

中華民國第 59 屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組 物理與天文學科

團隊合作獎

051803

「擺」「滑」齊放—探討不同變因對於旋繞擺運動之影響

學校名稱：高雄市立高雄高級中學

作者： 高二 李 恩 高二 劉宥辰 高一 尹延安	指導老師： 高執貴 盧政良
---------------------------------------	-------------------------

關鍵詞：擺、程式模擬、歐拉摩擦理論

摘要

本報告研究掛在桿上之一繩，繩的兩端掛不同質量的物體，當重端釋放時，輕端繞桿運動的情形，稱之為旋繞擺。藉由對其進行力分析，推導出運動之方程式，再以程式 Vpython 模擬重端下滑長度以及動畫，以用來比較在實驗中，不同變因下，如質量比、橫桿半徑、繩長及動摩擦係數的運動狀況。

研究發現，不同變因的確會影響重端之下滑長度，且實驗和模擬結果相當符合，所以可利用程式來模擬極端狀態（如質量比極大、橫桿半徑極小）之實驗數值。







壹、研究動機

我們曾經偶然在 Youtube 上看到一個有趣實驗，其繩一端連接馬克杯，另一端連接硬幣，繩掛在一橫桿上，手持硬幣然後釋放，馬克杯卻因硬幣端在桿上纏繞而未掉到地上。在進行文獻收集的過程中發現 2017 年臺灣國際科學展覽會作品—「圓周運動變形之摩擦力與物理建模之探討」曾針對此一運動進行分析以及模擬，但是影片中並非如上述作品中由水平釋放，因此我們決定探討角度和不同變因對此種運動的影響。

貳、研究目的

- 一、分析旋繞擺之運動情形
- 二、推導旋繞擺之運動方程式，並以程式模擬運動
- 三、探討不同質量比對旋繞擺運動之影響
- 四、探討不同繩長對旋繞擺運動之影響
- 五、探討不同橫桿半徑對旋繞擺運動之影響
- 六、探討不同釋放角度對旋繞擺運動之影響
- 七、探討不同摩擦係數對旋繞擺運動之影響
- 八、探討不同變因對過渡性纏繞之影響

參、研究設備及器材

		
<p>(一) 直流電源供應器</p>	<p>(二) 棉線</p>	<p>(三) 電子天平</p>
		
<p>(四) 木棒</p>	<p>(五) 電磁鐵</p>	<p>(六) PVC 水管</p>
<p>(七) 其他器材：賽璐珞片、描圖紙、影印紙、捲尺、砝碼、圓形鐵片、鐵製支架、黑色塑膠板(攝影背景用)、智慧型手機(攝影及水平儀用)、筆記型電腦、Vpython、Excel、Tracker、SciDAVis(繪圖和數據分析軟體)</p>		

二、實驗裝置圖示

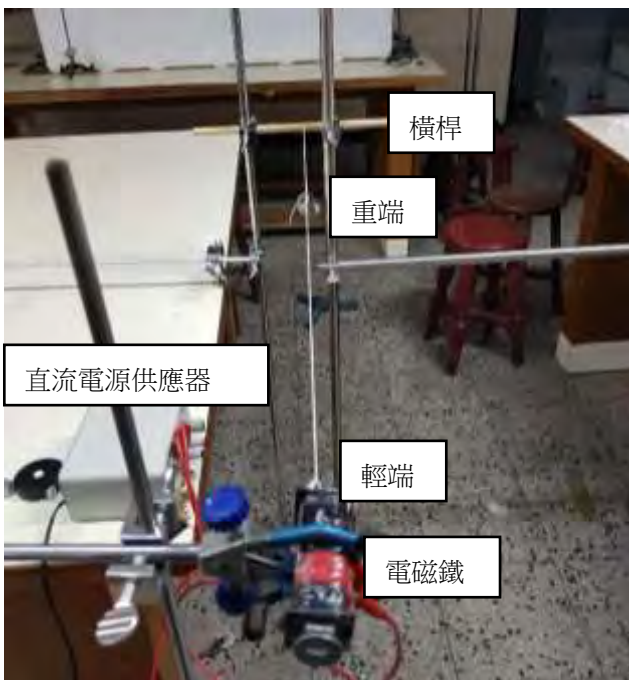
圖片	說明
	<p>直流電源供應器和電磁鐵之連接方式。電磁鐵固定於鐵架之上。</p>



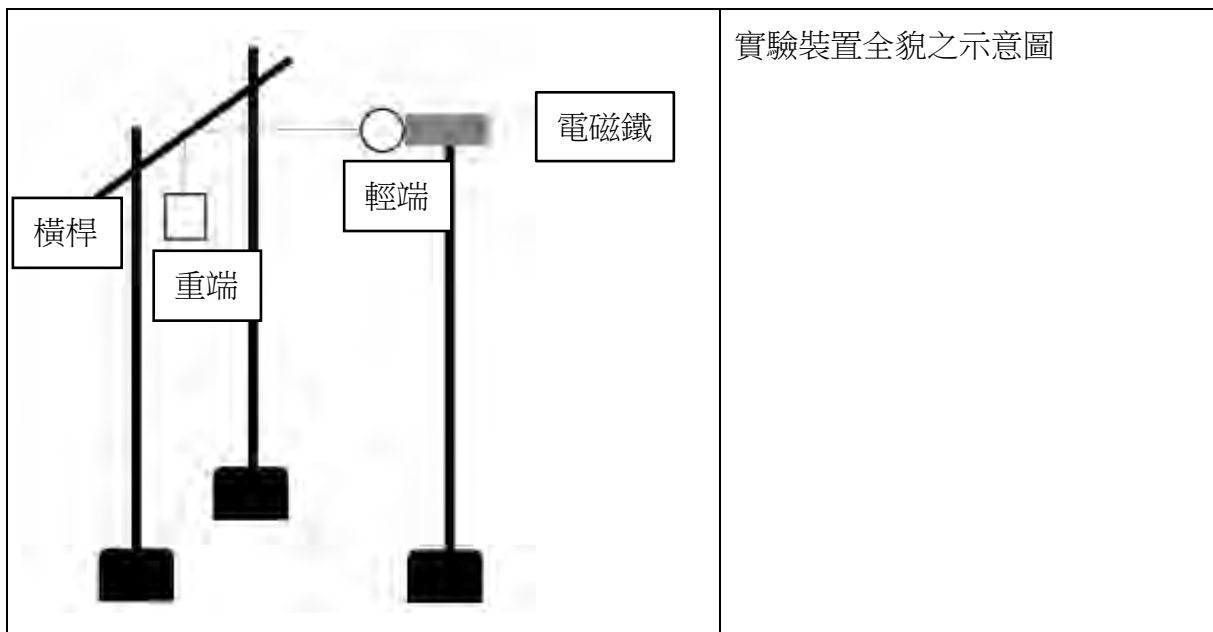
供旋繞擺纏繞之木棒，固定於兩根鐵棒之上。整組裝置再以底座和兩側連結之鐵棒固定，確保裝置不會晃動。



實驗裝置全貌之側視圖



實驗裝置全貌之正視圖



肆、研究過程或方法

一、名詞解釋

以下為本研究報告中頻繁使用之名詞和其定義：

(一)輕端：旋繞擺連接之兩個重物中較輕的一個，以 m 表示。

(二)重端：旋繞擺連接之兩個重物中較重的一個，以 M 表示。

(三)輕端線段：輕端至橫桿之間的繩。

(四)重端線段：重端至橫桿之間的繩。

(五)質量比：重端與輕端質量之比值，即 m/M 。

(六)滑落長度：旋繞擺運動自起始至停止，重端縱向位移，實驗中以繩

與橫桿橫線的距離表示之（見研究過程或方法五）。

二、架設及改善實驗裝置

(一)第一代實驗裝置(如下圖左)使用兩組連接底座之鐵架，並在兩根鐵架之間鎖上實驗用之橫桿。另一鐵架固定電磁鐵以吸引輕端，並連接直流電源供應器。然而裝置在實驗過程中會因為旋繞擺之釋放而晃動，造成實驗數據不穩定。

(二)第二代實驗裝置(如下圖右)除了兩組連接底座之鐵架外，兩側還以鐵棒連接鐵架和實驗裝置旁的桌子。固定電磁鐵之鐵架也以鐵棒連接旁邊的桌子。經過改良後的裝置，在旋繞擺釋放的過程中完全不會晃動，得到的數據也相當集中。

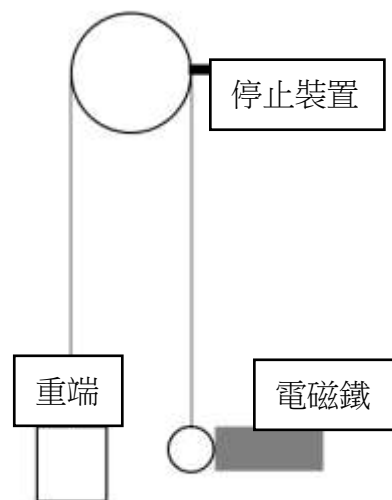


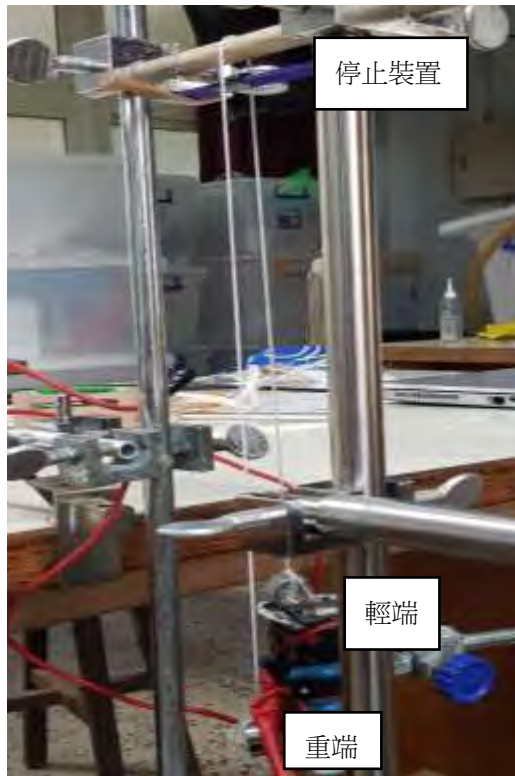
三、調整實驗用繩之線密度

本實驗中使用之繩為棉繩，在實驗過程中會因為重複吊掛重物而被拉長，長度最後接近一定值。故每次使用新的棉線之前，我們皆會將該繩拉緊，使其達到緊繃，最後測量該繩之線密度，確保使用之繩不會因為重物重複吊掛而改變長度，影響實驗結果。

四、求出動摩擦係數：分析垂直滑落時繩子和橫桿間之動摩擦力

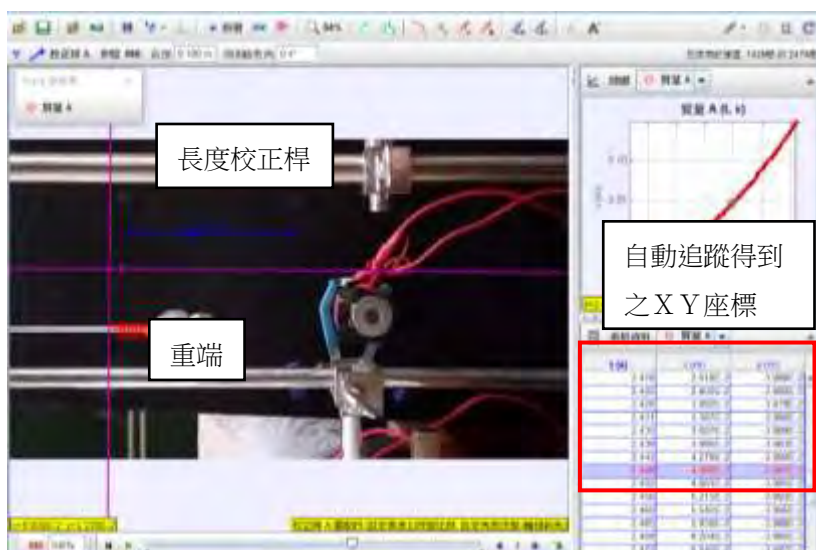
為了測得實驗中繩子和橫桿之間之動摩擦係數，我們參考 2017 年臺灣國際科學展覽會作品—「圓周運動變形之摩擦力與物理建模之探討」中使用之方法，架設一個阿特午機。實驗裝置圖如下：

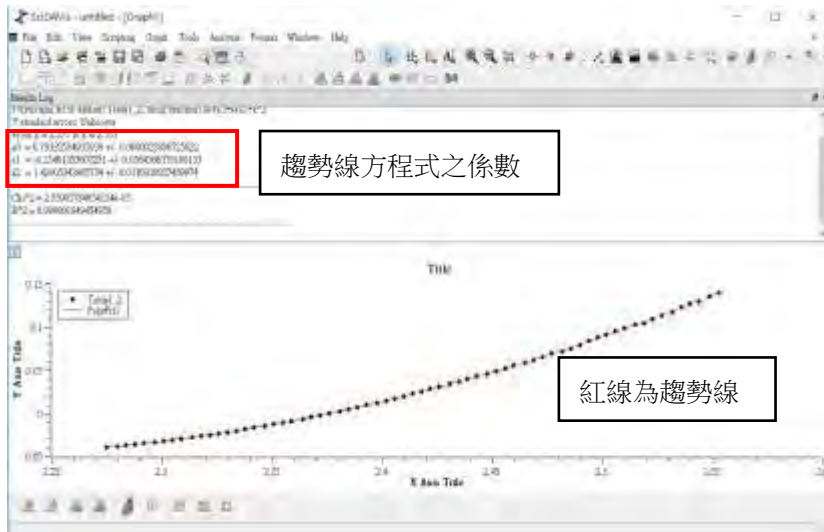




左上圖為阿特午機實驗釋放前之畫面。右上圖為阿特午機實驗釋放後運動停止之畫面。左上上圖為阿特午機實驗在橫桿上之改裝，有孔金屬圓環之目的是為了讓輕端被繩往上拉時可以被攔截，使運動停止。右上上圖為裝置示意圖。

繩子在橫桿上接觸的角度為 π ，繩子兩端吊掛不同質量物體。使用電磁鐵釋放輕端，確保輕端釋放時初始速度為零。運動過程中，我們使用慢動作攝影功能拍攝影片，並用 Tracker 分析重端之運動軌跡。得到各瞬間重端之 Y 座標，輸入至 SciDAVis 繪製成散布圖，得到二次曲線之趨勢線。分析畫面如下圖：





上圖趨勢線方程式約為 $y = 1.429t^2 - 6.225t + 6.793$ ，經微分兩次後得： $\ddot{y} = 2.858$ 。即為重物加速度。

假設橫桿和繩之間之動摩擦係數為 μ ，連結重端之繩張力為 T_1 ，連結輕端之繩張力為 T_2 。由歐拉摩擦理論可得：

$$T_1 = T_2 e^{\mu\pi}$$

因此我們可將阿特午機運動之加速度修正為：

$$a = \frac{M - me^{\mu\pi}}{M + me^{\mu\pi}} g$$

將實驗數據分析後得到之加速度代入上式，即可推算出動摩擦係數 μ 。實驗數據如下表：

(一)木桿之動摩擦係數

輕端質量(g)	重端質量(g)	加速度(m/s ²)	動摩擦係數
9.6	37.9	2.204	0.2914
		2.025	0.3036
		2.148	0.2952
		2.136	0.2960
		2.145	0.2954
		2.173	0.2936
		2.033	0.3031

9.6	57.1	3.968	0.2941
		3.900	0.2994
		3.822	0.3053
		3.879	0.3010
		3.957	0.2949
平均			0.2978

經計算後，各組之動摩擦係數 μ 約為定值。其平均為 0.2978。

(二)PVC 水管之動摩擦係數

輕端質量(g)	重端質量(g)	加速度(m/s ²)	動摩擦係數	備註
10.5	46.3	3.833	0.2093	半徑為 0.90cm
		3.810	0.2111	
		3.790	0.2126	
		3.851	0.2080	
10.5	46.3	3.802	0.2116	半徑為 2.40cm
		3.706	0.2189	
		3.761	0.2147	
		3.675	0.2213	
10.5	46.3	3.786	0.2128	半徑為 4.45cm
		3.693	0.2199	
		3.560	0.2299	
		3.794	0.2122	
平均			0.2152	

經計算後，各組之動摩擦係數 μ 約為定值。其平均為 0.2152。此 PVC 水管用於探討不同橫桿半徑對旋繞擺運動之影響實驗中。故取不同半徑之 PVC 水管進行實驗測量動摩擦係數，且所得之動摩擦係數值相近。因此在不同橫桿半徑對旋繞擺運動之影響中，將以 0.2152 代表所有 PVC 水管之動摩擦係數。

(三)描圖紙之動摩擦係數

輕端質量(g)	重端質量(g)	加速度(m/s ²)	動摩擦係數
9.6	46.5	4.050	0.2224
		4.010	0.2255
		3.877	0.2358
		4.023	0.2245
		3.950	0.2302
		3.911	0.2333
平均			0.2286

經計算後，各組之動摩擦係數 μ 約為定值。其平均為 0.2286。

(四)影印紙之動摩擦係數

輕端質量(g)	重端質量(g)	加速度(m/s ²)	動摩擦係數
9.6	46.5	3.633	0.2544
		3.607	0.2563
		3.687	0.2503
		3.740	0.2463
		3.633	0.2544
		3.751	0.2455
平均			0.2512

經計算後，各組之動摩擦係數 μ 約為定值。其平均為 0.2512。

(五)賽璐珞片之動摩擦係數

輕端質量(g)	重端質量(g)	加速度(m/s ²)	動摩擦係數
9.6	46.5	3.786	0.2428
		3.820	0.2402
		3.869	0.2364
		3.875	0.2360

		3.819	0.2403
		3.809	0.2410
平均			0.2395

經計算後，各組之動摩擦係數 μ 約為定值。其平均為 0.2395。

五、進行旋繞擺釋放實驗

(一) 為確保輕端釋放的初速度為零，因此採用電磁鐵釋放。實驗開始前，先在橫桿上畫記一條橫線，並在重端之繩上以紅筆標記一點，該紅點至輕端中心之距離即為本實驗中之繩長。實驗流程如下：

1. 依據實驗之操縱變因調整重端圓形鐵片數量、輕端之位置、和繩長。
2. 開啟直流電源供應器電源，將輕端吸附於電磁鐵上，並且將繩掛在橫桿上。
3. 調整固定電磁鐵之鐵架高度和位置，使橫桿上之橫線與繩上之紅點重合。
4. 確定重端不再晃動後，即關閉直流電源供應器之電源，旋繞擺釋放。
5. 若必要時，以智慧型手機之慢動作攝影功能拍攝旋繞擺之運動過程。
6. 當旋繞擺運動停止後，以捲尺測量橫桿上橫線到繩上之紅點之距離。
7. 每個操縱變因至少重複五次實驗。
8. 改變操縱變因，重複以上步驟。

(二) 實驗變因

1. 探討不同質量比對旋繞擺運動之影響

(1) 控制變因

繩長	81.5cm
橫桿半徑	0.57cm
橫桿動摩擦係數	0.2978
釋放角度	0 度

(2) 操縱變因

質量比 4.75、5.42、6.10、6.80、7.45、8.14、8.78、9.49、10.23、10.89、11.55、
13.61、14.96、17.05、20.05、25.36

2. 探討不同繩長對旋繞擺運動之影響

(1) 控制變因

質量比	10.40
橫桿半徑	0.57cm
橫桿動摩擦係數	0.2978
釋放角度	0 度

(2) 操縱變因

繩長 30、40、60、80、100、120cm

3. 探討不同橫桿半徑對旋繞擺運動之影響

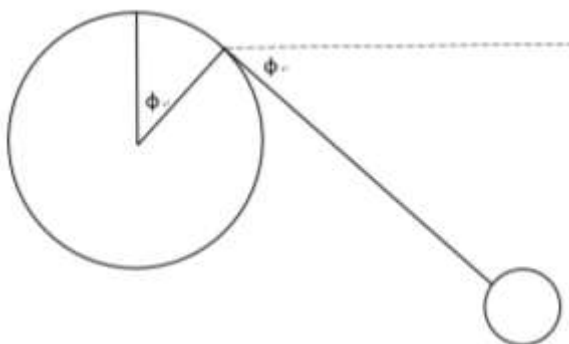
(1) 控制變因

質量比	9.48
繩長	100.0cm
橫桿動摩擦係數	0.2152
釋放角度	0 度

(2) 操縱變因

橫桿半徑 0.90、1.10、1.70、2.40、3.00、3.80、4.45cm

4. 探討不同釋放角度對旋繞擺運動之影響



(1) 控制變因

質量比	8.83
繩長	81.5cm

橫桿半徑	0.57cm
橫桿動摩擦係數	0.2978

(2)操縱變因

此實驗中，我們定義水平為 0 度。釋放角度在水平以下為正。

從 0 度至 75 度，每 5 度一組

5.探討不同摩擦係數對旋繞擺運動之影響

(1)控制變因

質量比	9.48
繩長	81.5cm
橫桿半徑	0.90cm
釋放角度	0 度

(2)操縱變因

表面材質：賽璐珞片、描圖紙、影印紙，

其摩擦係數分別為 0.2395、0.2286、0.2512。

六、運動方程式之推導和程式模擬運動

(一)推導運動方程式

我們分析旋繞擺之輕重端之受力，並畫成力圖。再分別對輕端和重端分析受力和力矩。最終得到輕端之角加速度和重端之加速度之聯立微分方程式。

(二)程式模擬運動

我們將推導出之聯立微分方程式代入利用 Vpython 寫出模擬用之程式，以 Euler Method 之數值積分方式模擬旋繞擺之運動，並且輸出各個瞬間之輕重端座標和輕重端線段長。得到之數據可作為實驗數據之對照。

伍、研究結果

一、觀察並分析旋繞擺之運動情形

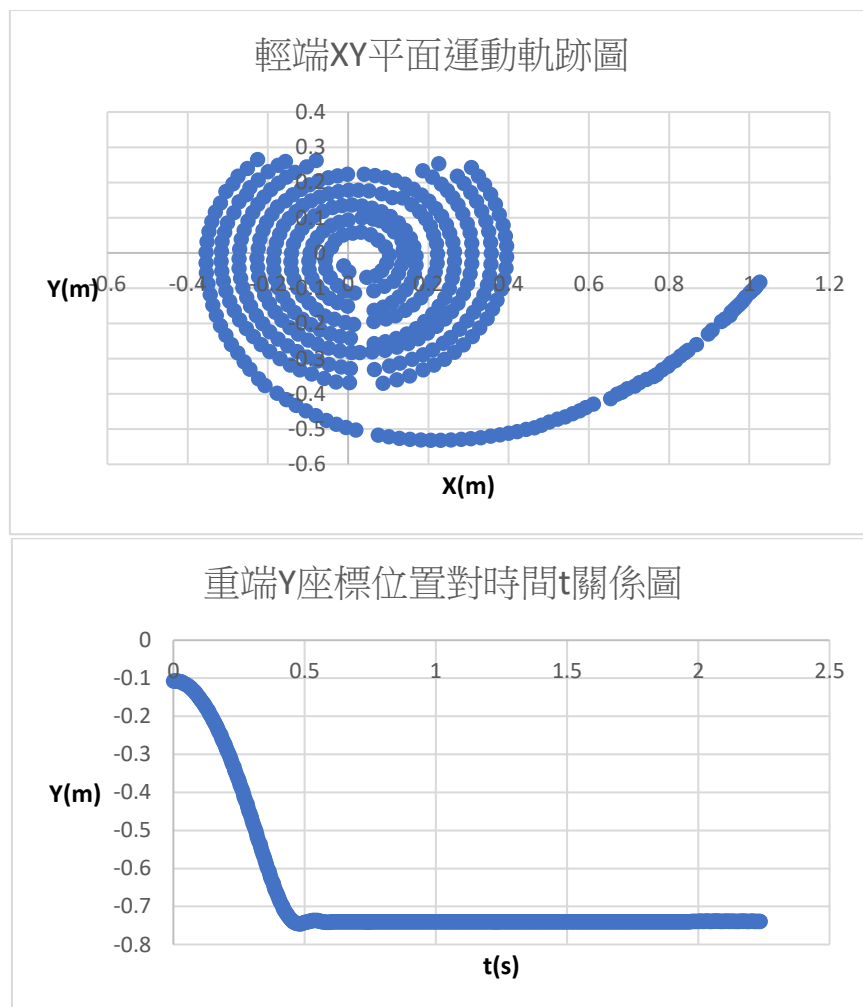
(一)旋繞擺運動描述

旋繞擺是由一段繩子兩端連接重物組成。當輕端由靜止釋放後，會向下做類鉛直圓周運動，且輕端線段會不斷縮短；重端則是向下滑落。當輕端纏繞於橫桿上達一定角度後，重端即停止滑落，而輕端則會繼續纏繞橫桿直到與橫桿碰撞，運動停止。

我們進行一次旋繞擺之釋放實驗，將旋繞擺運動過程以慢動作攝影拍攝並以 Tracker 分析。實驗之變因如下表：

變因	重端質量	輕端質量	橫桿摩擦係數	繩長	釋放角度	橫桿半徑
數值	91.0g	9.6g	0.2978	100.0cm	0度	0.573cm

下列圖為旋繞擺運動之軌跡和輕重端之 X、Y 座標對時間之作圖：



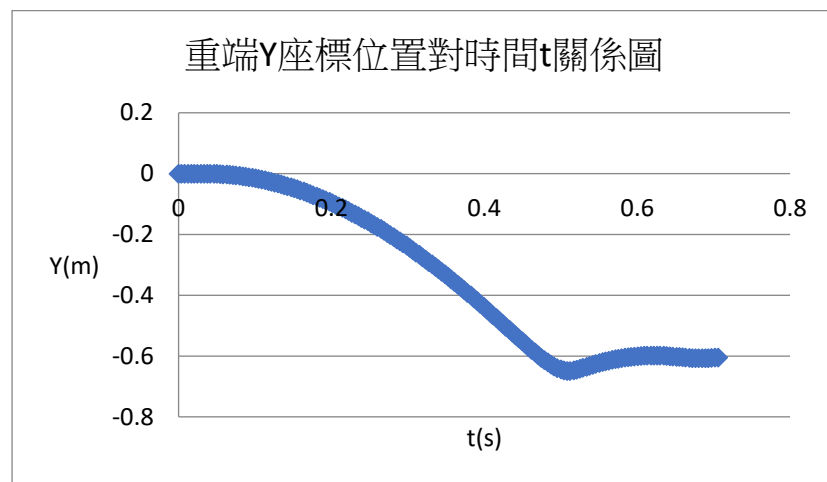
(二)在實驗過程中，我們亦有發現一些特殊的現象。

1. 過渡性纏繞：

當我們將重端質量減輕、繩長增長或是增加摩擦係數，進行實驗時，旋繞擺會發生重端下落時經過短暫靜止再繼續下落的現象，稱之為過渡性纏繞。此現象在 2017 年臺灣國際科學展覽會作品—「圓周運動變形之摩擦力與物理建模之探討」亦有探討。

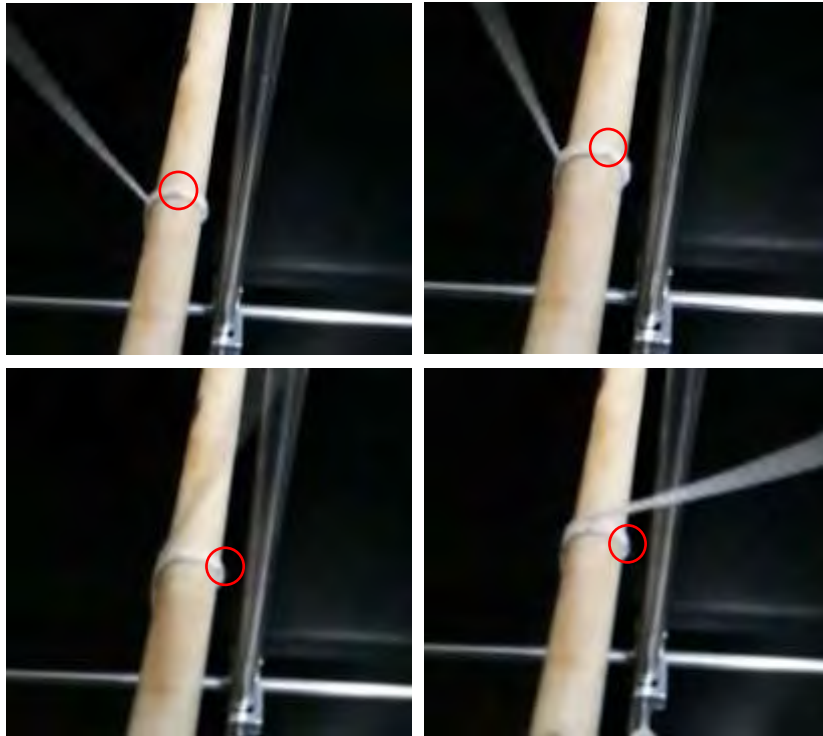
2. 滑落長度縮短：

當我們將釋放角度往負向增加時，即把輕端釋放位置下調後釋放，會發現重端下降至最低點後，會有被向上捲回之現象。最後導致觀測到之滑落長度比橫桿至重端最低點之距離為短。且此現象在大角度時較小角度時為明顯。我們重複多次實驗確認此現象之存在後，將重端運動過程以慢動作攝影拍攝，並用 Tracker 程式和 Excel 分析其運動軌跡。重端之運動軌跡如下圖所示：



從上圖可得知，重端下落至最低點後，又被捲回了約 5 公分的距離。

為了證實滑落長度縮短之現象並非由繩之彈性造成，我們亦從橫桿上方拍攝繩之纏繞情形。我們在繩上用色筆每隔固定距離標定記號，以利觀察繩之移動。繩子在橫桿上移動之情形我們以數張不同時間之影像呈現如下，最先出現之標記點以紅色圓圈標示：



從以上照片可以證實，連接重端之繩確實有被往上捲回的情形。因此繩之彈性造成之繩長回復變化僅為次因，而非主因。

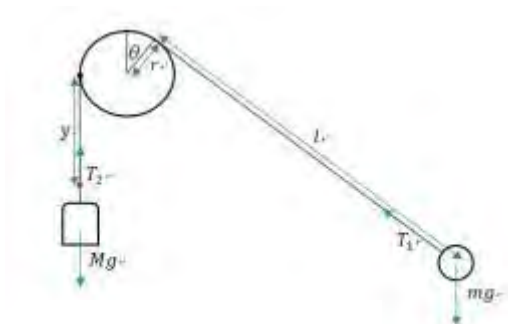
我們認為，滑落長度縮短發生的原因是由以下過程造成：

- (1) 重端滑落至最低點時，重端會因為繩之彈性而略為向上回彈。
- (2) 重端向上回彈使得旋繞擺在橫桿上之纏繞鬆脫。
- (3) 輕端仍在纏繞橫桿中，尚未停止，且纏繞於橫桿上之繩發生滑動。
- (4) 輕端在纏繞橫桿之同時亦將重端向上拉起。

二、推導旋繞擺之運動方程式，並以程式模擬運動



▲釋放前示意圖



▲釋放後運動示意圖

圖中 m 為輕端質量， M 為重端質量， r 為橫桿的半徑， y 為紅點在該瞬間與桿上橫線

的距離， θ 為釋放之後輕端繞過的角度， T_1 和 T_2 分別代表輕端和重端的繩張力， l 為輕端到輕端線段在橫桿切點的距離。

定橫桿中心為原點，座標軸以向右為 x 軸正向，向下為 y 軸正向。

(一)求輕端角加速度 $\frac{d^2\theta}{dt^2}$

分析輕端之運動可得：

$$\frac{dX}{dt} = -l \frac{d\theta}{dt} \sin\theta - \frac{dy}{dt} \cos\theta$$

$$\frac{dY}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \cos\theta - \frac{dy}{dt} \sin\theta$$

將兩式分別微分後，可列出輕端在 x 、 y 方向之 $F=ma$ 關係式：

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} &= -T \cos\theta \\ &= -\frac{dl}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin\theta - l \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin\theta - l \frac{d\theta}{dt} \cos\theta - \frac{d^2y}{dt^2} \cos\theta + \frac{dy}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin\theta \\ \frac{d^2Y}{dt^2} &= mg - T \sin\theta \\ &= \frac{dl}{dt} \frac{d\theta}{dt} \cos\theta + l \frac{d^2\theta}{dt^2} \cos\theta - l \frac{d\theta}{dt} \sin\theta - \frac{d^2y}{dt^2} \sin\theta - \frac{dy}{dt} \frac{d\theta}{dt} \cos\theta \end{aligned}$$

再將兩式移項整理之後即可得到：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g \cos\theta + r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dy}{dt}}{l}$$

(二)求重端下滑加速度 $\frac{d^2y}{dt^2}$

由圖可知，重端同時受到重力 Mg 和重端繩張力 T_2 ，故其加速度為：

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Mg - T_2}{M}$$

此處 T_1 和 T_2 為一繞過摩擦係數為 μ 的圓柱之輕繩（假設不計繩質量）兩側的張力，因此可以以歐拉摩擦公式求得 T_1 和 T_2 的比值。

$\frac{dy}{dt} > 0$ 時：

$$T_2 = T_1 e^{\mu(\frac{\pi}{2} + \theta)}$$

$\frac{dy}{dt} < 0$ 時：

$$T_2 = T_1 e^{-\mu(\frac{\pi}{2}+\theta)}$$

此時將 $\frac{d^2y}{dt^2}$ 等式中 T_2 以 T_1 表示：

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} > 0 \quad \frac{d^2y}{dt^2} &= g - \frac{T_1 e^{\mu(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{M} \\ \frac{dy}{dt} < 0 \quad \frac{d^2y}{dt^2} &= g - \frac{T_1 e^{-\mu(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{M} \end{aligned}$$

又 T_1 可經由分析輕端在沿 l 方向的受力情形求得：

$$\begin{aligned} T_1 - mg \sin\theta &= m \left(l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{d^2l}{dt^2} \right) \\ \therefore T_1 &= m \left(g \sin\theta + l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} \right) \end{aligned}$$

將此結果代入 $\frac{d^2y}{dt^2}$ 等式中 T_1 ：

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} > 0 \quad \frac{d^2y}{dt^2} &= g - \frac{m e^{\mu(\frac{\pi}{2}+\theta)} \left(g \sin\theta + l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} \right)}{M} \\ \frac{dy}{dt} < 0 \quad \frac{d^2y}{dt^2} &= g - \frac{m e^{-\mu(\frac{\pi}{2}+\theta)} \left(g \sin\theta + l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} \right)}{M} \end{aligned}$$

經由整理可得：

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} > 0 \quad \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{g - \frac{m}{M} e^{\mu(\frac{\pi}{2}+\theta)} \left(g \sin\theta + l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right)}{\frac{m}{M} e^{\mu(\frac{\pi}{2}+\theta)} + 1} \\ \frac{dy}{dt} < 0 \quad \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{g - \frac{m}{M} e^{-\mu(\frac{\pi}{2}+\theta)} \left(g \sin\theta + l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right)}{\frac{m}{M} e^{-\mu(\frac{\pi}{2}+\theta)} + 1} \end{aligned}$$

(三)將已推出之運動方程式代入 Vpython 進程式模擬：

依據上述推導出的方程式，代入 Vpython 程式，利用 Euler's method 以每秒 5000 次之頻率進行動畫模擬。程式碼如下圖：


```

% visual
v=0.5
z = 0.025 % 繩子半徑
theta = 0 % 繩子角度
l = 1.0 % 繩子長度
y = 0.0
mu = 0.2362 % 磁珠摩擦係數
M = 5.45 % 磁珠質量
m = 1 % 磁珠質量
Omega = 0
pi = 3.14159265358
s = 2.71828
t=0
l = l-r*(pi/2+theta)-y

scene = display('width=500, height=500, center = (0,0,0), background=[0.3,0.9,0]')
ballm = sphere(radius = 0.01, color=color.red)
ballM = sphere(radius = 0.05, color=color.blue)
stick = sphere(radius = z, color=color.black)
string_m = cylinder(pos=(0,0,0),radius=0.001)
string_M = cylinder(pos=(x,-1,0),radius=0.001)

ballm.pos = vector(-(l-y-r*pi/2),0,0)
ballM.pos = vector(x,-1-y,0)
stick.pos = vector(0,-r,0)
ballm.v = vector(0,0,0)
ballM.v = vector(0,0,0)

dt = 0.0002
while t>0:
    save(5000)
    l = l-r*(pi/2+theta)-y

    alpha = (g*cos(theta) + z*Omega**2+l*Omega*ballM.v.y)/l
    Omega += alpha*dt
    theta += Omega*dt

    ballm.pos = vector(-(l-y-r*sin(theta)-l*cos(theta)), -r*(1-cos(theta))-l*sin(theta), 0)
    ballM.pos = ballM.v*dt

    v = ballM.pos.y - z

    ballm.v.y=0
    ballm.v.y += ((g-m*s*(mu*(theta+pi/2))*(g/sin(theta)+l*(Omega)**2+z*alpha)/M) / (m*s*(mu*(theta+pi/2)/M+1)))*dt

    ballM.v.y += ((g-m*s*(1-mu*(theta+pi/2))*(g*sin(theta)+l*(Omega)**2+z*alpha)/M) / (m*s*(1-mu*(theta+pi/2)/M+1)))*dt

    string_m.pos = vector(-r*sin(theta), -r*(1-cos(theta)), 0)
    string_M.pos = ballm.pos - string_m.pos
    string_M.walt = ballM.pos - string_M.pos

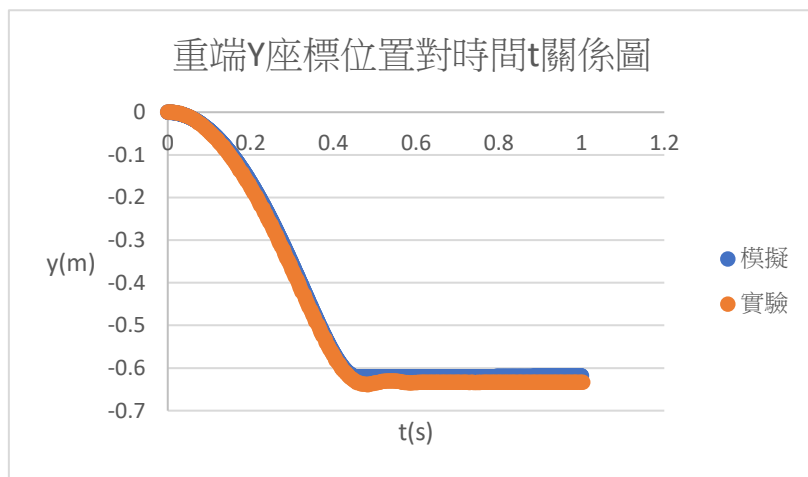
    save ballm.pos.x, ballm.pos.y

```

動畫模擬畫面如左下圖、程式輸出之數據如右下圖：



將動畫模擬出來的軌跡與實驗得到之軌跡疊圖，發現兩者十分相符：



因此，後續實驗將以此程式模擬得到模擬值，與實驗比較。

三、不同質量比對旋繞擺運動之影響

改變重端質量進行實驗，不同質量比下，滑落長度數據如下：

*輕端質量 $m=9.6\text{ g}$

重端質量(g)	質量比	滑落長度(cm)	重端質量(g)	質量比	滑落長度(cm)
45.6	4.75	36.9	98.2	10.23	51.6
		37.5			51.4
		37.0			51.7
		37.0			52.0
		36.9			51.9
52.0	5.42	40.7	104.5	10.89	52.3
		39.9			52.6
		41.3			52.7
		39.5			52.6
		40.5			52.7
58.6	6.10	43.2	110.9	11.55	53.4
		42.4			53.5
		42.5			54.2
		42.8			53.0

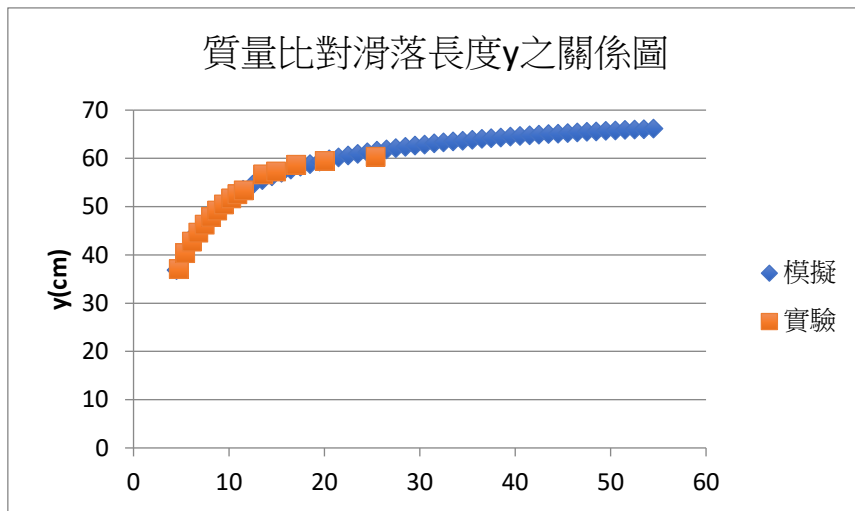
		42.8			53.0
65.3	6.80	44.8	130.7	13.61	56.8
		44.4			56.4
		44.7			56.7
		44.6			56.7
		44.2			57.0
71.5	7.45	46.6	143.6	14.96	57.4
		46.5			57.5
		46.3			57.6
		46.2			57.1
		46.0			57.1
78.1	8.14	48.4	163.7	17.05	58.4
		47.7			58.8
		47.8			58.8
		47.4			58.8
		48.0			58.8
84.3	8.78	49.1	192.5	20.05	59.3
		49.4			59.6
		49.2			59.6
		49.2			59.7
		49.2			59.6
91.1	9.49	50.6	243.5	25.36	60.1
		50.3			60.7
		50.5			60.3
		50.6			60.3

		50.5			60.3
--	--	------	--	--	------

將上列數據取平均整理成表，如下所示：

質量比	4.75	5.42	6.10	6.80	7.45	8.14	8.78	9.49
下滑長度(cm)	37.06	40.38	42.77	44.63	46.32	47.86	49.22	50.5
質量比	10.23	10.89	11.55	13.61	14.96	17.05	20.05	25.36
下滑長度(cm)	51.72	52.58	53.42	56.72	57.34	58.72	59.50	60.34

將質量比之數值自 4.5 到 54.5，每隔 1 代入 Vpython 之程式以 0.0002 秒為間隔模擬一次，再將模擬值與實驗值疊圖呈現：



從圖中可以發現，滑落長度隨著質量比增加而增加，且增加的趨勢隨著質量比增加而趨緩。將實驗值與模擬值比較可以發現，兩者趨勢相當吻合。

四、不同繩長對旋繞擺運動之影響

改變繩長進行實驗，在不同繩長，滑落長度數據如下：

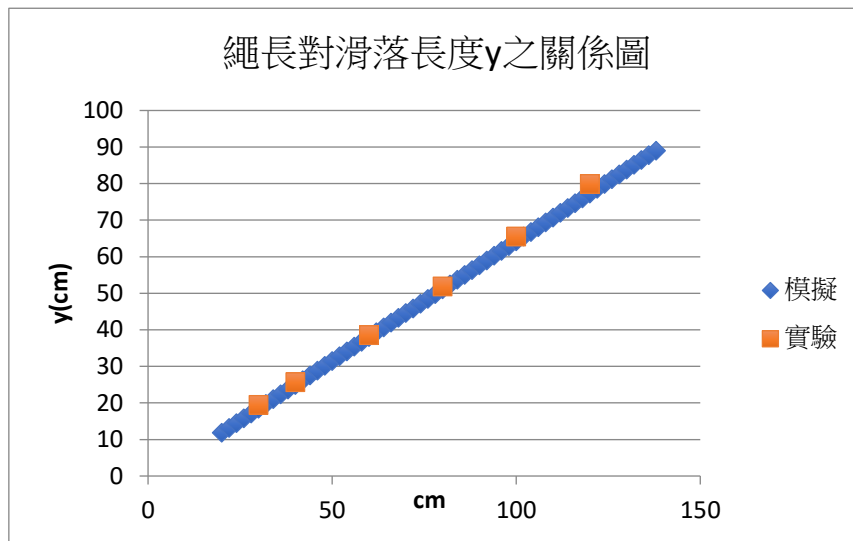
繩長(cm)	長度(cm)	繩長(cm)	長度(cm)	繩長(cm)	長度(cm)
30	19.4	40	27.0	60	38.0
	19.4		25.5		38.0
	19.3		25.4		38.8
	19.9		26.0		38.2
	18.9		25.4		39.1

	19.7		25.3		39.0
	20.0		26.1		38.8
	19.6		25.5		38.9
	19.5		25.8		38.7
	19.2		25.2		38.5
80	51.8	100	66.9	120	79.0
	51.9		65.3		79.4
	51.6		65.3		79.7
	52.2		64.3		79.8
	51.6		66.6		80.5
	52.3		65.2		80.4
	52.2		65.4		80.5
	51.7		65.5		79.9
	51.3		65.4		79.5
	52.2		65.9		80.3

將上表各組數據平均，製成表如下所示：

繩長(cm)	30	40	60	80	100	120
長度(cm)	19.49	25.72	38.60	51.88	65.58	79.90

將繩長之數值自 20cm 到 138cm，每隔 2cm 代入 Vpython 之程式以 0.0002 秒為間隔模擬一次，再將模擬值與實驗值疊圖呈現：



從圖中可見，滑落長度隨著繩長的增加而增加，且有高度正相關之關係。其 R^2 值高達 0.9995。比較實驗值和模擬值可以發現，兩者趨勢相當吻合。

五、探討不同橫桿半徑對旋繞擺運動之影響

使用不同半徑的 PVC 橫桿進行實驗，在不同橫桿半徑下，滑落長度數據如下：

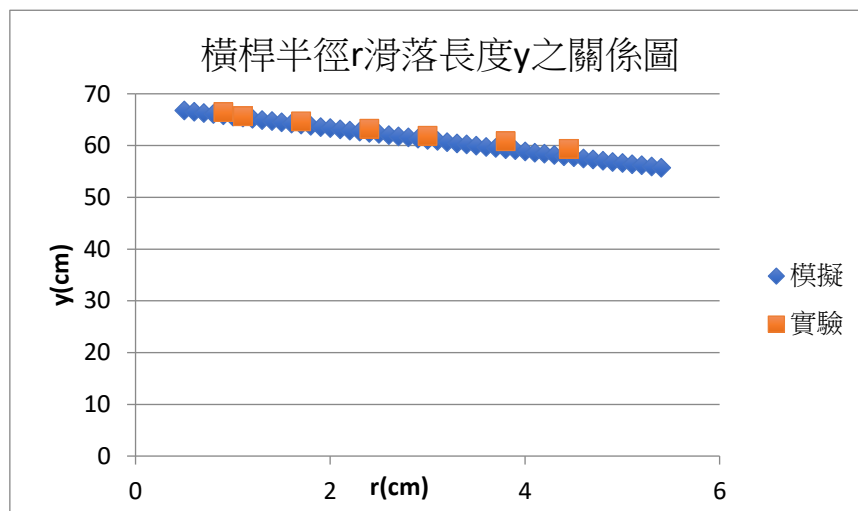
橫桿半徑(cm)	滑落長度(cm)	橫桿半徑(cm)	滑落長度(cm)
0.90	66.5	3.00	62.3
	66.1		62.1
	66.4		62.1
	66.4		61.5
	66.7		61.3
1.10	65.5	3.80	61
	65.4		61.5
	65.9		60
	65.7		60.9
	65.6		60.7
1.70	64.8	4.45	59.5
	64.5		59
	64.5		59.4

	64.8		59.2
	64.8		59.6
2.40	62.9		
	62.8		
	63.6		
	63.2		
	63.5		

將上表各組數據平均，製成表如下：

橫桿半徑(cm)	0.90	1.10	1.70	2.40	3.00	3.80	4.45
下滑長度(cm)	66.42	65.62	64.68	63.20	61.86	60.82	59.34

橫桿半徑之數值自 0.5cm 到 5.4cm，每隔 0.1cm 代入 Vpython 之程式以 0.0002 秒為間隔模擬一次，再將模擬值與實驗值疊圖呈現：



從圖中可見實驗和模擬之趨勢大致相同，滑落長度均隨橫桿半徑增加而漸減，而且可以觀察到模擬值趨勢與橫桿半徑高度負相關， R^2 值為 0.99954。

六、不同釋放角度對旋繞擺運動之影響

改變釋放角度進行實驗，在不同角度，滑落長度數據如下：

角度	長度(cm)	角度	長度(cm)	角度	長度(cm)	角度	長度(cm)
0	50.6	20	53.0	40	58.8	60	63.9

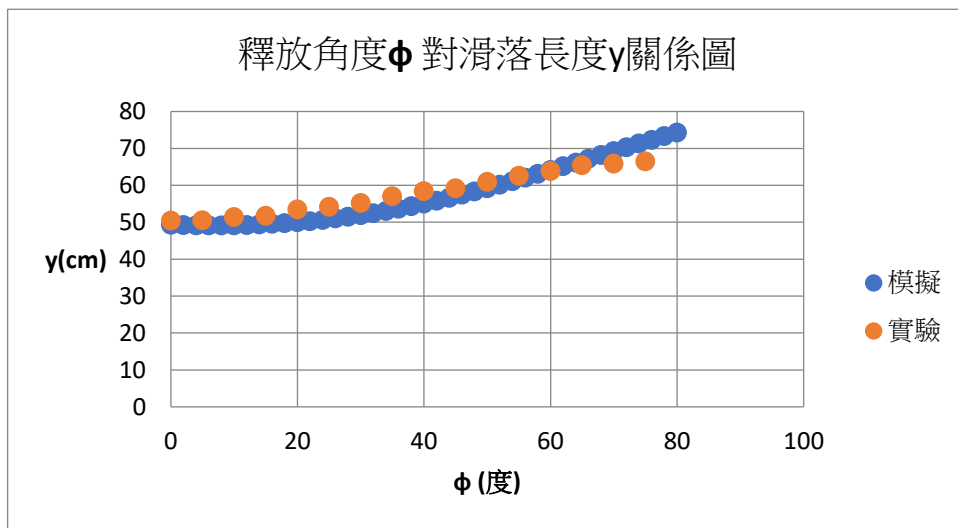
	50.6		53.3		57.9		63.8
	50.4		53.4		58.7		64.0
	50.4		53.5		58.6		63.8
	50.5		53.7		58.3		64.0
	50.2		54.0		58.3		63.9
	50.4		53.2		58.7		63.9
	50.4		52.7		58.3		63.8
5	50.2	25	54.1	45	59.1	65	65.5
	51.1		54.4		59.3		65.3
	50.6		54.1		59.4		65.4
	50.2		54.0		59.2		66.0
	50.9		54.6		59.3		65.4
	50.8		54.2		59.1		65.4
	50.1		54.2		59.2		65.4
	50.6		54.3		59.4		65.2
10	51.9	30	55.3	50	61.1	70	65.9
	50.4		55.2		61.0		66.1
	51.9		55.5		60.8		66.2
	51.2		55.1		61.0		65.8
	51.2		55.0		61.0		65.8
	51.3		55.1		61.1		65.7
	51.7		55.4		61.0		66.0
	51.5		55.2		60.9		65.8
15	51.7	35	57.0	55	62.8	75	68.1
	51.8		57.2		62.7		65.6

	51.7		57.0		62.6		65.7
	51.7		57.3		62.7		65.3
	51.5		57.0		62.5		68.2
	52.1		57.1		62.7		65.3
	52.1		57.1		62.5		68.0
	51.9		57.0		62.6		65.9

將上表各組數據平均，製成表如下：

角度	0	5	10	15	20	25	30	35
長度(cm)	50.44	50.56	51.39	51.81	53.35	54.24	55.23	57.09
角度	40	45	50	55	60	65	70	75
長度(cm)	58.45	59.25	60.99	62.64	63.89	65.45	65.91	66.51

將不同釋放角度之實驗值和模擬值製成圖如下：



從圖中之實驗值可以發現，滑落長度隨著角度增加而漸增，且增加的趨勢會隨著角度增加而趨緩。而從圖中模擬值則可以發現，滑落長度在小角度時隨著角度增加而漸增，然而增加的趨勢在大角度時卻沒有趨緩的趨勢。

七、不同摩擦係數對旋繞擺運動之影響

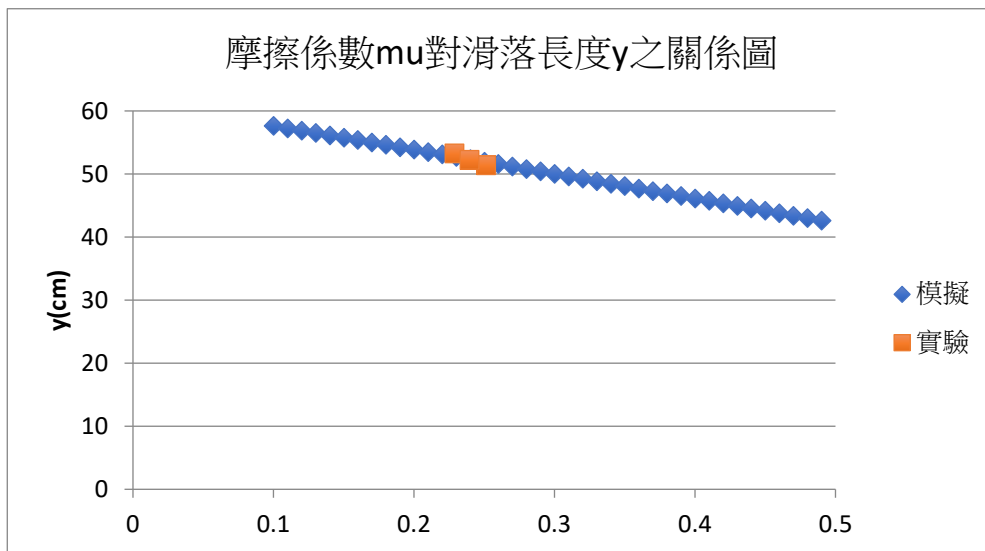
使用不同材質黏貼在相同半徑的橫桿上進行實驗，在不同表面材質下，滑落長度數據如下表：

表面材質	長度(cm)	表面材質	長度(cm)	表面材質	長度(cm)
描圖紙	53.4	影印紙	51.1	賽璐珞片	52.5
	53.3		51.3		52.2
	53.3		51.2		51.9
	53.0		51.4		52.4
	53.2		51.5		52.0
	53.2		51.5		51.9
	53.4		51.6		52.6
	53.4		51.5		52.1
	52.9		51.3		52.3
	53.3		51.1		52.3

將上表各組數據平均，製成表如下：

表面材質	描圖紙	影印紙	賽璐珞片
長度(cm)	53.24	51.35	52.22

將摩擦係數之數值自 0.1 到 0.5，每隔 0.01 代入 Vpython 之程式以 0.0002 秒為間隔模擬一次，再將模擬值與實驗值疊圖呈現：

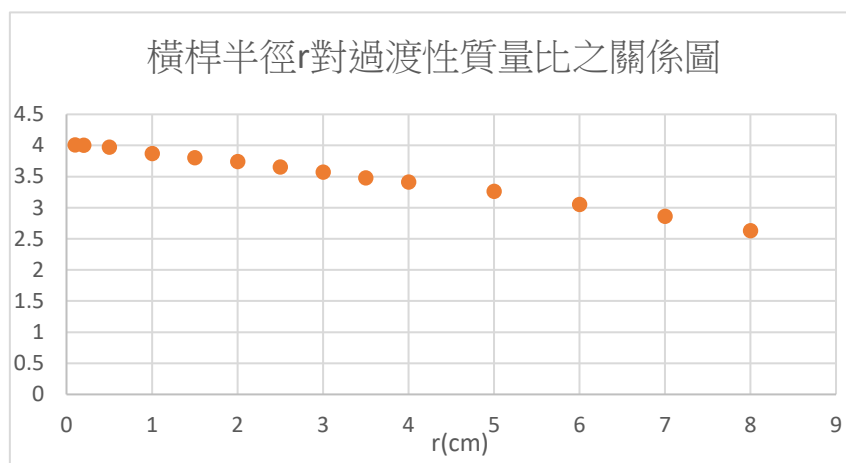


從圖中之實驗值可以發現，滑落長度隨著摩擦係數增加而漸減。而從圖中模擬值則可以發現，滑落長度亦隨著摩擦係數增加而漸減。兩者之趨勢大致相同。

八、不同變因對過渡性纏繞之影響

(一)改變橫桿半徑

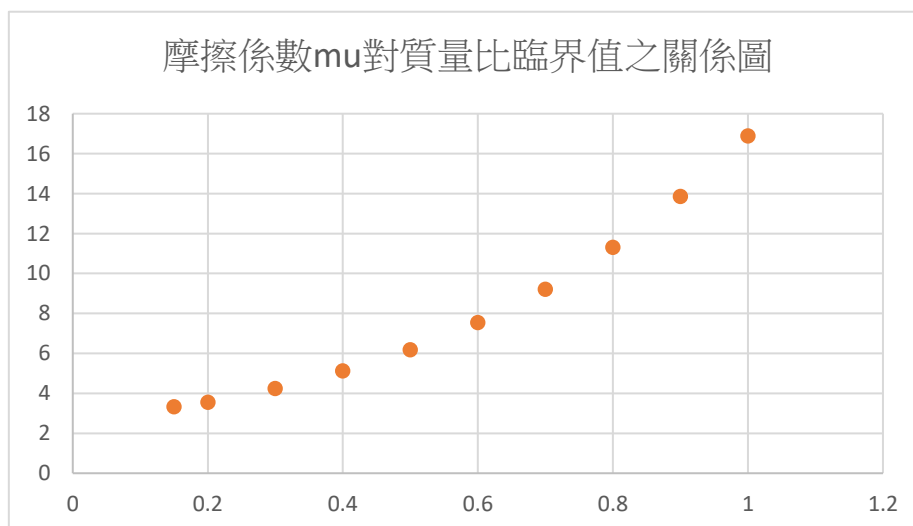
本實驗由 Vpython 之程式，分別帶入不同橫桿半徑進行模擬。藉由改變質量比並觀察模擬之運動畫面，得到旋繞擺發生過渡性纏繞之質量比臨界值。橫桿半徑對過渡性質量比之關係圖如下：



從圖中可以發現，發生過渡性纏繞之質量比臨界值會隨著橫桿半徑的增加而下降。

(二)改變摩擦係數

本實驗由 Vpython 之程式，分別帶入不同摩擦係數進行模擬。藉由改變質量比並觀察模擬之運動畫面，得到旋繞擺發生過渡性纏繞之質量比臨界值。摩擦係數對過渡性質量比之關係圖如下：



從圖中可以發現，發生過渡性纏繞之質量比臨界值會隨著摩擦係數的增加而上升，且增加的幅度漸增。

陸、討論

一、探討不同質量比對旋繞擺運動之影響

本實驗中我們發現，當質量比小於 4 時，會發生不理想之過渡性纏繞(見研究結果一)；而再減小後，輕端則無法成功纏繞在橫桿上，即纏繞失敗。故我們沒有進行質量比小於 4 之實驗。以本實驗之變因進行模擬亦可發現，當質量比介於 2.9 和 4.3 之間時，會發生過渡性纏繞；當質量比小於 2.9 時，輕端則無法成功纏繞在橫桿上，與實驗結果相符。而由模擬值可以發現，當質量比持續增加，滑落長度會趨近一定值。

二、探討不同繩長對旋繞擺運動之影響

本實驗中，不同繩長對滑落長度之模擬值之趨勢線其 R^2 值為 1，且 Y 軸截距為-0.9791。這代表繩長與滑落長度極可能為正比關係。實驗之結果亦支持此想法。

三、探討不同橫桿半徑對旋繞擺運動之影響

本實驗中我們發現，大橫桿半徑之實驗值會較模擬值稍大的現象。我們認為這可能是因為當橫桿半徑較大時，會因為旋繞擺纏繞圈數過少，而容易造成重端滑動，導致測得之滑落長度較大。

四、探討不同釋放角度對旋繞擺運動之影響

本實驗中我們發現，大釋放角度之實驗值會較模擬值小的現象。我們認為這可能是因為大釋放角度的實驗會發生滑落長度縮短的現象(見研究結果一)，造成測得之滑落長度較小。而程式模擬中之繩並沒有考慮彈性，因此不會發生滑落長度縮短的現象，故模擬值之滑落長度較長。

五、探討不同摩擦係數對旋繞擺運動之影響

本實驗的模擬中，在其餘變因不變而摩擦係數逐漸加大的情況下，會出現過渡性纏繞的現象，推測是摩擦力過大導致過多動能損失，而出現類似質量比太小的過渡性纏繞。若再持續加大，甚至會導致纏繞失敗。

柒、結論

- 一、發現過渡性纏繞和滑落長度縮短之現象。
- 二、推導出旋繞擺之運動方程式，並以程式模擬其運動之進行。模擬之結果與實驗結果十分相符。程式模擬亦可模擬出過渡性纏繞之現象。
- 三、滑落長度隨著質量比增加而增加，且增加的趨勢隨著質量比增加而趨緩。
- 四、滑落長度隨著繩長增加而增加，與繩長極可能為正比關係。
- 五、滑落長度隨橫桿半徑增加而漸減。若橫桿半徑過大，則會因為纏繞圈數過少，摩擦力不足而無法停止滑動，導致纏繞失敗。
- 六、滑落長度隨著角度往負向增加而漸增。實驗值在大角度之負偏差為滑落長度縮短造成。
- 七、滑落長度隨摩擦係數增加而漸減，趨近線性負相關。模擬在大摩擦係數的情況下會出現過渡性纏繞，甚至纏繞失敗的現象。
- 八、由程式模擬得知，質量比臨界值會隨著摩擦係數的增加而上升；而隨著橫桿半徑的增加而下降。

捌、參考資料與其他

一、參考資料

(一)戴子宜、于紹尹(2017 年臺灣國際科學展覽會高中組)。圓周運動變形之摩擦力與物理建模之探討。

(二)石明豐。VPhysics 大綱和教材。民 108 年 2 月 3 日，取自

<https://vphysics.ntu.edu.tw/hcom.php>

二、未來展望

未來我們期望可找出部分實驗值和模擬值偏差(如大角度時)的更詳細原因。再來，將其它阻力、繩之彈性、繩之重量等因素，在運動方程式中呈現並帶入程式模擬，使模擬模型更趨真實。

【評語】 051803

本作品探討旋擺的運動，實驗以重懸掛物及輕擺物「齊放」進行，進行多組釋放角度實驗，注重探究定參數的細微改變，包括不同的起始角度以及運動過程仔細的分析，整個實驗進行展現團隊的合作，且實驗結果良好並與理論模擬相近可互為驗證，具參考價值。然相同實驗在 2017 國際科展及 ISEF 團隊已有理論及實驗討論，本作品未見新穎結果或獨創思維、實驗設計及分析為主要的缺點。

壹、研究動機

我們偶然在Youtube上看到一個有趣實驗，其繩一端連接馬克杯，另一端連接硬幣，把繩掛在一橫桿上，手持硬幣然後釋放，馬克杯卻因硬幣端在桿上纏繞而未掉到地上。在文獻收集的過程中發現2017年臺灣國際科學展覽會作品—「圓周運動變形之摩擦力與物理建模之探討」曾對此運動進行分析及模擬，但影片中的硬幣並非如上述作品水平釋放，因此我們決定對此進行更深入的探討。

貳、研究目的

- 一、分析旋繞擺之運動情形
- 二、推導旋繞擺之運動方程式，並以程式模擬運動
- 三、探討不同質量比對旋繞擺運動之影響
- 四、探討不同繩長對旋繞擺運動之影響
- 五、探討不同橫桿半徑對旋繞擺運動之影響
- 六、探討不同釋放角度對旋繞擺運動之影響
- 七、探討不同摩擦係數對旋繞擺運動之影響
- 八、探討不同變因對過渡性纏繞之影響

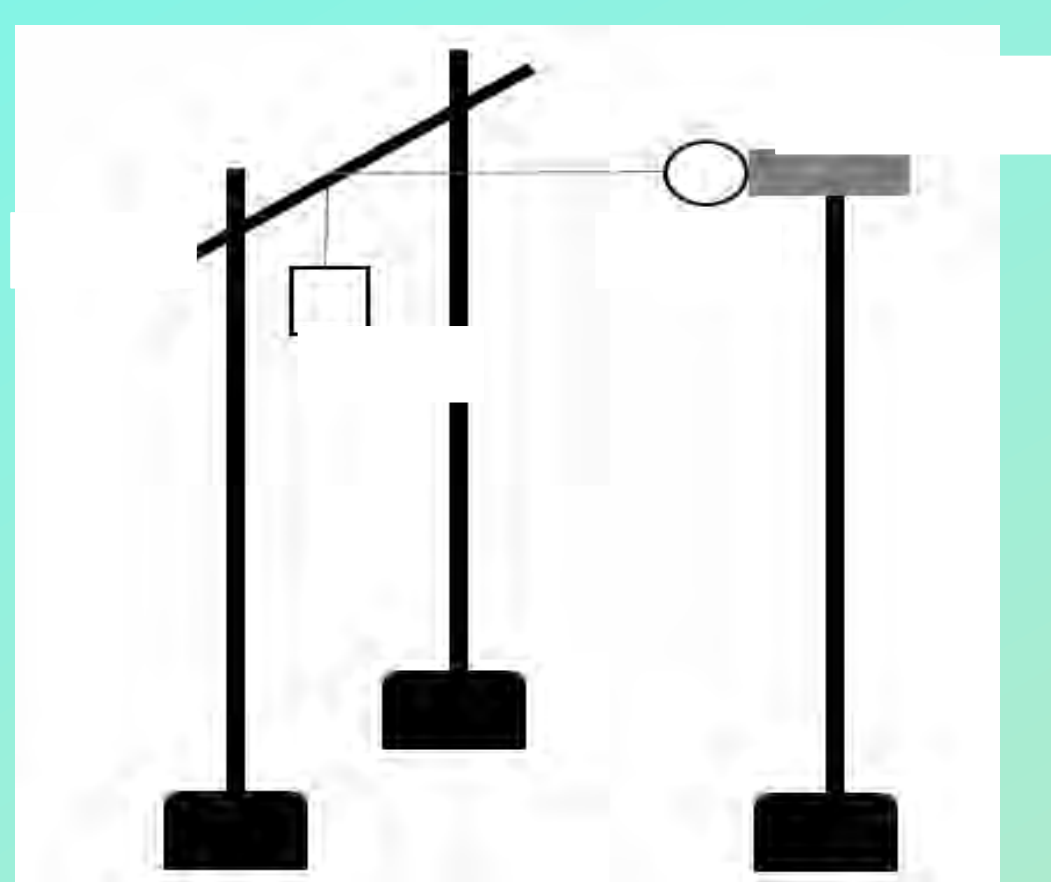
參、研究設備及器材

一、器材清單

直流電源供應器、電磁鐵、電子天平、木棒、棉線、PVC水管、璐珞片、描圖紙、影印紙、捲尺、砝碼、圓形鐵片、鐵製支架、黑色塑膠板(攝影背景用)、智慧型手機(攝影及水平儀用)、筆記型電腦、Vpython、Excel、Tracker、SciDAVis

二、實驗裝置圖示

實驗裝置全貌之示意圖



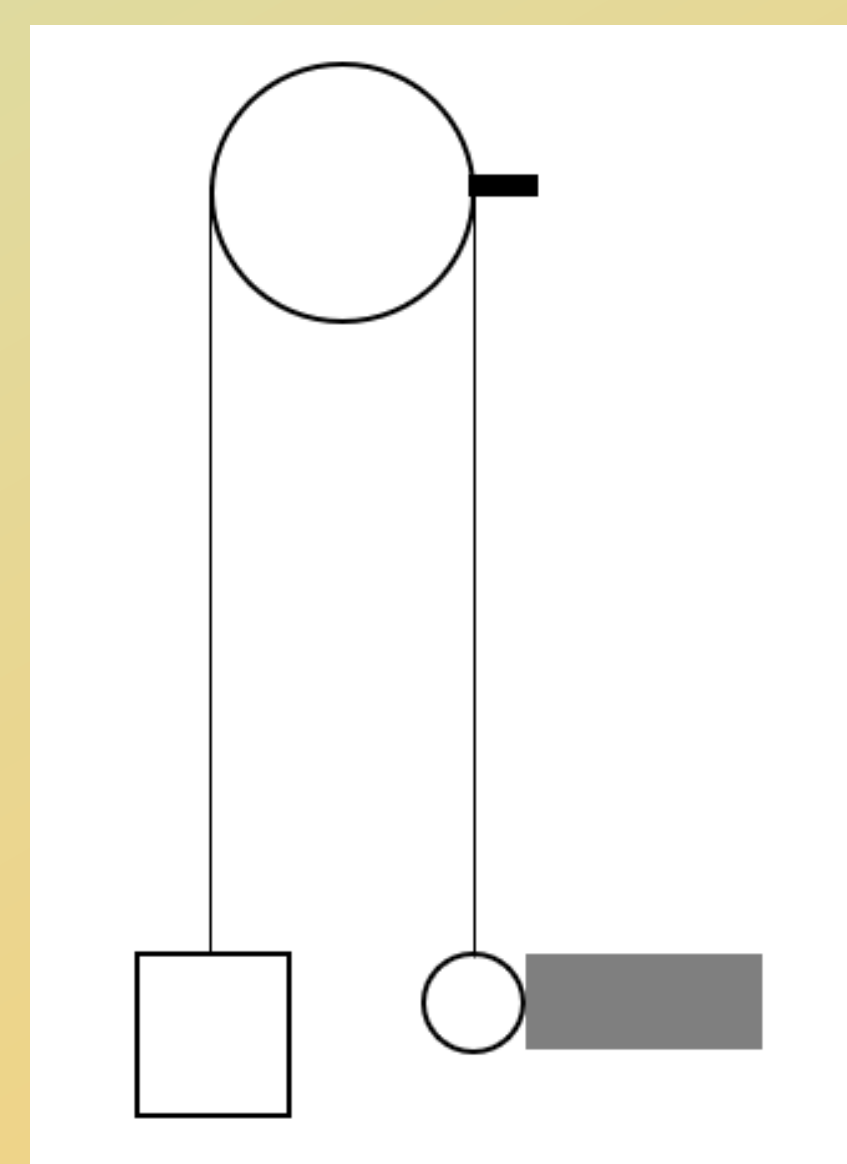
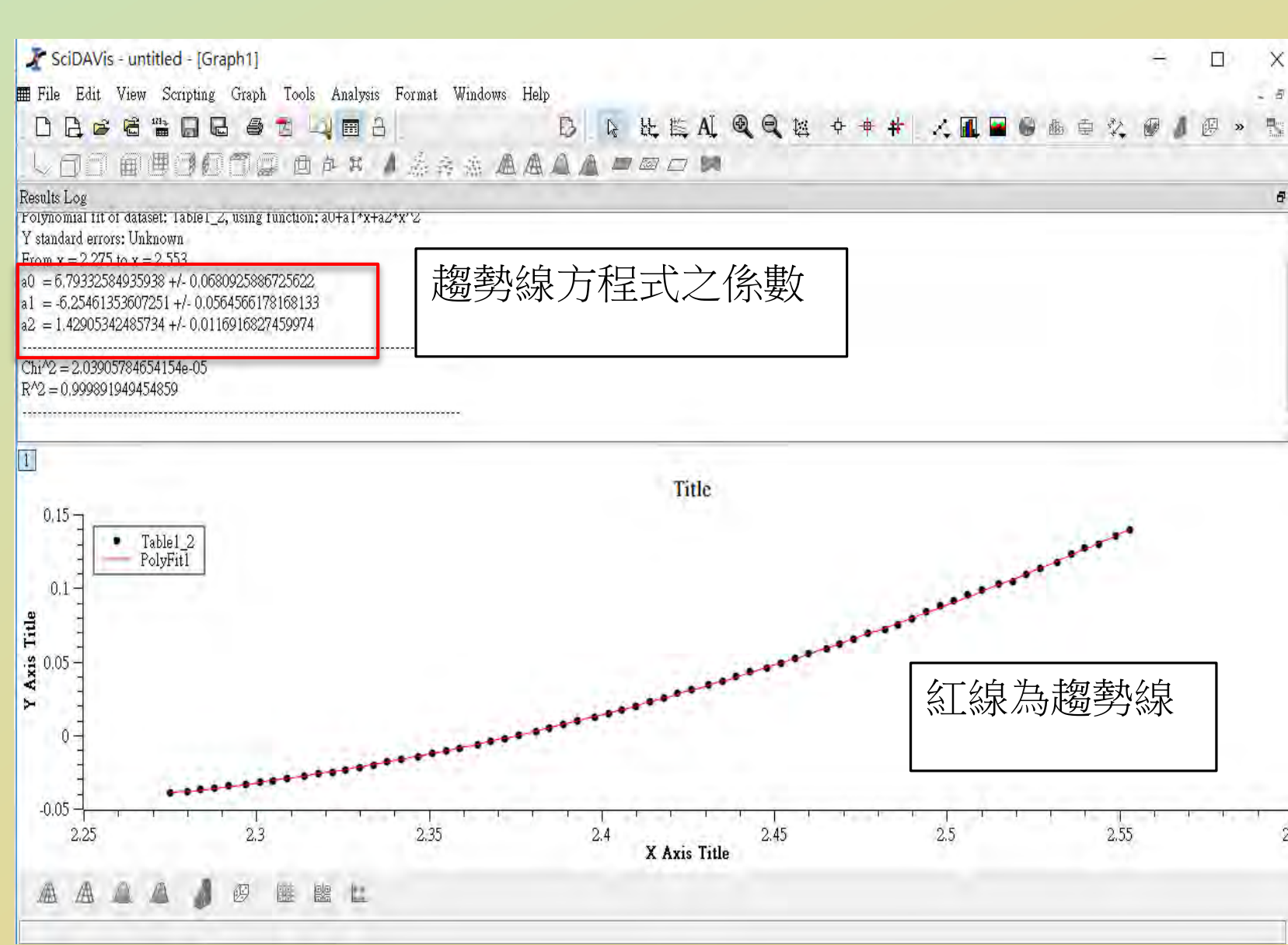
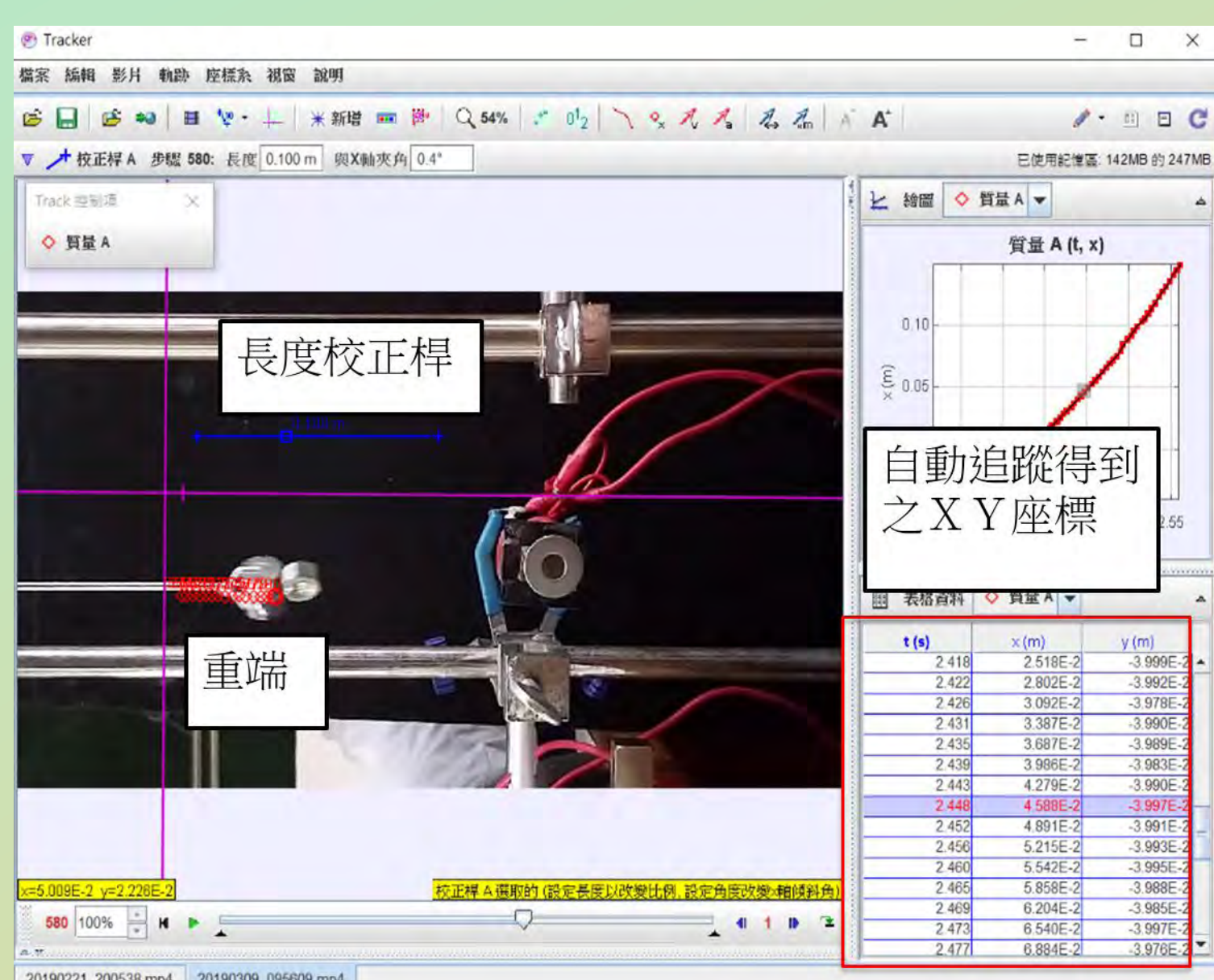
實驗裝置全貌之側視圖



肆、研究過程或方法

一、求出動摩擦係數：分析垂直滑落時繩子和橫桿間之動摩擦力

我們架設阿特午機實驗。實驗裝置圖如右下圖。實驗使用電磁鐵釋放輕端。釋放過程中，使用高速攝影功能拍攝影片，再用Tracker軟體分析兩端之運動軌跡（左下圖）。將得到之瞬間重端之Y座標輸入至SciDAVis軟體繪製成散布圖，得到二次曲線之趨勢線（中下圖）。此趨勢線方程式微分兩次後即可得重物的加速度。



由歐拉摩擦理論可得： $T_1 = T_2 e^{\mu\pi}$ (重輕繩端張力分別為： T_1 、 T_2)

因此將阿特午機運動之加速度修正為： $a = \frac{M - me^{\mu\pi}}{M + me^{\mu\pi}} g$

將實驗數據分析後得到之加速度代入上式，即可推算出動摩擦係數 μ 。實驗數據經計算後，動摩擦係數 μ 約為定值。木棒之平均為0.2978，PVC管之平均為0.2152。

二、進行旋繞擺釋放實驗

實驗前，先在橫桿上以鉛筆畫記一條橫線，並在靠近重端之繩上以紅筆標記一點。該靠近重端之紅點至輕端中心之距離即為實驗中之繩長。實驗流程如下：

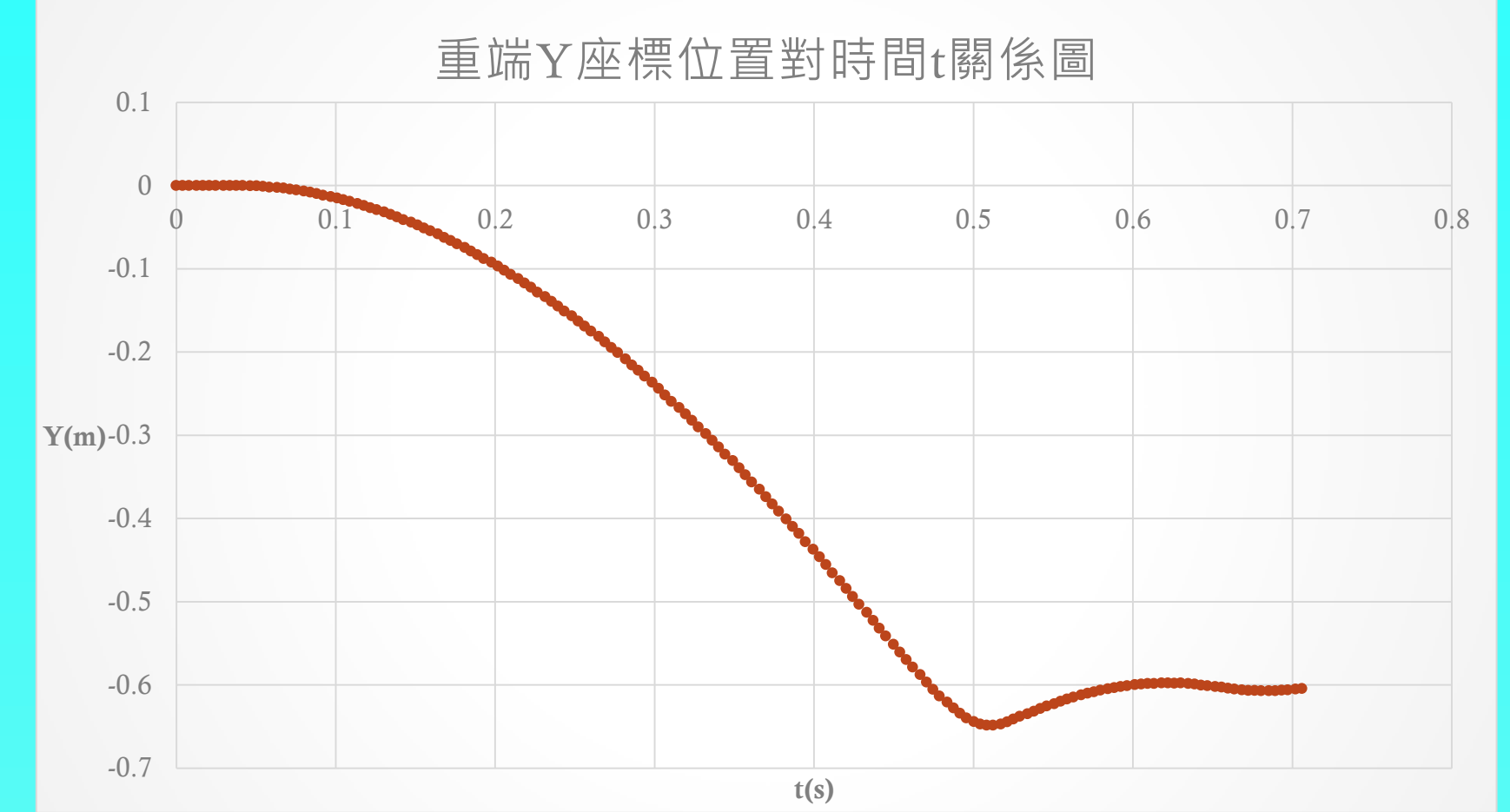
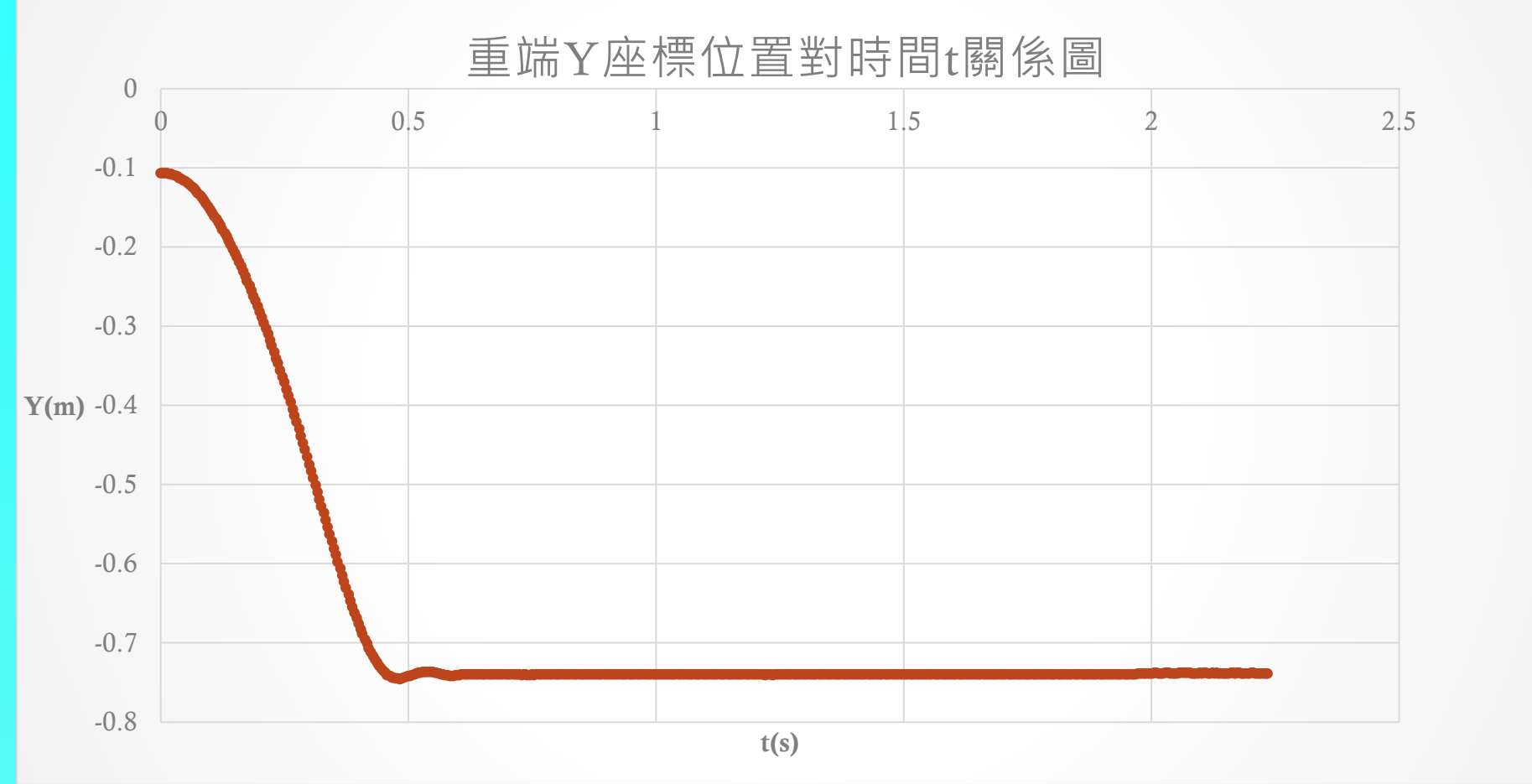
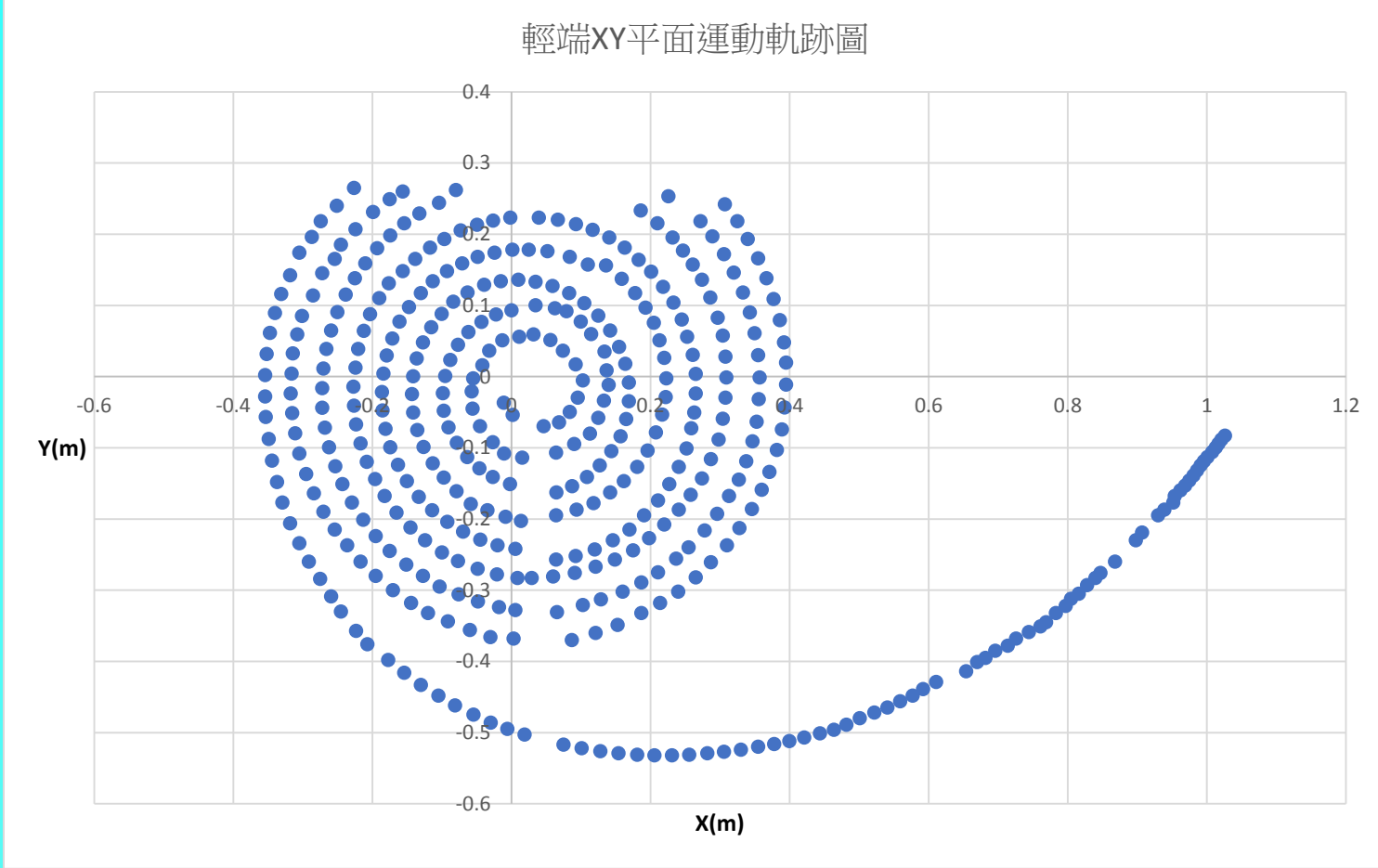
1. 依據實驗之操縱變因調整重端圓形鐵片數量、輕端之位置和繩長。
2. 開啟直流電源供應器電源，將輕端吸附於電磁鐵上，並且將繩掛在橫桿上。
3. 調整固定電磁鐵之鐵架高度和位置，使橫桿上之橫線與繩上之紅點重合。
4. 確定重端不再晃動後，即關閉直流電源供應器之電源，旋繞擺釋放。

- 5.若必要時，以智慧型手機之慢動作攝影功能拍攝旋繞擺之運動過程。
- 6.當旋繞擺之運動停止後，以捲尺測量橫桿上之橫線到繩上之紅點之距離。

伍、研究結果

一、觀察並分析旋繞擺之運動情形

(一)旋繞擺運動描述



(二)觀察旋繞擺運動之發現

(1)過渡性纏繞

當我們將重端質量減輕至旋繞擺無法纏繞之前，或是將繩長增長進行實驗時，旋繞擺會發生重端下落時經過短暫靜止再繼續下落的現象，我們稱之為過渡性纏繞。

(2)滑落長度縮短

當我們降低釋放點時，會發現重端下降至最低點後，會有被向上捲回之現象。且此現象在大角度時較小角度時為明顯。(右上圖)

二、推導旋繞擺之運動方程式，並以程式模擬運動

(一)求輕端角加速度 $\frac{d^2\theta}{dt^2}$

分析輕端之運動可得： $\frac{dx}{dt} = -l \frac{d\theta}{dt} \sin\theta - \frac{dy}{dt} \cos\theta$ 、 $\frac{dy}{dt} = l \frac{d\theta}{dt} \cos\theta - \frac{dy}{dt} \sin\theta$

將兩式分別微分後，再移項並整理後可得： $\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g \cos\theta + r \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dy}{dt}}{l}$

(二)求重端下滑加速度 $\frac{d^2y}{dt^2}$

由圖可知，重端同時受到重力Mg和重端繩張力 T_2 ，故其加速度為： $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Mg - T_2}{M}$

此處 T_1 和 T_2 的比值可以以歐拉摩擦公式求得，即：

$\frac{dy}{dt} > 0$ 時： $T_2 = T_1 e^{\mu(\frac{\pi}{2} + \theta)}$ ，而 $\frac{dy}{dt} < 0$ 時： $T_2 = T_1 e^{-\mu(\frac{\pi}{2} + \theta)}$

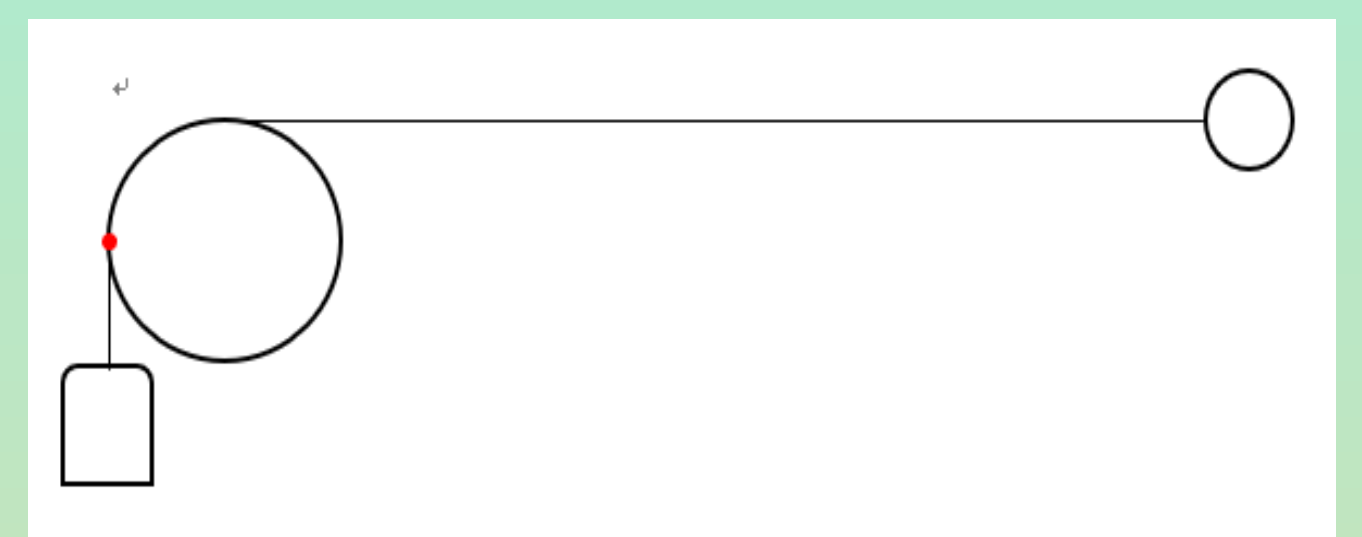
又 T_1 可經由分析輕端在沿l方向的受力情形求得：

$$T_1 = m \left(g \sin\theta + l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} \right)$$

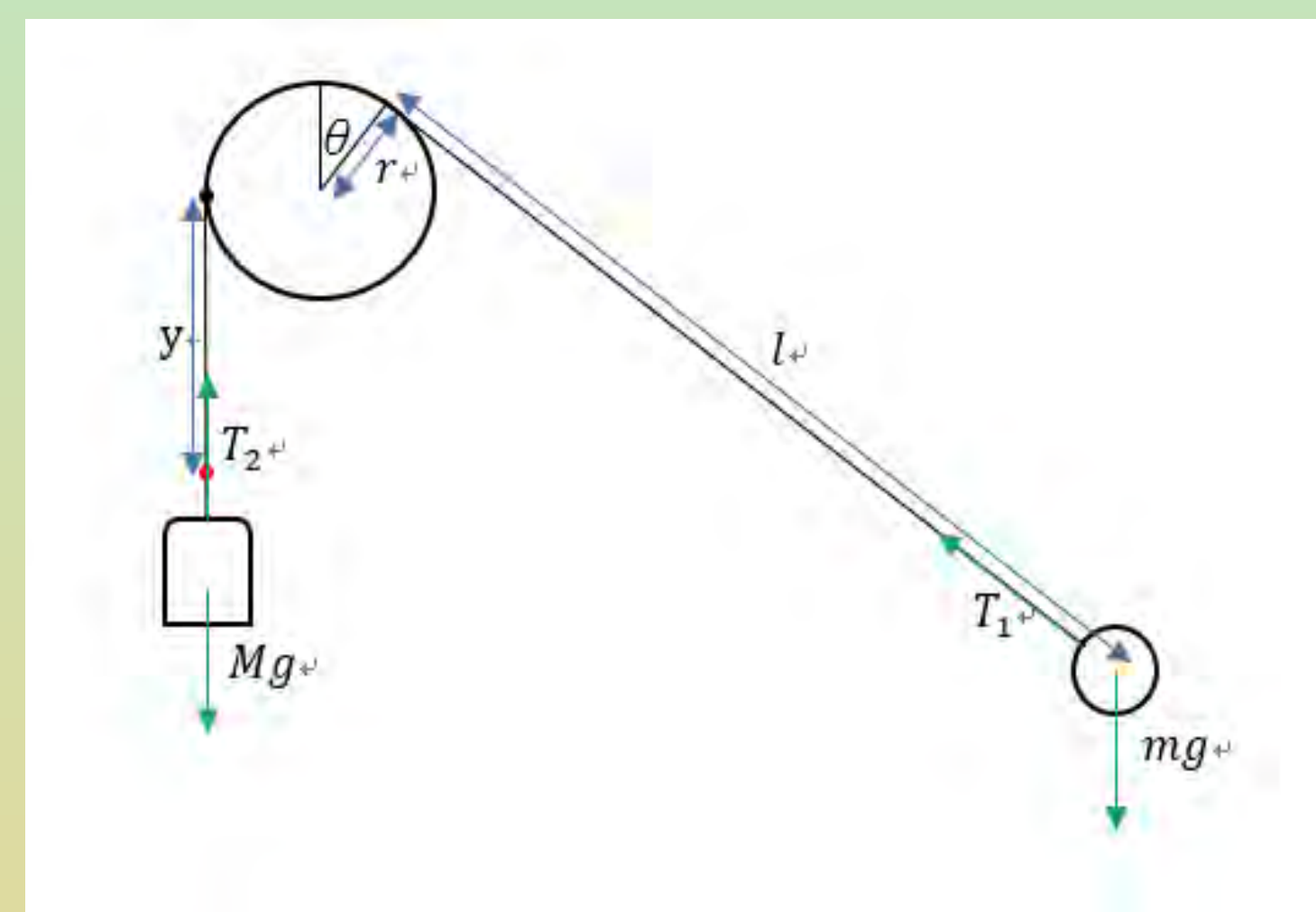
將上列公式整理並代入 $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Mg - T_2}{M}$ 中即得：

$$\frac{dy}{dt} > 0 \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{g - \frac{m}{M} e^{\mu(\frac{\pi}{2} + \theta)} \left(g \sin\theta + l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right)}{\frac{m}{M} e^{\mu(\frac{\pi}{2} + \theta)} + 1}$$

$$\frac{dy}{dt} < 0 \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{g - \frac{m}{M} e^{-\mu(\frac{\pi}{2} + \theta)} \left(g \sin\theta + l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right)}{\frac{m}{M} e^{-\mu(\frac{\pi}{2} + \theta)} + 1}$$

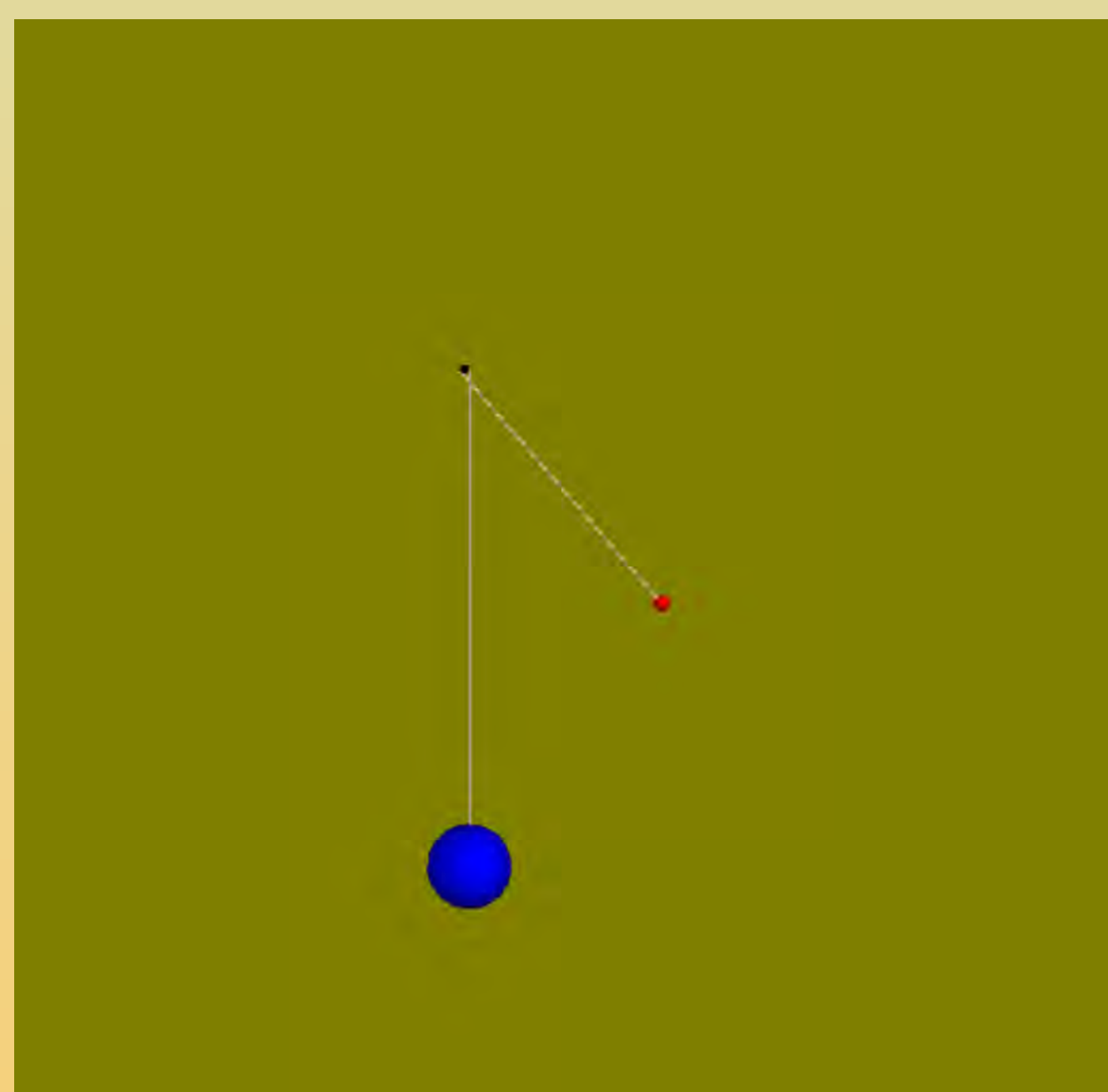


▲釋放前示意圖

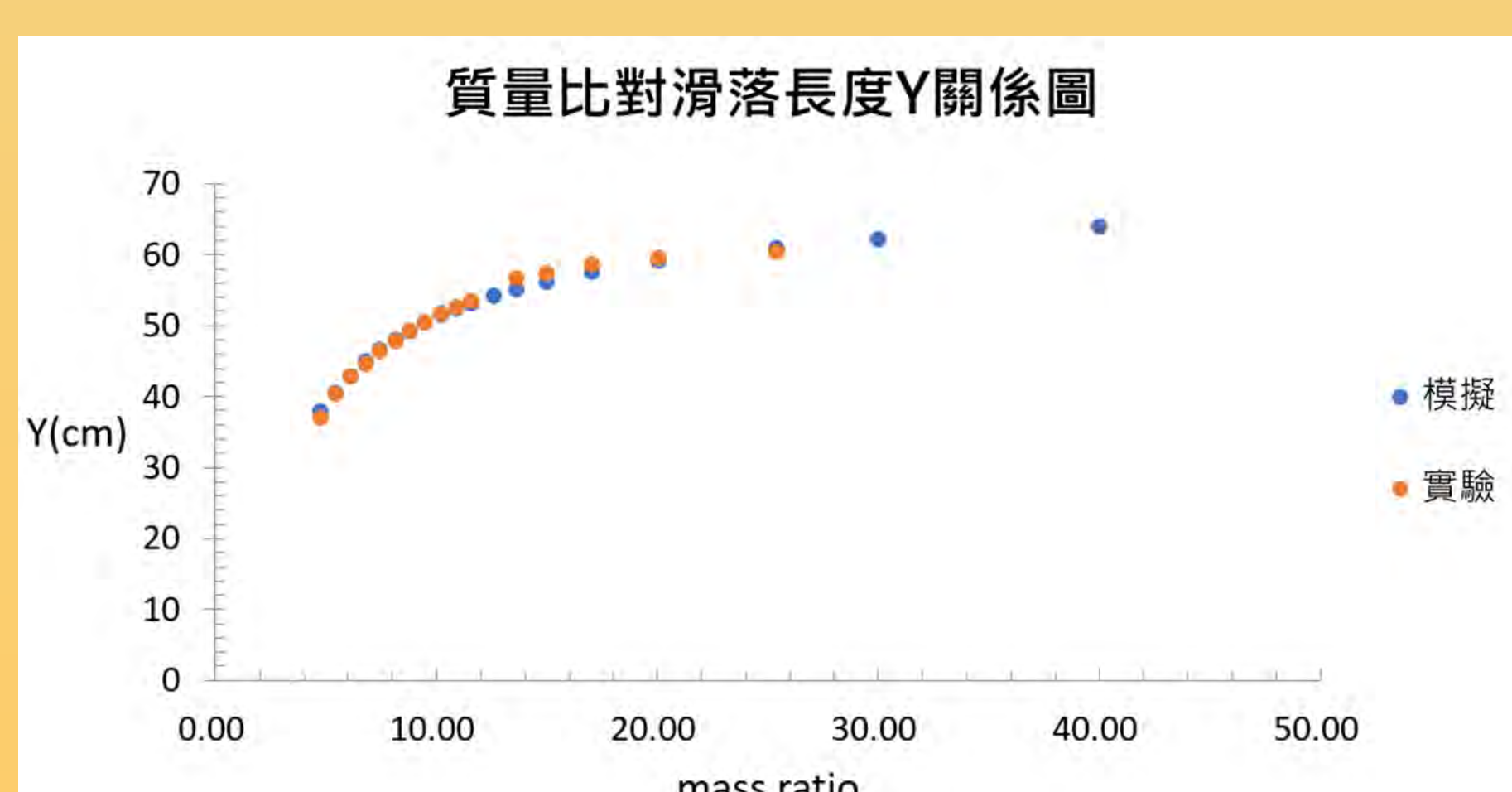
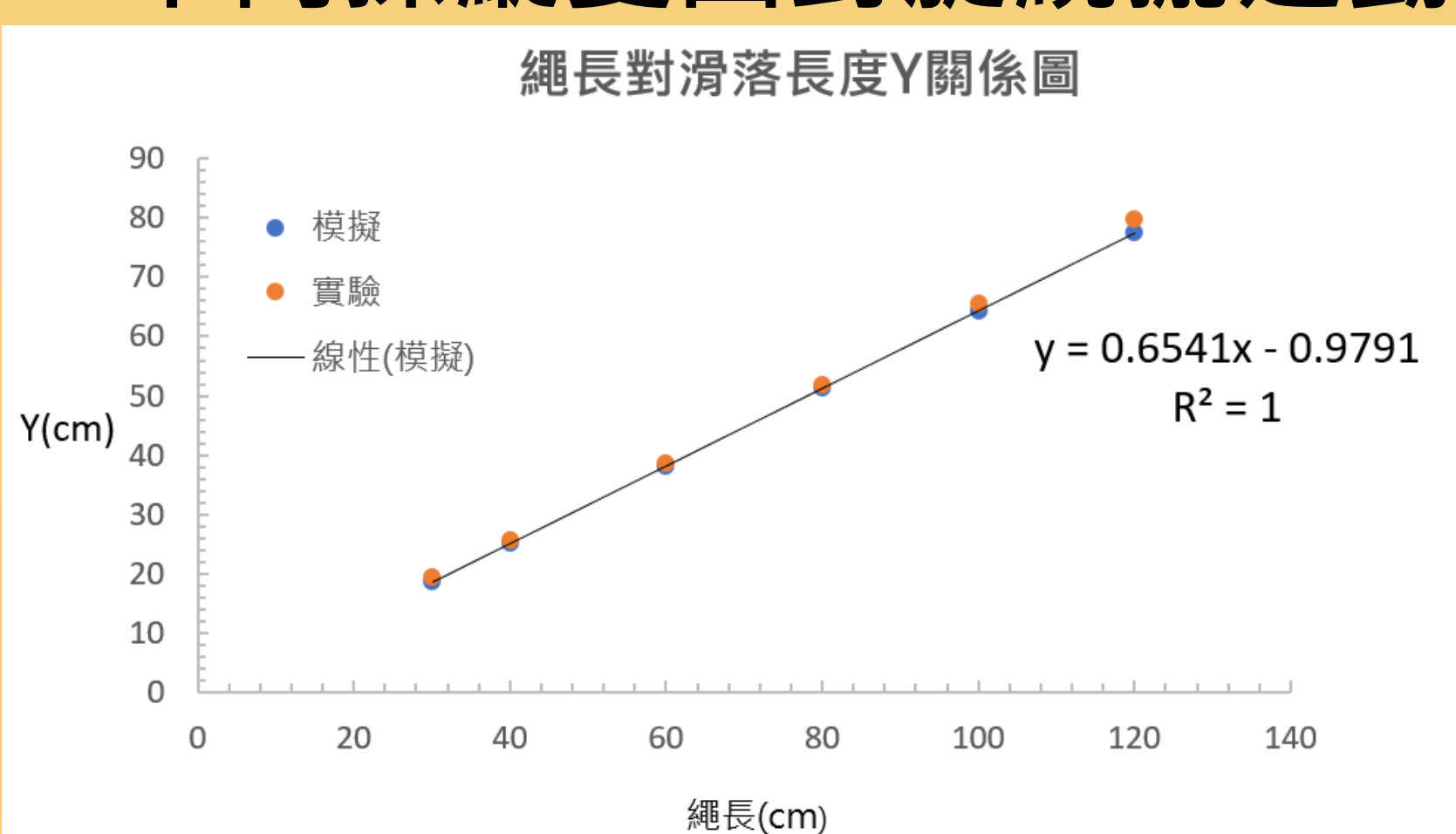


▲釋放後運動示意圖

```
File Edit Format Run Options Windows Help
Python Shell
--0.49304025865 -0.278172144335
--0.49133635851 -0.279273264971
--0.490202163909 -0.280175497331
--0.488768773406 -0.281177958517
--0.48732444735 -0.282180775078
--0.485878230727 -0.283184107009
--0.484427048232 -0.284187877748
--0.482970964669 -0.285192049576
--0.481509784782 -0.286196664615
--0.480043673342 -0.287201644826
--0.478572584648 -0.288208692007
--0.477096613234 -0.289212487795
--0.47561234009 -0.290218712658
--0.474129001233 -0.291225050901
--0.472637699318 -0.292231680659
--0.471141312624 -0.293238393856
--0.469643982544 -0.294245741406
--0.46814132221 -0.295253133911
--0.466641486788 -0.296260741855
--0.465140460373 -0.297268444909
--0.463635256493 -0.298276239363
--0.462130230318 -0.299284068468
--0.460622909055 -0.300292923864
--0.459112207425 -0.301292812559
--0.457602300802 -0.3022939792691
--0.45609307942 -0.3032931945272
--0.454584942269 -0.304293090267
--0.4530782300802 -0.305293556476
--0.451571836889 -0.3062934232503
--0.449949428231 -0.307293264761
--0.448407455648 -0.308293146745
--0.446844447268 -0.3092930012635
--0.445289292149 -0.310292848009
--0.443718738455 -0.311292684745
--0.442122702673 -0.3122925992129
--0.440512266417 -0.31329249134
--0.438881440279 -0.3142923122005
--0.437249290031 -0.315292161161
--0.435624336125 -0.3162920435153
--0.433941100143 -0.3172919670432
```

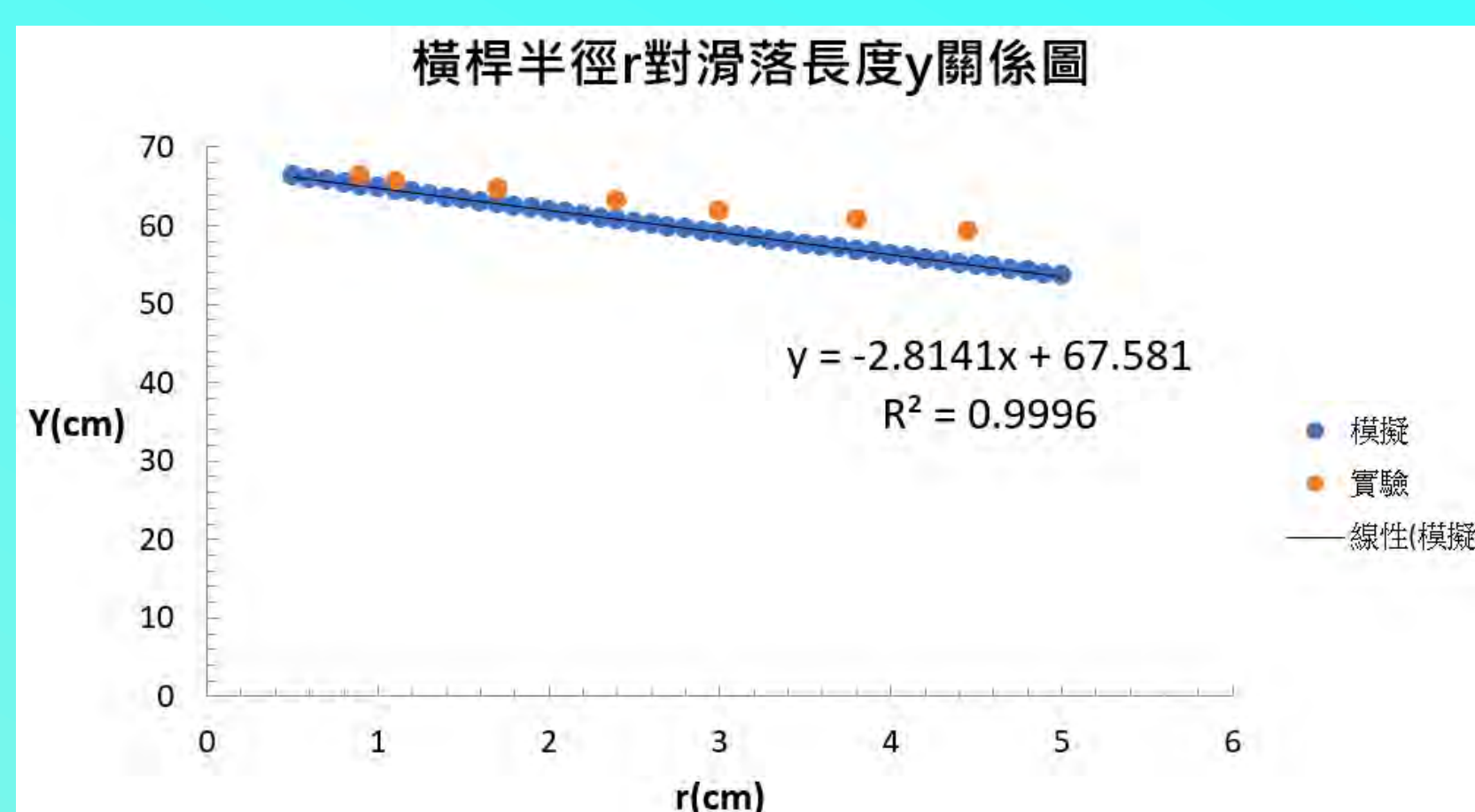


三、不同操縱變因對旋繞擺運動之影響

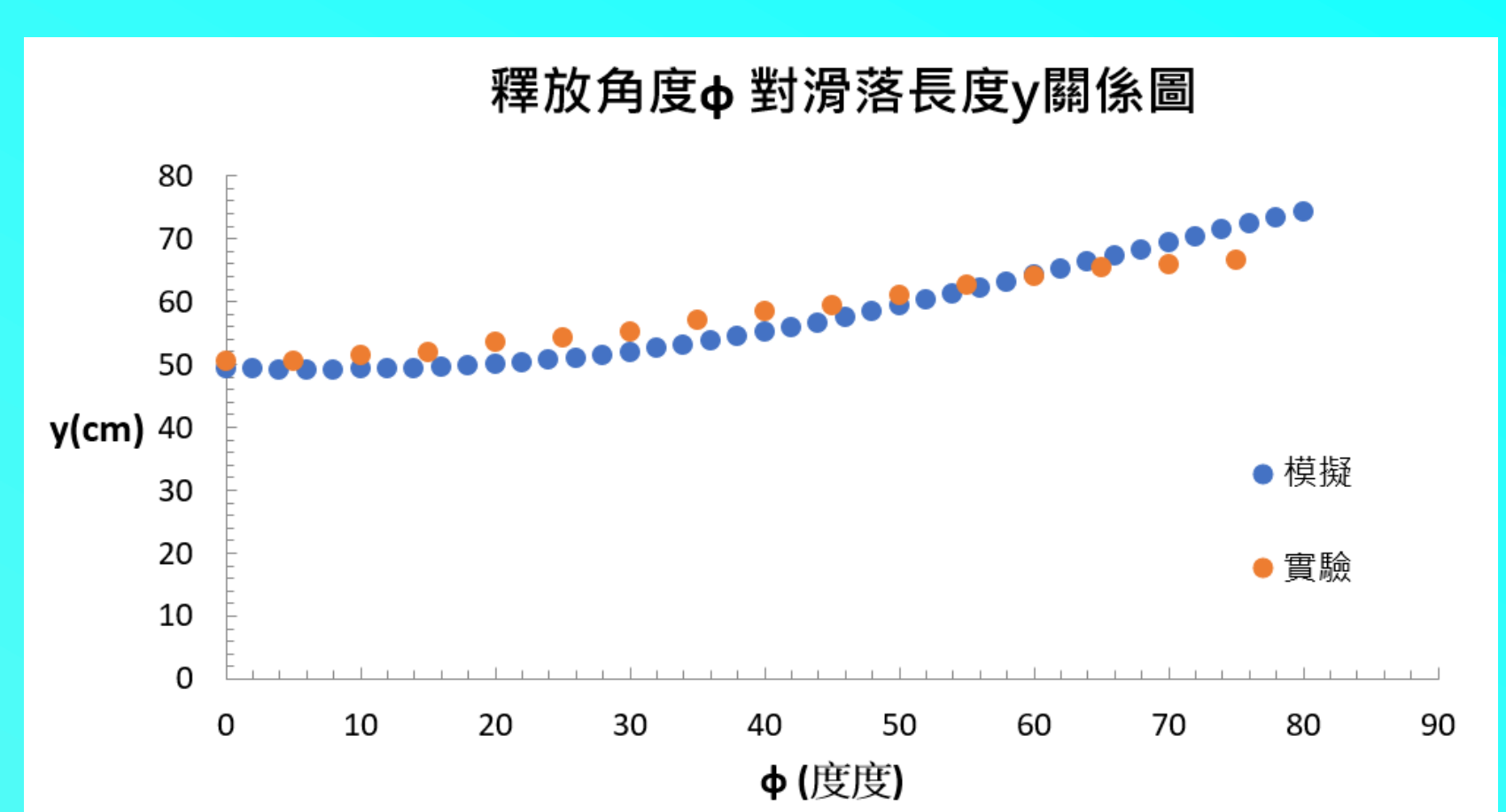


滑落長度隨著質量比增加而增加，且增加的趨勢隨著質量比增加而趨緩。比較實驗值和模擬值可以發現，兩者趨勢相當吻合。

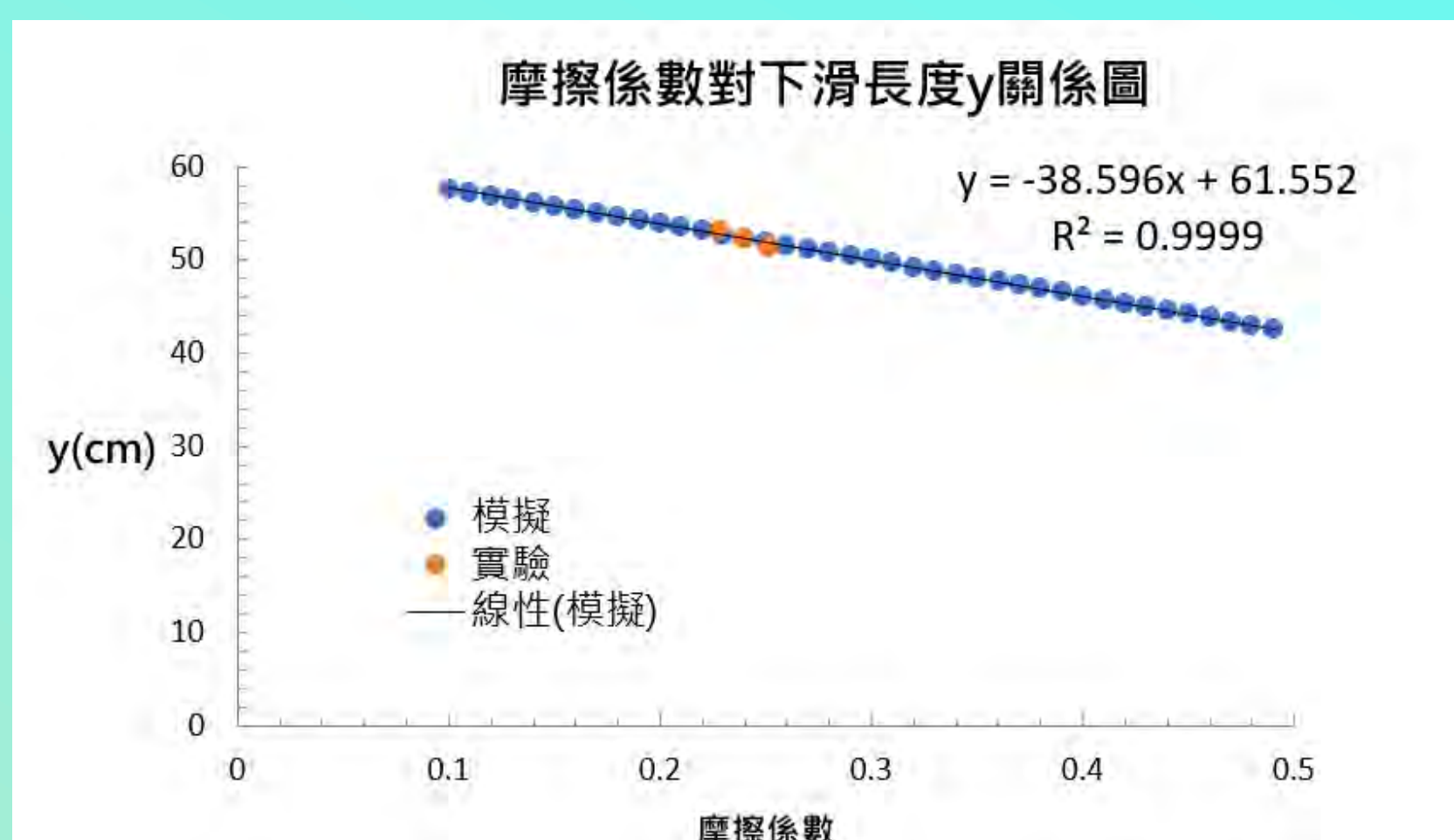
滑落長度隨著繩長的增加而增加，且為高度正相關。其 R^2 值高達0.9995。比較實驗值和模擬值可以發現，兩者趨勢相當吻合。



實驗值和模擬值之趨勢大致相同，滑落長度均隨橫桿半徑增加而漸減，模擬值趨勢與橫桿半徑高度負相關， R^2 值為0.99954。



滑落長度之實驗值隨著角度增加而漸增，且增加的趨勢會隨著角度增加而趨緩。滑落長度模擬值在小角度時隨著角度增加而漸增，然而增加趨勢在大角度時卻沒有趨緩的趨勢。



實驗值和模擬值之趨勢大致相同，滑落長度均隨摩擦係數增加而漸減，而且可以觀察到模擬值趨勢與摩擦係數高度負相關， R^2 值為0.999。

陸、討論

一、探討不同質量比對旋繞擺運動之影響

當質量比接近4時，會發生不理想之過渡性纏繞(見研究結果一)；而質量比小於4時，輕端則纏繞失敗。由模擬值可以發現，當質量比持續增加，滑落長度會趨近一定值。

二、探討不同繩長對旋繞擺運動之影響

實驗中不同繩長對滑落長度之模擬值之趨勢線其 R^2 值為1，且Y軸截距為-0.9791。這代表繩長與滑落長度極可能為正比關係。實驗之結果亦支持此想法。

三、探討不同橫桿半徑對旋繞擺運動之影響

我們發現，大橫桿半徑之實驗值會較模擬值大。我們認為這可能是因為當橫桿半徑較大時，會因為旋繞擺纏繞圈數過少，容易造成重端滑動，導致測得滑落長度較大。

四、探討不同釋放角度對旋繞擺運動之影響

我們發現，大釋放角度之實驗值會較模擬值小的現象。可能是因為大釋放角度的實驗會發生滑落長度縮短的現象，造成測得之滑落長度較小。而程式模擬中之繩並沒有考慮彈性，因此不會發生滑落長度縮短的現象，故模擬值之滑落長度較長。

五、探討不同摩擦係數對旋繞擺運動之影響

我們發現，在其餘變因不變而摩擦係數逐漸加大的情況下，會出現過渡性纏繞的現象，推測是摩擦力過大導致過多動能損失，而出現類似質量比太小的過渡性纏繞。若再持續加大，甚至會導致纏繞失敗。

六、探討不同變因對過渡性纏繞之影響

在改變橫桿半徑之模擬中，發生過渡性纏繞之質量比臨界值會隨著橫桿半徑的增加而下降。而在改變摩擦係數之模擬中，發生過渡性纏繞之質量比臨界值會隨著摩擦係數的增加而上升，且增加的幅度漸增。

柒、結論

- 一、發現過渡性纏繞和滑落長度縮短之現象。
- 二、推導出旋繞擺之運動方程式，並以程式模擬其運動之進行。模擬之結果與實驗結果十分相符。
- 三、滑落長度隨著質量比增加而增加，且增加的趨勢隨著質量比增加而趨緩。
- 四、滑落長度隨著繩長增加而增加，與繩長極可能為正比關係。
- 五、滑落長度隨橫桿半徑增加而漸減。若橫桿半徑過大，則會因為纏繞圈數過少，摩擦力不足而無法停止滑動，導致纏繞失敗。
- 六、滑落長度隨著角度往負向增加而漸增。實驗值在大角度之負偏差為滑落長度縮短造成。
- 七、滑落長度隨摩擦係數增加而漸減，趨近線性負相關。模擬在大摩擦係數的情況下會出現過渡性纏繞，甚至纏繞失敗的現象。
- 八、由程式模擬得知，質量比臨界值會隨著摩擦係數的增加而上升；而隨著橫桿半徑的增加而下降。

捌、參考資料與其他

- (一) 戴子宜、于紹尹(2017 臺灣國際科學展覽會高中組)。圓周運動變形之摩擦力與物理建模之探討。
- (二) 石明豐。VPhysics 大綱和教材。民108年2月3日，<https://vphysics.ntu.edu.tw/hcom.php>