中華民國第59屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

佳作

050417

布洛卡點相關性質探討

學校名稱：臺北市立麗山高級中學

作者：	指導老師：
高二 劉詠筑	洪明譽

關鍵詞：布洛卡點、布洛卡角、布洛卡變換

摘　　要

本文我從文獻已有的布洛卡三角形及其三種變換出發作各種推廣。首先將布洛卡點在三角形內的情形推廣至多邊形，發現**並非任意多邊形皆存在布洛卡點**。我發現了存在布洛卡點的**充要條件**，及布洛卡角、邊、面積的關係式。然後探討四邊形的情形，發現**存在正、負布洛卡點的四邊形皆為調和四邊形**。接著將文獻中三種布洛卡三角形的變換整併為更具數學風味的旋轉與伸縮變換。再以此方法為基礎，發現一系列布洛卡點、外心間的幾何性質，同時進一步推廣至多邊形，其中美妙的結果是：**從任意布洛卡 n 邊形出發的 n 條全等的等角螺線皆會收斂至布洛卡點**；最後，本文最驚艷的發現是：**所有存在正、負布洛卡點的 n 邊形，其頂點皆為正 n 邊形的頂點經過反演後的反形**。

壹、研究動機

在我查閱布洛卡點的文獻時，發現其文獻皆只提及布洛卡點在三角形中的情形，並且文獻中的垂線、圓心、投影布洛卡三角形的性質皆僅止於相似與共布洛卡點關係，所以我好奇，若是將三角形推廣至四邊形、甚至多邊形，會有甚麼結果？而垂線、圓心、投影布洛卡三角形又有哪些幾何性質還未被發現呢？除此之外，文獻中布洛卡三角形的一頂點在紐伯格圓(Neuberg Circles [4])上移動的動畫引起了我的興趣，故想了解若是將其推廣至四邊形，又會得到何種結果？

貳、研究目的

一、 探討一般 n 邊形在存在布洛卡點的情形；並探討各種特例。

二、 將垂線、圓心、投影布洛卡三角形一般化推廣，並推廣至 n 邊形；探討其布洛卡點、外心(外接圓圓心)、頂點連線段間的幾何性質。

三、 探討布洛卡三角形的紐伯格圓推廣至布洛卡四邊形的情形。

四、 探討存在正、負布洛卡點的 n 邊形，其頂點與反演之關係。

參、研究設備及器材

紙、筆、大腦、電腦、動態幾何軟體 GSP 與 Geogebra。

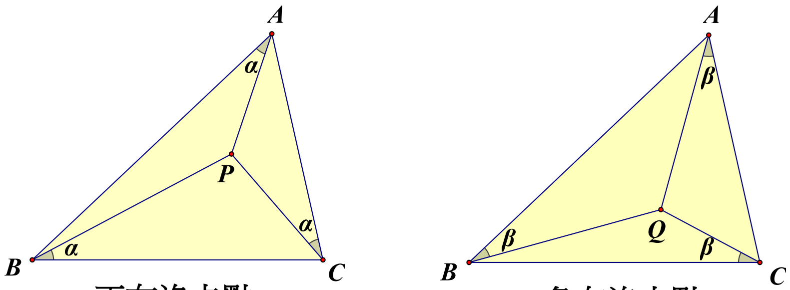
肆、研究過程或方法

一、 文獻探討

(一) 布洛卡點、布洛卡角以及其存在性、唯一性、尺規作圖法

【定義】三角形的布洛卡點與布洛卡角

1. 如圖 1-1，給定的$\triangle ABC$，若存在一點 P，滿足 $\angle BAP=\angle CBP=\angle ACP=\alpha$，且 $\overline{AB}$ 旋轉至 $\overline{AP}$ 為**逆時針方向**，則稱 P 為$\triangle ABC$ 的「**正布洛卡點**」，α 稱「**正布洛卡角**」
2. 類似地，給定的$\triangle ABC$，若存在一點 Q，滿足 $\angle CAQ=\angle ABQ=\angle BCQ=\beta$，且 $\overline{BA}$ 旋轉至 $\overline{BQ}$ 為**順時針方向**，則稱 Q 為$\triangle ABC$ 的「**負布洛卡點**」，β 稱「**負布洛卡角**」。



正布洛卡點　　負布洛卡點

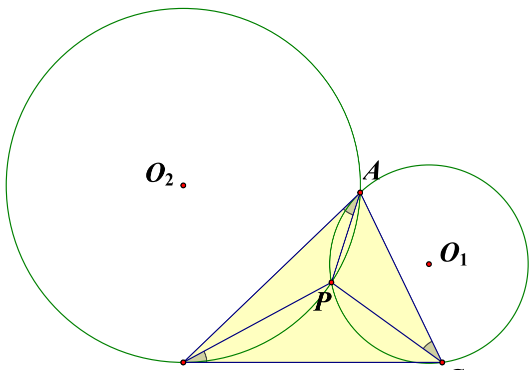
▲圖 1-1

【存在性】從作圖即可確認布洛卡點的存在性，如下：

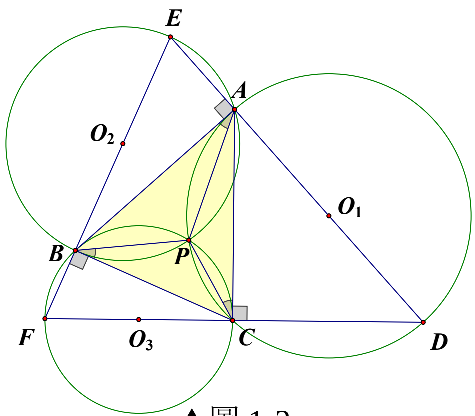
如圖 1-2，作圓 O_1 通過 A、C 兩點，且與 $\overline{AB}$ 相切於 A 點、作圓 O_2 通過 A、B 兩點，且與 $\overline{BC}$ 相切於 B 點，兩圓 O_1 、O_2 交於 P 點。根據弦切角定理，$\angle BAP=\angle ACP$ 且 $\angle CBP=\angle BAP$，因此 P 點滿足 $\angle BAP=\angle CBP=\angle ACP$，$P$ 點即為$\triangle ABC$ 的正布洛卡點。至於負布洛卡點的情形與正布洛卡點類似，在此略去。

【唯一性】

如圖 1-2，設 P 為$\triangle ABC$ 的正布洛卡點，作$\triangle APC$ 的外接圓 O_1，則由弦切角定理的逆定理知圓 O_1 必與 $\overline{AB}$ 相切於 A 點，再作$\triangle BPA$ 的外接圓 O_2，則圓 O_2 也必與 $\overline{BC}$ 相切於 B 點，由此可知，P 點就是$\triangle ABC$ 唯一的正布洛卡點，同理，負布洛卡點也是唯一的。



▲圖 1-2



▲圖 1-3

【**尺規作圖法**】圖 1-2 說明了布洛卡點的尺規作圖法，以下作法精簡了圖 1-2 的方法：

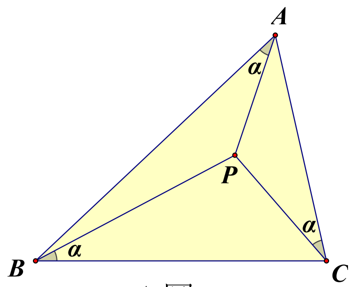
> 如圖 1-3，過△ABC 的三個頂點 A、B、C 依次作 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 的垂線 $\overline{DE}$ 、 $\overline{EF}$ 、 $\overline{FD}$ ，以 $\overline{AD}$ 為直徑作圓 O_1 ，以 $\overline{BE}$ 為直徑作圓 O_2 ，兩圓交於 P 點即為所求。

[證明]

因為 $\angle ACD=\dfrac{\pi}{2}$ ，所以圓 O_1 必過 C 點，又因為 $\overline{AD}\perp\overline{AB}$ ，所以圓 O_1 與 $\overline{AB}$ 相切於 A 點，因此 $\angle BAP=\angle ACP$ 。同理，圓 O_2 必過 A 點，且與 $\overline{BC}$ 相切於 B 點，因此 $\angle CBP=\angle BAP$ 。由 $\angle BAP=\angle CBP=\angle ACP$ 可知 P 點為△ABC 的布洛卡點。 ■

(二) 布洛卡點的基本性質

> 【**定理 1-1**】如圖 1-4，若 P 為△ABC 的正布洛卡點，其相應的正布洛卡角為 α ，則：
> $$\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\ ,$$
> $$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C\ 。$$



▲圖 1-4

[證明]

1. 如圖 1-4，由三角形面積關係知 $S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PBC}+S_{\Delta PAC}=S_{\Delta ABC}$ ，

則 $\dfrac{S_{\Delta PAB}}{S_{\Delta ABC}}+\dfrac{S_{\Delta PBC}}{S_{\Delta ABC}}+\dfrac{S_{\Delta PAC}}{S_{\Delta ABC}}=1$ ，即

$$\frac{\frac{1}{2}\overline{PA}\cdot\overline{AB}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin A}+\frac{\frac{1}{2}\overline{PB}\cdot\overline{BC}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{BC}\sin A}+\frac{\frac{1}{2}\overline{PC}\cdot\overline{AC}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{AC}\sin C}=1 \qquad (1\text{-}1)$$

亦即 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{AC}}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin A}+\dfrac{\overline{PB}}{\overline{AB}}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin B}+\dfrac{\overline{PC}}{\overline{BC}}\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sin C}=1$ ，又在△ABC 中，由正弦定律得

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\angle APC}=\dfrac{\overline{PA}}{\sin\alpha}$ ，即 $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\angle APC}$ ，而 $\angle APC=180°-\alpha-\angle CAP=180°-A$ ，則

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{AC}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\angle APC}=\frac{\sin\alpha}{\sin A} \qquad (1\text{-}2)$$

同理可得

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}=\frac{\sin\alpha}{\sin B},\ \frac{\overline{PC}}{\overline{BC}}=\frac{\sin\alpha}{\sin C} \qquad (1\text{-}3)$$

由(1-1)、(1-2)、(1-3)得 $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2 A}+\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2 B}+\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2 C}=1$ ，即 $\dfrac{1}{\sin^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 B}+\dfrac{1}{\sin^2 C}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ 。

2. 由定理 1-1，有 $\dfrac{1}{\sin^2 A}+\dfrac{1}{\sin^2 B}+\dfrac{1}{\sin^2 C}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ ，則 $\csc^2\alpha=\csc^2 A+\csc^2 B+\csc^2 C$ 即

$$\cot^2\alpha=\cot^2 A+\cot^2 B+\cot^2 C+2 \tag{1-4}$$

又 $A+B=\pi-C\Rightarrow\cot(A+B)=\cot(\pi-C)\Rightarrow\dfrac{\cot B\cot B-1}{\cot A+\cot B}=-\cot C$ ，即

$$\cot A\cot B+\cot A\cot C+\cot B\cot C=1 \tag{1-5}$$

由(1-4)、(1-5)得 $\cot^2\alpha=(\cot A+\cot B+\cot C)^2$ ，即 $\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$ 。 ■

【推論 1】若 Q 為△ABC 的負布洛卡點，其相應的負布洛卡角為 β ，則：

$$\frac{1}{\sin^2\beta}=\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\ ,$$

$$\cot\beta=\cot A+\cot B+\cot C$$

因推論 1 的證明完全類似於定理 1-1，故此略去。

【推論 2】對於任意給定的三角形，其正布洛卡角與負布洛卡角相等。

[證明]

由定理 1-1 與推論 1 得 $\sin^2\alpha=\sin^2\beta$ ，又因為 $0°<\alpha<60°$ 、 $0°<\beta<60°$ ，所以 $\alpha=\beta$ 。 ■

【定理 1-2】設 α 為△ABC 的布洛卡角，S 為△ABC 的面積，則：

$$\cot\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2}{4S},$$

$$\sin\alpha=\frac{2S}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}},$$

$$\cos\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}.$$

[證明]

如圖 1-4，設 $\overline{PA}=x,\overline{PB}=y,\overline{PC}=z$ ，在 ΔPAB 中，由餘弦定律得 $\cos\alpha=\dfrac{c^2+x^2-y^2}{2cx}$ ，又 $\sin\alpha=\dfrac{2S_{\Delta PAB}}{cx}$ ，則 $\cot\alpha=\dfrac{c^2+x^2-y^2}{4S_{\Delta PAB}}$ ，即 $4S_{\Delta PAB}\cdot\cot\alpha=c^2+x^2-y^2$ ，

同理可得 $4S_{\Delta PBC}\cdot\cot\alpha=a^2+y^2-z^2$ 、 $4S_{\Delta PCA}\cdot\cot\alpha=b^2+z^2-x^2$ ，

上述三式相加，可得 $4(S_{\Delta PAB}+S_{\Delta PBC}+S_{\Delta PCA})\cdot\cot\alpha=a^2+b^2+c^2$ ，即得 $\cos\alpha=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$ ，

又由三角形面積公式，

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B\Rightarrow 4S^2=a^2c^2\sin^2 B=a^2c^2(1-\cos^2 B)=a^2c^2\left(1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow 16S^2=4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2$$

則有：

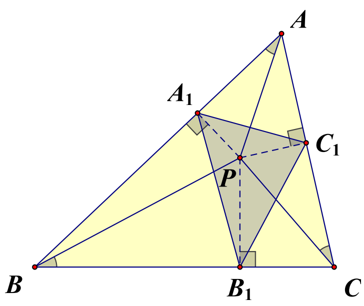
$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\cot\alpha}}=\frac{4S}{\sqrt{16S^2+(c^2+a^2-b^2)^2}}=\frac{2S}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

$$\cos\alpha=\sin\alpha\cot\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$ ■

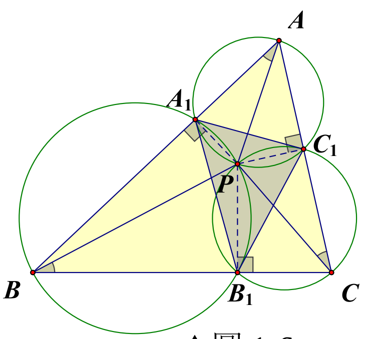
(三) 布洛卡三角形的變換：投影、垂線、圓心布洛卡三角形

【定義】投影布洛卡三角形：

如圖 1-5，設 P 為△ABC 的布洛卡點，自 P 點向三邊作垂線得垂足點 A_1 、 B_1 、 C_1 ，則△ $A_1B_1C_1$ 稱為△ABC 的**正投影布洛卡三角形**。任意三角形相對於正、負布洛卡點各有一個投影布洛卡三角形。



▲圖 1-5



▲圖 1-6

【定理 1-3】投影布洛卡三角形的相似與共布洛卡點關係

設△ABC 的布洛卡點為 P，布洛卡角為α ，若△ $A_1B_1C_1$是△ABC 的投影布洛卡三角形，則：

△ $A_1B_1C_1$的布洛卡點亦為 P，布洛卡角亦為α ；

△ $A_1B_1C_1\sim$△ABC，相似比為$\sin\alpha$ 。

[證明]

1. 如圖 1-6，由 A、A_1 、P、C_1 四點共圓可知 $\angle PC_1A_1=\angle PAB=\alpha$ 。同理，由 B、B_1 、P、A_1 四點共圓，可知 $\angle PA_1B_1=\angle PBC=\alpha$ ；由 C、C_1 、P、B_1 四點共圓，可知 $\angle PB_1C_1=\angle PCA=\alpha$ 。因此 $\angle PC_1A_1=\angle PA_1B_1=\angle PB_1C_1=\alpha$ ，亦即 P 為△ $A_1B_1C_1$ 的布洛卡點。
2. $\angle B_1A_1C_1=\angle B_1A_1P+\angle PA_1C_1=\alpha+\angle PAC=\angle A$ ，同理，$\angle C_1B_1A_1=\angle C_1B_1P+\angle PB_1A_1=\alpha+\angle PBA=\angle B$ ，且 $\angle A_1C_1B_1=\angle A_1C_1P+\angle PC_1B_1=\alpha+\angle PCB=\angle C$ ，從而△ $A_1B_1C_1\sim$△ABC。兩者的相似比為$\dfrac{\overline{PA_1}}{\overline{PA}}=\sin\alpha$ 。 ■

【推論 3】若給定任意布洛卡三角形，則其正、負投影布洛卡三角形全等。

【定義】垂線布洛卡三角形：

如圖 1-7，過△ABC 的三個頂點 A、B、C 作三邊的垂線$\overline{DF}$ 、$\overline{EF}$ 、$\overline{DE}$ ，則△DEF 稱為△ABC 的**正垂線布洛卡三角形**。對於任意給定的三角形都有其正、負垂線布洛卡三角形。

[說明]

由前述【尺規作圖法】可知垂線布洛卡三角形與布洛卡點的尺規作圖相關，故有正負之分。

【定理 1-4】垂線布洛卡三角形的相似與共布洛卡點關係

如圖 1-8，若△*ABC* 的三邊長分別為 *a*、*b*、*c*，外接圓半徑為 *R*，*P* 為其布洛卡點，△*DEF* 為其相應的垂線布洛卡三角形，布洛卡角 $\alpha=\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$，則：

P 亦為△*DEF* 的布洛卡點，α 亦為△*DEF* 的布洛卡角；

$\triangle ABC\sim\triangle DEF$，相似比為 $\dfrac{abc}{\left(a^2+b^2+c^2\right)R}=\tan\alpha$ 。

[證明]

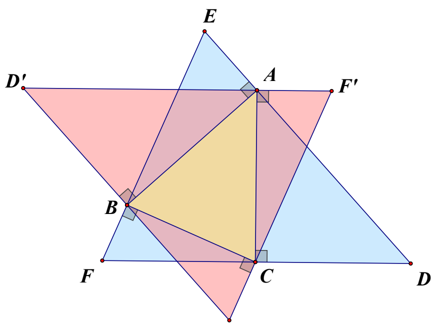
1. 以 $\overline{AD}$ 為直徑作圓 O_1，以 $\overline{BE}$ 為直徑作圓 O_2，以 $\overline{CF}$ 為直徑作圓 O_3，三圓交於△*ABC* 的布洛卡點 *P*。由於 $\angle ADP=\angle ACP=\alpha$，$\angle CFP=\angle CBP=\alpha$ 且 $\angle BEP=\angle BAP=\alpha$，故知 *P* 點為△*DEF* 的布洛卡點，$\alpha$ 為△*DEF* 的布洛卡角。
2. 因為

$$\angle EDF=\angle ADP+\angle PDC=\alpha+\angle PAC=\angle A\text{，}$$
$$\angle DFE=\angle CFP+\angle PFB=\alpha+\angle PCB=\angle C\text{，}$$

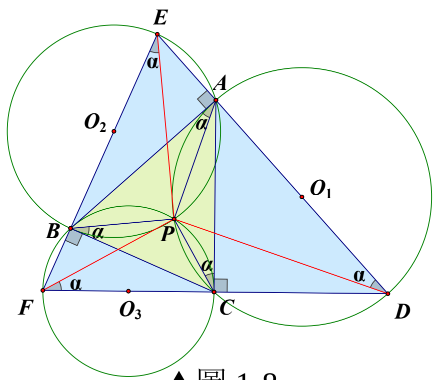
故知△*ABC*～△*DEF*，相似比為

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}}=\tan\alpha=\frac{4S}{a^2+b^2+c^2}=\frac{4\cdot\dfrac{abc}{4R}}{a^2+b^2+c^2}=\frac{abc}{\left(a^2+b^2+c^2\right)R}$$ ∎

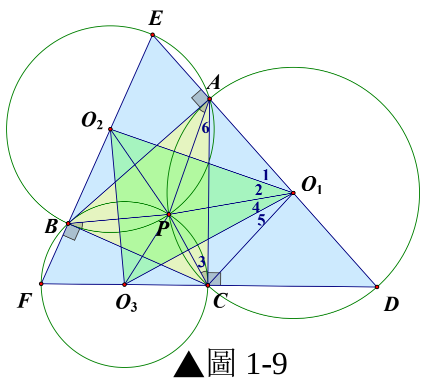
【推論 4】若給定任意布洛卡三角形，則其正、負垂線布洛卡三角形全等。



▲圖 1-7



▲圖 1-8



▲圖 1-9

【定義】圓心布洛卡三角形：

如圖 1-9，設△*DEF* 為△*ABC* 的垂線布洛卡三角形，$\overline{AD}$、$\overline{CF}$、$\overline{BE}$ 的中點分別為 O_1、O_2、O_3，則△$O_1O_2O_3$ 稱為△*ABC* 的**正圓心布洛卡三角形**。任意三角形相對應其正、負布洛卡點都各有一個圓心布洛卡三角形。

【定理 1-5】圓心布洛卡三角形的相似與共布洛卡點關係

如圖 1-9，設△*ABC* 的三邊長分別為 *a*、*b*、*c*，外接圓半徑為 *R*，*P* 為其布洛卡點，△$O_1O_2O_3$ 為其相應的圓心布洛卡三角形，布洛卡角 $\alpha=\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$，則：

P 亦為△$O_1O_2O_3$ 的布洛卡點，α 亦為△$O_1O_2O_3$ 的布洛卡角；

$$\triangle ABC \sim \triangle O_1O_2O_3，相似比為 2\sin\alpha = \frac{abc}{\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}R}。$$

[證明]

1. 在圓 O_1、O_2 中，連心線 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 將圓 O_1、O_2 切割成互相對稱的兩半，因此 $\angle 1 = \angle 2$。
   在圓 O_1 中，AP 所對應的圓心角 $\angle AO_1P = 2\angle 3$，即 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \alpha$。
   同理，$\angle PO_2O_3 = \angle PO_3O_1 = \alpha$，故 P 為 $\triangle O_1O_2O_3$ 的布洛卡點。
   又在圓 O_1、O_3 中，連心線 $\overleftrightarrow{O_1O_3}$ 將圓 O_1、O_3 切割成互相對稱的兩半，因此 $\angle 4 = \angle 5$。
   在圓 O_1 中，CP 所對應的圓心角 $\angle CO_1P = 2\angle 6$，
   即 $\angle 4 = \angle 6$。因此 $\angle O_2O_1O_3 = \angle 2 + \angle 4 = \alpha + \angle 6 = \angle A$，
   同理，$\angle O_1O_3O_2 = \angle B$ 且 $\angle O_1O_2O_3 = \angle C$，這說明了 $\triangle ABC \sim \triangle O_1O_2O_3$。
2. 最後計算 $\triangle ABC$ 和 $\triangle O_1O_2O_3$ 的相似比：

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PO_1}} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2\sin\alpha$$

又根據定理 1-2，$\sin\alpha = \dfrac{2S}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$，可得相似比：

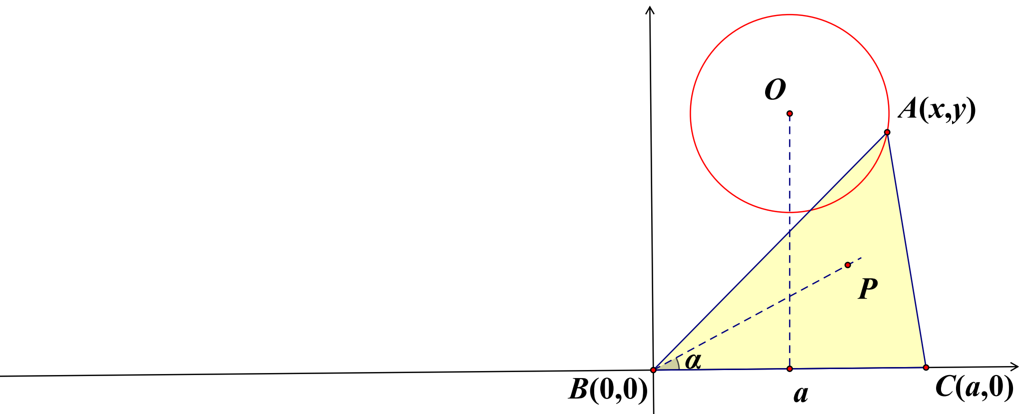
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PO_1}} = 2\sin\alpha = \frac{4S}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\,R}$$

■

【推論 5】若給定任意布洛卡三角形，則其正、負圓心布洛卡三角形全等。

(四) 布洛卡三角形的紐伯格圓(參見文獻[4])

【定理 1-6】如圖 1-10，給定角 α 及 B、C 兩定點，設 $\overline{BC} = a$，若 $\triangle ABC$ 布洛卡角為 α，則 A 點的軌跡為一圓，圓心 O 在 $\overline{BC}$ 的中垂線上，與 $\overline{BC}$ 相距 $\frac{a}{2}\cot\alpha$，半徑為 $\frac{a}{2}\sqrt{\cot^2\alpha - 3}$。



▲圖 1-10

[證明]

先證明點 A 的軌跡是一圓。

設 $B(0, 0)$、$C(a, 0)$、$A(x, y)$，又由定理 1-2 知 $\cot\alpha = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S}$，

因為 $b^2 = (a-x)^2 + y^2$、$c^2 = x^2 + y^2$，

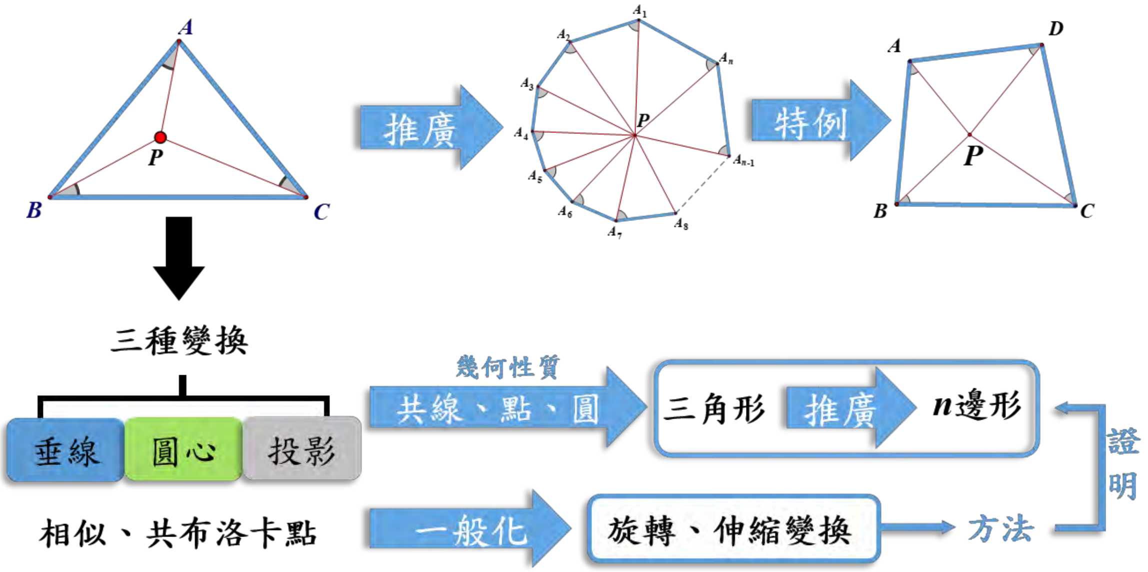
$$\Rightarrow 4S\cot\alpha = a^2+(a-x)^2+y^2+x^2+y^2 = 2x^2+2y^2+2a^2-2ax$$

$\Rightarrow 4\cdot\dfrac{1}{2}ay\cdot\cot\alpha = 2x^2+2y^2+2a^2-2ax \Rightarrow ay\cot\alpha = x^2+y^2+a^2-ax$，即 x、y 滿足圓方程式。

整理式子後得 $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{a\cot\alpha}{2}\right)^2=\left(\dfrac{a}{2}\sqrt{\cot^2\alpha-3}\right)^2$，

故證得 A 的軌跡為一圓，其圓心為 $O\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\cot\alpha\right)$，半徑為 $\dfrac{a}{2}\sqrt{\cot^2\alpha-3}$。 ∎

二、研究架構與方法



伍、研究結果與討論

一、 n 邊形存在布洛卡點的情形及其一般化推廣

(一) 存在布洛卡點的 n 邊形

我們發現並非所有 n 邊形皆存在布洛卡點，即使有正布洛卡點也不一定有負布洛卡點，以下給出 n 邊形存在布洛卡點的充要條件及相關定理。

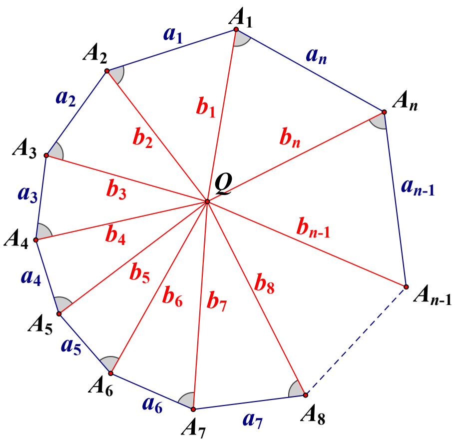
【定理 2-1】n 邊形存在布洛卡點的充要條件

如圖 2-1，若在 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，$\overline{A_1A_2}=a_1,\overline{A_2A_3}=a_2,\cdots\cdots,\overline{A_nA_1}=a_n$，$\beta$ 為負布洛卡角，則其存在負布洛卡點 Q 的充要條件為：

$$\cot\beta=\cot A_1+\frac{a_2}{a_1\sin A_2}=\cot A_2+\frac{a_3}{a_2\sin A_3}=\cdots=\cot A_{n-1}+\frac{a_n}{a_{n-1}\sin A_n}=\cot A_n+\frac{a_1}{a_n\sin A_1}$$

[證明]

設 $\overline{QA_1}=b_1,\overline{QA_2}=b_2,\cdots\cdots,\overline{QA_n}=b_n$。在 ΔQA_1A_2 中，$\angle A_1QA_2=\pi-\angle QA_1A_2-\beta=\pi-A_1$，由



▲圖 2-1

正弦定律，$\dfrac{a_1}{\sin(\pi - A_1)} = \dfrac{b_1}{\sin\beta} = \dfrac{b_2}{\sin(A_1 - \beta)}$，即

$$\frac{a_1}{\sin A_1} = \frac{b_1}{\sin\beta} = \frac{b_2}{\sin(A_1 - \beta)} \tag{2-1}$$

同理，在ΔQA_2A_3與ΔQA_3A_4中，由正弦定律可得

$$\frac{a_2}{\sin A_2} = \frac{b_2}{\sin\beta} = \frac{b_3}{\sin(A_2 - \beta)} \tag{2-2}$$

$$\frac{a_3}{\sin A_3} = \frac{b_3}{\sin\beta} = \frac{b_4}{\sin(A_3 - \beta)} \tag{2-3}$$

由(2-1)式可得

$$b_1 \sin(A_1 - \beta) = b_2 \sin\beta \Rightarrow b_1(\sin A_1 \cos\beta - \cos A_1 \sin\beta) = b_2 \sin\beta$$

兩邊同除以$\sin\beta$，可得

$$b_1(\sin A_1 \cot\beta - \cos A_1) = b_2$$

兩邊再同除以$\sin A$，可得

$$b_1(\cot\beta - \cot A_1) = \frac{b_2}{\sin A_1} \Rightarrow \cot\beta - \cot A_1 = \frac{b_2}{b_1 \sin A_1} \tag{2-4}$$

另由(2-1)、(2-2)式可得

$$\begin{cases} b_1 \sin A_1 = a_1 \sin\beta \\ b_2 \sin A_2 = a_2 \sin\beta \end{cases} \Rightarrow \frac{b_1 \sin A_1}{b_2 \sin A_2} = \frac{a_1}{a_2} \Rightarrow \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2 \sin A_1}{a_1 \sin A_2}$$

代入(2-4)式，得到

$$\cot\beta - \cot A_1 = \frac{a_2}{a_1 \sin A_2} \Rightarrow \cot\beta = \cot A_1 + \frac{a_2}{a_1 \sin A_2} \tag{2-5}$$

同理，由(2-2)式可得

$$\cot\beta - \cot A_2 = \frac{b_3}{b_2 \sin A_2} \tag{2-6}$$

再由(2-2)、(2-3)式可得

$$\begin{cases} b_2 \sin A_2 = a_2 \sin \beta \\ b_3 \sin A_3 = a_3 \sin \beta \end{cases} \Rightarrow \frac{b_2 \sin A_2}{b_3 \sin A_3} = \frac{a_2}{a_3} \Rightarrow \frac{b_3}{b_2} = \frac{a_3 \sin A_2}{a_2 \sin A_3}$$

代入(2-6)式，得到

$$\cot \beta = \cot A_2 + \frac{a_3}{a_2 \sin A_3} \tag{2-7}$$

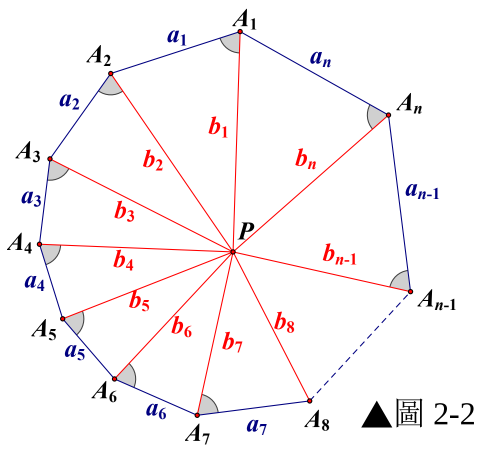
由此類推可知，若 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的布洛卡點存在，必滿足

$$\cot \beta = \cot A_1 + \frac{a_2}{a_1 \sin A_2} = \cot A_2 + \frac{a_3}{a_2 \sin A_3} = \cdots = \cot A_{n-1} + \frac{a_n}{a_{n-1} \sin A_n} = \cot A_n + \frac{a_1}{a_n \sin A_1}$$

其次，從 Q 點的作圖中可看出，滿足上式的 Q 點也必滿足布洛卡點的定義，這說明了它的充分性。

■

【定理 2-2】如圖 2-2，若 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的布洛卡角為 α ，面積為 S，且 $\overline{A_1A_2} = a_1$, $\overline{A_2A_3} = a_2, \cdots\cdots, \overline{A_nA_1} = a_n$ ，則： $\cot \alpha = \dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{4S}$.



▲圖 2-2

[證明]

設 $\overline{PA_1} = b_1, \overline{PA_2} = b_2, \cdots\cdots, \overline{PA_n} = b_n$ ，在 ΔPA_1A_2 中，由餘弦定律， $\cos \alpha = \dfrac{a_1^2 + b_1^2 - b_2^2}{2a_1b_1}$ ，

又 $S_{\Delta PA_1A_2} = \dfrac{1}{2} a_1 b_1 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \dfrac{2S_{\Delta PA_1A_2}}{a_1b_1}$ ，因此 $\cot \alpha = \dfrac{a_1^2 + b_1^2 - b_2^2}{4S_{\Delta PA_1A_2}}$ ，即

$$4S_{\Delta PA_1A_2} \cdot \cot \alpha = a_1^2 + b_1^2 - b_2^2$$

同理可得

$$4S_{\Delta PA_2A_3} \cdot \cot \alpha = a_2^2 + b_2^2 - b_3^2, \cdots\cdots, 4S_{\Delta PA_{n-1}A_n} \cdot \cot \alpha = a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 - b_n^2, 4S_{\Delta PA_nA_1} \cdot \cot \alpha = a_n^2 + b_n^2 - b_1^2$$

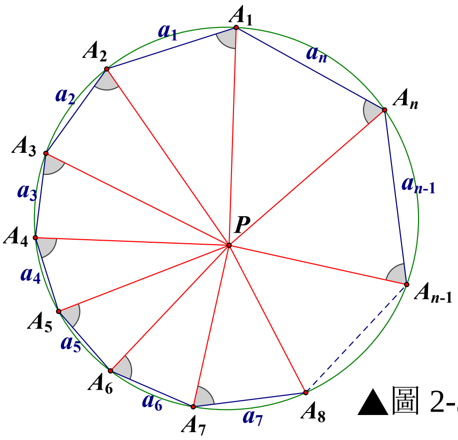
將上述等式相加，得

$$4\left(S_{\Delta PA_1A_2} + S_{\Delta PA_2A_3} + \cdots + S_{\Delta PA_{n-1}A_n} + S_{\Delta PA_nA_1}\right)\cot \alpha = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2$$

其中 $S_{\Delta PA_1A_2} + S_{\Delta PA_2A_3} + \cdots + S_{\Delta PA_{n-1}A_n} + S_{\Delta PA_nA_1} = S$ ，故得到

$$\cot\alpha=\frac{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{4S}$$ ∎

> 【**定理 2-3**】如圖 2-3，若 n 邊形同時具有正、負布洛卡點，則：
>
> n 邊形的 n 個頂點共圓，且正、負布洛卡角相等。



▲圖 2-3

[證明]

1. 先證明正、負布洛卡角相等：設 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的正、負布洛卡角分別為 α 、 β ，面積為 S，且 $\overline{A_1A_2}=a_1$ ， $\overline{A_2A_3}=a_2$ ，…… ， $\overline{A_nA_1}=a_n$ ，由定理 2-2，
   $\cot\alpha=\dfrac{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{4S}$ ，同理， $\cot\beta=\dfrac{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}}{4S}$ ，故 $\alpha=\beta$ 。

2. 其次證明 n 個頂點共圓：

   由定理 2-2，n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 有負布洛卡點，則

$$\cot\beta=\cot A_1+\frac{a_2}{a_1\sin A_2}=\cot A_2+\frac{a_3}{a_2\sin A_3}=\cdots=\cot A_{n-1}+\frac{a_n}{a_{n-1}\sin A_n}=\cot A_n+\frac{a_1}{a_n\sin A_1}\qquad(2\text{-}8)$$

   同理，若 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 有正布洛卡點，則

$$\cot\alpha=\cot A_1+\frac{a_{n-1}}{a_n\sin A_n}=\cot A_2+\frac{a_n}{a_1\sin A_1}=\cdots=\cot A_{n-1}+\frac{a_{n-3}}{a_{n-2}\sin A_{n-2}}=\cot A_n+\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}\sin A_{n-1}}\qquad(2\text{-}9)$$

   在 $\Delta A_1A_2A_3$ 中，由餘弦定律，

$$\cos\angle A_1A_2A_3=\frac{a_1^{\ 2}+\overline{A_1A_3}^{\,2}-a_2^{\ 2}}{2a_1\cdot\overline{A_1A_3}}=\frac{a_1^{\ 2}+\left(a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}-2a_1a_2\cos A_2\right)-a_2^{\ 2}}{2a_1\cdot\overline{A_1A_3}}=\frac{2a_1^{\ 2}-2a_1a_2\cos A_2}{2a_1\cdot\overline{A_1A_3}}=\frac{a_1-a_2\cos A_2}{\overline{A_1A_3}}$$

   又由正弦定律， $\dfrac{\overline{A_1A_3}}{\sin A_2}=\dfrac{a_2}{\sin\angle A_2A_1A_3}\Rightarrow\overline{A_1A_3}=\dfrac{a_2\sin A_2}{\sin\angle A_2A_1A_3}$ ，代入上式得

$$\cos\angle A_2A_1A_3=\frac{a_1-a_2\sin A_2}{\overline{A_1A_3}}=\frac{\left(a_1-a_2\sin A_2\right)\sin\angle A_2A_1A_3}{a_2\sin A_2}\Rightarrow\cot\angle A_2A_1A_3=\frac{a_1}{a_2\sin A_2}-\cot A_2$$

   再由(2-9)式， $\cot\alpha=\cot A_3+\dfrac{a_1}{a_2\sin A_2}$ ，可得

$$\cot\angle A_2A_1A_3=\cot\alpha-\cot A_3-\cot A_2\qquad(2\text{-}10)$$

   同理，在 $\Delta A_2A_3A_4$ 中，由餘弦定律，

$$\cos\angle A_2A_4A_3=\frac{a_3{}^2+\overline{A_2A_4}^2-a_2{}^2}{2a_3\cdot\overline{A_2A_4}}=\frac{a_3{}^2+\left(a_2{}^2+a_3{}^2-2a_2a_3\cos A_3\right)-a_2{}^2}{2a_3\cdot\overline{A_2A_4}}=\frac{2a_3{}^2-2a_2a_3\cos A_3}{2a_3\cdot\overline{A_2A_4}}=\frac{a_3-a_2\cos A_3}{\overline{A_2A_4}}$$

又由正弦定律，$\dfrac{\overline{A_2A_4}}{\sin A_3}=\dfrac{a_2}{\sin\angle A_2A_4A_3}\Rightarrow\overline{A_2A_4}=\dfrac{a_2\sin A_3}{\sin\angle A_2A_4A_3}$，代入上式得

$$\cos\angle A_2A_4A_3=\frac{a_3-a_2\sin A_3}{\overline{A_2A_4}}=\frac{\left(a_3-a_2\sin A_3\right)\sin\angle A_2A_4A_3}{a_2\sin A_3}\Rightarrow\cot\angle A_2A_4A_3=\frac{a_3}{a_2\sin A_3}-\cot A_3$$

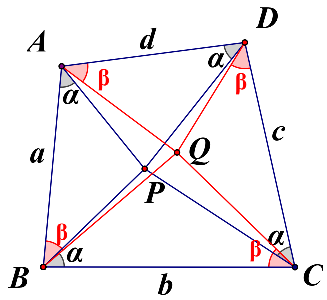
再由(2-8)式，$\cot\beta=\cot A_2+\dfrac{a_3}{a_2\sin A_3}$，可得

$$\cot\angle A_2A_4A_3=\cot\beta-\cot A_2-\cot A_3 \tag{2-11}$$

因為$\alpha=\beta$，因此由(2-10)式與(2-11)式得$\angle A_2A_1A_3=\angle A_2A_4A_3$，這說明了$A_1,A_2,A_3,A_4$四點共圓，同樣的方法也能類推至$A_1,A_2,A_3,A_n$四點共圓，由於通過$A_1,A_2,A_3$三點的圓是唯一的，表示$A_1,A_2,A_3,A_4,\ A_n$都落在$\triangle A_1A_2A_3$的外接圓上，因此$A_1,A_2,A_3,A_4,A_n$等五點共圓，而當然這就證明了$A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$等$n$點共圓。 ■

【定理 2-4】特例：調和四邊形

如圖 2-4，若給定同時具有正、負布洛卡點的布洛卡四邊形，則： 此四邊形的四個頂點共圓且對邊乘積相等，即為調和四邊形。



▲圖 2-4

[證明]

設四邊形$ABCD$的四個邊$\overline{AB}=a$，$\overline{BC}=b$，$\overline{CD}=c$，$\overline{DA}=d$，正布洛卡角為α，負布洛卡角β，四邊形$ABCD$的面積為S，由定理 2-2，$\cot\alpha=\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4S}$，同理

$\cot\beta=\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4S}$，故$\alpha=\beta$。

再由定理 2-1，$\cot\beta=\cot A+\dfrac{b}{a\sin B}=\cot B+\dfrac{c}{b\sin C}=\cot C+\dfrac{d}{c\sin D}=\cot D+\dfrac{a}{d\sin A}$，

$$\cot\alpha=\cot A+\frac{c}{d\sin D}=\cot B+\frac{d}{a\sin A}=\cot C+\frac{a}{b\sin B}=\cot D+\frac{b}{c\sin C}$$

兩式相減得

$$\frac{b}{a\sin B}-\frac{c}{d\sin D}=\frac{c}{b\sin C}-\frac{d}{a\sin A}=\frac{d}{c\sin D}-\frac{a}{b\sin B}=\frac{a}{d\sin A}-\frac{b}{c\sin C}=0$$

整理後可得

$$\begin{cases} bd\sin D = ac\sin B \\ ac\sin D = bd\sin B \end{cases} \text{且} \begin{cases} ac\sin A = bd\sin C \\ bd\sin A = ac\sin C \end{cases}$$

再整理後可得

$$bd = ac \text{，} \sin A = \sin C \text{，} \sin B = \sin D$$

因此證得對邊乘積相等。

另外，由定理 2-3 可知其四個頂點共圓，即符合調和四邊形的定義。 ■

【定理 2-5】特例：正方形

若給定同時具有正、負布洛卡點的布洛卡四邊形，則： 其布洛卡角 $\alpha \le \frac{\pi}{4}$，並且當 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 時，此四邊形為正方形。

[證明]

由於四邊形 $ABCD$ 的面積

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}bc\sin C + \frac{1}{2}cd\sin D + \frac{1}{2}ad\sin A\right) \le \frac{1}{4}(ab+bc+cd+da)$$

因為

$$a^2+b^2+c^2+d^2-(ab+bc+cd+da) = \frac{1}{2}\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2\right) \ge 0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2 \ge ab+bc+cd+da$$

由定理 2-2，

$$\cot\alpha = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4S} \ge \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{ab+bc+cd+da} \ge 1 \Rightarrow \alpha \le \frac{\pi}{4}$$

當 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 時，$a=b=c=d$ 且 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = \frac{\pi}{4}$，這表示四邊形 $ABCD$ 是正方形。■

（二） 布洛卡多邊形的一般化推廣

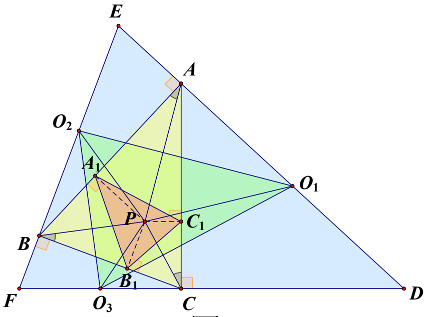
文獻給出了三種布洛卡三角形的變化：垂線、圓心及投影布洛卡三角形，由於這三種變化皆相似且共布洛卡點，所以我們可將其一般化推廣，即解釋為一種旋轉與伸縮的變換，並且得到以下定理。

雖然任意布洛卡 n 邊形亦有它的垂線、圓心及投影布洛卡 n 邊形，但因為這三種變換皆是由旋轉與伸縮而得，情況與三角形完全相同，所以為免複雜化，以下只針對布洛卡三角形作討論。

如圖 2-5，給定任意 $\triangle ABC$，若 P 為其正布洛卡點，$\triangle O_1O_2O_3$、$\triangle DEF$、$\triangle A_1B_1C_1$ 分別是 $\triangle ABC$ 的正圓心布洛卡三角形、正垂線布洛卡三角形、正投影布洛卡三角形，則：

1. $\triangle O_1O_2O_3$、$\triangle ABC$ 可分別視為將 $\triangle DEF$ 以 P 點為中心逆時針方向適當角度旋轉，再縮放至各頂點分別位在 $\triangle DEF$ 的邊(的延長線)上而得。

2. $\triangle A_1B_1C_1$ 可視為將 $\triangle ABC$ 以 P 點為中心逆時針方向適當角度旋轉，再縮放至各頂點分別位在 $\triangle ABC$ 的邊(的延長線)上而得。



▲圖 2-5

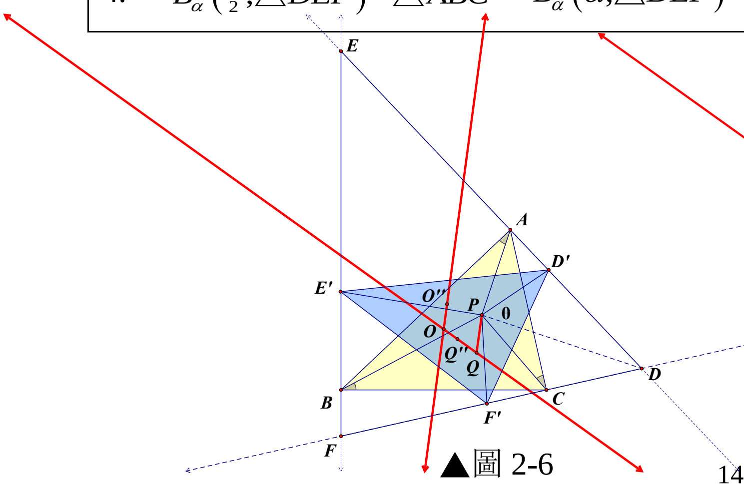
【定義】旋轉與伸縮變換

給定 P、Q 兩點及布洛卡角 α ，

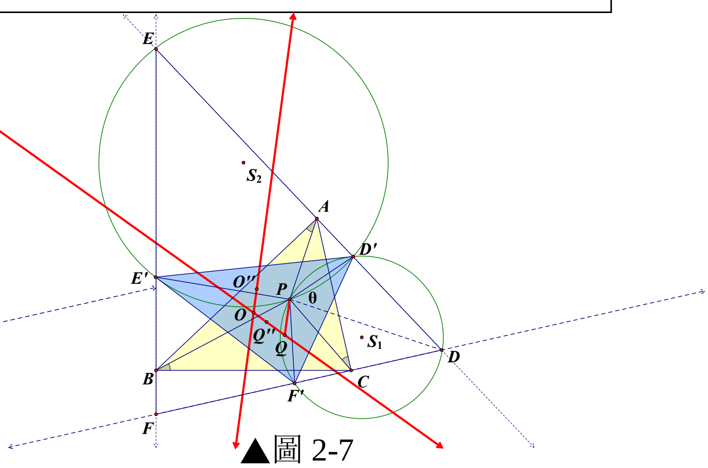
1. 若平面上一點 M 以 P 點為中心旋轉有向角 θ 並縮放 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)}$ ，得到點 M'，則記做 $B_\alpha^+(\theta,M)=M'$ 。
2. 若平面上一點 M 以 Q 點為中心旋轉有向角 $-\theta$ 並縮放 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)}$ ，得到點 M''，則記做 $B_\alpha^-(\theta,M)=M''$ 。

【定理 2-6】 如圖 2-6、圖 2-10，給定 $\triangle ABC$ 及其正、負布洛卡點 P、Q，布洛卡角 α ，外心 O，若 $\triangle DEF$ 、$\triangle O_1O_2O_3$ 、$\triangle A_1B_1C_1$ 分別為 $\triangle ABC$ 的正垂線布洛卡三角形、正圓心布洛卡三角形、正投影布洛卡三角形，且 $B_\alpha^+(\theta,\triangle DEF)=\triangle D'E'F'$ 、$B_\alpha^+(\theta,\triangle ABC)=\triangle A'B'C'$ ， $\triangle A'B'C'$ 的負布洛卡點與外心分別為 Q' 、O' ，$\triangle DEF$ 的負布洛卡點與外心分別為 Q'' 、O'' ，則：

1. $\triangle D'E'F'\sim\triangle ABC$ ，且 $\triangle D'E'F'$ 與 $\triangle ABC$ 有相同的正布洛卡點與布洛卡角(如圖 2-6)。
2. $\left\{B_\alpha^+(\theta,Q'')\middle|\theta\in R\right\}$ 和 $\left\{B_\alpha^+(\theta,O'')\middle|\theta\in R\right\}$ 為相交於 O 點的兩直線，較小的夾角為 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ ，且 $\left\{B_\alpha^+(\theta,O'')\middle|\theta\in R\right\}//\overline{PQ}$ (如圖 2-6)。
3. $\left\{B_\alpha^+(\theta,Q)\middle|\theta\in R\right\}$ 和 $\left\{B_\alpha^+(\theta,O)\middle|\theta\in R\right\}$ 皆為直線(如圖 2-10)。
4. $B_\alpha^+(\frac{\pi}{2},\triangle DEF)=\triangle ABC$ 、$B_\alpha^+(\alpha,\triangle DEF)=\triangle O_1O_2O_3$ 、$B_\alpha^+(\frac{\pi}{2}-\alpha,\triangle ABC)=\triangle A_1B_1C_1$ 。



▲圖 2-6



▲圖 2-7

[證明]

1. 我們從$\triangle D'E'F'$的作圖說明$\triangle D'E'F'$與$\triangle ABC$相似且共用布洛卡點。

如圖 2-7，分別以$\overline{AD}$、$\overline{CF}$、$\overline{BE}$為直徑作圓，依前述三圓交於$\triangle ABC$的布洛卡點P，且布洛卡角$\alpha=\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$。在$\overleftrightarrow{DE}$上取一點$D'$，作$\angle PD'E'=\alpha$，其中$E'$在$\overleftrightarrow{EF}$上，再作圓$S_1$通過$D'$、$P$兩點，並使圓$S_1$和$\overline{D'E'}$相切於$D'$，則圓$S_1$與$\overleftrightarrow{DF}$的交點即為$F'$。

首先證明$\triangle PAC\sim\triangle PD'F'$：由定理 1-5 可知，$\angle D'DP=\alpha$，另外，圓$S_1$中，由弦切角定理知$\angle PD'E'=\angle D'F'P=\alpha$，由$\angle D'DP=\angle D'F'P$可知$P$點在圓$S_1$上；又由$\angle PAC=\angle PDC=\angle PDF'=\angle PD'F'$可推得

$$\angle BAC=\angle BAP+\angle PAC=\alpha+\angle PD'F'=\angle E'D'C,$$

以及

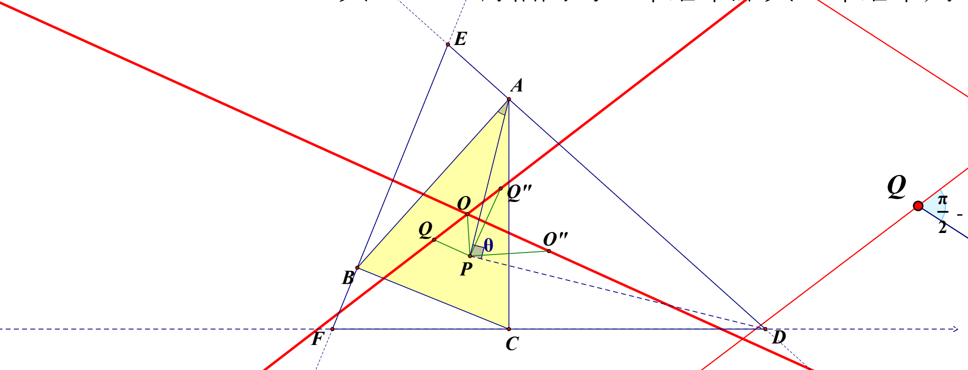
$$\angle APC=\pi-\angle BAC=\pi-\angle E'D'F'=\angle D'PF',$$

因此$\triangle PAC\sim\triangle PD'F'$，於是可視為將$\triangle PAC$繞著$P$點旋轉$\theta$角，再以$P$點為中心縮放至$\triangle DEF$的兩邊，得到$\triangle PD'F'$。

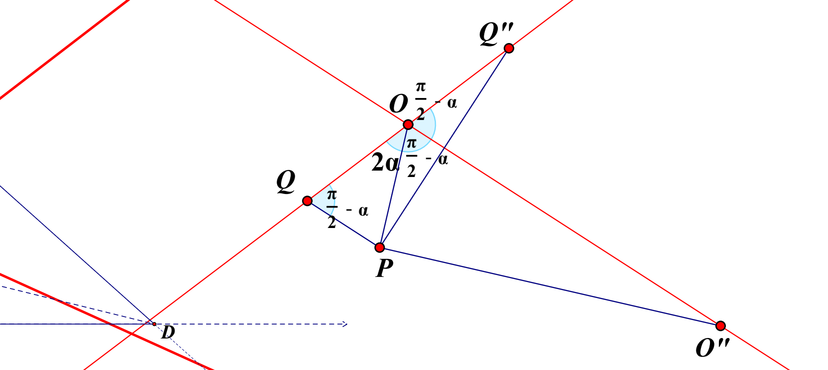
其次說明$\triangle PAB\sim\triangle PD'E'$：

作$\triangle PD'E'$的外接圓S_2，由定理 1-5 可知$\angle E'EP=\alpha=\angle BAP$，故$\angle E'EP=\angle E'AP=\alpha$，即$E$點在圓$S_2$上；又由$\angle PE'D'=\angle PED'=\angle PBA$可推得$\triangle PAB\sim\triangle PD'E'$。

這說明了$\triangle PAC$和$\triangle PBA$在相同角的旋轉與相等比例的縮放後，得到$\triangle PD'F'$和$\triangle PE'D'$，當然$\triangle PBC$也跟著變換為$\triangle PE'F'$，這說明了$\triangle D'E'F'\sim\triangle ABC$，且$\triangle D'E'F'$與$\triangle ABC$有相同的正布洛卡點與正布洛卡角。



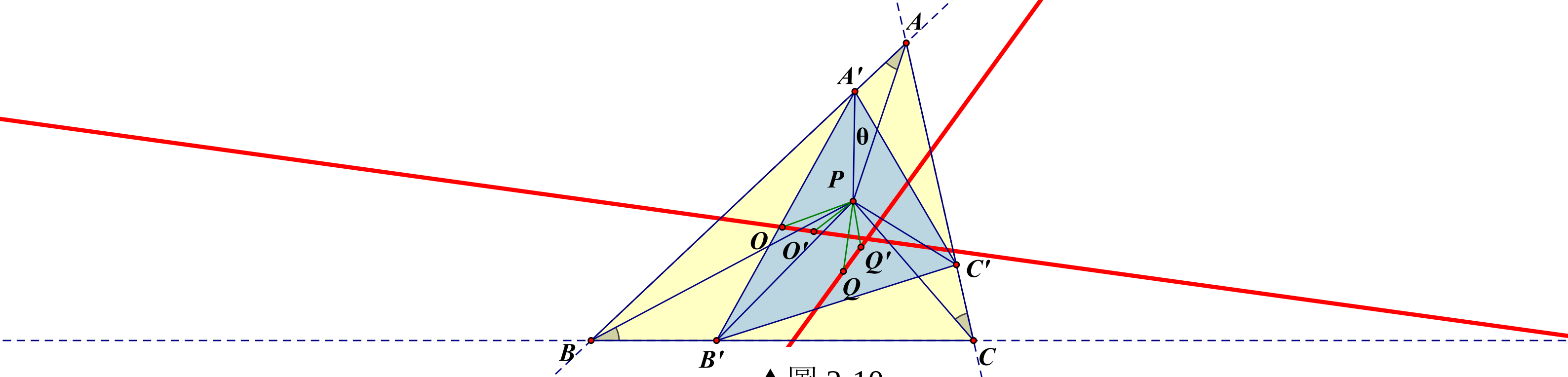
▲圖 2-8



▲圖 2-9

2. 如圖 2-8，考慮$\triangle PAD$和$\triangle POO''$，由於圖形旋轉時，相對應的點、線也跟著旋轉，$\overline{PD}$旋轉θ角再縮放後，變換為$\overline{PA}$，當然$\overline{PO''}$也旋轉θ角再縮放相同比例，變換為$\overline{PO}$，換言之，$\triangle POO''\sim\triangle PAD$，由$\angle POO''=\angle PAD'=\frac{\pi}{2}-\alpha$且$O$、$P$為定點可知，當$B_\alpha^+(\theta,D)$沿著$\overleftrightarrow{DE}$而動時，$B_\alpha^+(\theta,O'')$點也沿著和$\overline{OP}$保持著固定角度$\frac{\pi}{2}-\alpha$的直線方向移動，這說明了$B_\alpha^+(\theta,O'')$點的軌跡為一直線。同理，由$\triangle PQQ''\sim\triangle PAD$可知，$B_\alpha^+(\theta,Q'')$點也沿著和$\overline{QP}$保持著固定角度$\frac{\pi}{2}-\alpha$的直線方向移動，故知$B_\alpha^+(\theta,Q'')$點的軌跡亦為一直線。

由定理 3-1 知，$B_\alpha^+(\theta,Q'')$點的軌跡經過 O 點，故 O 點為這兩條軌跡線的交點，另由定理 3-2 可知，$\angle PQO=\frac{\pi}{2}-\alpha$，因此這兩條軌跡線與 P、Q的邊角關係藉著觀察 O、P、Q、Q''、O'' 這些點的相對位置即可看出，如圖 2-9。



▲圖 2-10

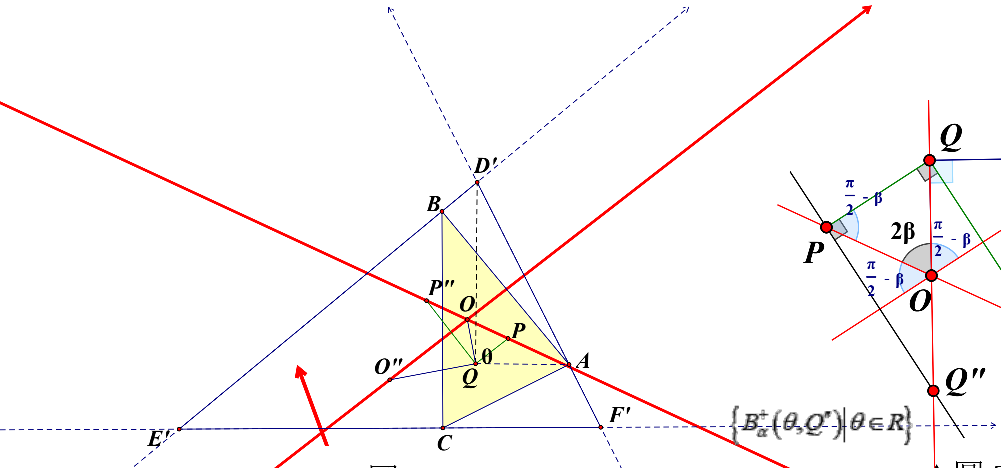
3. 如圖 2-10，因為 $\angle APA'=\angle OPO'$ 且 $\overline{PA}:\overline{PO}=\overline{PA'}:\overline{PO'}\Rightarrow\triangle APA'\sim\triangle OPO'$，且 O、P 為定點，故當 A' 沿著 $\overline{AB}$ 而動時，O'點也沿著與$\overline{OP}$ 保持著固定角度α 的直線方向移動，這說明了O'點軌跡為一直線，同理Q'的軌跡亦為一直線。
4. 參考圖 1-9，$\angle APO_1=\alpha$，亦即$\triangle O_1O_2O_3$的旋轉量為α (順時針為負)；
   由圖 1-8 很明顯看出，$\angle APD=\frac{\pi}{2}$，亦即$\triangle ABC$ 的旋轉量為 $\frac{\pi}{2}$；
   參考圖 1-5，很明顯看出，$\angle APA_1=\frac{\pi}{2}-\alpha$，亦即$\triangle A_1B_1C_1$的旋轉量為$\frac{\pi}{2}-\alpha$。 ■

對照定理 2-6，相類似的情形也發生在負布洛卡三角形，而有以下的推論：

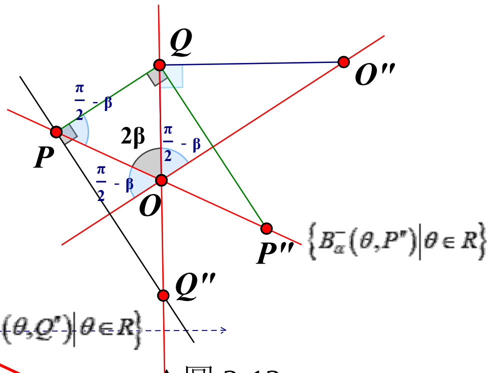
【推論 6】如圖 2-11、圖 2-13，給定$\triangle ABC$ 及其正、負布洛卡點 P、Q，布洛卡角α，外心 O，若$\triangle D'E'F'$、$\triangle O_1'O_2'O_3'$、$\triangle A_1'B_1'C_1'$分別為$\triangle ABC$ 的負垂線布洛卡三角形、負圓心布洛卡三角形、負投影布洛卡三角形，且 $B_\alpha^-(\theta,\triangle D'E'F')=\triangle D''E''F''$、$B_\alpha^-(\theta,\triangle ABC)=\triangle A'B'C'$，$\triangle A'B'C'$的正布洛卡點與外心分別為$P'$、$O'$，$\triangle D'E'F'$的正布洛卡點與外心分別為 P''、O''，則：

1. $\triangle D''E''F''\sim\triangle ABC$，且$\triangle D''E''F''$與$\triangle ABC$有相同的負布洛卡點與布洛卡角；
2. $\{B_\alpha^-(\theta,P'')|\theta\in R\}$和$\{B_\alpha^-(\theta,O'')|\theta\in R\}$為相交於 O 點的兩直線，
   較小的夾角為$\frac{\pi}{2}-\alpha$ (如圖 2-11)；
3. $\{B_\alpha^-(\theta,P)|\theta\in R\}$和$\{B_\alpha^-(\theta,O)|\theta\in R\}$皆為直線(如圖 2-13)；
4. $B_\alpha^-(\frac{\pi}{2},\triangle D'E'F')=\triangle ABC$、$B_\alpha^-(\alpha,\triangle D'E'F')=\triangle O_1'O_2'O_3'$、$B_\alpha^-(\frac{\pi}{2}-\alpha,\triangle A'B'C')=\triangle A_1'B_1'C_1'$。

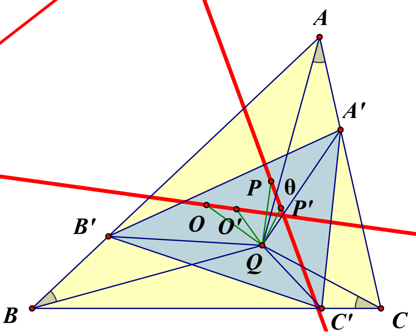
證明與定理 2-6 幾乎相同，故略去。



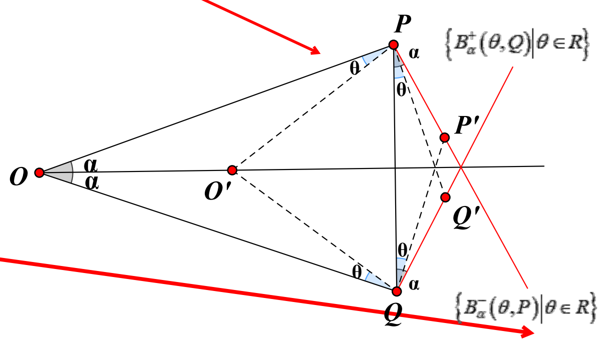
▲圖 2-11



▲圖 2-12



▲圖 2-13



▲圖 2-14

綜合定理 2-6 與推論 6，得到圖 2-12、圖 2-14 的示意圖。

（三） 旋轉伸縮變換與等角螺線

將平面上的定點 M，經由一連串的 B_α^+ 變換，得到一連串的點列：

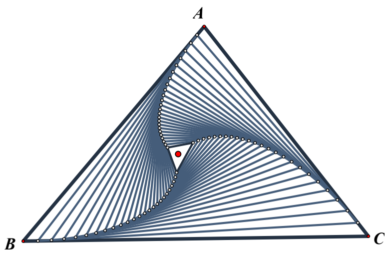
$$M, B_\alpha^+(\theta,M), B_\alpha^{+(2)}(\theta,M), B_\alpha^{+(3)}(\theta,M),\cdots$$

則這些點落在一等角螺線上，同理，若平面上的$\triangle ABC$ ，經由一連串的 B_α^+ 變換，得到一連串的三角形：

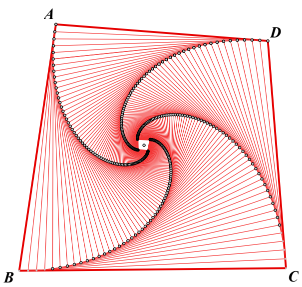
$$\triangle ABC, B_\alpha^+(\theta,\triangle ABC), B_\alpha^{+(2)}(\theta,\triangle ABC), B_\alpha^{+(3)}(\theta,\triangle ABC),\cdots$$

則這些三角形都是繞著共同的正布洛卡點旋轉，而相對應的頂點各自落在一等角螺線上，這三條等角螺線是全等的，見圖 2-15。

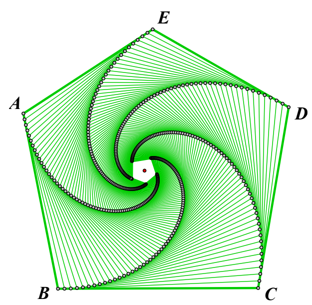
同理可類推至 B_β^- 變換與 n 邊形(如圖 2-16、圖 2-17)。



▲圖 2-15



▲圖 2-16



▲圖 2-17

二、 布洛卡多邊形的幾何定理及性質

（一） 圓心布洛卡多邊形

【定理 3-1】如圖 3-1，若$\triangle O_1O_2O_3$是$\triangle ABC$的正圓心布洛卡三角形，則：

$\triangle O_1O_2O_3$的負布洛卡點O是$\triangle ABC$的外心。

[證明]

1. 由$\triangle O_1O_2O_3 \sim \triangle ABC$ (定理 1-5)，可知$\angle O_1O_3O_2 = \angle ACB$。

   在$\triangle OCO_3$中，$\angle O_3AC = \dfrac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC$，又因為$\overline{OO_1} // \overline{O_3C}$，

   可知$\angle O_3CO = \angle COO_1$(內錯角相等)$= \dfrac{1}{2}\angle COA = \angle CBA$

   故$\triangle OCO_3 \sim \triangle ABC$，因此$\angle OO_3C = \angle ACB$。

2. 由$\angle OO_3C = \angle O_1O_3O_2 \Leftrightarrow \angle OO_3O_1 + \angle O_1O_3C = \angle OO_3O_1 + \angle OO_3O_2$ (內錯角相等)

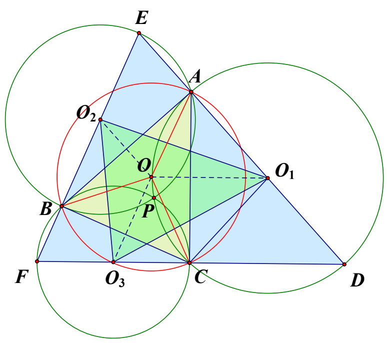
   同理可得，$\angle OO_2O_1 = \angle OO_3O_2$，故證得$O$為$\triangle O_1O_2O_3$的負布洛卡點。 ■

【推論 7】任意$\triangle ABC$，其負圓心布洛卡三角形的正布洛卡點為$\triangle ABC$的外心O。

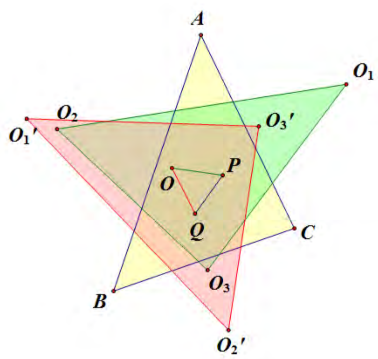
推論 7 的證明很容易由定理 3-1 推得，在此略去。

【推論 8】若給定具有正、負布洛卡點的布洛卡n邊形，則其外接圓圓心是負圓心布洛卡n邊形的正布洛卡點、正圓心布洛卡n邊形的負布洛卡點。

證明與定理 3-1 完全相同，在此略去。



▲圖 3-1



▲圖 3-2

【定理 3-2】如圖 3-2，設$\triangle ABC$的正、負布洛卡點分別為P、Q，布洛卡角為α，外心為O，則$\overline{OP} = \overline{OQ}$且$\angle POQ = 2\alpha$。

[證明]

分別作$\triangle ABC$的正、負圓心布洛卡三角形$\triangle O_1O_2O_3$、$\triangle O_1'O_2'O_3'$，由定理 3-1 可知，$\triangle O_1O_2O_3$的正、負布洛卡點分別為P、O，又由推論 7 可知，$\triangle O_1'O_2'O_3'$的正、負布洛卡點分別為O、Q，再由推論 5 知，$\triangle O_1O_2O_3 \cong \triangle O_1'O_2'O_3'$，故$\overline{OP} = \overline{OQ}$；另由定理 1-5，$\triangle ABC$和$\triangle O_1O_2O_3$的相似比為$2\sin\alpha$，故有，

$$2\sin\alpha=\frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}}=2\frac{\frac{1}{2}\overline{PQ}}{\overline{OP}}=2\sin\frac{\angle POQ}{2}$$，由上式即可推得 $\angle POQ=2\alpha$ 。 ∎

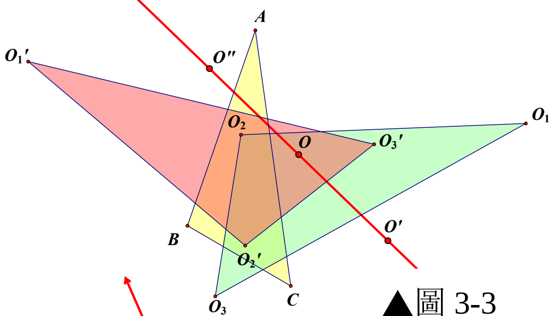
【定理 3-3】 如圖 3-3，若給定 $\triangle ABC$ ，P 、Q 、O 分別是 $\triangle ABC$ 的正、負布洛卡點與外心，$\triangle O_1O_2O_3$ 、$\triangle O_1'O_2'O_3'$ 分別是 $\triangle ABC$ 的正、負圓心布洛卡三角形，其外心分別為 O' 、O'' ，則：

O、O'、O'' 共線且 O 是 $\overline{O'O''}$ 中點；

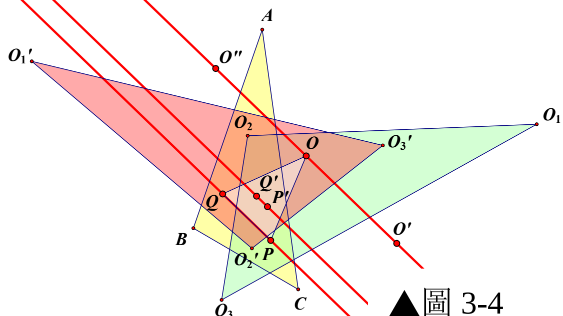
若 $\triangle OPQ$ 的正、負布洛卡點分別是 P'、Q' ，則：

$\overleftrightarrow{O'O''}\,//\,\overleftrightarrow{PQ}\,//\,\overleftrightarrow{P'Q'}$ (如圖 3-4)；

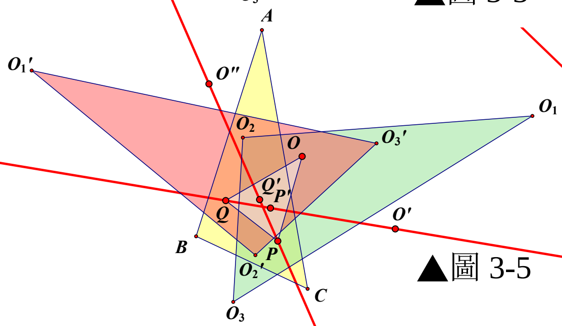
P、Q'、O'' 共線、Q、P'、O' 共線(如圖 3-5) 。



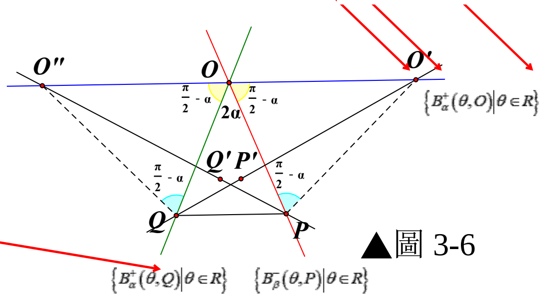
▲圖 3-3



▲圖 3-4



▲圖 3-5



▲圖 3-6

[證明]

1. O、O'、O'' 三點共線且 O 是 $\overline{O'O''}$ 中點的證明可由定理 2-6 簡單推出，故略去。

2. 參考圖 2-9，因為 $\overline{OP}=\overline{OQ}$ ，故 $\angle OPQ=\frac{\pi}{2}-\alpha=\angle POO'$ ，由內錯角相等推得 $\overleftrightarrow{O'O''}\,//\,\overleftrightarrow{PQ}$ 。再由於 $\triangle OPQ$ 為等腰三角形，由其對稱性知 $\overleftrightarrow{P'Q'}$ 必平行底邊，因此得證 $\overleftrightarrow{O'O''}\,//\,\overleftrightarrow{PQ}\,//\,\overleftrightarrow{P'Q'}$ 。

3. 如圖 3-5，設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle OPQ$ 的布洛卡角分別為 α 和 ω ，我們將 O、O'、O''、P、Q 、P'、Q' 的相關邊角關係標示如圖 3-6，由於 P' 為 $\triangle OPQ$ 的正布洛卡點，只需證明 $\angle PQO'=\omega$ 即證明 Q、P'、O' 三點共線。由 $\triangle OPQ\sim\triangle O'PO\Rightarrow\frac{\overline{PQ}}{\overline{PO}}=\frac{\overline{PO}}{\overline{PO'}}=2\sin\alpha$ ，不失其一般性地，設 $\overline{PO'}=1$ ，則 $\overline{PO}=2\sin\alpha$ ，$\overline{PQ}=4\sin^2\alpha$ ，在 $\triangle PQO'$ 中，由餘弦定律：

$$\overline{QO'}^2=\left(4\sin^2\alpha\right)^2+1-2\cdot4\sin^2\alpha\cos\left(\pi-2\alpha\right)=1+8\sin^2\alpha$$

另外，由正弦定律：

$$\frac{\overline{PO'}}{\sin\angle PQO'}=\frac{\overline{QO'}}{\sin\angle QPO'}\Rightarrow\frac{1}{\sin\angle PQO'}=\frac{\sqrt{1+8\sin^2\alpha}}{\sin\left(\pi-2\alpha\right)}\Rightarrow\frac{1}{\sin^2\angle PQO'}=\frac{1+8\sin^2\alpha}{\sin2\alpha}$$

又由定理 1-1，在$\triangle OPQ$中，

$$\frac{1}{\sin^2\omega}=\frac{1}{\sin^2 O}+\frac{1}{\sin^2 P}+\frac{1}{\sin^2 Q}=\frac{1}{\sin^2 2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}+\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$=\frac{1}{\sin^2 2\alpha}+\frac{2}{\cos^2\alpha}=\frac{2\sin^2 2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2 2\alpha}=\frac{8\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2 2\alpha}=\frac{8\sin^2\alpha+1}{\sin^2 2\alpha}$$

因此$\angle PQO'=\omega$，從而Q、P'、O'三點共線。同理可證得P、Q'、O''三點共線。 ■

【推論 9】 若給定存在正、負布洛卡點P、Q的布洛卡n邊形$A_1A_2\cdots A_n$，O是其外接圓圓心，n邊形$O_1O_2\cdots O_n$、n邊形$O_1'O_2'\cdots O_n'$分別是n邊形$A_1A_2\cdots A_n$的正、負圓心布洛卡n邊形，其外接圓圓心分別為O'、O''，則：

O、O'、O''三點共線且O是$\overline{O'O''}$中點；

若$\triangle OPQ$的正、負布洛卡點是P'、Q'，則：

$\overleftrightarrow{O'O''}//\overleftrightarrow{PQ}//\overleftrightarrow{P'Q'}$；

P、Q'、O''共線、Q、P'、O'共線。

推論 9 的證明完全相同於定理 3-3，故在此略去。

（二） 垂線布洛卡多邊形

【定理 3-4】 如圖 3-7~圖 3-10，若給定$\triangle ABC$，P、Q、O分別是其正、負布洛卡點與外心，$\triangle DEF$、$\triangle D'E'F'$分別是$\triangle ABC$的正、負垂線布洛卡三角形，其外心分別是O'、O''，且$\triangle D'E'F'$的正布洛卡點為P'、$\triangle DEF$的負布洛卡點為Q'，則：

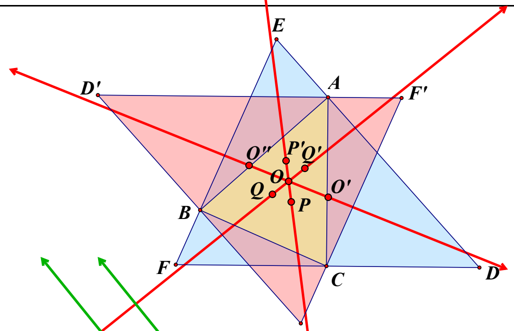
O、O'、O''共線、O、P、P'共線、O、Q、Q'共線(如圖 2-7)；

$\overline{O'O''}$、$\overline{PP'}$、$\overline{QQ'}$共點於點O，且互相平分(如圖 3-7)；

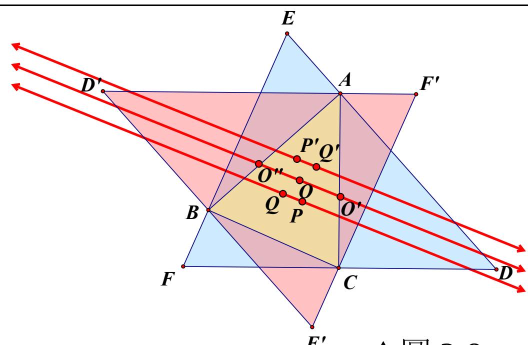
$\overleftrightarrow{O'O''}//\overleftrightarrow{PQ}//\overleftrightarrow{P'Q'}$(如圖 3-8)；

$\overleftrightarrow{PO'}//\overleftrightarrow{P'O''}$且$\overleftrightarrow{QO'}//\overleftrightarrow{Q'O''}$(如圖 3-9)；

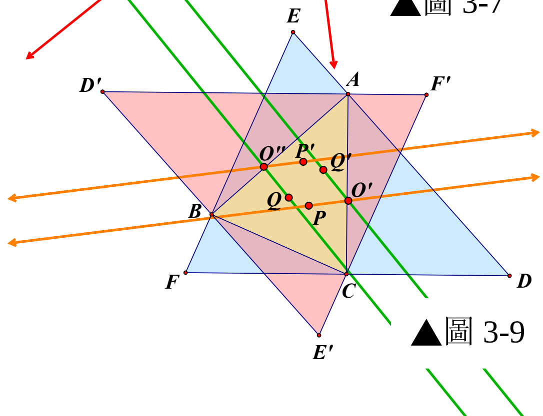
P、Q、P'、Q'共圓、P、Q'、O、O'共圓、P'、Q、O、O''共圓(如圖 3-10)。



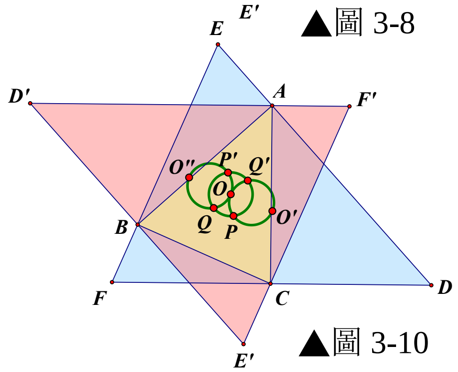
▲圖 3-7



▲圖 3-8



▲圖 3-9



▲圖 3-10

[證明]

1. O、O'、O'' 共線且 O 是 $\overline{O'O''}$ 的中點由定理 2-6 與推論 6 可知，故省略，只證明 $\overline{PP'}$ 和 $\overline{QQ'}$ 互相平分且交於 O。

   因為 $\triangle DEF \cong \triangle D'E'F'$ 且 $\overline{PP'}$ 、$\overline{QQ'}$ 和 $\overline{O'O''}$ 三線交於 $\triangle ABC$ 的外心 O，因此可看成將 $\triangle DEF$ 連帶 P、Q' ，繞 O 點旋轉 180 度，得到 $\triangle D'E'F'$ ，故四邊形 $PQ'P'Q$ 的對邊 $\overline{PQ'}$、$\overline{P'Q}$ 平行且等長，是為平行四邊形，其對角線互相平分。

2. $\overleftrightarrow{O'O''} // \overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{P'Q'}$ 的證明從圖 2-12 可以輕易看出，故略去。

3. 由 1.得 $\overline{PP'}$ 、$\overline{QQ'}$ 和 $\overline{O'O''}$ 三線互相平分，且交於 $\triangle ABC$ 的外心 O，因此四邊形 $PO''P'O'$ 的兩條對角線互相平分，是為平行四邊形，從而 $\overleftrightarrow{PO'} // \overleftrightarrow{P'O''}$ ，同理可推至 $\overleftrightarrow{QO''} // \overleftrightarrow{Q'O'}$ 。

4. 因 O 至 P、Q、P'、Q' 四點等距，故 P、Q、P'、Q' 四點共圓。

   由定理 3-2 及 $\triangle ABC \sim \triangle DEF \cong \triangle D'E'F'$ 可知，$\angle POQ = \angle PO'Q' = \angle P'O''Q$ ，又因為 $\overline{PP'}$ 和 $\overline{QQ'}$ 互相平分，交點為 $\triangle ABC$ 的外心 O，因此 $\angle POQ$ 和 $\angle POQ'$ 互補 $\Rightarrow \angle PO'Q'$ 和 $\angle POQ'$ 互補且 $\angle P'O''Q$ 和 $\angle POQ'$ 互補 $\Rightarrow P$、Q'、O、O' 共圓、 P'、Q、O、O'' 共圓。 ■

【推論 10】若給定存在正、負布洛卡點 P、Q 的布洛卡 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ ，O 是其外接圓圓心，n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 、n 邊形 $B_1'B_2'\cdots B_n'$ 分別是 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的正、負垂線布洛卡 n 邊形，其外接圓圓心分別是 O'、O'' ，且 P' 是 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$ 的正布洛卡點、Q' 是 n 邊形 $B_1'B_2'\cdots B_n'$ 的負布洛卡點，則：

O、O'、O'' 共線、O、P、P' 共線、O、Q、Q' 共線；

$\overline{O'O''}$ 、$\overline{PP'}$ 、$\overline{QQ'}$ 且共點於點 O，且互相平分；

$\overleftrightarrow{O'O''} // \overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{P'Q'}$ ；

$\overleftrightarrow{PO'} // \overleftrightarrow{P'O''}$ 且 $\overleftrightarrow{QO''} // \overleftrightarrow{Q'O'}$ ；

P、Q、P'、Q' 共圓、P、Q'、O、O' 共圓、P'、Q、O、O'' 共圓。

推論 10 的證明完全相同於定理 3-4，故在此略去。

【定理 3-5】三線共點定理

如圖 3-11，若△ABC 的正、負垂線布洛卡三角形分別為△DEF、△ $D'E'F'$ ，且點 O 為△ABC 的外心，則：

$\overline{DD'}$ 、$\overline{EE'}$ 、$\overline{FF'}$ 三線共點於點 O 且互相平分。

[證明]

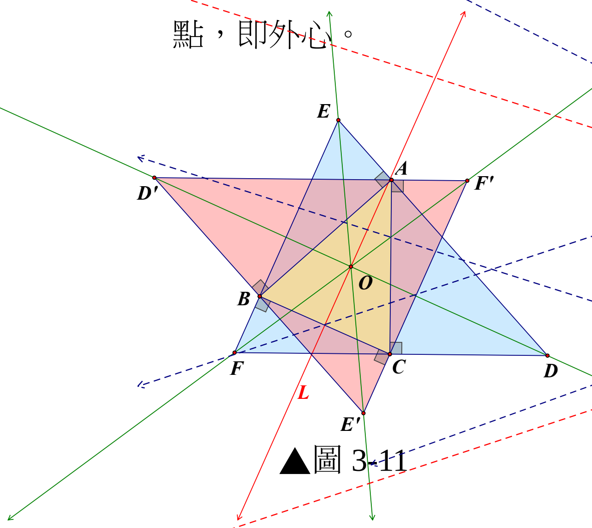
1. 先證明 $\overline{DD'}$ 、$\overline{EE'}$ 、$\overline{FF'}$ 三線共點且互相平分：

   由推論 4 知 $\triangle DEF \cong \triangle D'E'F' \Rightarrow \overline{DE} = \overline{D'E'}$ ，又因為 $\overline{DE} \perp \overline{AB}$ 且 $\overline{D'E'} \perp \overline{AB} \Rightarrow \overline{DE} // \overline{D'E'}$ ，故四邊形 $DED'E'$ 為平行四邊形，且其對角線 $\overline{DD'}$ 、$\overline{EE'}$ 互相平分。

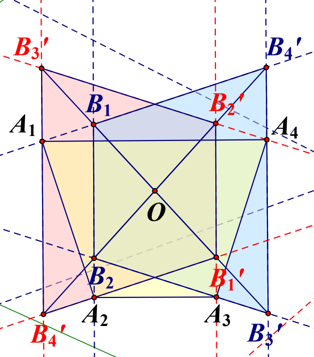
同理可推得 $\overline{DD'}$、$\overline{EE'}$、$\overline{FF'}$ 三線共點且互相平分。

2. 其次說明 O 點即為△ABC 的外心：

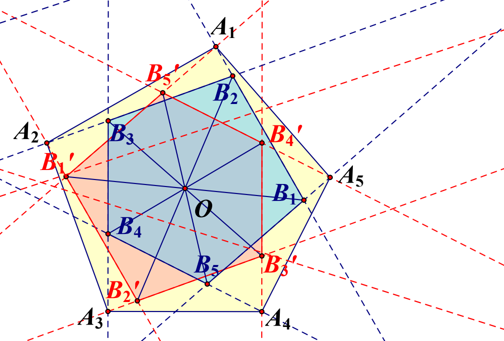
在△FCF' 中，過 $\overline{FF'}$ 的中點 O 作直線 $L//\overline{CF'}$，則直線 L 與 $\overline{FC}$ 的交點 W 為 $\overline{FC}$ 的中點；在直角△BCF 中，直線 L 必垂直平分 $\overline{BC}$。同理，過 O 點作 $\overline{AD'}$ 的平行線必垂直平分 $\overline{AC}$，過 O 點作 $\overline{BE'}$ 的平行線必垂直平分 $\overline{AB}$，這說明了 O 點是△ABC 三邊的中垂線交點，即外心。 ∎



▲圖 3-11



▲圖 3-12



▲圖 3-13

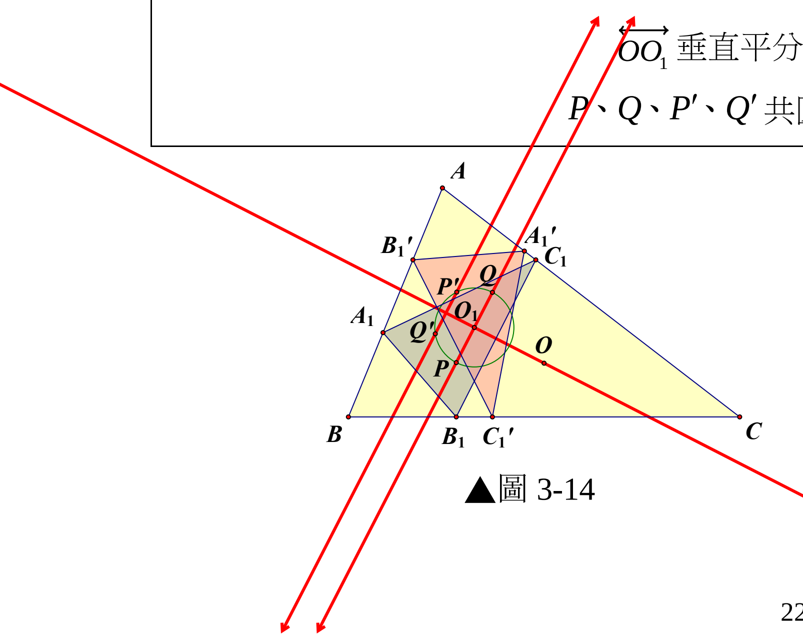
【推論 11】*n* 線共點定理

> 如圖 3-12、圖 3-13，若給定具有正、負布洛卡點 P、Q 的布洛卡 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，O 是其外接圓圓心，且 n 邊形 $B_1B_2\cdots B_n$、n 邊形 $B_1'B_2'\cdots B_n'$ 分別是 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的正、負垂線布洛卡 n 邊形，則：
>
> $$\overline{B_1B_1'},\overline{B_2B_2'},\cdots,\overline{B_nB_n'}$$ 等 n 線共點於點 O 且互相平分。

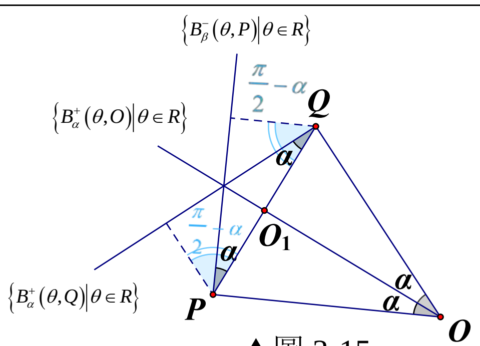
推論 11 的證明完全與定理 3-5 相同，在此略去。

（三） 投影布洛卡多邊形

> **【定理 3-6】** 如圖 3-14，若給定△ABC，O 是外心，其正、負布洛卡投影布洛卡三角形分別為△$A_1B_1C_1$、△$A_1'B_1'C_1'$，且△$A_1B_1C_1$ 的負布洛卡點是 Q'、△$A_1'B_1'C_1'$ 的正布洛卡點是 P'，O_1 為 $\overline{PQ}$ 中點，則：
>
> $$\overline{PQ}//\overline{P'Q'}；$$
>
> $$\overleftrightarrow{OO_1}$$ 垂直平分 $\overline{PQ}$、$\overline{P'Q'}$；
>
> P、Q、P'、Q' 共圓，圓心是 O_1。



▲圖 3-14



▲圖 3-15

[證明]

由定理 2-6，當 $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ 時，得到的三角形即為 $\triangle ABC$ 的正投影布洛卡三角形 $\triangle A_1B_1C_1$；由推論 6，當 $\theta=\alpha-\frac{\pi}{2}$ 時，得到的三角形即為 $\triangle ABC$ 的負投影布洛卡三角形 $\triangle A_1'B_1'C_1'$。我們將 O、O_1、P、Q、P'、Q' 的相關邊角關係標示如圖 3-15，其中 $\overline{OP}=\overline{OQ}$，相對的性質就不證自明。

■

【推論 12】若給定存在正、負布洛卡點 P、Q 的布洛卡 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，O 是其外接圓圓心，n 邊形 $C_1C_2\cdots C_n$、n 邊形 $C_1'C_2'\cdots C_n'$ 分別為 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的正、負投影布洛卡 n 邊形，且 n 邊形 $C_1C_2\cdots C_n$ 的負布洛卡點是 Q'、n 邊形 $C_1'C_2'\cdots C_n'$ 的正布洛卡點是 P'，則：

$$\overline{PQ}\,//\,\overline{P'Q'}；$$

$$\overleftrightarrow{OO_1} \text{ 垂直平分 } \overline{PQ}、\overline{P'Q'}；$$

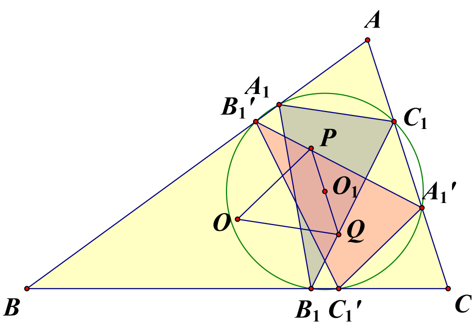
$$P、Q、P'、Q' \text{ 共圓，圓心是 } O_1。$$

推論 12 的證明完全相同於定理 3-6，在此略去。

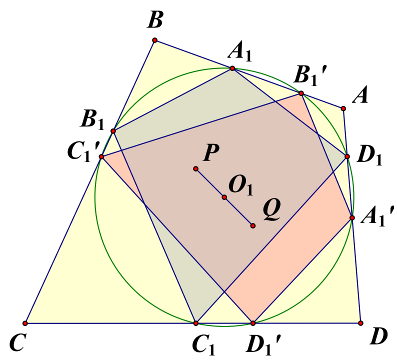
【定理 3-7】六點共圓定理

如圖 3-16，若給定 $\triangle ABC$，P、Q、O 分別為其正、負布洛卡點和外心，且 $\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_1'B_1'C_1'$ 分別是 $\triangle ABC$ 的正、負投影布洛卡三角形，則：

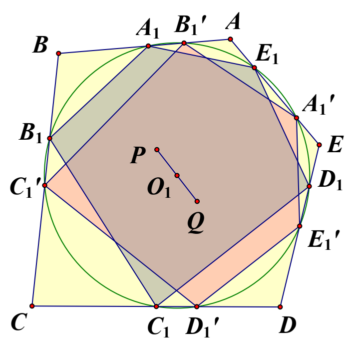
$$A_1、B_1、C_1、A_1'、B_1'、C_1' \text{ 六點共圓，圓心為 } \overline{PQ} \text{ 中點 } O_1。$$



▲圖 3-16



▲圖 3-17



▲圖 3-18

[證明]

參考圖 2-4 可知，當 $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ 時，正、負投影三角形共用同一外心，且外心位於 $\overline{PQ}$ 中點，即得證。

■

【推論 13】$2n$ 點共圓定理

如圖 3-17、圖 3-18，若給定存在正、負布洛卡點 P、Q 的布洛卡 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，且 n 邊形 $C_1C_2\cdots C_n$、n 邊形 $C_1'C_2'\cdots C_n'$ 分別為 n 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的正、負投影布洛卡 n 邊形，則：

$C_1,C_2,\cdots,C_n,C_1',C_2',\cdots,C_n'$ 等 $2n$ 點共圓，且圓心 O 為 $\overline{PQ}$ 中點

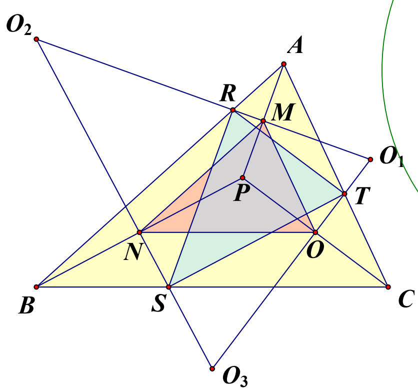
推論 13 的證明與定理 3-7 同，在此略去。

（四） 對應邊交點建構三角形

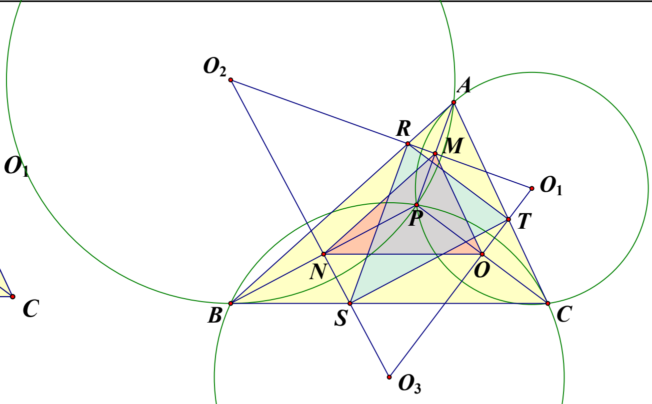
【定理 3-8】如圖 2-19，給定 $\triangle ABC$，P 為正布洛卡點，布洛卡角為 α，$\triangle O_1O_2O_3$ 是對應點 P 的圓心布洛卡三角形，$\overline{O_1O_2}$、$\overline{O_2O_3}$、$\overline{O_3O_1}$ 分別交 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 於 R、S、T、交 $\overline{AP}$、$\overline{BP}$、$\overline{CP}$ 於 M、N、O。則：

$\triangle RST \sim \triangle MNO$，相似比為 $\sec\alpha$；

$\triangle RST$ 的正布洛卡點為 P。



▲圖 3-19



▲圖 3-20

[證明]

1. 先證明 $\angle APR = \angle BPS = \angle CPT$，如圖 3-20，$\overline{BC}$ 與圓 O_2 相切於 B 點，故 $\angle BAP = \angle PBC$，又因為 $\angle BAP = \angle RAP = \angle RPA$ 且 $\angle PBC = \angle NBS = \angle BPS$，因此 $\angle APR = \angle BPS$，同理可證得 $\angle APR = \angle BPS = \angle CPT$，這表示將 $\triangle ABC$ 經由定理 2-6 的變換，可得 $\triangle RST$，故 $\triangle RST \sim \triangle ABC$，且 $\triangle RST$ 的正布洛卡點為 P。
2. 因 M、N、O 分別是 $\overline{AP}$、$\overline{BP}$、$\overline{CP}$ 中點的連線，故 $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$，$\overline{NO} = \frac{1}{2}\overline{BC}$，$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{CA}$，從而 $\triangle MNO \sim \triangle ABC$。

   因此 $\triangle RST \sim \triangle MNO$，相似比為 $\dfrac{\overline{PR}}{\overline{PM}} = \dfrac{\overline{AR}}{\overline{AM}} = \sec\alpha$。■

【推論 14】$\triangle RST$ 的垂線布洛卡三角形為 $\triangle O_1O_2O_3$，$\triangle O_1O_2O_3$ 的投影布洛卡三角形為 $\triangle MNO$，見圖 3-19。

證明略去。

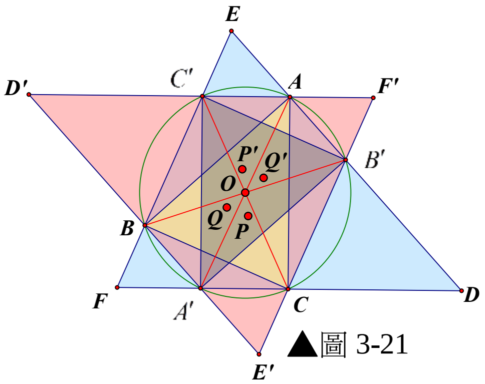
【定理 3-9】如圖 3-21，若給定 $\triangle ABC$，P、Q 是正、負布洛卡點，$\triangle DEF$、$\triangle D'E'F'$ 是 $\triangle ABC$ 的正、負垂線布洛卡三角形，P' 是 $\triangle D'E'F'$ 的正布洛卡點、Q' 是 $\triangle DEF$ 的負布

洛卡點，且 $\overline{FD}$、$\overline{DE}$、$\overline{EF}$ 分別交 $\overline{D'E'}$、$\overline{E'F'}$、$\overline{D'F'}$ 於 A'、B'、C'，則：

$\triangle A'B'C' \cong \triangle ABC$；

A,B,C,A',B',C' 六點共圓；

P'、Q' 分別是 $\triangle A'B'C'$ 的正、負布洛卡點。



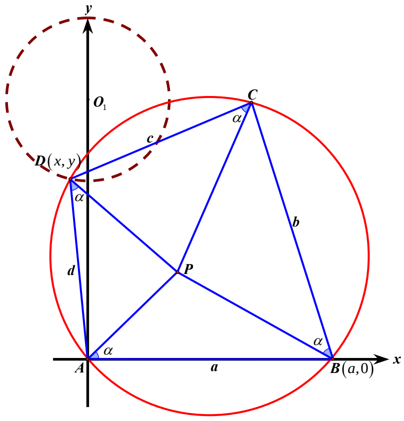
▲圖 3-21

定理 3-9 的證明可由定理 2-6 簡單推出，在此略去。

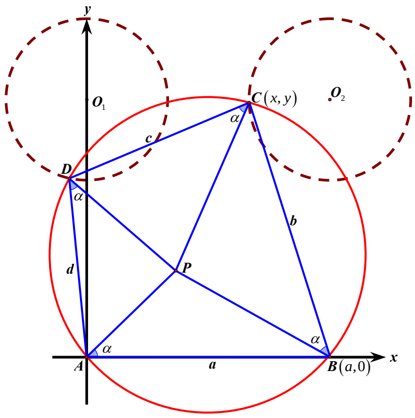
（五） 布洛卡四邊形的紐伯格圓

【**定理 3-10**】如圖 3-2、圖 3-3，若給定存在正、負布洛卡點的四邊形 $ABCD$ 的布洛卡角 α 及 A,B 兩點，且 $\overline{AB}=a$，則：

1. D 點的軌跡是一圓，稱為 O_1，其半徑為 $a\sqrt{\cot^2\alpha-1}$；
2. C 點的軌跡是一圓，稱為 O_2，其半徑為 $a\sqrt{\cot^2\alpha-1}$；
3. 四邊形 ABO_2O_1 為矩形，其中 $\overline{AB}=\overline{O_1O_2}=a$，$\overline{AO_1}=\overline{BO_2}=a\cot\alpha$。



▲圖 3-22



▲圖 3-23

[證明]

1. 先證明 D 點的軌跡是一圓，設 $\overline{BC}=b,\overline{CD}=c,\overline{DA}=d$，

由定理 2-1，$\cot\alpha=\cot A+\dfrac{b}{a\sin B}=\cot B+\dfrac{c}{b\sin C}=\cot C+\dfrac{d}{c\sin D}=\cot D+\dfrac{a}{d\sin A}$，及定理 2-4，$\angle A$、$\angle C$ 互補，$\angle B$、$\angle D$ 互補，$ac=bd$，可推得

$$\cot\alpha=\cot A+\frac{b}{a\sin B}=\cot B+\frac{c}{b\sin A}=-\cot A+\frac{a}{b\sin B}=-\cot B+\frac{b}{c\sin A} \qquad (3\text{-}1)$$

另由定理 2-2 知，$\cot\alpha=\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4S}$，

如圖 3-22，設 $A(0,0)$、$B(a,0)$、$D(x,y)$，以下證明 x、y 滿足圓方程式：

$\overline{AD}^2=d^2\Rightarrow x^2+y^2=d^2$

$\overline{BD}^2=(x-a)^2+y^2=b^2+c^2-2bc\cos C=b^2+c^2+2bc\cos A$

將上二式相加，得

$$x^2+(x-a)^2+2y^2=d^2+b^2+c^2+2bc\cos A=4S\cot\alpha-a^2+2bc\cos A$$

$$=4\left(\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}bc\sin C\right)\cot\alpha-a^2+2bc\cos A$$

$$=(2ay+2bc\sin A)\cot\alpha-a^2+2bc\cos A=\left(2ay+2bc\cdot\frac{y}{d}\right)\cot\alpha-a^2+2bc\cdot\frac{x}{d}$$

$$=\left(2ay+\frac{2b^2}{a}y\right)\cot\alpha-a^2+\frac{2b^2}{a}x=(2a\cot\alpha)y-a^2+\frac{2b^2}{a}(y\cot\alpha+x) \qquad (3-2)$$

另由 $2\cot A=\dfrac{a}{b\sin B}-\dfrac{b}{a\sin B}\Rightarrow 2\cot A\sin B=\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\Rightarrow \sin B=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\tan A$，

再由 $\cot\alpha=\cot A+\dfrac{b}{a\sin B}\Rightarrow\dfrac{b}{a\sin B}=\cot\alpha-\cot A$

$$\Rightarrow b=a\sin B(\cot\alpha-\cot A)=\frac{a}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\tan A(\cot\alpha-\cot A)$$

$$\Rightarrow b=\frac{a^2-b^2}{2b}(\tan A\cot\alpha-1)\Rightarrow 2b^2=(a^2-b^2)(\tan A\cot\alpha-1)$$

$$\Rightarrow b^2(\tan A\cot\alpha+1)=a^2(\tan A\cot\alpha-1)$$

$$\Rightarrow\frac{b^2}{a}=\frac{a(\tan A\cot\alpha-1)}{\tan A\cot\alpha+1}=\frac{a\left(\frac{y}{x}\cot\alpha-1\right)}{\frac{y}{x}\cot\alpha+1}=\frac{a(y\cot\alpha-x)}{y\cot\alpha+x} \qquad (3-3)$$

將(3-3)代入(3-2)中，得

$$x^2+(x-a)^2+2y^2=2ay\cot\alpha-a^2+2a(y\cot\alpha-x)$$

$$\Rightarrow 2x^2+2y^2-4ay\cot\alpha+2a^2=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-2ay\cot\alpha+a^2=0$$

$$\Rightarrow x^2+(y-a\cot\alpha)^2=a^2\cot^2\alpha-a^2$$

故證得 D 點的軌跡為圓，其圓心為 $O_1(0,a\cot\alpha)$，半徑為 $a\sqrt{\cot^2\alpha-1}$。

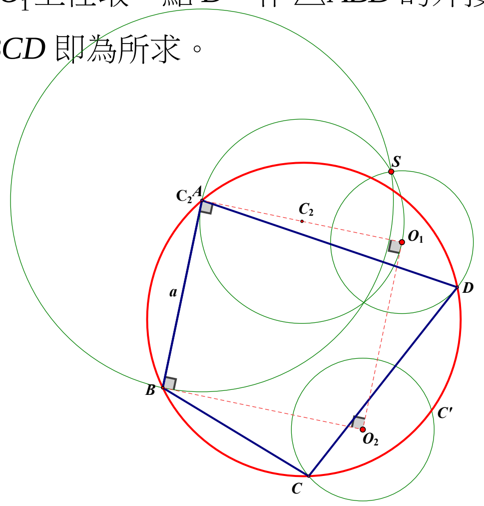
2. 相似作法可以證明 C 點的軌跡亦是一圓，且其圓心為 $O_2(a,a\cot\alpha)$，半徑為 $a\sqrt{\cot^2\alpha-1}$。
3. 由 O_1、O_2 的坐標可知四邊形 ABO_2O_1 為矩形，$\overline{AB}=\overline{O_1O_2}=a$，$\overline{AO_1}=\overline{BO_2}=a\cot\alpha$。 ■

（六） 布洛卡多邊形的作圖法

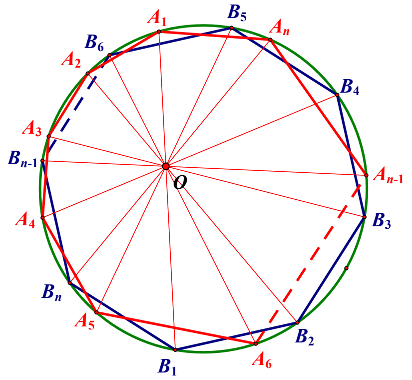
> **【布洛卡四邊形的作圖】(由紐伯格圓推論出)：**
> 給定存在正、負布洛卡點的四邊形 $ABCD$ 的一邊 $\overline{AB}$ 及布洛卡角 α ，求作四邊形 $ABCD$。

[作法]

1. 如圖 3-24，設 $\overline{AB}=a$ ，過 A、B 分別作 $\overline{AB}$ 的垂線，並在兩垂線上各取一點 O_1、O_2 ，使 $\overline{AO_1}=\overline{BO_2}=a\cot\alpha$ ，其中 O_1、O_2 在 $\overline{AB}$ 的同側。
2. 以 A 為圓心，a 為半徑作圓 C_1 ，以 $\overline{AO_1}$ 為直徑作圓 C_2 ，圓 C_1 與圓 C_2 交於 S 點。
3. 分別以 O_1、O_2 為圓心，$\overline{O_1S}$ 為半徑作圓，得圓 O_1 、圓 O_2 。
4. 圓 O_1 上任取一點 D，作△ABD 的外接圓交圓 O_2 於 C、C' 兩點，其中 $\overline{C'D}\,//\,\overline{AB}$ ，四邊形 $ABCD$ 即為所求。



▲圖 3-24



▲圖 3-25

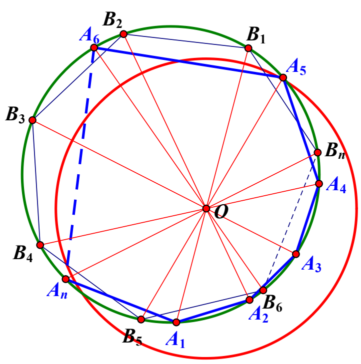
> **【布洛卡 n 邊形的作圖】(由反演推論出)：**
> 給定存在正、負布洛卡點的 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的外接圓半徑，求作 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 。

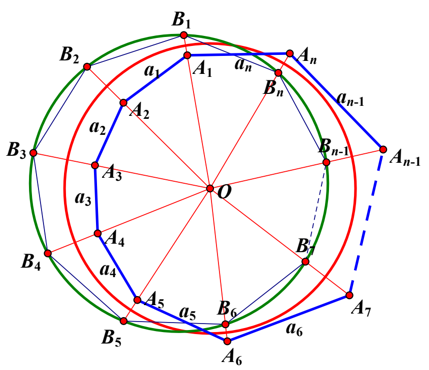
[作法]

1. 如圖 3-25，作圓內接正 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 及圓內或圓外任一點 O。
2. 作 $\overleftrightarrow{B_1O},\overleftrightarrow{B_2O},\overleftrightarrow{B_3O},\cdots,\overleftrightarrow{B_nO}$ 等 n 條線交圓於 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n$ ，則 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 即為所求。相關證明如定理 4-1。

三、 正多邊形的反演與布洛卡點

> **【定理 4-1】** 多邊形同時存在正、負布洛卡點的充要條件為：
> 該多邊形的每個頂點是正多邊形的頂點在某個反演變換下的反形。





▲圖 4-1

[證明]

如圖 4-1，設 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的 n 個頂點是正 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 的 n 個頂點關於反演變換 $I(O,r)$ 的反形，n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的邊長分別為 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，正 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 的外接圓半徑為 R，由前面的定理，我們只需證明 $\cot A_1+\dfrac{a_2}{a_1\sin A_2}$ 是個與 $\angle A_1$、$\angle A_2$、a_1、a_2 無關的定值，即證明了

$$\cot A_1+\frac{a_2}{a_1\sin A_2}=\cot A_2+\frac{a_3}{a_2\sin A_3}=\cot A_3+\frac{a_4}{a_3\sin A_4}=\cdots=\cot A_n+\frac{a_1}{a_n\sin A_1}。$$

又因為 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 的 n 個頂點共圓，那就證明了 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 同時具有正、負布洛卡點。

不失其一般性地，設正 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 的邊長為 1，則 $R=\dfrac{1}{2\sin\frac{\pi}{n}}$，且

$$\cot A_1+\frac{a_2}{a_1\sin A_2}=\frac{\cos A_1}{\sin A_1}+\frac{a_2}{a_1\sin A_2}=\frac{\frac{a_1^2+a_n^2-\overline{A_2A_n}^2}{2a_1a_n}}{\frac{\overline{A_2A_n}}{2R}}+\frac{a_2}{a_1\cdot\frac{\overline{A_1A_3}}{2R}}=\frac{R\left(a_1^2+a_n^2-\overline{A_2A_n}^2\right)}{a_1a_n\cdot\overline{A_2A_n}}+\frac{2Ra_2}{a_1\cdot\overline{A_1A_3}} \quad (4\text{-}1)$$

因為

$$\triangle OA_1A_2\sim\triangle OB_2B_1\Rightarrow\frac{a_1}{\overline{B_1B_2}}=\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_2}}=\frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}}{\overline{OB_2}\cdot\overline{OA_2}}=\frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}}{r^2}\Rightarrow a_1=\frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}}{r^2}，$$

同理

$$a_2=\frac{\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_3}}{r^2}，a_n=\frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_n}}{r^2}， \quad (4\text{-}2)$$

$$\overline{A_2A_n}=\frac{\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_n}}{r^2}\cdot\overline{B_2B_n}=\frac{2\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_n}}{r^2}\cdot\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}=\frac{2\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_n}}{r^2}\cdot\cos\frac{\pi}{n}$$

$$\overline{A_1A_3}=\frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_3}}{r^2}\cdot\overline{B_1B_3}=\frac{2\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_3}}{r^2}\cdot\sin\frac{(n-2)\pi}{2n}=\frac{2\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_3}}{r^2}\cdot\cos\frac{\pi}{n}$$

將上式代入(4-1)式，得到

$$\begin{aligned}
\cot A_1+\frac{a_2}{a_1\sin A_2}&=\frac{R\left(\left(\frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}}{r^2}\right)^2+\left(\frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_n}}{r^2}\right)^2-\left(\frac{2\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_n}}{r^2}\cos\frac{\pi}{n}\right)^2\right)}{\frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}}{r^2}\cdot\frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_n}}{r^2}\cdot\frac{2\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_n}}{r^2}\cos\frac{\pi}{n}}+\frac{2R\cdot\frac{\overline{OA_2}\cdot\overline{OA_3}}{r^2}}{\frac{\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_2}}{r^2}\cdot\frac{2\overline{OA_1}\cdot\overline{OA_3}}{r^2}\cos\frac{\pi}{n}}\\
&=\frac{R}{2r^2\cos\frac{\pi}{n}}\left(\frac{r^4}{\overline{OA_n}^2}+\frac{r^4}{\overline{OA_2}^2}-4\frac{r^4}{\overline{OA_1}^2}\cdot\cos^2\frac{\pi}{n}\right)+\frac{R}{r^2\cos\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{r^4}{\overline{OA_1}^2}\\
&=\frac{R}{2r^2\cos\frac{\pi}{n}}\left(\overline{OB_n}^2+\overline{OB_2}^2+\overline{OB_1}^2\left(2-4\cos^2\frac{\pi}{n}\right)\right)\\
&=\frac{R}{2r^2\cos\frac{\pi}{n}}\left(\overline{OB_n}^2+\overline{OB_2}^2-2\overline{OB_1}^2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\\
&=\frac{1}{4r^2\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}\left(\overline{OB_n}^2+\overline{OB_2}^2-2\overline{OB_1}^2\cos\frac{2\pi}{n}\right) \quad (4\text{-}3)
\end{aligned}$$

接著我們說明 $\overline{OB_n}^2+\overline{OB_2}^2-2\overline{OB_1}^2\cos\frac{2\pi}{n}$ 是定值。將正 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 置於坐標平面

上，其外接圓圓心置於原點，並設 $B_1\left(R,0\right)$，$B_2\left(R\cos\frac{2\pi}{n},R\sin\frac{2\pi}{n}\right)$，

$B_n\left(R\cos\frac{2\pi}{n},-R\sin\frac{2\pi}{n}\right)$，則

$$\overline{OB_n}^2+\overline{OB_2}^2-2\overline{OB_1}^2\cos\tfrac{2\pi}{n}$$
$$=\left(x-R\cos\tfrac{2\pi}{n}\right)^2+\left(y-R\sin\tfrac{2\pi}{n}\right)^2+\left(x-R\cos\tfrac{2\pi}{n}\right)^2+\left(y+R\sin\tfrac{2\pi}{n}\right)^2-2\left(\left(x-R\right)^2+y^2\right)\cos\tfrac{2\pi}{n}$$
$$=2x^2-4Rx\cos\tfrac{2\pi}{n}+2y^2+2R^2-2\left(x^2-2Rx+y^2+R^2\right)\cos\tfrac{2\pi}{n}$$
$$=2\left(1-\cos\tfrac{2\pi}{n}\right)x^2+2\left(1-\cos\tfrac{2\pi}{n}\right)y^2+2R^2\left(1-\cos\tfrac{2\pi}{n}\right)=2\left(1-\cos\tfrac{2\pi}{n}\right)\left(x^2+y^2+R^2\right)$$
$$=2\left(1-\cos\tfrac{2\pi}{n}\right)\left(2R^2-r^2\right)=4\sin^2\tfrac{\pi}{n}\cdot\left(2R^2-r^2\right)\qquad(4\text{-}4)$$

將(4-4)式代入(4-3)式，得到

$$\cot A_1+\frac{a_2}{a_1\sin A_2}=\frac{1}{4r^2\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}\cdot 4\sin^2\tfrac{\pi}{n}\cdot\left(2R^2-r^2\right)=\left(2\left(\tfrac{R}{r}\right)^2-1\right)\tan\tfrac{\pi}{n}$$

因此我們證得：正 n 邊形的各個頂點 B_1、B_2、B_3、…、B_n 經反演變換 $I\left(O,r\right)$ 後，其反形為 A_1、A_2、A_3、…、A_n，則 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 必有正、負布洛卡點與布洛卡角 α，且

$$\cot\alpha=\left(2\left(\tfrac{R}{r}\right)^2-1\right)\tan\tfrac{\pi}{n}\text{。}\qquad(4\text{-}5)$$

反之，若 n 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 同時有正、負布洛卡點與布洛卡角 α，則由(n-2)式，可得 $\frac{a_2}{a_n}=\frac{\overline{OA_2}}{\overline{OA_n}}$，故知反演中心 O 位於以 A_2、A_n 為定點，$\frac{a_2}{a_n}$ 為定比的阿波羅尼斯圓 O_1 上，同理由 $\frac{a_3}{a_1}=\frac{\overline{OA_3}}{\overline{OA_1}}$ 可知 O 點位於以 A_3、A_1 為定點，$\frac{a_3}{a_1}$ 為定比的阿波羅尼斯圓 O_2 上，兩圓的交點即為反演中心 O，再由 $\cot\alpha=\left(2\left(\frac{R}{r}\right)^2-1\right)\tan\frac{\pi}{n}$ 可求出反演半徑 r，則正 n 邊形 $B_1B_2B_3\cdots B_n$ 即可作出。 ■

陸、結　論

一、 布洛卡點在 *n* 邊形中的情形有以下性質：

（一） 並非給定任意 n 邊形皆存在布洛卡點，n 邊形存在負布洛卡點的**充要條件**為：

$$\cot\beta=\cot A_1+\frac{a_2}{a_1\sin A_2}=\cot A_2+\frac{a_3}{a_2\sin A_3}=\cdots=\cot A_{n-1}+\frac{a_n}{a_{n-1}\sin A_n}=\cot A_n+\frac{a_1}{a_n\sin A_1}$$

（二） 若給定 n 邊形的 n 個邊與面積 S，則可藉 $\cot\alpha=\dfrac{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}{4S}$ 得布洛卡角 α。

（三） 若 n 邊形存在正、負布洛卡點，則此 n 邊形為**圓內接 *n* 邊形**且正、負布洛卡角相等。

（四） 特例：若四邊形存在正、負布洛卡點，則此四邊形為調和四邊形。

（五） 特例：調和四邊形的布洛卡角 $\alpha\le\dfrac{\pi}{4}$，且當 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 時，此四邊形為正方形。

二、 將垂線、圓心、投影布洛卡多邊形一般化推廣後，有以下結論(定理 2-6)：

（一） 若 $B_\alpha^+\left(\theta,\triangle DEF\right)=\triangle D'E'F'$，則 $\triangle DEF\sim\triangle D'E'F'$ 且 $\triangle DEF$ 、$\triangle D'E'F'$ 共用正布

洛卡點。

（二） $\{B_\alpha^+(\theta,Q'')|\theta\in R\}$和$\{B_\alpha^+(\theta,O'')|\theta\in R\}$為相交於點 O 的兩直線，較小的夾角為 $\frac{\pi}{2}-\alpha$，且$\{B_\alpha^+(\theta,O'')|\theta\in R\}//\overline{PQ}$。

（三） $\{B_\alpha^+(\theta,Q)|\theta\in R\}$和$\{B_\alpha^+(\theta,O)|\theta\in R\}$皆為直線。

（四） $B_\alpha^+(\frac{\pi}{2},\triangle DEF)=\triangle ABC$、$B_\alpha^+(\alpha,\triangle DEF)=\triangle O_1O_2O_3$、$B_\alpha^+(\frac{\pi}{2}-\alpha,\triangle ABC)=\triangle A_1B_1C_1$。

（五） 布洛卡多邊形經過多次 B_α^+ 變換後，其頂點會分別形成全等的**等角螺線**且**收斂至布洛卡點**。

三、 垂線、圓心、投影布洛卡多邊形有以下性質：

（一） 正圓心布洛卡多邊形的負布洛卡點為原布洛卡多邊形的外接圓圓心。

（二） $\triangle PQO$ 為等腰三角形，且頂角為 2α。

（三） 正、負垂線布洛卡多邊形對應頂點相連線 n 線共點於點 O (**n 線共點定理**)。

（四） 正、負投影布洛卡多邊形的 $2n$ 個頂點共圓，且圓心為 $\overline{PQ}$ 中點(**$2n$ 點共圓定理**)。

（五） 垂線、圓心、投影布洛卡多邊形的正、負布洛卡點與外接圓圓心間的幾何性質詳見推論 9、推論 10、推論 12、定理 3-8、定理 3-9。

四、 布洛卡四邊形的兩個紐伯格圓全等，半徑為 $a\cot\alpha$，且圓心與兩定點構成矩形(定理 3-10)。

五、 同時存在正、負布洛卡點的多邊形頂點皆是正多邊形頂點反演之下的反形，且可藉 $\cot\alpha=\left(2\left(\frac{R}{r}\right)^2-1\right)\tan\frac{\pi}{n}$ 由外接圓半徑及反演半徑得出布洛卡角。

柒、參考資料

1. 沈文選、楊清桃(2010)。幾何瑰寶。哈爾濱：哈爾濱工業大學出版社。
2. Weisstein, Eric W.(n.d.). Brocard Points. Retrive December 20,2018, from http://mathworld.wolfram.com/BrocardPoints.html
3. Weisstein, Eric W.(n.d.). Brocard Angle. Retrive December 20,2018, from http://mathworld.wolfram.com/布洛卡 Angle.html
4. Weisstein, Eric W.(n.d.). Neuberg Circles. Retrive April 1,2019, from http://mathworld.wolfram.com/NeubergCircles.html
5. 楊天禹、王震、於鵬飛。調和四邊形的性質及應用。中等數學，2012 年 03 期，5~9 頁。
6. 貝克馬恩(1974)。反演(一版)(王敬庚譯)。臺北市：九章。(1998 年)

【評語】050417

布洛卡三角形以及布洛卡點是經常被探討的主題。作者突破過往研究中布洛卡點僅存於三角形中的侷限性希望探討推廣到 n 邊形的情形，並得到一個 n 邊形存在布洛卡點的充要條件。這個條件各 n 邊(角)互相獨立地等於布洛卡角的 cot 值，是個令人眼睛一亮的簡潔的判別法。作者繼續衍生一些推廣，加上一些旋轉與伸縮變換，情況雖然更加複雜，但是還是可以將原本三角形的概念與結果推廣至多邊形的情況，像是收斂螺旋線至布洛卡點的結果在數學上以及視覺上都是相當漂亮的結果。若是作品在組織架構上能更清楚區分三角形與多邊形會更好。

作品海報

摘要

本文從文獻已有的布洛卡三角形及其三種變換出發作各種推廣。首先將布洛卡點在三角形內的情形推廣至多邊形，發現**並非任意多邊形皆存在布洛卡點**。我發現了存在布洛卡點的**充要條件**，及布洛卡角、邊、面積的關係式。然後探討四邊形的情形，發現**存在正、負布洛卡點的四邊形皆為調和四邊形**。接著將文獻中三種布洛卡三角形的變換整併為更具數學風味的旋轉與伸縮變換。再以此方法為基礎，發現一系列布洛卡點、外心間的幾何性質，同時進一步推廣至多邊形，其中美妙的結果是：**從任意布洛卡n邊形出發的n條全等的等角螺線皆會收斂至布洛卡點**；最後，本文最驚艷的發現是：**所有存在正、負布洛卡點的n邊形，其頂點皆為正n邊形的頂點經過反演後的反形**。

壹、研究動機

我在查閱布洛卡點的文獻時，發現其皆只提及布洛卡點在三角形中的情形，並且文獻中的垂線、圓心、投影布洛卡三角形的性質皆僅止於相似與共布洛卡點關係，所以我好奇，若是將三角形推廣至四邊形、甚至多邊形，會有甚麼結果？而垂線、圓心、投影布洛卡三角形又有哪些幾何性質還未被發現呢？除此之外，文獻中布洛卡三角形的一頂點在紐伯格圓上移動的動畫引起了我的興趣，故想了解若是將其推廣至四邊形，又會得到何種結果？

貳、研究目的

一、探討一般n邊形存在布洛卡點的情形；並探討各種特例。

二、將垂線、圓心、投影布洛卡三角形一般化推廣，並推廣至n邊形；探討其布洛卡點、外心(外接圓圓心)、頂點連線段間的幾何性質。

三、探討布洛卡三角形的紐伯格圓推廣至布洛卡四邊形的情形。

四、探討存在正、負布洛卡點的n邊形，其頂點與反演之關係。

參、研究設備及器材

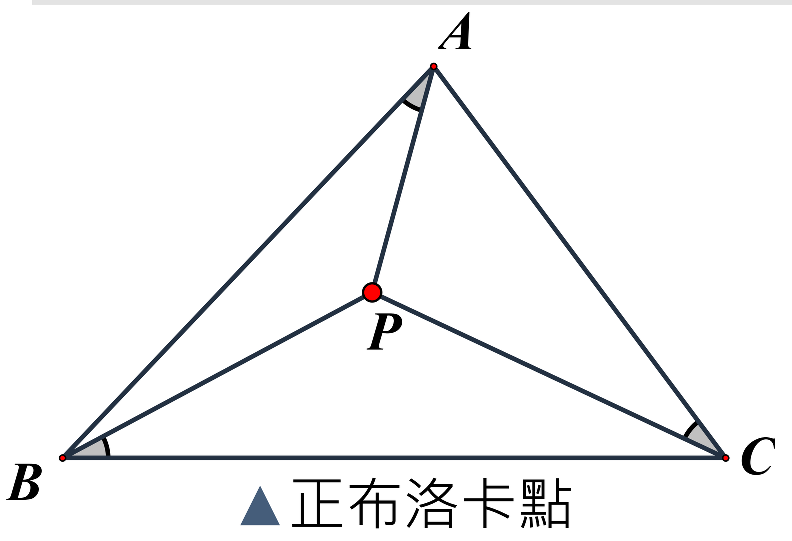
紙、筆、大腦、電腦、動態幾何軟體GSP與Geogebra。

肆、研究過程或方法

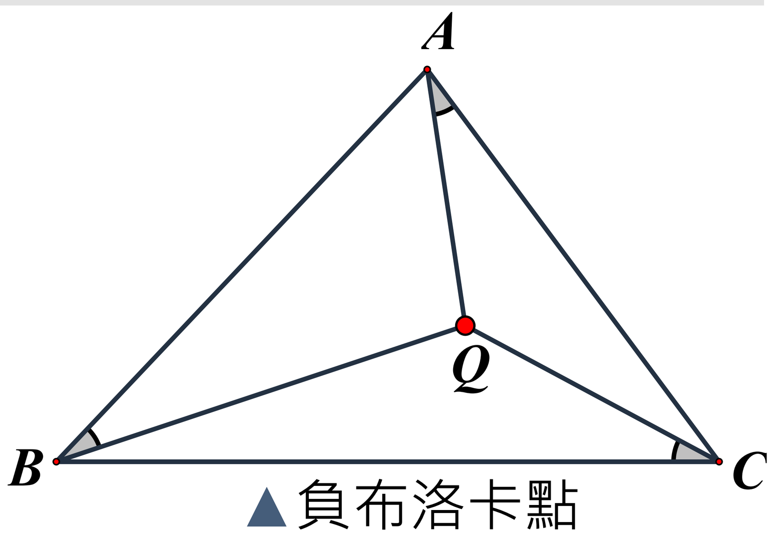
一、文獻探討

【定義】布洛卡點與布洛卡角

1. 給定的ΔABC，若存在一點P，滿足$\angle \boldsymbol{PAB} = \angle \boldsymbol{PBC} = \angle \boldsymbol{PCA} = \boldsymbol{\alpha}$，且$\overrightarrow{AB}$旋轉至$\overrightarrow{AP}$為**逆時針方向**，則稱$P$為$\Delta ABC$的「**正布洛卡點**」，$\alpha$稱「**正布洛卡角**」。
2. 而**順時鐘方向**則可定義出「**負布洛卡點**」與「**負布洛卡角**」，且**正、負布洛卡角相等**。



▲正布洛卡點



▲負布洛卡點

【定義】垂線布洛卡三角形

若過ΔABC三頂點A、B、C分別作三邊的垂線$\overline{DF}$、$\overline{EF}$、$\overline{DE}$，則稱ΔDEF為ΔABC的**垂線布洛卡三角形**。
任意ΔABC皆有其正、負垂線布洛卡三角形。

【定義】圓心布洛卡三角形

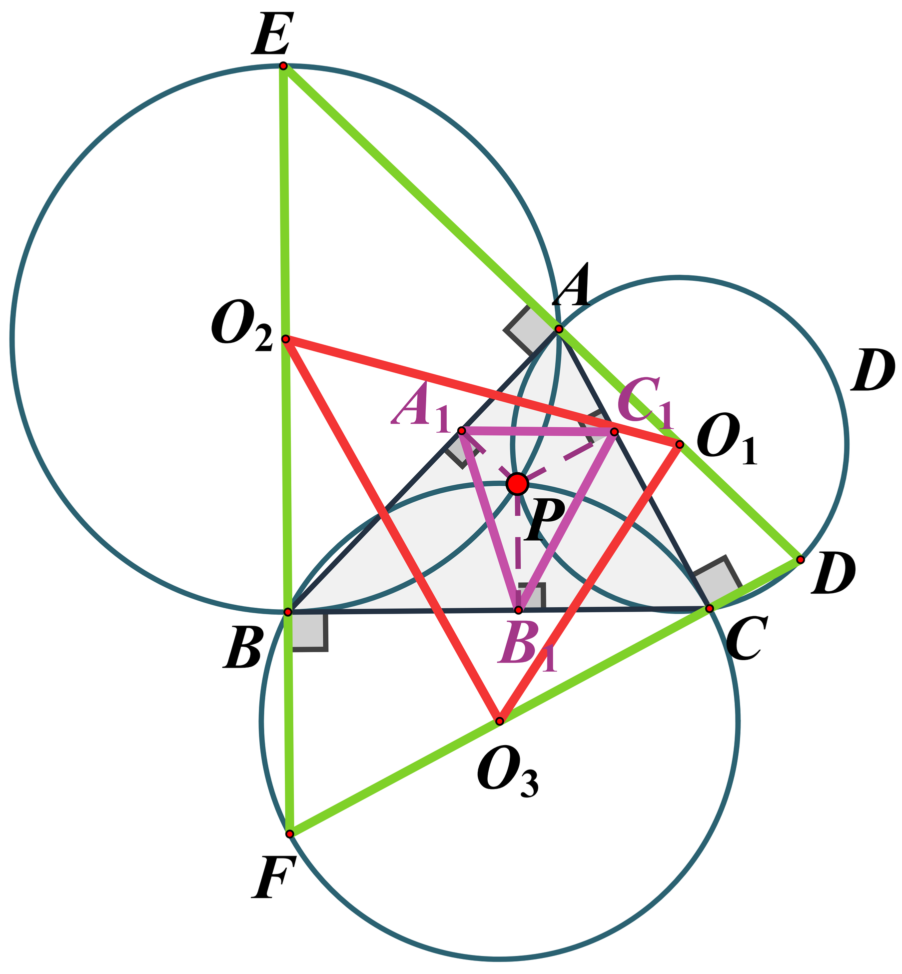
設ΔDEF為ΔABC的垂線布洛卡三角形，若$\overline{AD}$、$\overline{CF}$、$\overline{BE}$的中點分別為O_1、O_2、O_3，則稱$\Delta O_1O_2O_3$為ΔABC的**圓心布洛卡三角形**。
任意ΔABC皆有其正、負圓心布洛卡三角形。

【定義】投影布洛卡三角形

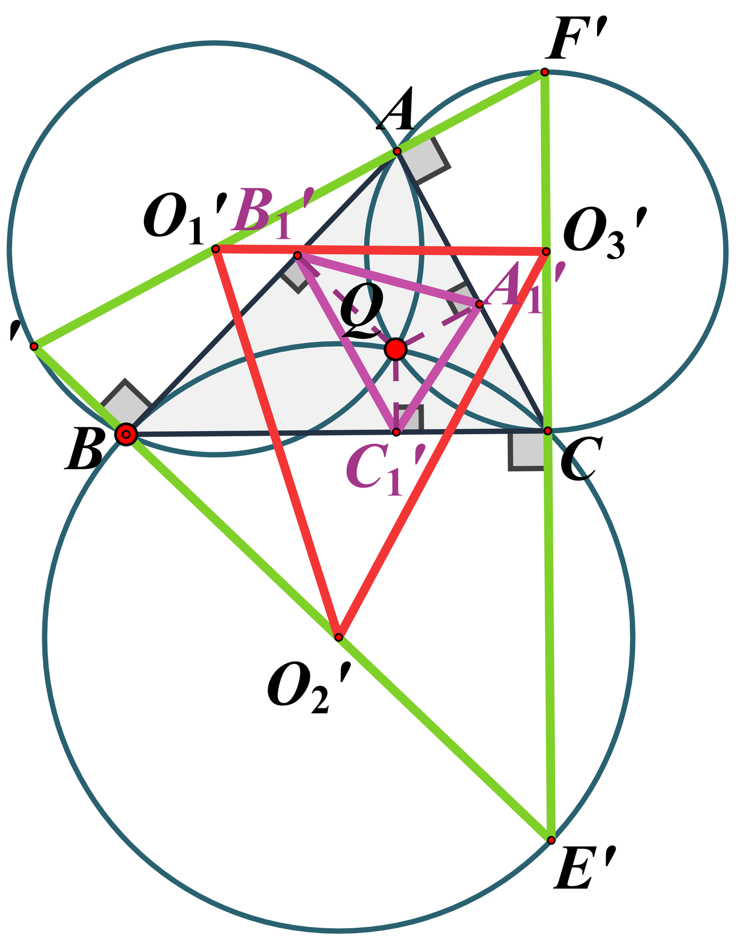
若自布洛卡點向三邊作垂線得垂足點A_1、B_1、C_1，則稱$\Delta A_1B_1C_1$為ΔABC的**投影布洛卡三角形**。
任意ΔABC皆有其正、負投影布洛卡三角形。

【性質1】相似與共布洛卡點關係

垂線、圓心、投影布洛卡三角形皆與原三角形相似且共布洛卡點。**相似比**分別為：$\tan\alpha$、$2\sin\alpha$、$\sin\alpha$，其中α是布洛卡角。



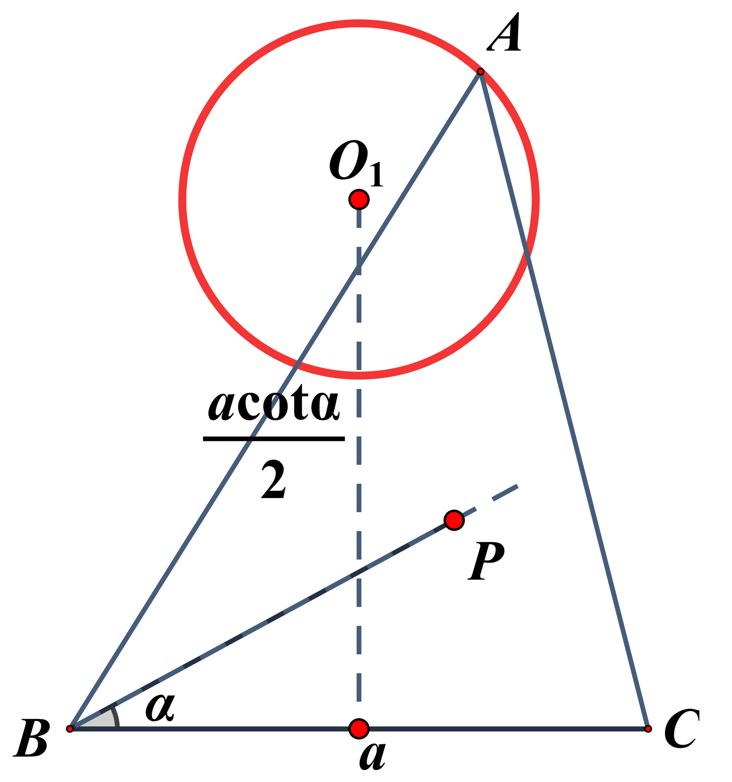
▲正垂線布洛卡三角形
正圓心布洛卡三角形
正投影布洛卡三角形



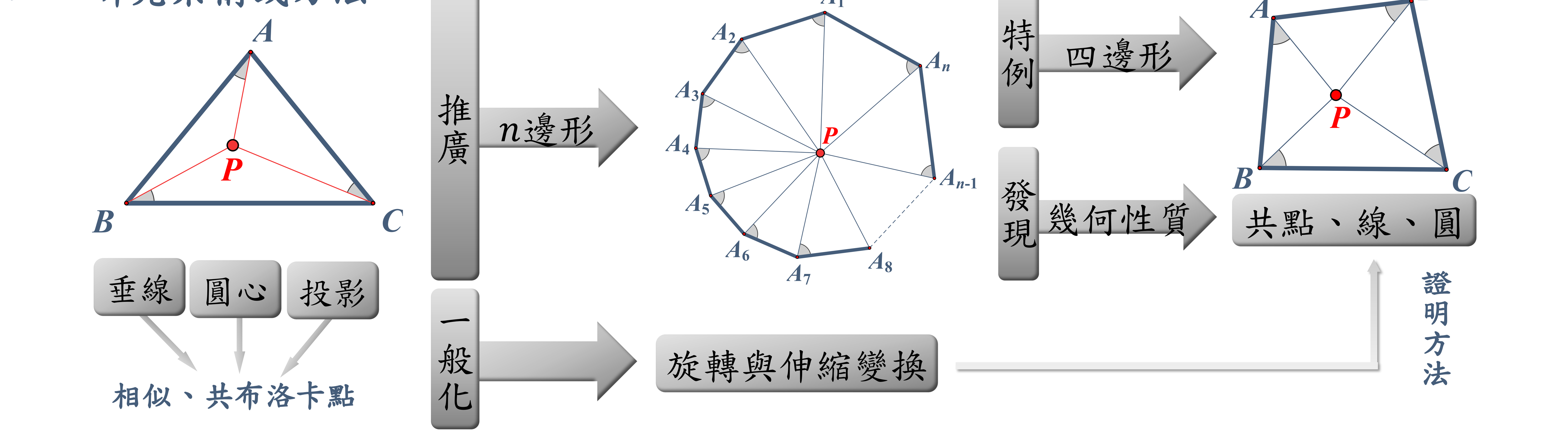
▲負垂線布洛卡三角形
負圓心布洛卡三角形
負投影布洛卡三角形

【性質2】布洛卡三角形的紐伯格圓

給定ΔABC的布洛卡角α及B、C兩定點，設$\overline{BC} = a$，則點A的軌跡為一圓，稱紐伯格圓，**半徑為$\frac{a}{2}\sqrt{\cot^2\alpha - 3}$**且圓心$O_1$在$\overline{BC}$中垂線$\overleftrightarrow{O_1M}$上滿足$\overline{\boldsymbol{O_1M}} = \frac{a}{2}\cot\alpha$。



二、研究架構或方法

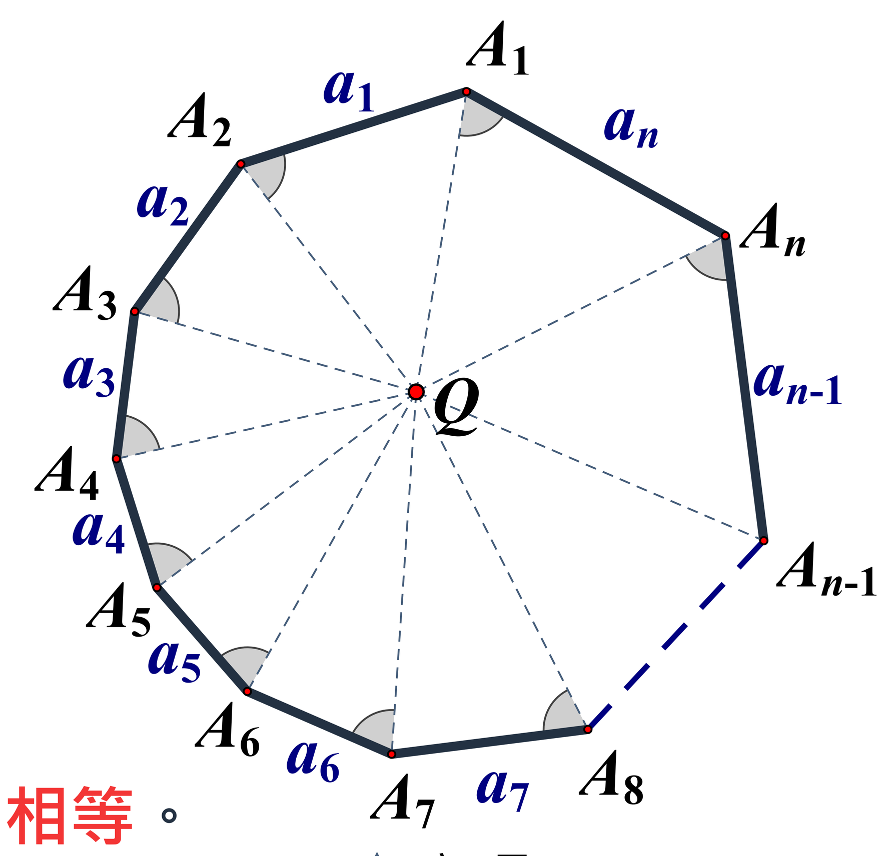


伍、研究結果與討論

一、n邊形存在布洛卡點的情形

【定理1】若在n邊形$A_1A_2\cdots A_n$中，$\overline{A_1A_2}=a_1,\overline{A_2A_3}=a_2,\cdots,\overline{A_nA_1}=a_n$，$\beta$為負布洛卡角，則其存在負布洛卡點$Q$的充要條件為：

$$\cot\beta=\cot A_1+\frac{a_2}{a_1\sin A_2}=\cot A_2+\frac{a_3}{a_2\sin A_3}=\cdots=\cot A_{n-1}+\frac{a_n}{a_{n-1}\sin A_n}=\cot A_n+\frac{a_1}{a_n\sin A_1}$$



▲定理1

【定理2】若n邊形$A_1A_2\cdots A_n$的布洛卡角為α，面積為S，且$\overline{A_1A_2}=a_1,\overline{A_2A_3}=a_2,\cdots,\overline{A_nA_1}=a_n$，則$\cot\alpha=\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}{4S}$。

【定理3】若n邊形同時具有正、負布洛卡點，則n邊形的n個頂點共圓，且正、負布洛卡角相等。

【定理4】特例：若給定同時具有正、負布洛卡點的四邊形，則此四邊形為調和四邊形。

【定理5】特例：若給定同時具有正、負布洛卡點的四邊形，則其布洛卡角$\alpha\le\frac{\pi}{4}$，並且當$\alpha=\frac{\pi}{4}$時，此四邊形為正方形。

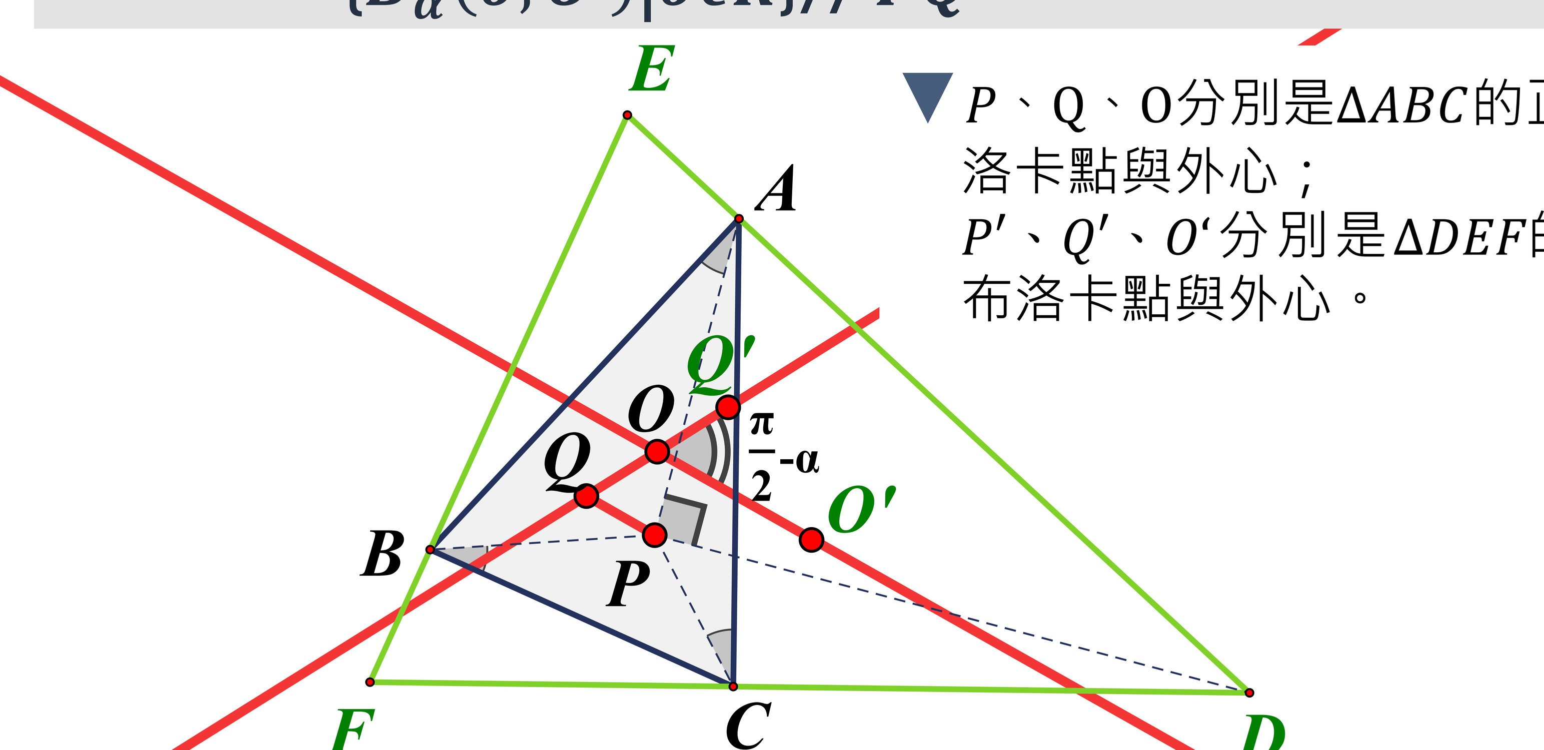
二、布洛卡多邊形的一般化推廣

【定義】旋轉與伸縮變換

若平面上一點D以正布洛卡點P為中心旋轉有向角θ並縮放$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)}$，得到點A，則記做$B_\alpha^+(\theta,D)=A$。

【定理6】$B_\alpha^+\left(\frac{\pi}{2},\Delta DEF\right)=\Delta ABC$、
$B_\alpha^+\left(\frac{\pi}{2}-\alpha,\Delta ABC\right)=\Delta A_1B_1C_1$、
$B_\alpha^+(\alpha,\Delta DEF)=\Delta O_1O_2O_3$

【定理7】$\{B_\alpha^+(\theta,Q')|\theta\epsilon R\}$和$\{B_\alpha^+(\theta,O')|\theta\epsilon R\}$為相交於$O$點的兩條直線，較小的夾角為$\frac{\pi}{2}-\alpha$，且$\{B_\alpha^+(\theta,O')|\theta\epsilon R\}//\overline{PQ}$。



▼P、Q、O分別是ΔABC的正、負布洛卡點與外心；
P'、Q'、O'分別是ΔDEF的正、負布洛卡點與外心。

三、旋轉伸縮變換與等角螺線

一連串的點列：

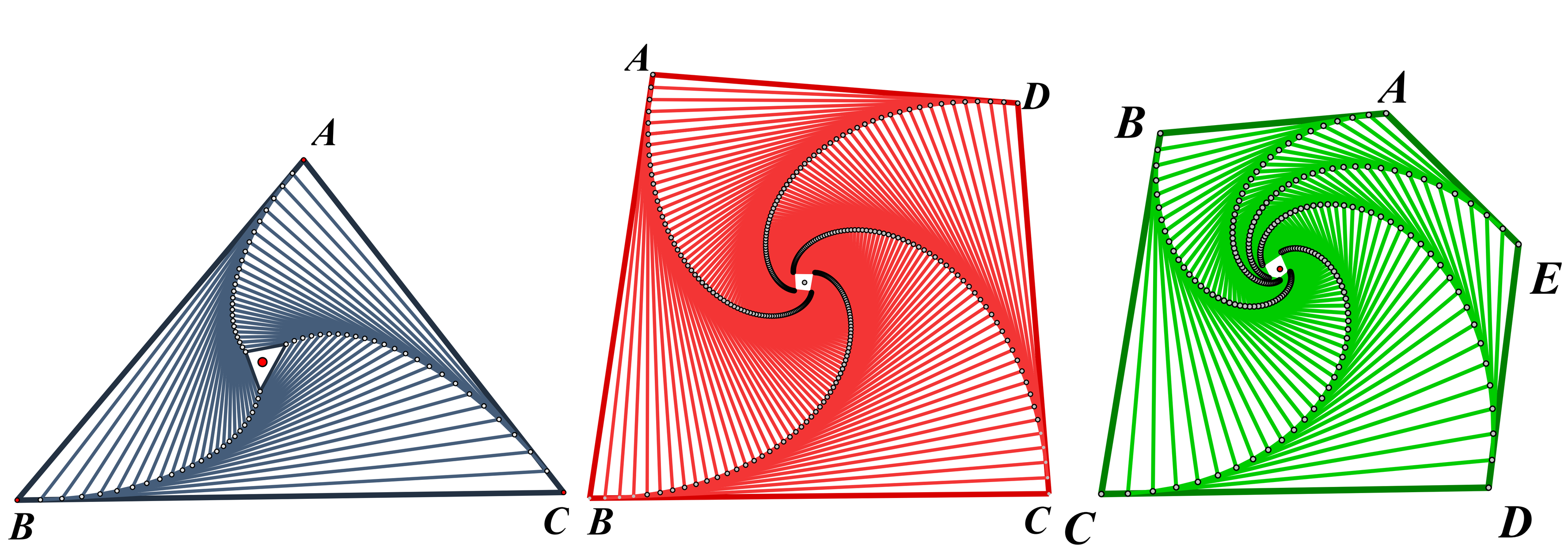
$$M,B_\alpha^+(\theta,M),B_\alpha^{+(2)}(\theta,M),B_\alpha^{+(3)}(\theta,M),\ldots\ldots$$

⬇

一連串三角形：

$$\Delta ABC,B_\alpha^+(\theta,\Delta ABC),B_\alpha^{+(2)}(\theta,\Delta ABC),B_\alpha^{+(3)}(\theta,\Delta ABC),\ldots\ldots$$

*推廣至多邊形亦成立

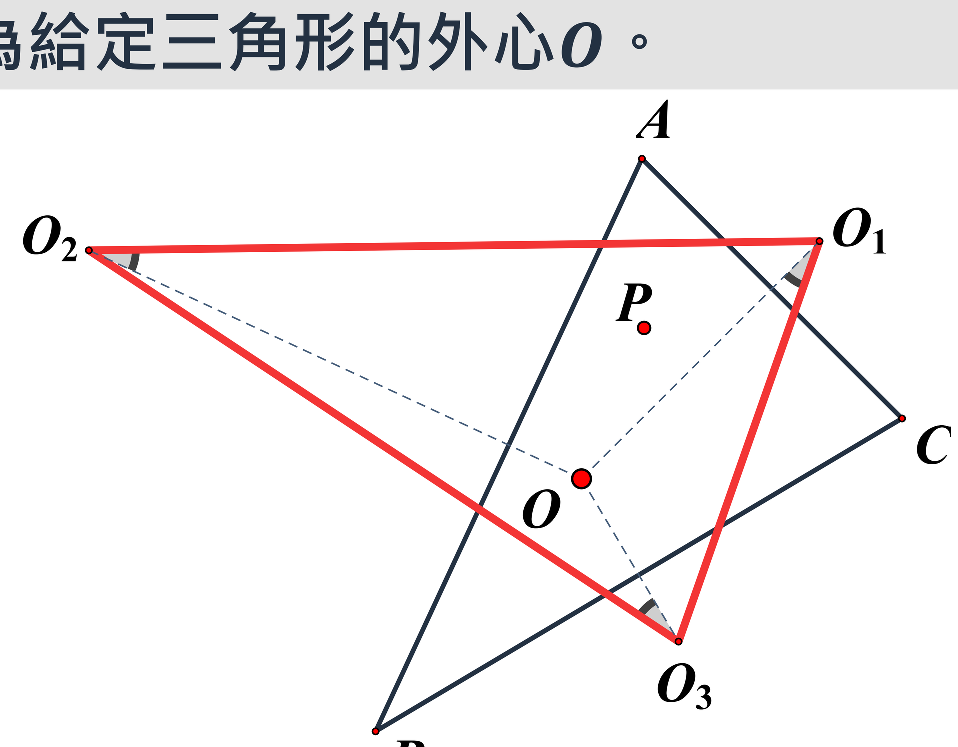


▲一連串多邊形相對應的頂點各落在一等角螺線上，這些等角螺線是全等的。

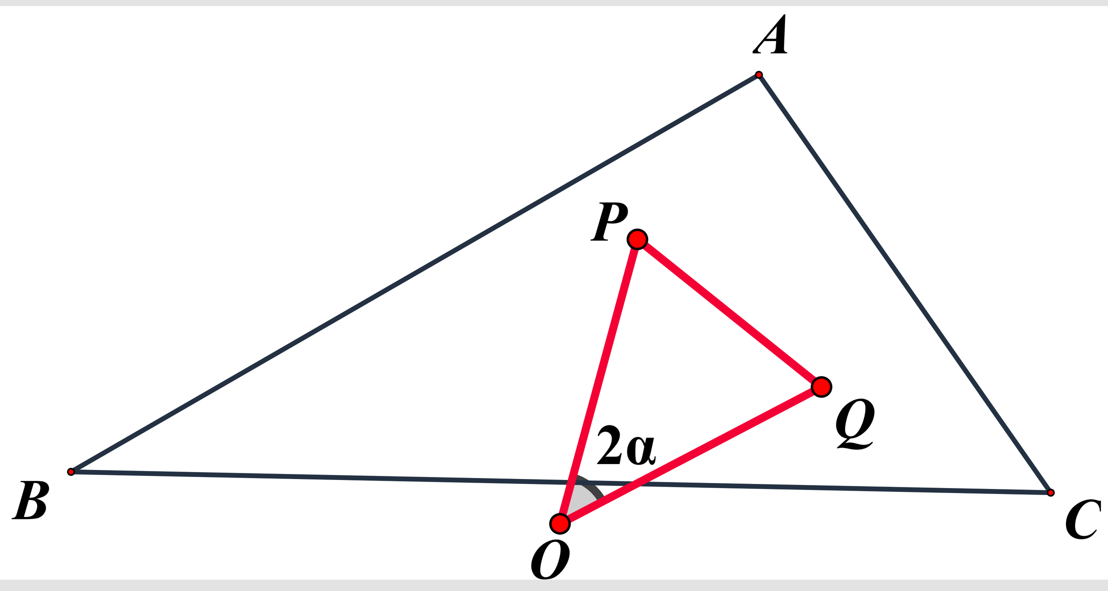
四、布洛卡多邊形的幾何定理及性質

* 以下性質由三角形推論至存在正、負布洛卡點的多邊形亦成立。

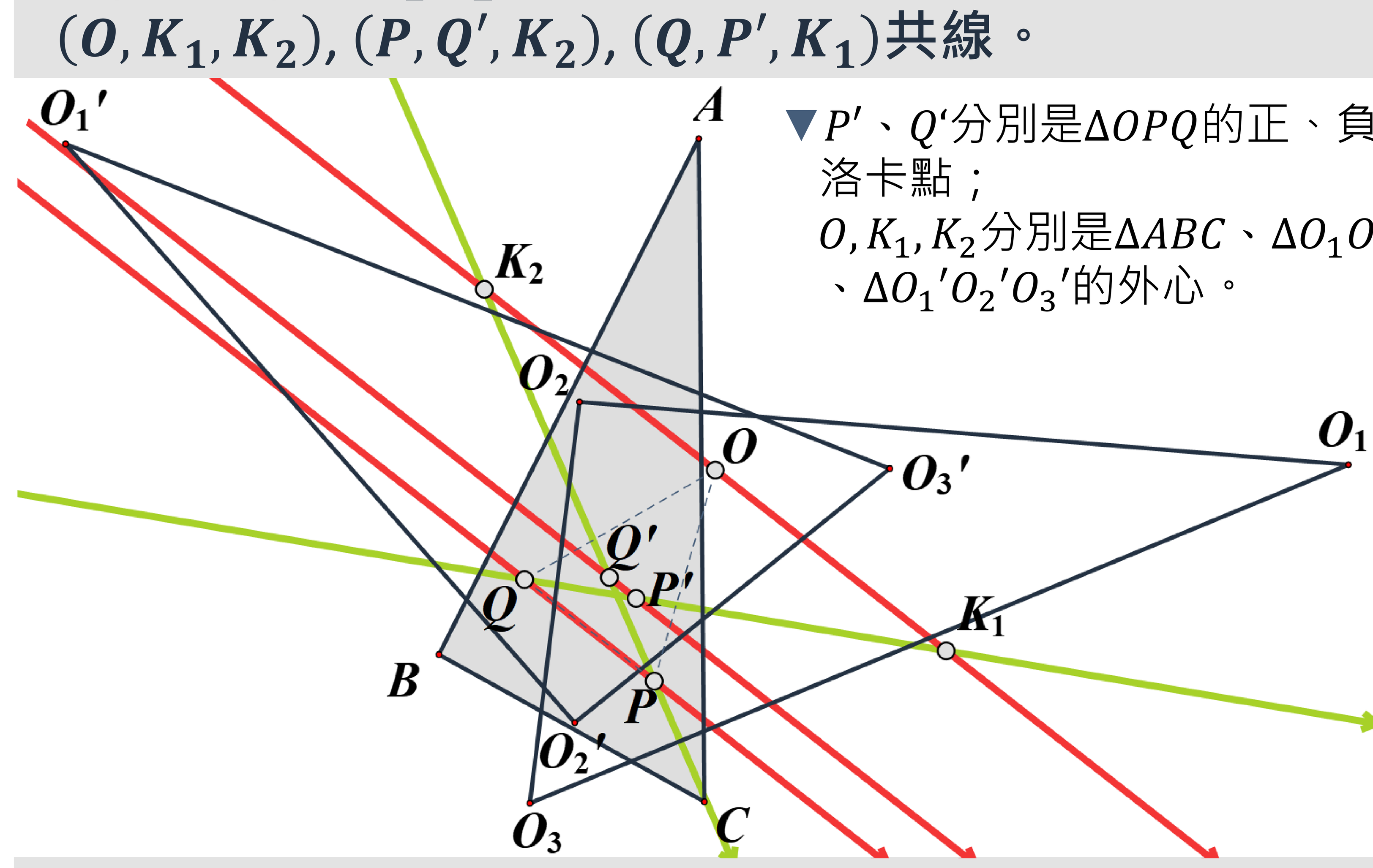
【定理8】若給定三角形，則其正圓心布洛卡三角形的負布洛卡點為給定三角形的外心O。



【定理9】若給定三角形，且布洛卡角為α，則其正、負布洛卡點與外心所構成的三角形為等腰三角形，且頂角為2α。

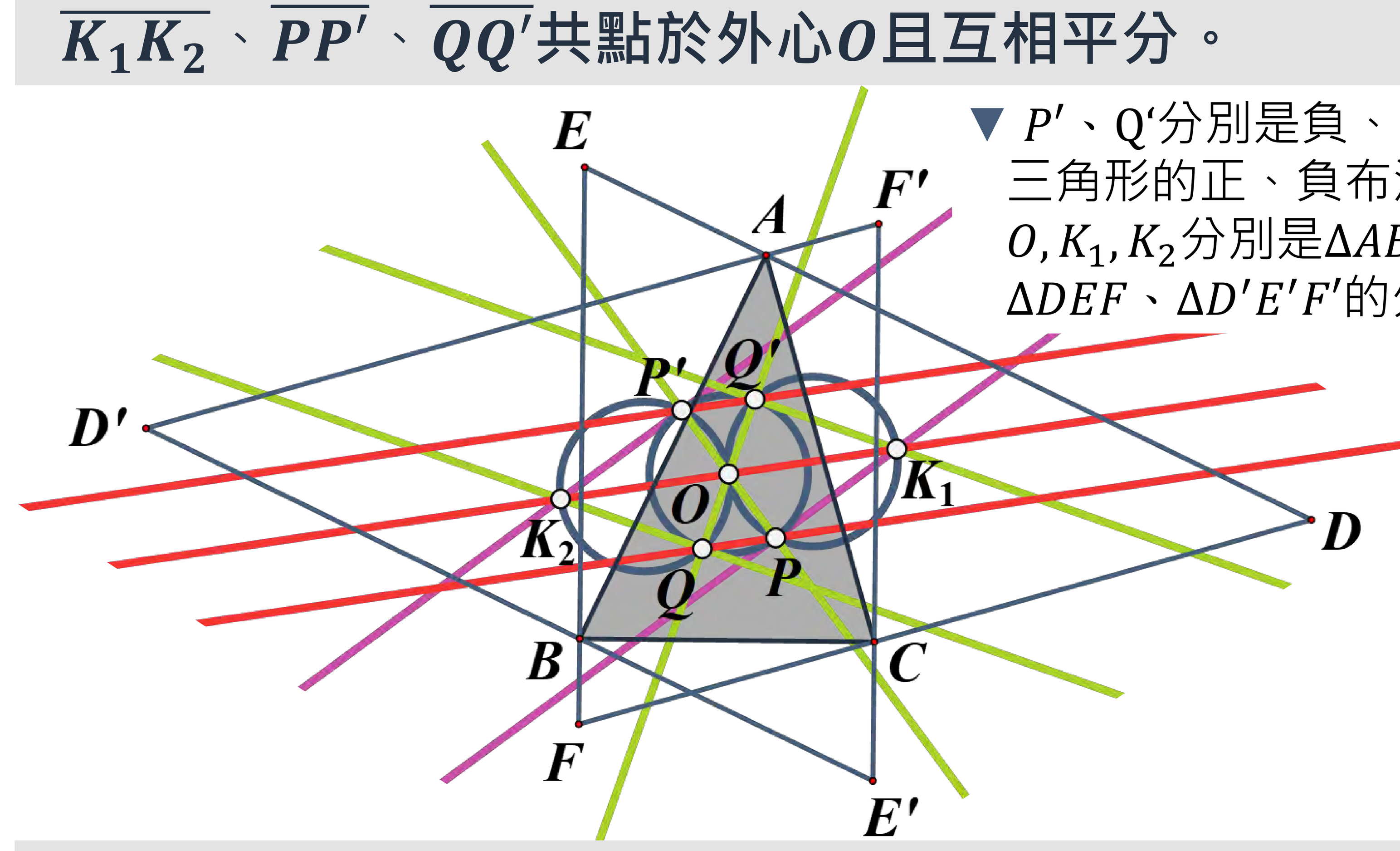


【定理10】在正、負圓心布洛卡三角形中：
$\overleftrightarrow{PQ}//\overleftrightarrow{P'Q'}//\overleftrightarrow{K_1K_2}$、
$(O,K_1,K_2),(P,Q',K_2),(Q,P',K_1)$共線。



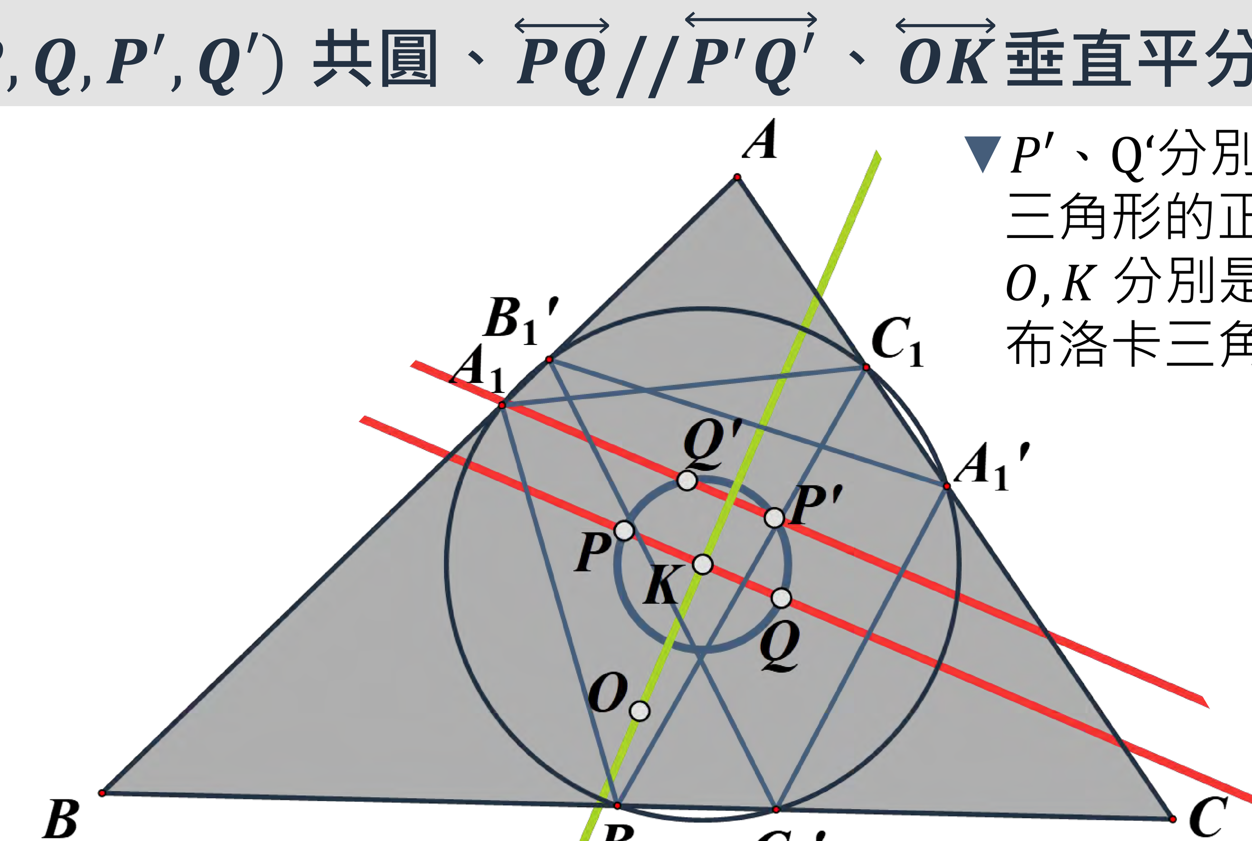
▼P'、Q'分別是ΔOPQ的正、負布洛卡點；
O,K_1,K_2分別是ΔABC、$\Delta O_1O_2O_3$、$\Delta {O_1}'{O_2}'{O_3}'$的外心。

【定理11】在正、負垂線布洛卡三角形中：
$(O,K_1,K_2),(O,P,P'),(O,Q,Q')$共線、
$(\overleftrightarrow{K_1K_2},\overleftrightarrow{P'Q'},\overleftrightarrow{PQ})$，$(\overleftrightarrow{PK_1},\overleftrightarrow{P'K_2})$，$(\overleftrightarrow{QK_2},\overleftrightarrow{Q'K_1})$平行、
$(O,P,Q',K_1),(O,Q,P',K_2),(P,Q,P',Q')$共圓、
$\overline{K_1K_2}$、$\overline{PP'}$、$\overline{QQ'}$共點於外心O且互相平分。



▼P'、Q'分別是負、正垂線三角形的正、負布洛卡點；
O,K_1,K_2分別是ΔABC、ΔDEF、$\Delta D'E'F'$的外心。

【定理12】在正、負投影布洛卡三角形中：
(P,Q,P',Q')共圓、$\overleftrightarrow{PQ}//\overleftrightarrow{P'Q'}$、$\overleftrightarrow{OK}$垂直平分$\overline{PQ}$、$\overline{P'Q'}$。



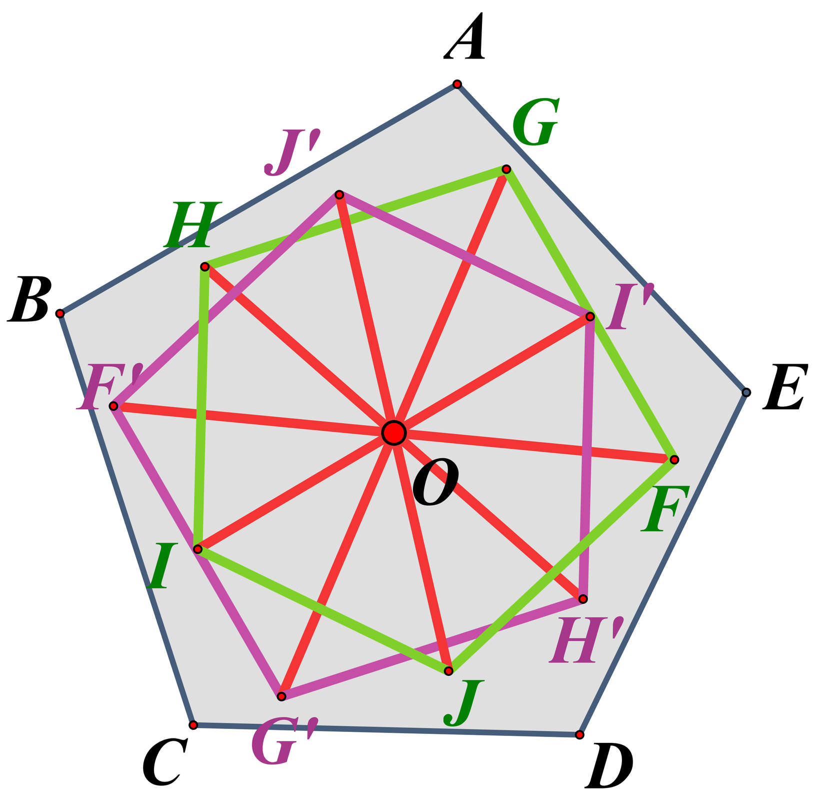
▼P'、Q'分別是負、正投影三角形的正、負布洛卡點；
O,K分別是ΔABC、投影布洛卡三角形的外心。

【定理13】n線共點定理

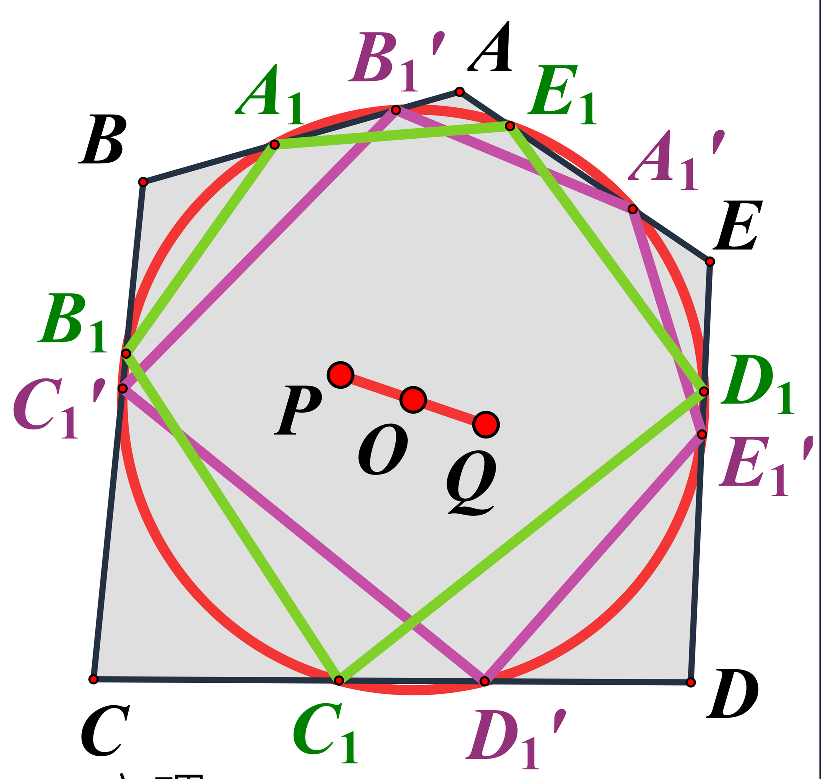
若n邊形存在正、負布洛卡點，則其**正、負垂線布洛卡n邊形**的對應頂點連線段**n線共點**於n邊形的外心O且**互相平分**。

【定理14】$2n$點共圓定理

若n邊形存在正、負布洛卡點，則其**正、負投影布洛卡n邊形**的**$2n$個頂點共圓**，且圓心O為$\overline{PQ}$中點。



▲定理13
正、負垂線布洛卡五邊形

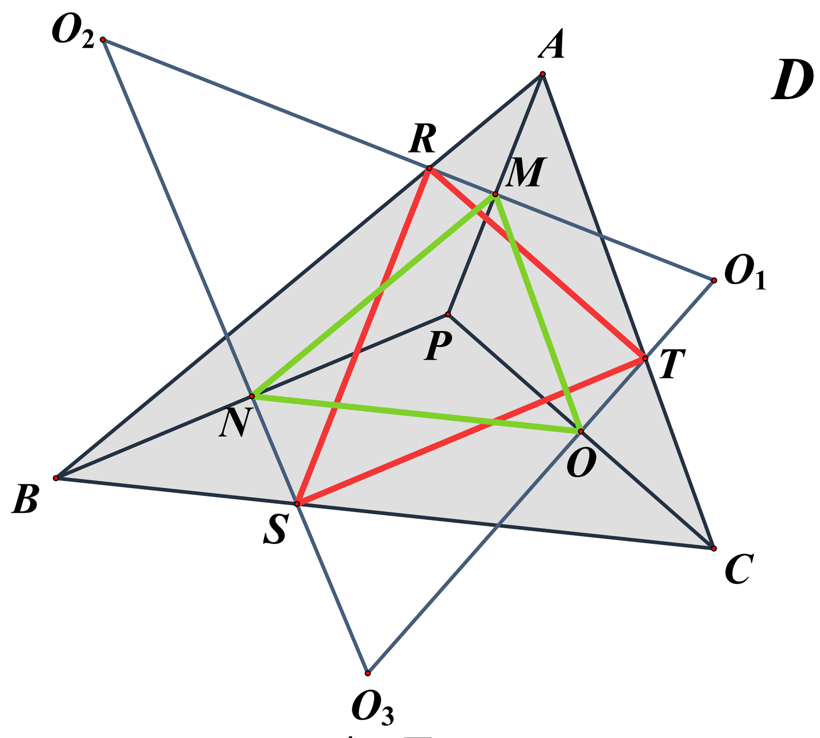


▲定理14
正、負投影布洛卡四邊形

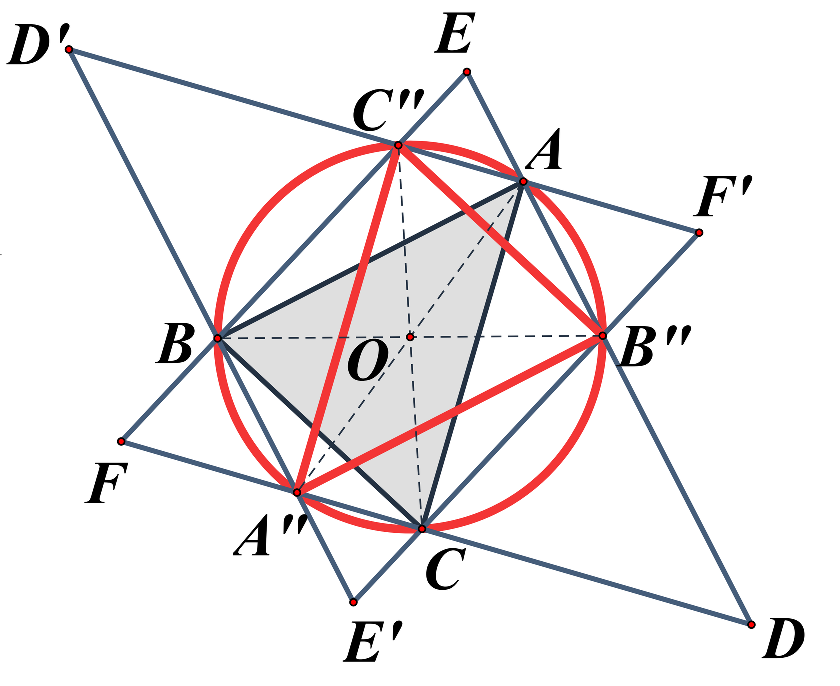
*對應邊交點建構三角形

【定理15】$\Delta RST \sim \Delta MNO$，相似比$=\sec\alpha$、且$\Delta RST$和$\Delta MNO$皆以點P為布洛卡點

【定理16】$\Delta A''B''C''$是ΔABC的同外接圓三角形。



▲定理15

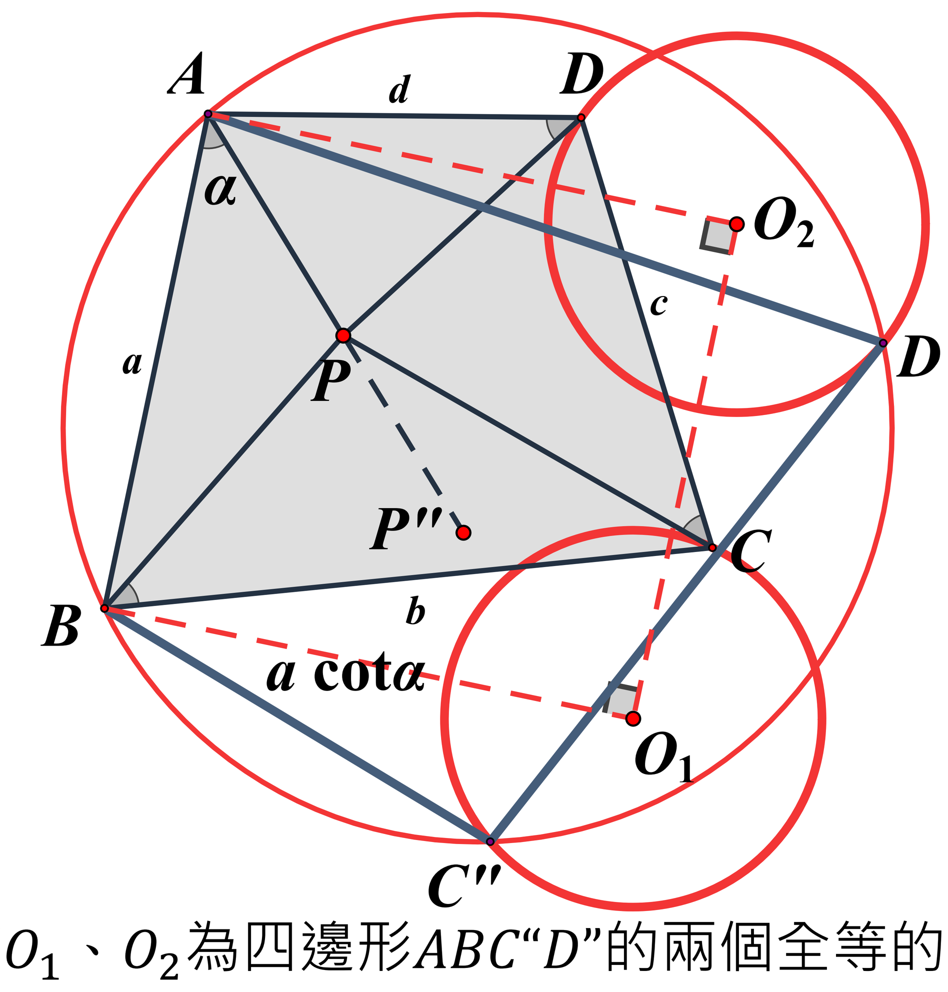


▲定理16

五、布洛卡四邊形的紐伯格圓

【定理17】給定四邊形$ABC''D''$的布洛卡角α及A、B兩定點，若此四邊形同時存在正、負布洛卡點且$\overline{AB}=a$，則：

1. C點軌跡是一圓，稱O_1，其半徑為$a\sqrt{\cot^2\alpha-1}$
2. D點軌跡是一圓，稱O_2，其半徑為$a\sqrt{\cot^2\alpha-1}$
3. 四邊形ABO_1O_2為矩形，且$\overline{AB}=\overline{O_1O_2}=a$、$\overline{AO_2}=\overline{BO_1}=a\cot\alpha$

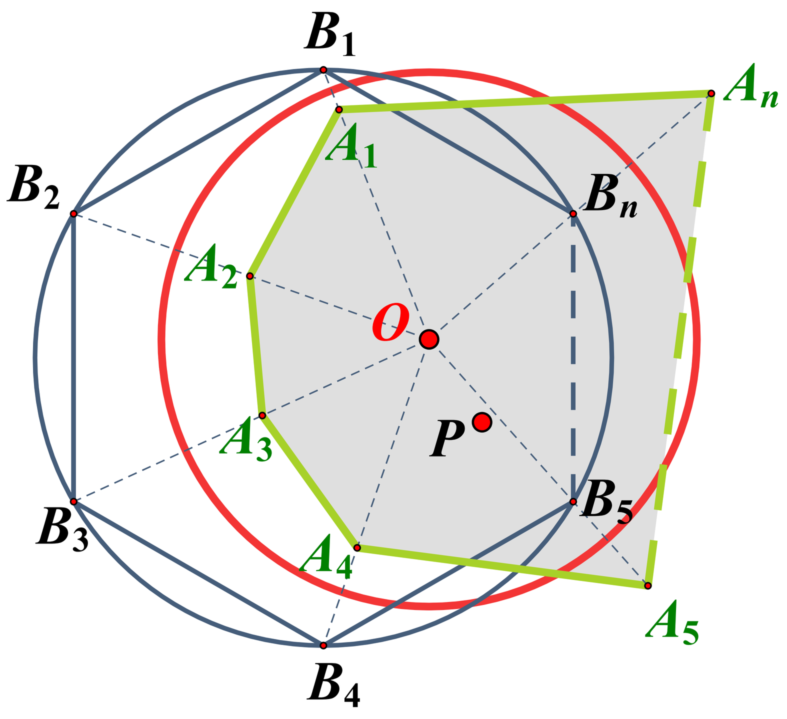


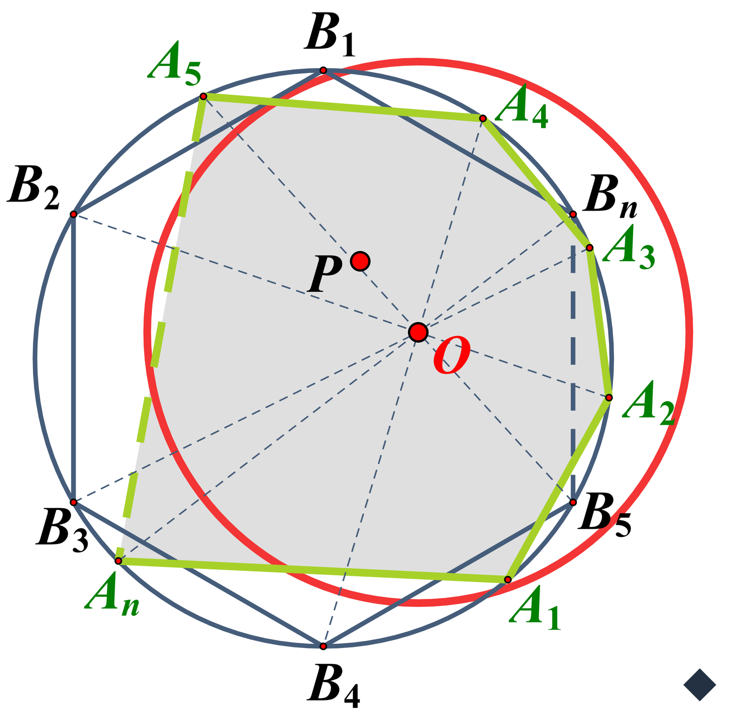
▲圓O_1、O_2為四邊形$ABC''D''$的兩個全等的紐伯格圓。

六、正多邊形的反演與布洛卡點

【定理18】多邊形存在正、負布洛卡點的充要條件為：**其頂點為正多邊形的頂點在反演變換下的反形**，且$\cot\alpha=\left(2\left(\frac{R}{r}\right)^2-1\right)\tan\frac{\pi}{n}$

*R、r、n分別為外接圓半徑、反演半徑、頂點個數。





▲圓O為**反演圓**，$A_1A_2\cdots A_n$為**布洛卡多邊形**。
左右兩圖為相同之反演情形。

【定理19】特例:布洛卡n邊形的布洛卡角$\alpha\le\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$，且當此$n$邊形為正$n$邊形時等號成立。

陸、結論

一、布洛卡n邊形有以下性質：

(一)並非給定任意n邊形皆存在布洛卡點，若n邊形存在布洛卡點則必須滿足**充要條件**(定理1)。

(二)若給定n邊形的n個邊與面積S，則可藉邊長及面積推得布洛卡角α(定理2)。

(三)若n邊形存在正、負布洛卡點，則**此n邊形為圓內接n邊形且其正、負布洛卡角相等**(定理3)。

(四)**特例**：若四邊形存在正、負布洛卡點，則此四邊形為**調和四邊形**(定理4)。

(五)**特例**：調和四邊形的布洛卡角$\alpha\le\frac{\pi}{4}$，並且當$\alpha=\frac{\pi}{4}$時，此四邊形為**正方形**(定理5)。

二、透過相似與共布洛卡點性質，可解釋垂線、圓心及投影布洛卡多邊形間的關係為一種**旋轉與伸縮變換**(一般化)，並且此種變換可作為上述三種多邊形幾何性質的證明工具。

三、n條由布洛卡n邊形的頂點出發的全等**等角螺線**若交於一點，則此點必為布洛卡點。

四、透過一般化推廣，發現一系列布洛卡n邊形中外心與布洛卡點間的共點、線、圓等幾何性質，如**n線共點定理**、**$2n$點共圓定理**等(定理8~16)。

五、布洛卡四邊形的兩個**紐伯格圓**全等，半徑為 $a\sqrt{\cot^2\alpha-1}$ 且兩圓心與兩定點構成矩形(定理17)。

六、多邊形存在正、負布洛卡點的充要條件為：其頂點皆是正多邊形的頂點在反演之下的反形，且由外接圓半徑及反演半徑可推得布洛卡角，又正n邊形的布洛卡角$\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$(定理18、19)。

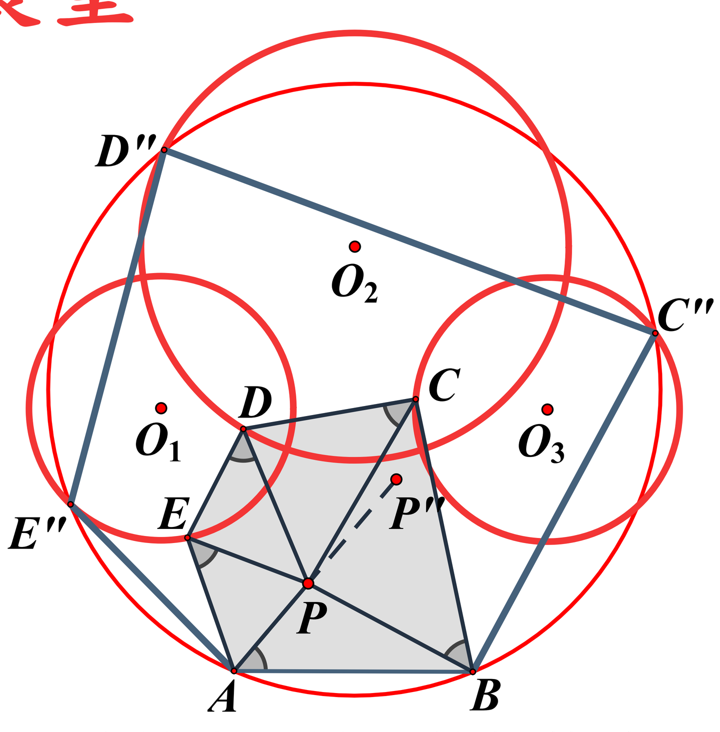
柒、未來展望

對於布洛卡五邊形、六邊形、甚至n邊形中**紐伯格圓之相關研究仍有值得探討空間**，目前已藉電腦繪圖軟體得出以下結論，但未能給出證明：

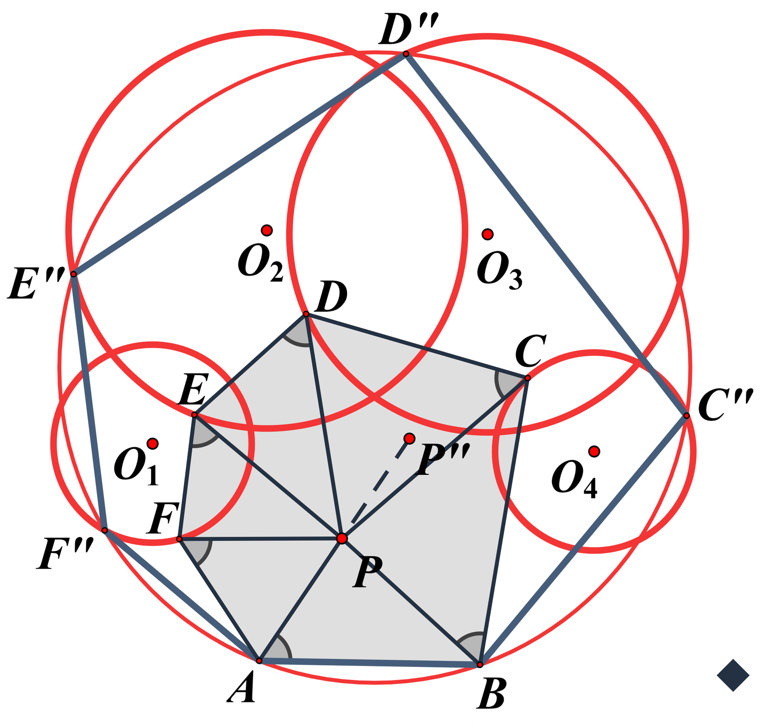
一、布洛卡五邊形、六邊形分別存在三個、四個紐伯格圓。

二、若圓O_1、O_2、O_3分別為布洛卡五邊形的三個紐伯格圓，則：圓$O_1\cong$圓O_3且$\frac{\text{圓}O_2\text{半徑}}{\text{圓}O_1\text{半徑}}=\phi$。

三、若圓O_1、O_2、O_3、O_4分別為布洛卡六邊形的四個紐伯格圓，則：圓$O_1\cong$圓O_4、圓$O_2\cong$圓O_3且$\frac{\text{圓}O_1\text{半徑}}{\text{圓}O_2\text{半徑}}=\frac{1}{2}$。



▲布洛卡五邊形的紐伯格圓



▲布洛卡六邊形的紐伯格圓

捌、參考資料

1. 沈文選、楊清桃(2010)。幾何瑰寶。哈爾濱：哈爾濱工業大學出版社。
2. Weisstein, Eric W.(n.d.). Brocard Points,Brocard Angle,Neuberg Circles.
3. 楊天禹、王震、於鵬飛。調和四邊形的性質及應用。中等數學，2012年03期，5~9頁。
4. 貝克馬恩(1974)。反演(一版)(王敬庚譯)。臺北市：九章。(1998年)