真實情況有些差異，且公式裡氣泡的形狀假設是球形，氣泡的截面積是圓形規則的週期性均向變化，但實際上我們使用的氣泡製作方法為將熱熔膠吹成空心球體，這會造成氣泡膜的厚度不均勻，受壓時的壓縮為不均勻壓縮，由(圖二十六)、(圖二十七)的觀察，氣泡壓縮時，主要變形的部位為上端較薄之處，氣泡的形狀變化並不完美。
- (二) 由附錄可知道氣泡運動時雷諾數不是定值，因此阻力係數不是定值，故在做數值模擬時會有誤差。
- (三) 我們在模擬中假定附加質量隨容器震盪改變是以球體半徑的公式計算，與實際情況有誤差。
- (四) 模擬圖二十五氣泡位置時間關係圖中，60HZ、 $a_m=11.59g$ 趨勢走向為向上，但對應實驗數據為持平，這是因為氣泡密度比水小，一開始我們將氣泡以細線固定於容器底部使靜止，所以容器震盪氣泡欲向上移動時受綁線限制無法向上移動。
- (五) 在理論模擬中，我們忽略氣泡重力不計適用於熱溶膠氣泡，自製的熱溶膠空心球重



力約等於 $0.0169g \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{1000} = 0.166N \cdot \frac{1}{1000}$ ，而其浮力約等於

$0.256cm^3 \cdot 1 \frac{g}{cm^3} \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{1000} = 2.508N \cdot \frac{1}{1000}$ ，相較之下重力數值過小而忽略，而自然氣泡的重力數值相較於浮力更小，因此不納入計算。對於橡膠球和 BB 彈忽略重力誤差較大，但是仍然可以由模擬程式預測運動趨勢。

二、比較自製氣泡與自然氣泡



(圖三十三)

兩者都是循環式下沉，自然氣泡下沉較快，這和兩者的體積、密度與壓縮性有關。

三、(圖二十四) $20.28g$ 、 $26.08g$ 兩圖形於 $0.5 \sim 2$ 秒間有交錯，與理論模擬有些出入，可能是因為熱熔膠氣泡在這兩條件下壓縮的程度較接近，而實驗時氣泡有時有些微水平運動有關。

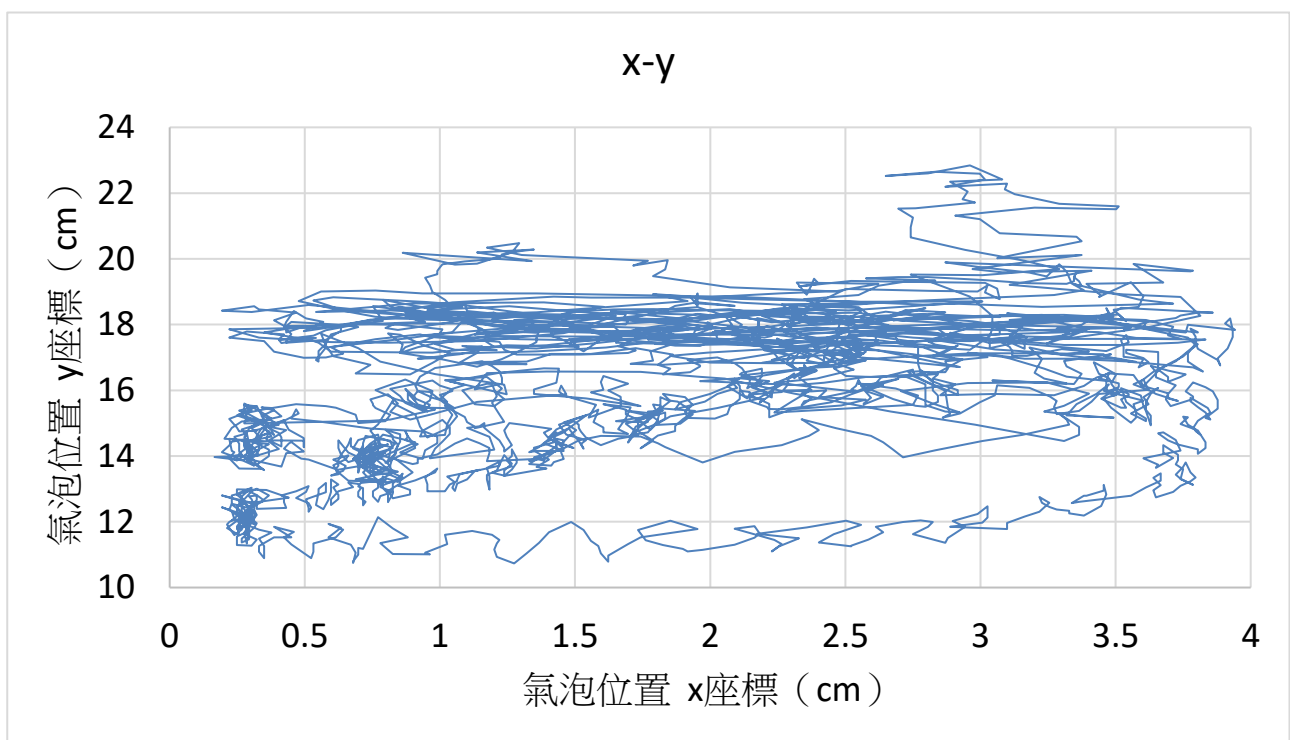
四、為了證明氣泡下沉和氣泡體積壓縮、形變有關係，我們在相同條件下，另外取一種形狀在受壓後幾乎沒有體積變化的空心球震盪來做觀察，我們發現堅硬空心球沒有明顯的下沉現象，僅會在初始位置附近上下振動(圖二十八)，證明氣泡下沉現象必須有體積改變才可能成立。若無形狀變化，則氣泡無法順利下沉，我們的預設理論是成立的。氣泡在不同時間點受壓不同，會造成氣泡形狀改變，影響在震盪週期中不同時間點所受阻力。

最大加速度相等時，頻率越大，越不容易下沉(參照圖二十四及二十五)，原因是振盪頻率變大，向下等效浮力平均量值和向上的等效浮力平均量值的差變小，因此下沉趨勢隨頻率增大而減緩甚至轉為上浮。

五、在頻率相等時，最大加速度愈大，每一週期中氣泡所受壓力變化越大，氣泡體積變化越大，向下等效浮力平均量值和向上的等效浮力平均量值的差變大，拉大每一週期裡向下移動量值和向上移動量值的差，導致下沉速率變快。

六、若人工氣泡密度大於液體，則等效重力量值大於等效浮力量值，原本下沉條件時人工氣泡反而會上浮。

七、為何將水裝滿且密封?



(圖三十四)

如果容器上端留有許多空氣或未密封，在接近水面處會有一段狀態非常紊亂的流體，並且因為震盪產生表面波而有打入水中的氣泡。此圖呈現的是在水面附近的氣泡移動軌跡。因此，為了減少實驗誤差，我們將液體裝滿容器，盡量減少容器內的空氣含量並密封，且將所觀察氣泡的初始位置固定在水高度一半處，以減少實驗誤差。因此本實驗所探討的下沉現象並非表面波動及紊流所造成。

柒、 結論

- 一、 本實驗主要目的為找出氣泡下沉的原因，藉由實驗觀察及理論模擬結果證實為氣泡的形變和週期性震盪。
- 二、 因為容器做簡諧運動，氣泡的下沉為循環式下沉，而非筆直下降。
- 三、 氣泡下沉後若停止震盪，會即刻上浮，由此可證氣泡並非因重量而下沉。
- 四、 在相同頻率時，最大加速度越大，下沉速率越快，最大加速度相同而不夠大時，各頻率下氣泡都不下沉。管徑較小時，壁面效應影響大，較不易下沉。甘油密度較大且黏滯係數較大，氣泡下沉較快。
- 五、 只因附加質量無法使氣泡下沉，可由堅硬空心球實驗得到證明。
- 六、 液體的黏滯係數、氣泡的附加質量、液體流場、水面表面波都會影響氣泡下沉的情形，我們藉由減少水中空氣擾動（將水裝滿容器，盡量不留空氣在容器裡）以及固定初始深度之人工氣泡（自行吹製之熱熔膠空心球）控制實驗條件和影響變因。
- 七、 未來展望：
 - （一）進一步研究流體黏滯力對氣泡運動的影響，希望未來可以將液體種類列為操作變因之一。
 - （二）本研究理論上假設液體相對於震盪容器為靜止，但事實上即使容器完全密閉且全無空氣殘留，容器內流體也會產生因容器震盪而有些微流動，因此我們認為流場是一個值得研究的方向，希望之後可以探討液體震盪時流場和下沉現象的關係。
 - （三）此研究可以延伸到工業的塑膠射出成形的實際應用上，塑膠射出成形有些產品會特別添加發泡劑使其達到特定效果，假如能以振動改變氣泡在產品內的分布情形，便能找出提升品質的方法。

捌、參考資料及其他

一、論文：

1.Motion of Gas Bubbles and Rigid Particles in Vibrating Fluid-Filled Volumes

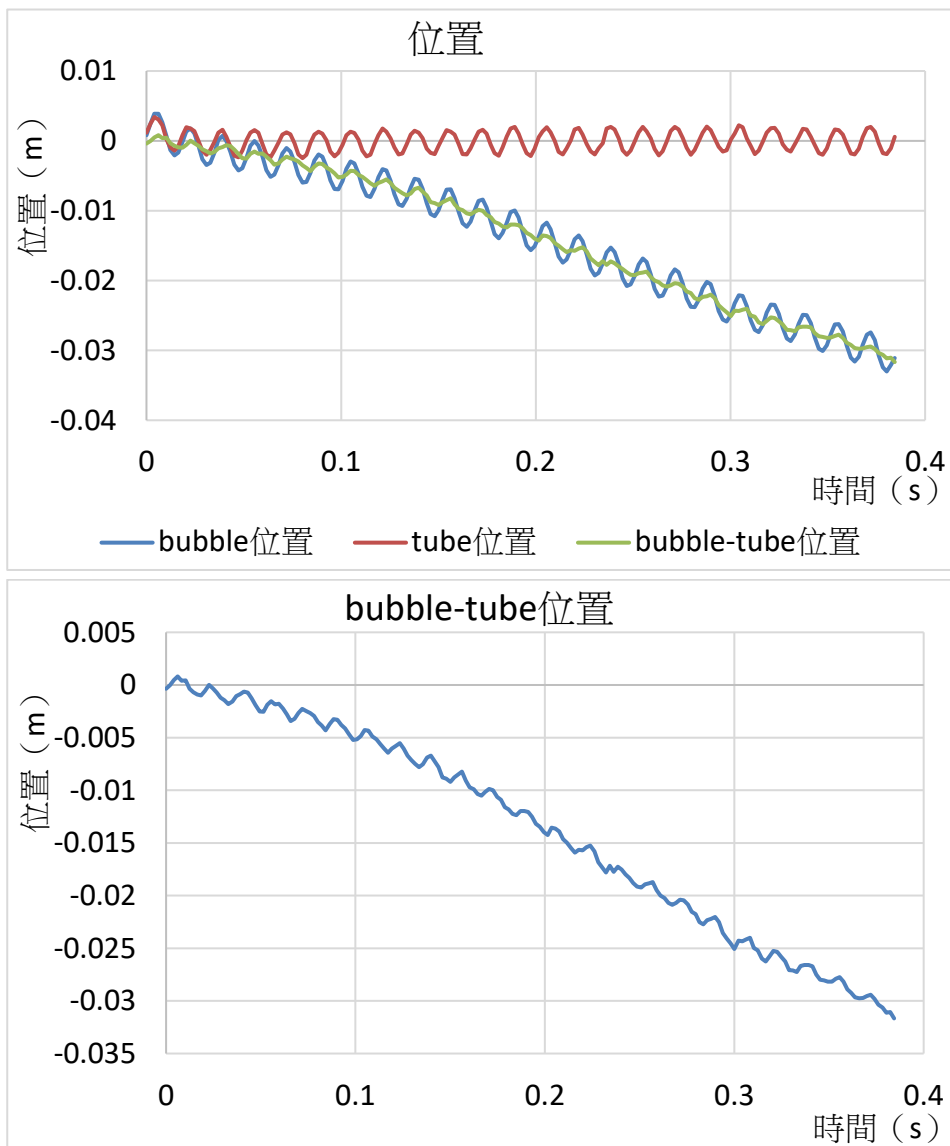
2.Motion of a gas bubble in fluid under vibration

二、國家教育研究院網站

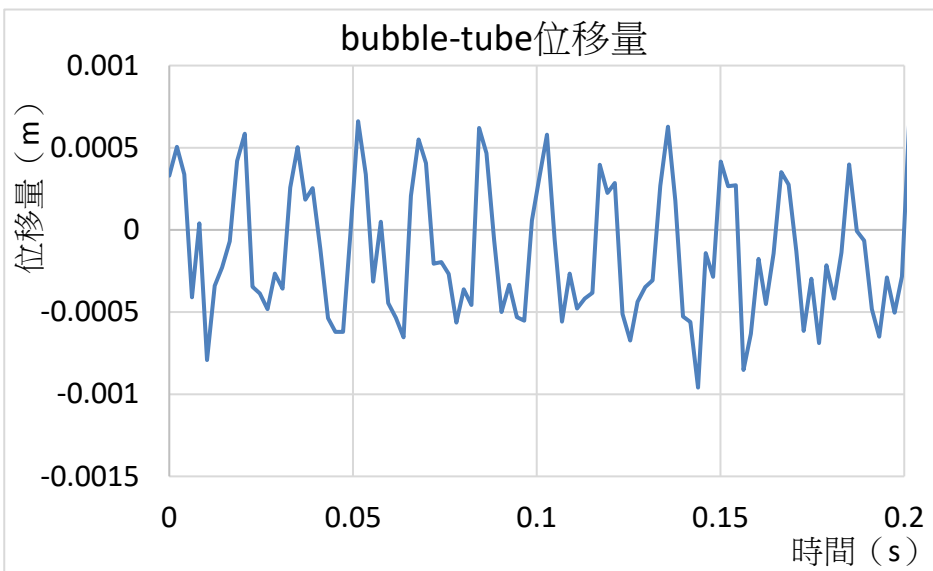
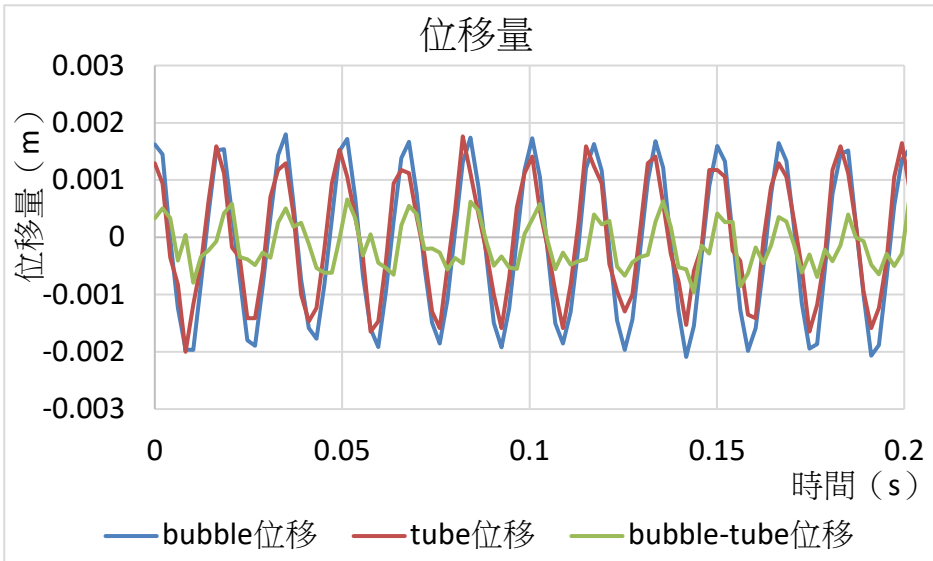
三、Youtube：<https://youtu.be/zaC3ezOlqJs>

附錄：雷諾數與阻力係數相關圖表（60Hz，最大加速度 46.36g）

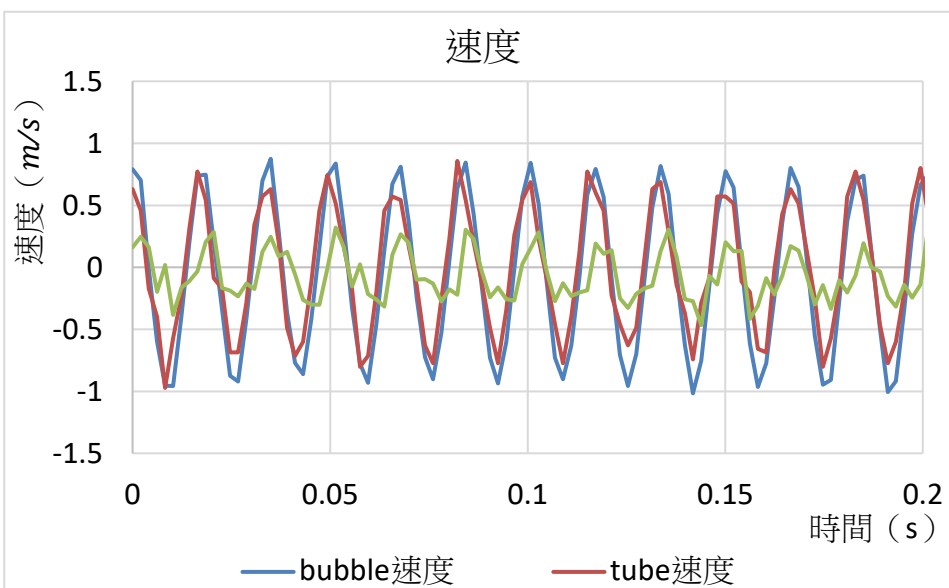
（一）氣泡與容器的相對位置

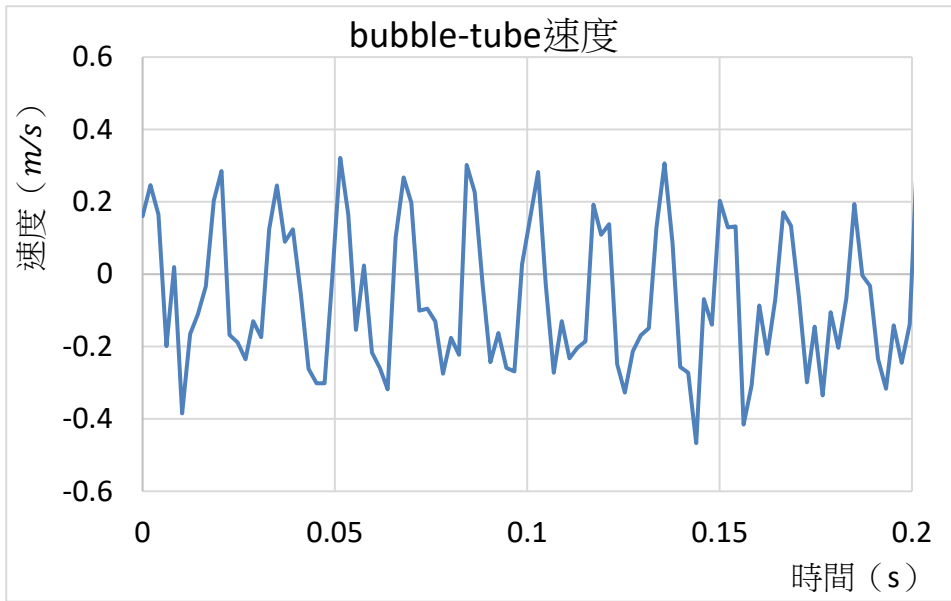


(二) 氣泡與容器的相對位移

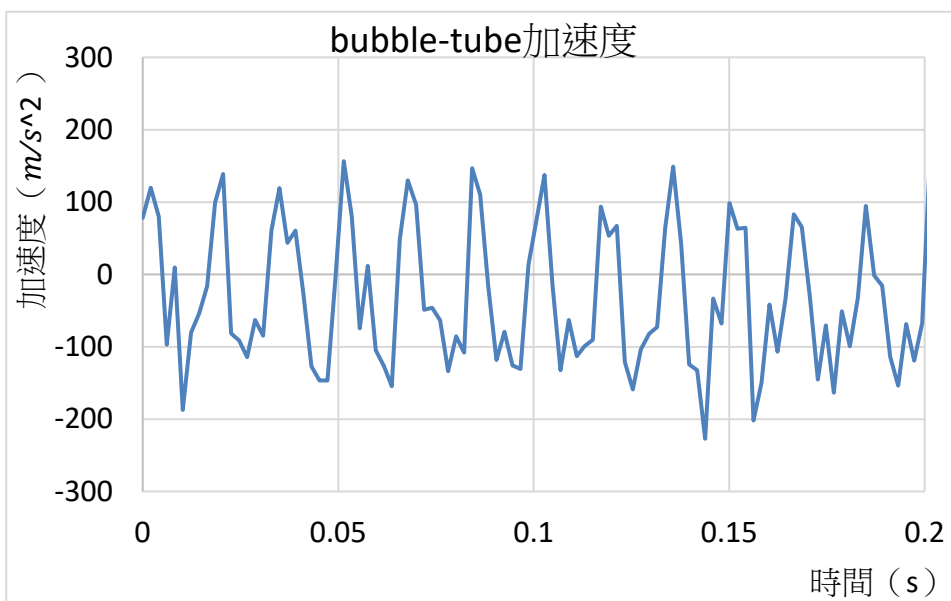
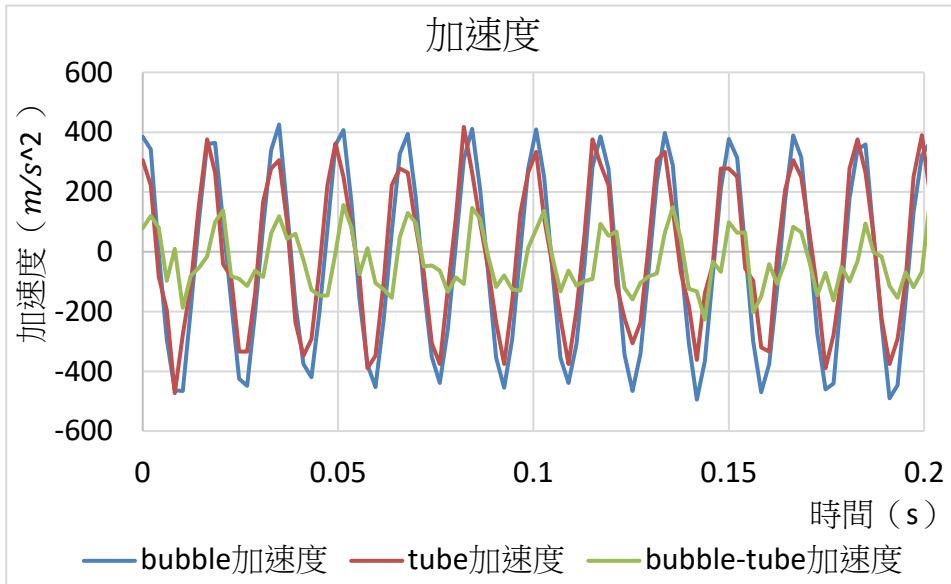


(三) 氣泡與容器的相對速度

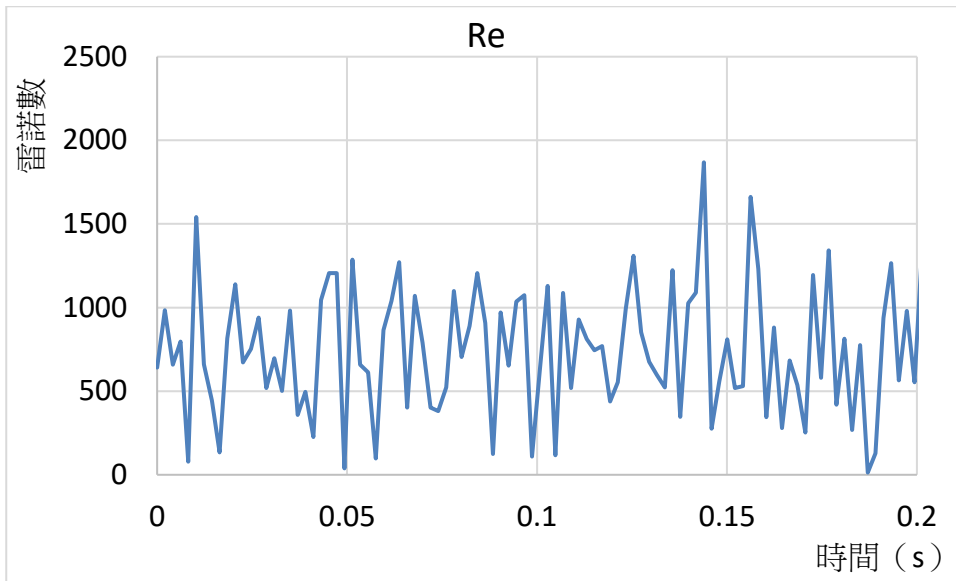




(四) 氣泡與容器的相對加速度



(五) 雷諾數



【評語】 051804

本作品探討在震盪流體中的氣泡之運動，特別是氣泡經震盪後會下沉的原因，震盪流體中氣泡下沉的運動之實驗雖然已有許多的討論，也有發表的論文，但本實驗做得結果與分析都算不錯，特別是在探討振動頻率、加速度、及振盪質量等物理參數影響的考慮完整，並且以對照組體積不會變之氣泡不會下沉說明體積變化為下沉現象的主要因素之一，可說是本作品最具說服性的部分，然因本實驗已在許多文獻或網路影片上已多有討論，也是 2019 IYTP 的題目之一，除了上述對照組實驗是其特色外，本作品比較欠缺的是定量上與實驗較為一致的理論模擬。

作品海報

壹、研究動機

氣泡下沉為一不尋常的現象，因好奇心而開始討論對造成氣泡下沉及影響氣泡運動的主要原因

貳、研究目的

分別討論

一、振動頻率 二、震盪最大加速度 三、氣泡材質 四、液體黏滯性質 與氣泡下沉的關聯

參、研究設備及器材

一、實驗器材

<p>裝置示意圖</p> <p>壓克力管</p> <p>震盪器 正弦波製造器 功率放大器</p>	<p>攝影機：以高速攝影拍攝氣泡移動</p> <p>側視圖 攝影機 震盪器</p>
<p>其他器材：熱熔膠槍、電腦、相機腳架</p>	

肆、研究過程及方法

研究架構圖

震盪器上固定透明壓克力管並裝滿水密封，以細且軟的線固定自製熱熔膠空心球於壓克力管底部，目的為使其在水中的初始高度固定。

將正弦波製造器連接功率放大器和震盪器。

以高速攝影拍攝氣泡在不同變因(振幅、頻率、氣泡材質)之下移動和體積變化的情形。

將拍攝完的影片放入tracker以同比例進行追蹤，以取得氣泡的移動和體積數據。

將以tracker追蹤影片得出的y-t圖與理論值加以比對、分析，並討論不同變因下氣泡移動和體積變化的情形。

容器密封的目的為預防表面波擾動水流

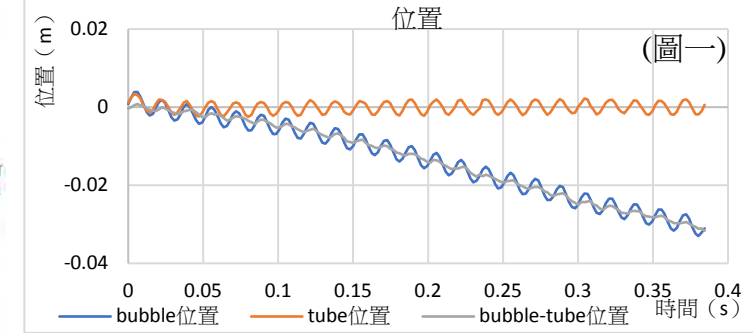
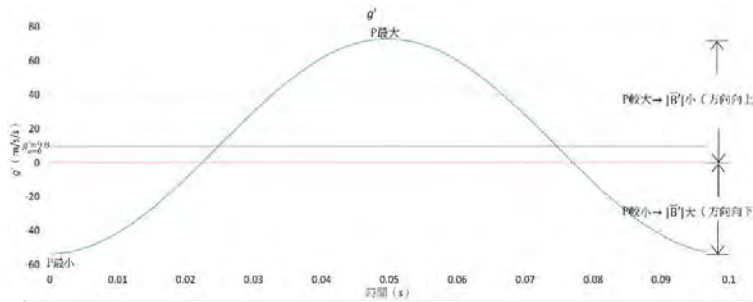
參考文獻所推導出的氣泡移動理論公式，寫入Mathematica程式輔助計算，得到氣泡移動理論上的y-t圖數據。

計算方式

Sinking bubbles

氣泡移動追蹤

分析



伍、下沉原因

由圖一及理論，對於容器座標系氣泡(自然及人工氣泡)由靜止開始運動的驅動力=等效浮力+等效重力，而等效浮力量值較大故決定驅動力方向。 $B' = V_B \rho g' = \frac{k\rho}{g' + h\rho}$ ，和 g' 同號($\bar{g}' = -g'$)。震盪一個周期內雖然等效浮力向下的時間較短，但此段期間的水壓較小氣泡體積較大， $|B'|$ 平均量值較大(適當條件下如 a_m 夠大，由計算知)，所以由動量衡量定理($\bar{J} = \Delta \bar{P}$)，氣泡相對容器下沉。圖二是氣泡與容器的震盪運動，紅線為地面座標系上看到容器震盪，記為 y_{tL} 。綠線是容器座標系看到氣泡的位置時間關係圖，記為 y_{bt} 。藍線為在實驗室座標系看到氣泡的運動情形，記為 y_{bL} 。 $y_{bL} = y_{bt} + y_{tL}$ ，綠線和紅線震盪的峰對峰谷對谷時間上大致相符，所以重疊之後藍線的震盪幅度比綠線的大，且知若氣泡相對於容器下沉，則相對於實驗室座標系也下沉。

一、實驗環境

壓克力管管長20cm，密閉、橡膠空心球直徑0.8cm、橡膠空心球密度 0.066 g/cm^3 、

實驗一：壁面效應的影響

(1) 控制變因：	(2) 操作變因：管徑：4 cm、6 cm
頻率	30Hz、100Hz
最大加速度(9.8m/s^2)	24.09111 g

實驗二：不同震盪頻率的影響

(1) 控制變因：	(2) 操作變因：
最大加速度(m/s^2)	5g、7.24g、10.30g
壓克力管管徑	4cm
頻率：	5g : 20Hz、30Hz、40Hz、50Hz、60Hz、70Hz
	7.24g : 80Hz、90Hz、100Hz、110Hz、120Hz、130Hz、160Hz
	10.30g : 140Hz、150Hz、170Hz、180Hz

實驗三：液體的影響

(1) 控制變因：	(2) 操作變因：
最大加速度(m/s^2)	32.19 g
頻率	40Hz
	液體種類：甘油、水

實驗四：容器最大加速度的影響

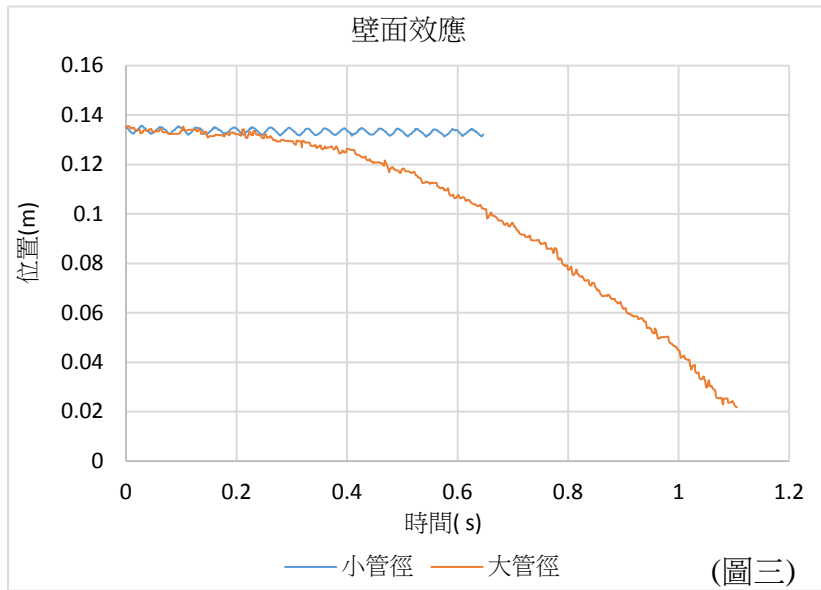
(1) 控制變因：	(2) 操作變因：最大加速度
壓克力管管徑	4cm
頻率	60Hz
	11.59g、15.94g、20.28g、26.08g、33.32g、46.36g

I sink therefore I'm

陸、研究結果

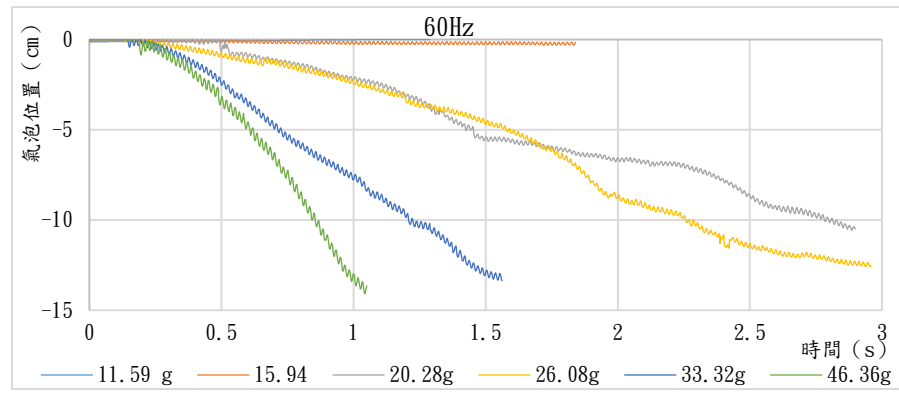
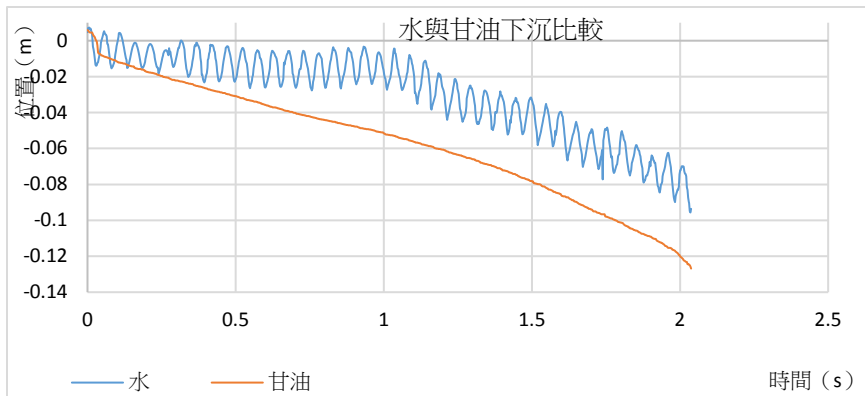
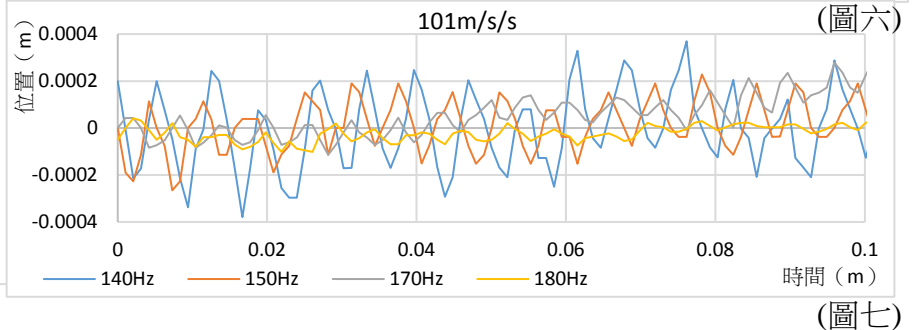
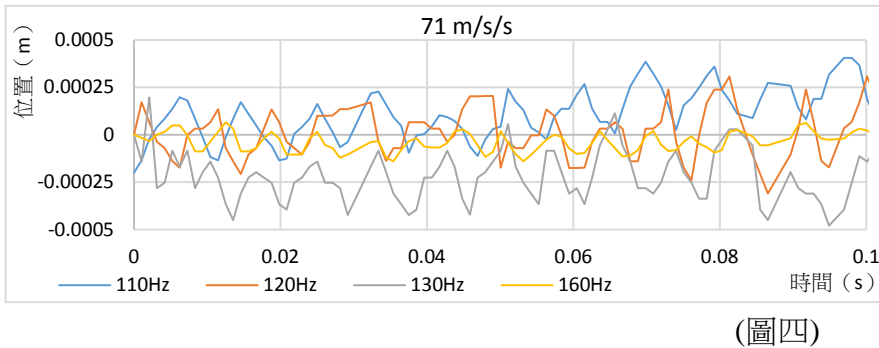
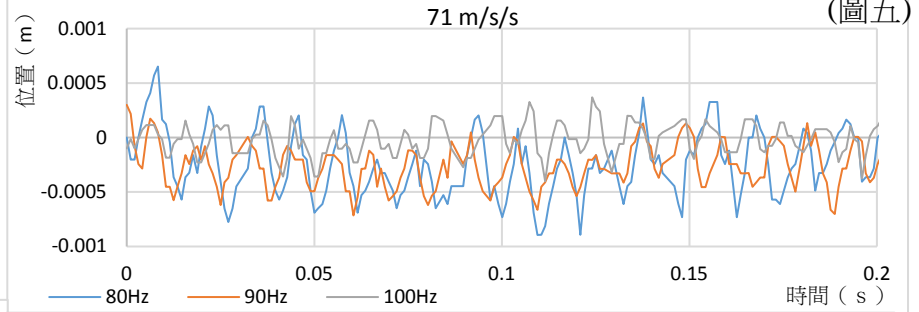
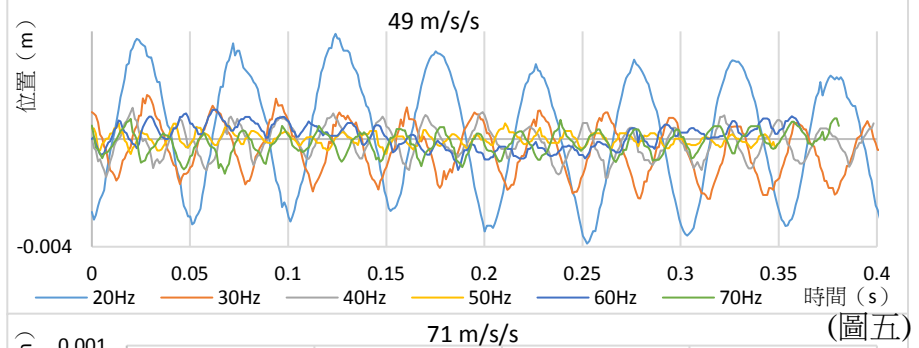
實驗一：壁面效應的影響

結果：管徑較小時，壁面效應影響大，較不易下沉



實驗二：不同震盪頻率的影响

結果：固定較小的最大加速度，不同頻率都不下沉



實驗三：液體的影响

結果：甘油密度較大，黏滯係數較大，氣泡下沉較快

實驗四：容器最大加速度的影响

結果：最大加速度越大，下沉所需時間越短，下沉愈快

柒、理論分析

一、氣泡運動影响因素討論

(一) 液體壓力： O_L 是實驗室座標系 O_B 是容器座標系

1. 容器靜止時壓力 $P = \frac{W}{A} = \frac{m_{液}g}{A} = h\rho g$ $W =$ 正向力 $\rho =$ 液體密度

2. 容器有加速度時壓力 $P = P_0 + h\rho(g + a)$

$P =$ 容器震盪時液體壓力 $g =$ 重力加速度量值 $容器加速度 a = -A\omega^2 \cos \omega t$

3. 容器作簡諧運動時，在不同深度下加速度與壓力

$P = P_0 + h\rho(g - a_m \cos \omega t)$ $h(或 y_B) =$ 液面下深度 $\rho =$ 液體的密度

$a_m =$ 最大振幅 $= A\omega^2$ $\omega =$ 角頻率

4. 氣泡體積在容器作簡諧運動時，因水的壓力變化而導致的體積變化

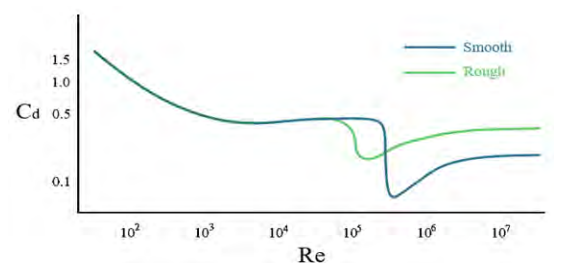
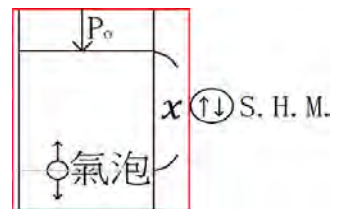
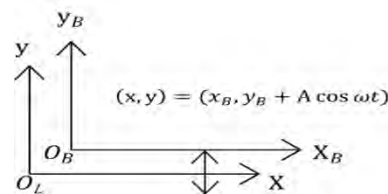
理想氣體方程式 $PV = nRT = k =$ 常數 (n 固定溫度 T 固定)

$$V = \frac{k}{P_0 + h\rho(g - a_m \cos \omega t)}$$

(二) 流體力學因素

1. 雷諾數 $Re = \frac{\rho v l}{\mu}$ $v =$ 物體相對流體的速率

$l =$ 特徵長度 (氣泡直徑) $\mu =$ 黏滯係數，單位 $pa \cdot s = N/m^2 \cdot s$



2. 阻力 $F_d = \frac{1}{2} \rho \dot{y}_B^2 A C_d = \gamma A \dot{y}_B^2$ $\rho =$ 液體的密度 $C_d =$ 阻力係數

$\dot{y}_B =$ 氣泡相對於容器 (液體) 的速度 $A =$ 氣泡截面積

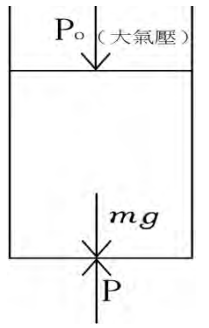
3. 附加質量 (球形) $m_0 = 2\rho\pi R^3/3$ $\rho =$ 流體密度 $R =$ 氣泡半徑

(三) 等效重力場影響

對於容器座標系 (O_B) $N = mg'$ 等效重力加速度 $\vec{g}' = \vec{g} + (-\vec{a}) = -g' = -(g - A\omega^2 \cos \omega t)$

$N =$ 容器作用於液體的力 $m =$ 液體質量 $a =$ 容器加速度 (隨時而變忽上忽下)

$g' > 0 \rightarrow \vec{g}' = -g' < 0$ 代表方向向下, $g' < 0 \rightarrow \vec{g}' = -g' > 0$ 代表方向向上



二、模擬分析

(一) 力學分析

對於容器座標系 (O_B) 註: 此式假設液體相對震盪的容器一直靜止

氣泡運動方程式: $m_B \ddot{y}_B = V_B \rho g' - \gamma A_{cross} \dot{y}_B^2 \text{sgn}(\dot{y}_B) + V_B \rho_B g'$ $m_B =$ 氣泡質量

氣泡截面積簡式: $A_{cross} = \tilde{A}(1 + a_0 \cos \omega t)$

$\ddot{y}_B =$ 氣泡的加速度 $\rho_B =$ 氣泡密度 $V_B =$ 氣泡體積 $a_0 =$ 正比於容器最大加速度之常數

$\dot{y}_B =$ 氣泡相對於容器 (液體) 的速度

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -1 & : x < 0 \end{cases}$$

為一判斷實數正負號的邏輯函數 (模擬設氣泡等效重力遠小於等效浮力故忽略)

得運動方程式 $\rho_B V_B \ddot{y}_B = -V_B \rho A \omega^2 \cos \omega t + V_B \rho g - \gamma \tilde{A}(1 + a_0 \cos \omega t) \dot{y}_B^2 \text{sgn}(\dot{y}_B)$ 使用 mathematica 程式模擬

(二) 模擬優化

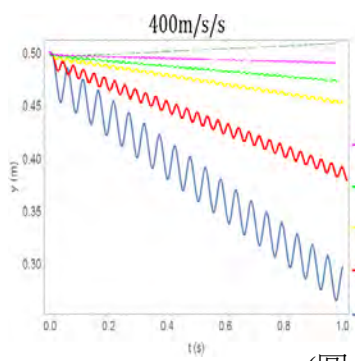
1. 附加質量 修正力學方程式 $(\rho_B V_B + m_0) \ddot{y}_B + \dot{m}_0 \dot{y}_B = V_B \rho g' + F_{drag}$

得最終方程式: $\ddot{y}_B = \frac{V_B \rho g' - \gamma \tilde{A}(1 + a_0 \cos \omega t) \dot{y}_B^2 \text{sgn}(\dot{y}_B) - \dot{m}_0 \dot{y}_B}{\rho_B V_B + m_0}$

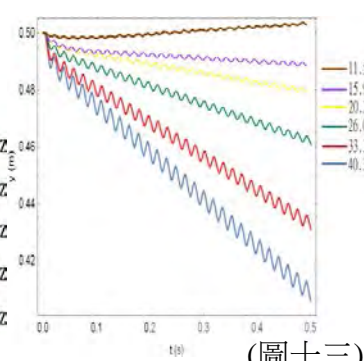
模擬結果轉換成實驗室座標系 ($y = y_B + A \cos \omega t$) 和實驗結果比較

(三) 模擬比較

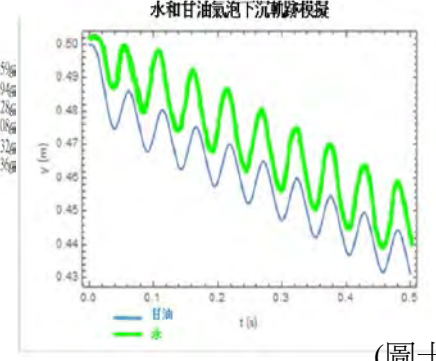
1. 頻率的影響 2. 容器最大加速度的影響 3. 液體黏度的影響 4. 自然和人工氣泡



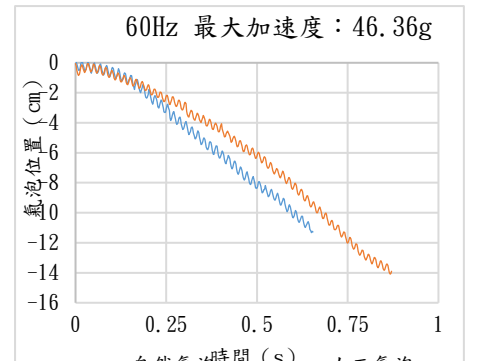
(圖十二)



(圖十三)



(圖十四)



(圖十五)

由附圖可以看出頻率不影響下沉結果, 和實驗結果趨勢相符。

由附圖可以看出最大加速度夠大時, 則最大加速度越大下沉越快, 和實驗結果趨勢相符。

由附圖可以看出在甘油中下沉較快, 和實驗結果相符。這和甘油的密度黏滯係數都比水大有關。

自然氣泡下沉較快, 這和兩者的大小密度壓縮性有關

捌、討論

- 一、為了證明氣泡下沉和氣泡體積壓縮、形變有關係, 我們在相同條件下, 另找一種體積無法被壓縮的 BB 彈來證明下沉必須有體積改變發生才可能成立。
- 二、加速度較低時, 人工氣泡 (橡膠球熱熔膠球) 下沉的現象不會發生。因為振動加速度小時, 依據壓力體積公式, 氣泡變形較小, 因此氣泡無法下沉。
- 三、若人工氣泡密度大於液體, 則等效重力量值大於等效浮力, 原本下沉條件時人工氣泡反而會上浮。
- 四、人工氣泡和自然氣泡下沉情況的比較圖如圖十五, 可見其下沉趨勢相同且為循環式下沉。

玖、結論

- 一、由於容器做簡諧運動, 氣泡的下沉為循環式下沉, 非筆直下降。
- 二、相同頻率時, 最大加速度越大, 下沉越快。最大加速度同而不够大時, 不同頻率振幅不同而氣泡不下沉。
- 三、體積可伸縮造成人工氣泡可以下沉, 改變容器震盪的最大加速度、頻率等因素影響伸縮幅度和下沉快慢。
- 四、液體的黏滯係數、氣泡的附加質量都會影響氣泡下沉的情形。因此我們藉由減少水中亂流來減少誤差。
- 五、管徑較小時, 壁面效應影響大, 較不易下沉。甘油密度黏滯係數較水大, 氣泡在其中下沉較快。

拾、未來展望

實驗中發現液流場對氣泡移動有一定影響, 未來可往此一方向持續探究。而此一實驗的實際應用可以延伸到工業的塑膠射出上, 有些產品會特別添加發泡劑使其達到特定效果, 假如能以振動改變氣泡在產品內的分布情形, 便能提升品質。

拾壹、參考資料

- 一、論文: 1. Motion of Gas Bubbles and Rigid Particles in Vibrating Fluid-Filled Volumes
- 二、網路: 國家教育研究院網站, Youtube: <https://youtu.be/zaC3ez0lqJs>