中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

團隊合作獎

050416

一線四心---圓內接多邊形的歐拉線

學校名稱：國立金門高級中學

作者：	指導老師：
高三　許博宇	楊玉星
高三　黃瀚德	陳曉惠
高一　陳又禕	

關鍵詞：歐拉線、多邊形的重心、

圓內接多邊形的歐拉圓圓心與垂心

摘要

三角形的外心O、重心G、九點圓圓心K和垂心H**會依序在同一直線上**，這條直線就稱為**三角形的歐拉線**，滿足$\overline{\boldsymbol{OG}}:\overline{\boldsymbol{GK}}:\overline{\boldsymbol{KH}}=\mathbf{2}:\mathbf{1}:\mathbf{3}$。我們發現**當多邊形有外接圓**時，也會有相對應的結果。即**圓內接**$(\boldsymbol{n}\geq\mathbf{3})$**邊形**$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的外心$O$、重心$G$、歐拉圓圓心$K$和垂心$H$**也會依序在同一直線上**，不妨稱此直線為**圓內接多邊形的歐拉線**，滿足$\overline{\boldsymbol{OG}}:\overline{\boldsymbol{GK}}:\overline{\boldsymbol{KH}}=\mathbf{2}:(\boldsymbol{n}-\mathbf{2}):\boldsymbol{n}$。

此外，我們發現三角形的外心O、內心O_1、旁心三角形的外心O_2**也會共線**，且$\boldsymbol{O}$**點為**$\overline{\boldsymbol{O_1O_2}}$**的中點**；而**當多邊形同時有外接圓和內切圓**時，也會有相同的結果。即**雙心**$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\geq\mathbf{3})$**邊形**$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的**外心**$\boldsymbol{O}$正好是**內心**$\boldsymbol{O_1}$和旁心$n$邊形的**外心**$\boldsymbol{O_2}$之**中點**。

壹、研究動機

三角形的歐拉線依序經過其外心、重心、九點圓(或稱歐拉圓)圓心和垂心。這讓我們聯想到**此歐拉線**是否可以推廣到**其它邊數的圓內接多邊形**，因此決定以此當作研究題材。

貳、研究目的

本研究的目的在探討並尋找其它圓內接多邊形，看看是否符合：**外心、重心、歐拉圓圓心和垂心四點共線的性質**，並觀察**這四心之間的距離比**是否有一定的關係。如果進一步考慮三角形的內心和旁心三角形的外心，看看和三角形的其它心是否有共線的現象？如果有，可否類推到其它**雙心多邊形**？最後試著利用所定義的**多邊形重心**、圓內接多邊形的**歐拉圓圓心**、**垂心**以及**旁心多邊形的外心**的性質，證明此結果為真。

參、研究設備及器材

本研究主要利用 **GSP** 與**Geogebra** 等電腦動態幾何軟體進行研究問題的幾何實驗，透過實驗觀察、猜測與驗證，然後提出研究結果並加以證明。

肆、研究過程與方法

一、文獻探討與前置研究

本研究範圍涉及圓內接多邊形的**外心、重心、歐拉圓圓心和垂心四點的共線**，以及圓內接多邊形的**相似、伸縮、旋轉、位似變換**，因此將先介紹位似變換、歐拉線、九點圓的意義，以及多邊形的重心、圓內接多邊形的歐拉圓圓心和垂心之定義如下：

(一)位似變換

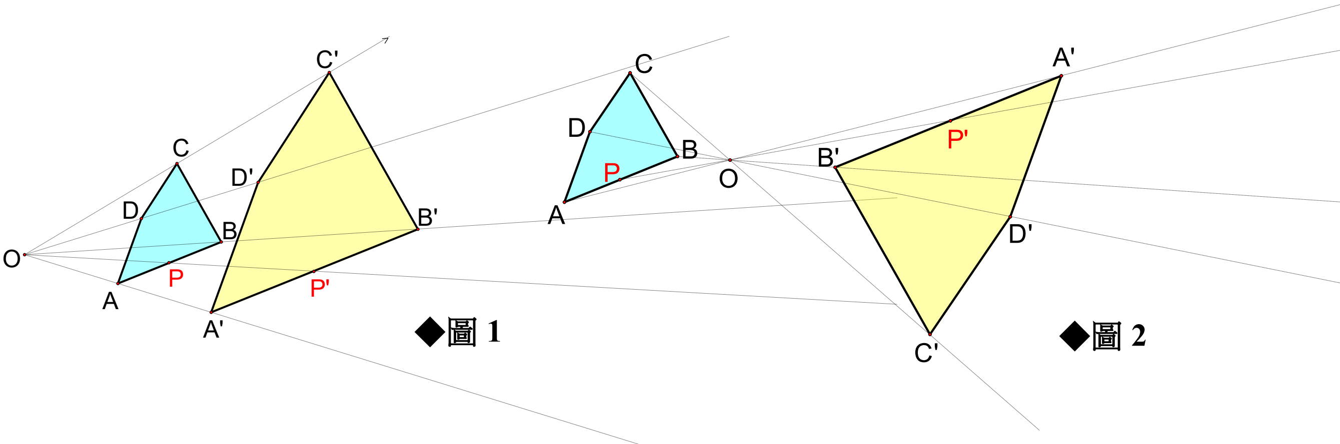
1. 定義

O是平面π上一個定點，H是平面上的變換。若對於任一對應點P、P'，都有$\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$($k$為非零實數)，則稱$H$為位似變換，記為$H(O,k)$，$O$叫做位似中心，$k$叫做位似比。定義中的條件 $\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$ 等價於如下三個條件：

(1)O，P，P'共線；

(2)$\overline{OP'}=|k|\overline{OP}$；

(3)當$k>0$時，P，P'在O點同側，如圖 1，此時O點叫做外位似中心；當$k<0$時，P，P'在O點異側，如圖 2，此時O點叫做內位似中心。(參考資料 1)



◆圖 1　◆圖 2

2. 性質

(1)位似變換是相似變換，所以位似變換具有相似變換的所有性質。

(2)在位似變換下，位似中心是不變點，過位似中心的直線是不變直線。

(3)在位似變換下，對應線段之比相等，對應角相等，不過中心的對應直線平行。

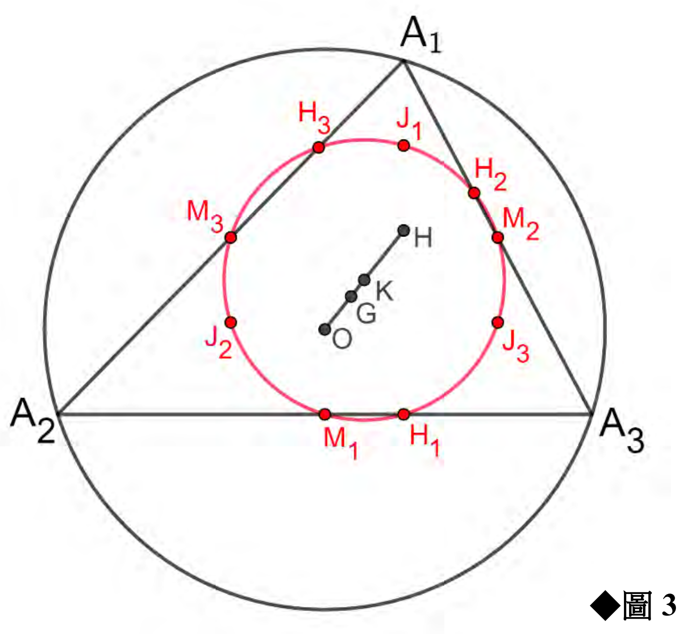
(4)位似圖形一定是相似圖形，並且位似圖形的對應線段平行，過對應頂點的直線共點(位似中心)。(參考資料 1)

(二)歐拉線與九點圓

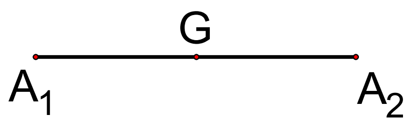
1. 歐拉線：任意三角形的垂心H、重心G和外心O，三點共線，且$\overline{HG}=2\overline{GO}$，而這三點所在的直線通常稱為三角形的歐拉線。
2. 九點圓：任意三角形三條高的垂足、三邊的中點，以及垂心與頂點的三條連線的中點，這九點共圓，這個圓通常稱為三角形的九點圓，或稱歐拉圓。

如圖 3，在$\Delta A_1A_2A_3$中，如下的九點共圓：三邊的中點M_1、M_2、M_3，從三個頂點向對邊所作垂線的垂足H_1、H_2、H_3，垂心到三個頂點所連線段的中點J_1、J_2、J_3等九個點，且九點圓的圓心K是其外心O與垂心H所連線段的中點。另外，圓心K到重心G的距離是外心O到重心G距離的一半。此四點所在的直線就是三角形的歐拉線。

(參考資料 2)



◆圖 3



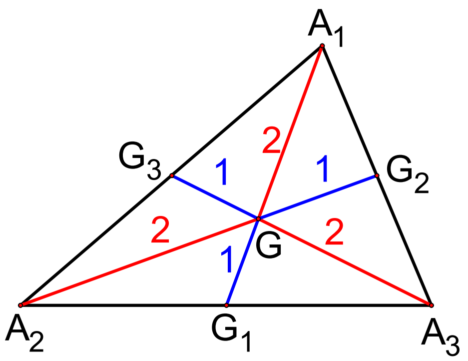
◆圖 4

(三)多邊形的中線和重心定義

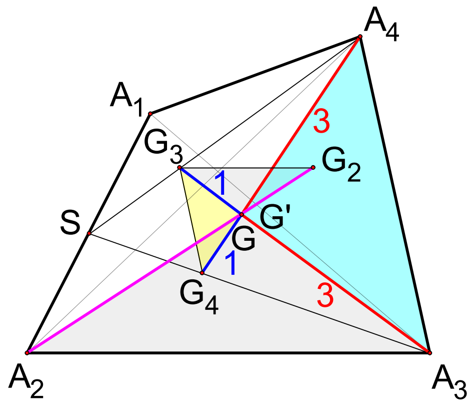
1. 中線：如圖 4，我們把線段的重心定義為它的中點。這裡我們把線段看作為兩邊形，在這種情形，如圖 5，$\Delta A_1A_2A_3$的中線可以定義為連接三角形頂點和對邊重心的線段；把連接四邊形$A_1A_2A_3A_4$頂點與其餘三個頂點所組成三角形的重心G_1，G_2，G_3，G_4的線段叫做四邊形的中線。依此類推，我們把n邊形的中線定義為連接n邊形的頂點與其餘$n-1$個頂點所構成的$(n-1)$邊形的重心之線段。
2. 重心：三角形的三條中線交於同一點，且由頂點算起每條中線被這個點分成比$2:1$的線段，三角形三條中線的交點叫做三角形的重心。四邊形的四條中線交於

同一點，而且由頂點算起每條中線被這個點分成比3：1的線段，四邊形四條中線的交點叫做四邊形的重心。依此類推，n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的所有中線交於同一點，而且由頂點算起每條中線被這個點分成比$(n-1)$：1的線段，n邊形n條中線的交點叫做n邊形的重心。

3. k階中線：連接n邊形的任意k個頂點所組成的k邊形的重心和其餘$n-k$個頂點所組成的$(n-k)$邊形的重心的線段，叫做n邊形的k階中線$(k<n)$。這樣k階中線同時也是$(n-k)$階中線。前面所定義的n邊形的中線可以叫做一階中線。(參考資料 3)



◆圖 5

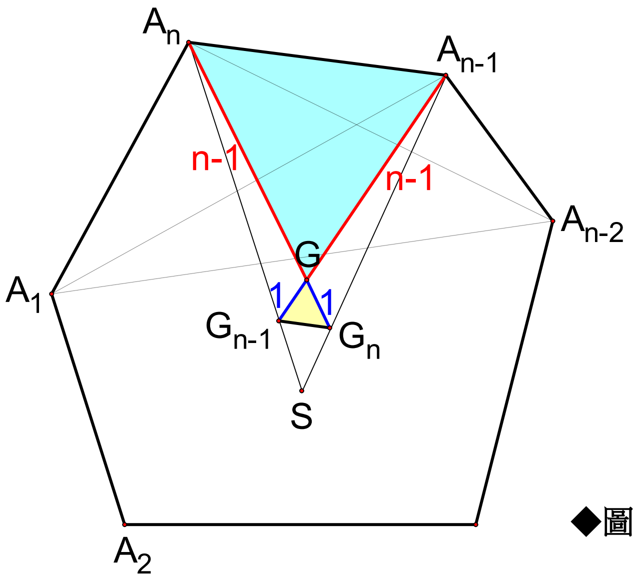


◆圖 6

【證明】

1. 如圖 6，以S表示$\overline{A_1A_2}$的重心(中點)，以G_4和G_3分別表示$\Delta A_1A_2A_3$和$\Delta A_1A_2A_4$的重心；再令G是四邊形的中線$\overline{A_3G_3}$和$\overline{A_4G_4}$的交點。因為$\overline{SA_3}$和$\overline{SA_4}$分別是$\Delta A_1A_2A_3$和$\Delta A_1A_2A_4$的中線，所以 $\frac{\overline{G_3A_4}}{\overline{SG_3}}=\frac{\overline{G_4A_3}}{\overline{SG_4}}=\frac{2}{1}$，推知 $\frac{\overline{SA_3}}{\overline{SG_4}}=\frac{\overline{SG_4}+\overline{G_4A_3}}{\overline{SG_4}}=\frac{1+2}{1}=\frac{3}{1}$，同理 $\frac{\overline{SA_4}}{\overline{SG_3}}=\frac{3}{1}$，因而 $\frac{\overline{SA_3}}{\overline{SG_4}}=\frac{\overline{SA_4}}{\overline{SG_3}}$，故 $\overline{G_3G_4}/\!/\overline{A_4A_3}$，且 $\frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{G_3G_4}}=\frac{\overline{SA_3}}{\overline{SG_4}}=\frac{\overline{SA_4}}{\overline{SG_3}}=\frac{3}{1}$。
2. 由$\Delta GG_3G_4\sim\Delta GA_3A_4$，可得$\frac{\overline{GA_4}}{\overline{GG_4}}=\frac{\overline{GA_3}}{\overline{GG_3}}=\frac{\overline{A_3A_4}}{\overline{G_3G_4}}=\frac{3}{1}$。設$G'$是四邊形的中線$\overline{A_3G_3}$和$\overline{A_2G_2}$的交點，同理可得 $\frac{\overline{G'A_2}}{\overline{G'G_2}}=\frac{\overline{G'A_3}}{\overline{G'G_3}}=\frac{\overline{A_3A_2}}{\overline{G_3G_2}}=\frac{3}{1}$，推知 $\frac{\overline{GA_3}}{\overline{GG_3}}=\frac{\overline{G'A_3}}{\overline{G'G_3}}=\frac{3}{1}$，所以$\boldsymbol{G'=G}$。這樣，四邊形的**任意兩條相鄰的中線**(即由相鄰頂點所作的中線)都被交點G分成比3：1的線段。由此推出：四邊形所有的中線經過同一個點G，且這個點把每一條中線都分成比3：1的線段。而**四邊形四條中線的交點G叫做四邊形的重心**。
3. 假設對於所有的$k<n$，我們已把k邊形的中線定義為**連接**k邊形的**頂點**與其餘$k-1$個頂點所構成的$(k-1)$邊形的**重心的線段**，而且假設對於所有的$k<n$，

把k邊形的重心定義為**它的所有中線的交點**。我們還假設當$k < n$時，k邊形的中線被它們的交點(**k邊形的重心**)**分成比$(k-1)$：1的線段**(由頂點算起)。



◆**圖 7**

4. 接著證明：n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的所有中線交於同一點，而且每條中線被這個點分成比$(n-1)$：1的線段(由頂點算起)。如圖 7，設S是$(n-2)$邊形$A_1A_2\cdots A_{n-2}$的重心，那麼$\overline{SA_{n-1}}$和$\overline{SA_n}$是$(n-1)$邊形$A_1A_2\cdots A_{n-2}A_{n-1}$和$A_1A_2\cdots A_{n-2}A_n$的中線。若$G_n$和$G_{n-1}$是這兩個$(n-1)$邊形的重心，那麼根據數學歸納法的假設，

有 $\frac{\overline{G_{n-1}A_n}}{\overline{SG_{n-1}}}=\frac{\overline{G_nA_{n-1}}}{\overline{SG_n}}=\frac{(n-2)}{1}$，推知 $\frac{\overline{SA_{n-1}}}{\overline{SG_n}}=\frac{\overline{SG_n}+\overline{G_nA_{n-1}}}{\overline{SG_n}}=\frac{1+(n-2)}{1}=\frac{n-1}{1}$，

同理 $\frac{\overline{SA_n}}{\overline{SG_{n-1}}}=\frac{n-1}{1}$，因而 $\frac{\overline{SA_{n-1}}}{\overline{SG_n}}=\frac{\overline{SA_n}}{\overline{SG_{n-1}}}$ ，故$\overline{G_{n-1}G_n}//\overline{A_nA_{n-1}}$，

且 $\frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{\overline{G_{n-1}G_n}}=\frac{\overline{SA_{n-1}}}{\overline{SG_n}}=\frac{\overline{SA_n}}{\overline{SG_{n-1}}}=\frac{n-1}{1}$。用$G$表示$n$邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的中線$\overline{G_{n-1}A_{n-1}}$和$\overline{G_nA_n}$的交點。由$\Delta GG_{n-1}G_n\sim\Delta GA_{n-1}A_n$，可得 $\frac{\overline{GA_{n-1}}}{\overline{GG_{n-1}}}=\frac{\overline{GA_n}}{\overline{GG_n}}=\frac{\overline{A_{n-1}A_n}}{\overline{G_{n-1}G_n}}=\frac{n-1}{1}$。

同 2.可知：**n邊形的任意兩相鄰中線都被交點G分成比$(n-1)$：1的線段**。

由此推出：**n邊形的所有中線交於同一點G，且被這點分成比$(n-1)$：1的線段**。

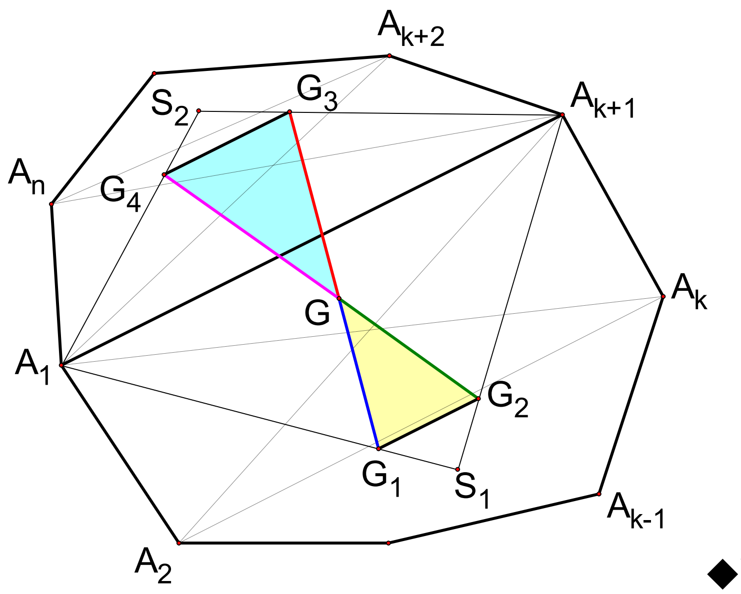
5. 現在我們把n邊形的重心定義為它的所有中線的交點，然後把$(n+1)$邊形的中線定義為連接$(n+1)$邊形的**頂點**與其餘n個頂點所構成的n邊形的**重心**的線段。數學歸納法使我們能夠斷定：我們給出的**n邊形的中線與重心的定義對於任意的$n \geq 3$都有意義**。

6. 如圖 8，設S_1和S_2分別是$(k-1)$邊形$A_2A_3\cdots A_k$和$(n-k-1)$邊形$A_{k+2}A_{k+3}\cdots A_n$

的重心，G_1和G_2分別是k邊形$A_1A_2\cdots A_k$和$A_2A_3\cdots A_{k+1}$的重心，G_3和G_4分別是$(n-k)$邊形$A_{k+1}A_{k+2}\cdots A_n$和$A_{k+2}A_{k+3}\cdots A_nA_1$的重心。那麼

$\frac{\overline{G_1S_1}}{\overline{G_1A_1}}=\frac{\overline{G_2S_1}}{\overline{G_2A_{k+1}}}=\frac{1}{k-1}$，且$\overline{G_1G_2}//\overline{A_1A_{k+1}}$；$\frac{\overline{G_3S_2}}{\overline{G_3A_{k+1}}}=\frac{\overline{G_4S_2}}{\overline{G_4A_1}}=\frac{1}{n-k-1}$，且$\overline{G_3G_4}//\overline{A_1A_{k+1}}$。

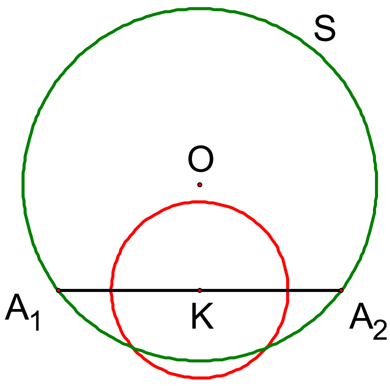
7. 現在如果G是k階中線$\overline{G_2G_4}$與$\overline{G_1G_3}$的交點，那麼由$\Delta GG_1G_2\sim\Delta GG_3G_4$，我們有$\frac{\overline{GG_1}}{\overline{GG_3}}=\frac{\overline{GG_2}}{\overline{GG_4}}=\frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{G_3G_4}}=\frac{\frac{1}{k}\overline{A_1A_{k+1}}}{\frac{1}{n-k}\overline{A_1A_{k+1}}}=\frac{n-k}{k}$。同 2.可知：$n$邊形的**任意兩相鄰的$k$階中線都被交點$G$分成比$(n-k)$：$k$的線段**。由此推出：**$n$邊形的所有$k$階中線交於同一點$G$，且被這點成比$(n-k)$：$k$的線段**。



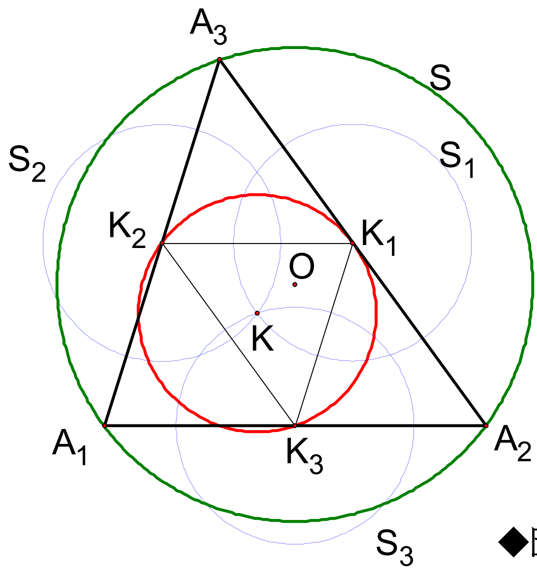
◆**圖 8**

(四)圓內接多邊形的歐拉圓圓心定義

1. **如圖 9，半徑為R的圓S的弦$\overline{A_1A_2}$的歐拉圓指的是半徑等於$\frac{R}{2}$，圓心在弦$\overline{A_1A_2}$中點的圓。如圖 10，內接於圓S的$\Delta A_1A_2A_3$，其三邊的三個歐拉圓交於同一點K，K是經過三個歐拉圓的圓心，半徑等於$\frac{R}{2}$的圓之圓心。依此定義的圓，就叫作$\Delta A_1A_2A_3$的歐拉圓。**
2. **假設我們已經定義內接於半徑為R的圓S之n邊形的歐拉圓，而且知道它的半徑等於$\frac{R}{2}$。現在我們考慮內接於圓S的$(n+1)$邊形$A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$。在這種情形， $n+1$個n邊形$A_2A_3\cdots A_{n+1}$，$A_1A_3\cdots A_{n+1}$，⋯，$A_1A_2\cdots A_n$的歐拉圓交於同一個點K，這點K是經過$n+1$個歐拉圓的圓心，半徑等於$\frac{R}{2}$的圓之圓心，依此定義的圓，就叫做$(n+1)$邊形$A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$的歐拉圓。**（參考資料 3）



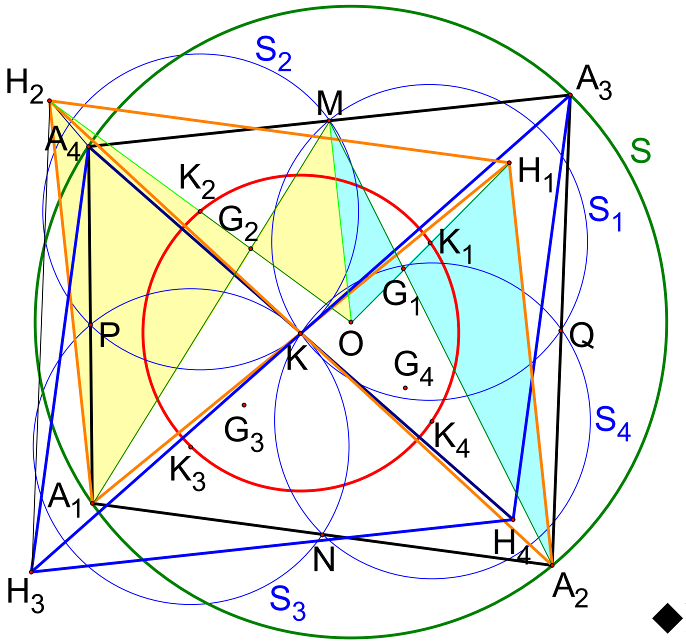
◆圖 9



◆圖 10

【證明】

1. 如圖 10，連接$\Delta A_1A_2A_3$各邊中點K_1，K_2，K_3，則$\overline{K_1K_2}=\frac{1}{2}\overline{A_1A_2}$，$\overline{K_2K_3}=\frac{1}{2}\overline{A_2A_3}$，$\overline{K_3K_1}=\frac{1}{2}\overline{A_3A_1}$，所以**$\Delta K_1K_2K_3 \sim \Delta A_1A_2A_3$且相似係數是$\frac{1}{2}$**。因此$\Delta K_1K_2K_3$的外接圓半徑為$\frac{R}{2}$，若以$K_1$，$K_2$，$K_3$為圓心，$\frac{R}{2}$為半徑畫圓，此三圓會共一個交點$K$，此時**$K$點就是$\Delta K_1K_2K_3$的外心**。故以$K$點為圓心，$\frac{R}{2}$為半徑畫圓，則此圓必過$K_1$，$K_2$，$K_3$三點，也就是**$\Delta A_1A_2A_3$的歐拉圓**。



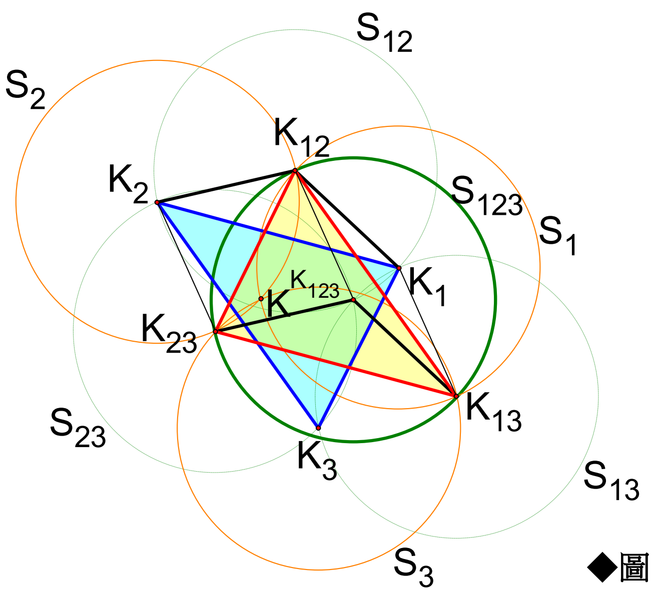
◆圖 11

2. 如圖 11，設$A_1A_2A_3A_4$是圓$\boldsymbol{S}$的內接四邊形。$\Delta A_1A_2A_3$的歐拉圓S_4經過$\overline{H_4A_1}$、$\overline{H_4A_2}$、$\overline{H_4A_3}$的中點，H_4是$\Delta A_1A_2A_3$三條高線的交點，所以它與圓S中心位似；而相似中心在點H_4，相似係數是$\frac{1}{2}$；即可得**$\overline{H_4A_4}$的中點在圓S_4**上。設H_1、H_2、H_3分別是

$\Delta A_2A_3A_4$、$\Delta A_1A_3A_4$、$\Delta A_1A_2A_4$三條高線的交點，同理可證，$\boldsymbol{\overline{H_1A_1}}$**的中點在圓**$\boldsymbol{S_1}$上，$\boldsymbol{\overline{H_2A_2}}$**的中點在圓**$\boldsymbol{S_2}$**上**，$\boldsymbol{\overline{H_3A_3}}$**的中點在圓**$\boldsymbol{S_3}$上，因此，剩下的問題只需證明**這些線段的中點重合**即可。

3. 因為$\overline{A_1H_2}$和$\overline{A_2H_1}$均垂直於$\overline{A_3A_4}$，所以$\overline{A_1H_2}//\overline{A_2H_1}$。取$\overline{A_3A_4}$的中點$M$，連接$\overline{OM}$，則$\overline{OM}$也垂直於$\overline{A_3A_4}$。再連接$\overline{A_1M}$，則**必交**$\boldsymbol{\overline{H_2O}}$**於**$\boldsymbol{\Delta A_1A_3A_4}$**的重心**$\boldsymbol{G_2}$，推知$\overline{A_1H_2} = 2\overline{OM}$。同理可得，$\overline{A_2H_1} = 2\overline{OM}$，即$\overline{A_1H_2} = \overline{A_2H_1}$。故**四邊形**$\boldsymbol{A_1H_2H_1A_2}$**是平行四邊形**。

4. 因為四邊形$A_1H_2H_1A_2$是平行四邊形，所以$\overline{H_1A_1}$的中點和$\overline{H_2A_2}$的中點重合，且此點同時**在圓**$\boldsymbol{S_1}$**和圓**$\boldsymbol{S_2}$上。同理可證：$A_3H_4H_3A_4$也是平行四邊形，$\overline{H_3A_3}$的中點和$\overline{H_4A_4}$的中點重合，且此點同時**在圓**$\boldsymbol{S_3}$**和圓**$\boldsymbol{S_4}$上；$A_2H_3H_2A_3$也是平行四邊形，$\overline{H_2A_2}$的中點和$\overline{H_3A_3}$的中點重合，且此點同時**在圓**$\boldsymbol{S_2}$**和圓**$\boldsymbol{S_3}$上；$A_1H_4H_1A_4$也是平行四邊形，$\overline{H_1A_1}$的中點和$\overline{H_4A_4}$的中點重合，且此點同時**在圓**$\boldsymbol{S_1}$**和圓**$\boldsymbol{S_4}$上。故此四圓會共一個交點K，即$\boldsymbol{K}$**點為四邊形**$\boldsymbol{K_1K_2K_3K_4}$**的外心**。若以$K$點為圓心，$\frac{R}{2}$為半徑畫圓，則此圓必過$K_1$，$K_2$，$K_3$，$K_4$四點，也就是**四邊形**$\boldsymbol{A_1A_2A_3A_4}$**的歐拉圓。**



◆圖 12

5. 現在我們假設**邊數**$\boldsymbol{k}$**不大於**$\boldsymbol{n}$$(n \geq 4)$**的所有**$\boldsymbol{k}$**邊形都存在歐拉圓**，再來考慮圓$S$的內接$(n+1)$邊形$A_1A_2 \cdots A_nA_{n+1}$。為了證明$(n+1)$個$n$邊形$A_2A_3 \cdots A_{n+1}$，$A_1A_3 \cdots A_{n+1}$，⋯，$A_1A_2 \cdots A_n$的歐拉圓交於同一點，**只需證明其中每相鄰三個，例如**$\boldsymbol{S_1}$**，**$\boldsymbol{S_2}$**，**$\boldsymbol{S_3}$**交於同一點就行了**。以S_{12}，S_{13}，S_{23}表示$(n-1)$邊形

$A_3A_4 \cdots A_{n+1}$，$A_2A_4A_5 \cdots A_{n+1}$，⋯，$A_1A_4A_5 \cdots A_{n+1}$的歐拉圓，用K_{12}，K_{13}，K_{23}表示它們的圓心；用K_1，K_2，K_3表示圓S_1，S_2，S_3的圓心，用K_{123}表示$(n-2)$邊形$A_4A_5 \cdots A_{n+1}$的歐拉圓S_{123}的圓心。在這種情形，我們得到圖 12，**只要可以證明$\Delta \boldsymbol{K_1K_2K_3} \cong \Delta \boldsymbol{K_{23}K_{13}K_{12}}$**就大功告成。

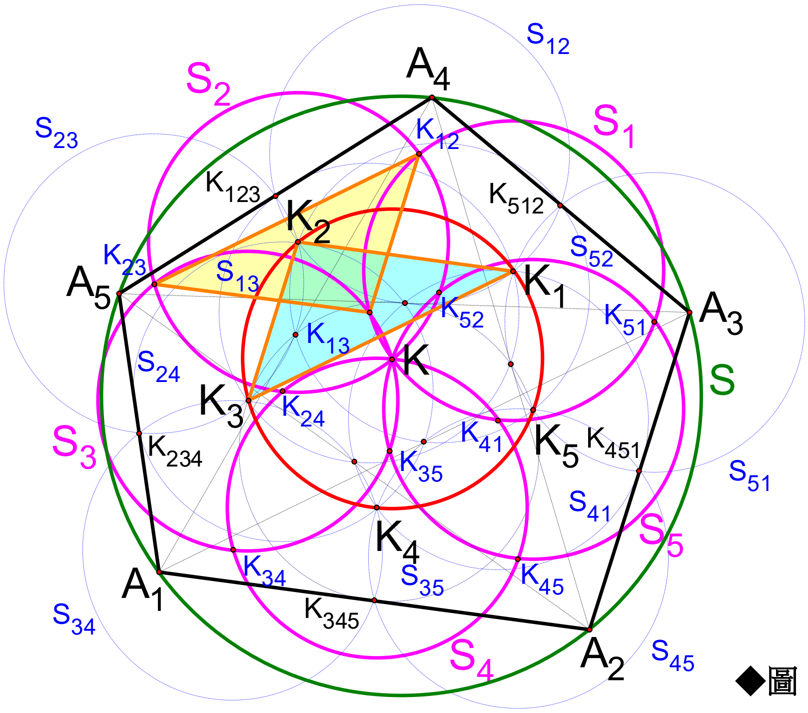
6. 首先考慮$\Delta K_1K_2K_{12}$和$\Delta K_{23}K_{13}K_{123}$，在這兩個三角形中，

$\overline{K_{12}K_1} = \overline{K_{12}K_2} = \overline{K_{123}K_{23}} = \overline{K_{123}K_{13}} = \frac{R}{2}$，

$\angle K_1K_{12}K_2 = \angle K_1K_{12}K_{123} + \angle K_{123}K_{12}K_2 = 2\angle K_{13}K_{12}K_{123} + 2\angle K_{123}K_{12}K_{23}$

$= 2\angle K_{13}K_{12}K_{23}$(菱形對角線平分對角)，

而且$\angle K_{23}K_{123}K_{13} = 2\angle K_{13}K_{12}K_{23}$，因為它們是**$\Delta K_{12}K_{13}K_{23}$的外接圓之同弧上的圓心角和圓周角**，故$\Delta K_1K_2K_{12} \cong \Delta K_{23}K_{13}K_{123}(SAS)$，推得$\overline{K_1K_2} = \overline{K_{23}K_{13}}$；同理可證，$\overline{K_1K_3} = \overline{K_{23}K_{12}}$和$\overline{K_2K_3} = \overline{K_{13}K_{12}}$，從而$\Delta K_1K_2K_3 \cong \Delta K_{23}K_{13}K_{12}(SSS)$，又已知**圓$\boldsymbol{S_{23}}$，$\boldsymbol{S_{13}}$和$\boldsymbol{S_{12}}$交於同一點$\boldsymbol{K_{123}}$**，可以推知**圓$\boldsymbol{S_1}$，$\boldsymbol{S_2}$和$\boldsymbol{S_3}$交於同一點$\boldsymbol{K}$**。

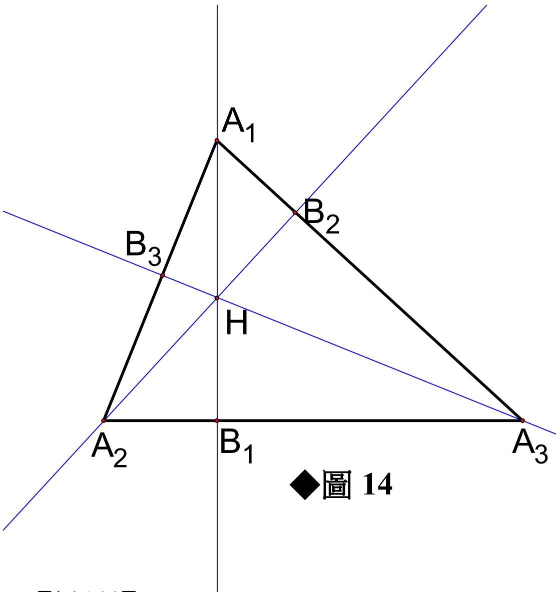


◆**圖 13**

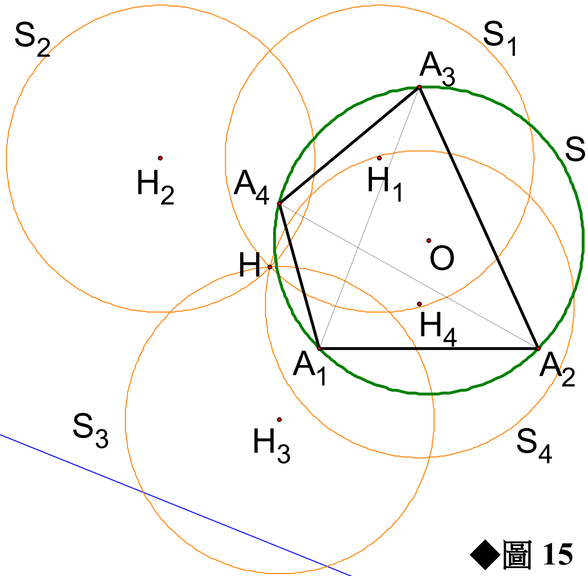
7. 如圖 13，因為$n(n \geq 5)$個圓(其中任意兩個都不重合)中，**每相鄰三個都相交於同一點**，那麼**所有的圓也交於同一點**，所以$(n+1)$個歐拉圓S_1，S_2，⋯，S_n，S_{n+1}交於同一點，即圓內接$(n+1)$多邊形也有歐拉圓圓心。故由數學歸納法可知：**任意圓內接多邊形必有歐拉圓圓心**。

(五)圓內接多邊形的垂心定義

1. 如圖 14，三角形的垂心定義為它的三條高線的交點。
2. 如圖 15，在圓S的內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$中，H_1，H_2，H_3，H_4分別表示$\Delta A_2A_3A_4$，$\Delta A_1A_3A_4$，$\Delta A_1A_2A_4$，$\Delta A_1A_2A_3$的垂心，與圓S有相同半徑，且圓心在點H_1，H_2，H_3，H_4的圓都交於同一點H，這個點就叫做四邊形$A_1A_2A_3A_4$的垂心。
3. 假設我們已經定義了內接於半徑為R的圓S之n邊形$A_1A_2\cdots A_n$的垂心，且給定了S的內接$(n+1)$邊形$A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$。用H_1，H_2，$\cdots$，H_{n+1}分別表示$(n+1)$個n邊形$A_2A_3\cdots A_{n+1}$，$A_1A_3\cdots A_{n+1}$，$\cdots$，$A_1A_2\cdots A_n$的垂心。則與圓S有相同半徑R，且圓心在點H_1，H_2，$\cdots$，H_{n+1}的圓都交於同一點H。這個點叫做$(n+1)$邊形$A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$的垂心。(參考資料 3)



◆圖 14



◆圖 15

【證明】

1. 如圖 16，連接$\overline{A_3H_4}$和$\overline{A_4H_3}$，欲證明**四邊形$A_3H_4H_3A_4$為平行四邊形**。

因為$\overline{A_3H_4}\perp\overline{A_1A_2}$且$\overline{A_4H_3}\perp\overline{A_1A_2}$，所以$\overline{A_3H_4}//\overline{A_4H_3}$。設$\overline{A_1A_2}$的中點為$M$，

再連接$\overline{A_3M}$和$\overline{A_4M}$，則分別交$\overline{H_3O}$和$\overline{H_4O}$於$\Delta A_1A_2A_4$和$\Delta A_1A_2A_3$的重心G_3、G_4，

則$\overline{A_3H_4}:\overline{OM}=\overline{H_4G_4}:\overline{G_4O}=2:1$且$\overline{A_4H_3}:\overline{OM}=\overline{H_3G_3}:\overline{G_3O}=2:1$，

推得$\overline{A_3H_4}=2\overline{OM}=\overline{A_4H_3}$，所以**四邊形$A_3H_4H_3A_4$為平行四邊形**。

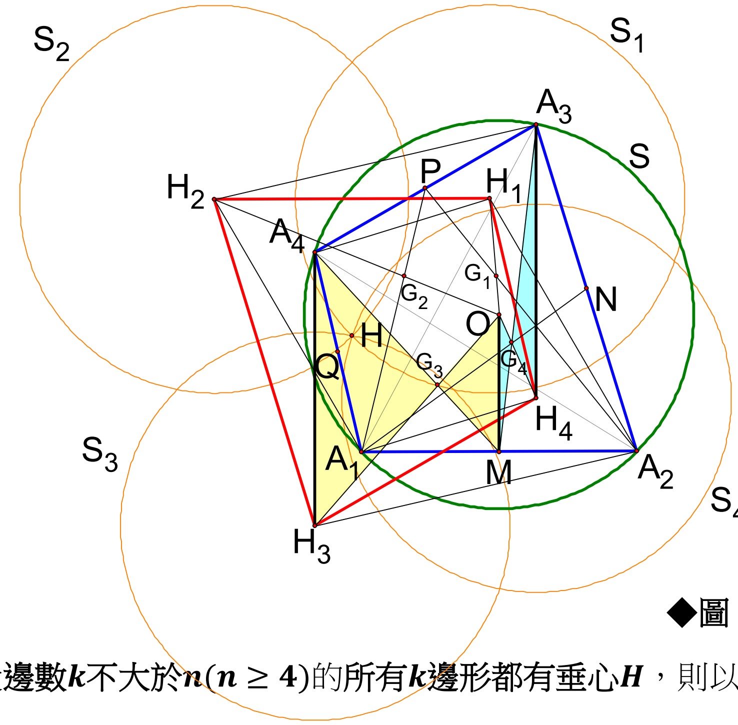
從而$\overline{A_3A_4}=\overline{H_3H_4}$且$\overline{A_3A_4}//\overline{H_3H_4}$。同理可證，$\overline{A_4A_1}=\overline{H_4H_1}$且$\overline{A_4A_1}//\overline{H_4H_1}$；

$\overline{A_1A_2}=\overline{H_1H_2}$且$\overline{A_1A_2}//\overline{H_1H_2}$；$\overline{A_2A_3}=\overline{H_2H_3}$且$\overline{A_2A_3}//\overline{H_2H_3}$，

故**四邊形$H_1H_2H_3H_4$** $\cong$**四邊形$A_1A_2A_3A_4$**。

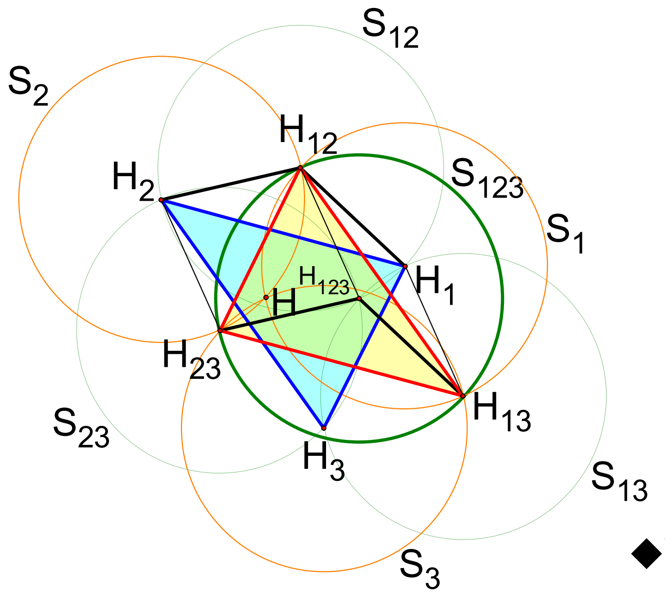
2. 又**四邊形$\boldsymbol{A_1A_2A_3A_4}$為圓$\boldsymbol{S}$的內接四邊形**，所以與圓$S$有相同半徑，且圓心在點$A_1$，$A_2$，$A_3$，$A_4$的圓都交於同一點$O$。從而與圓$S$有相同半徑，且圓心在點$H_1$，$H_2$，$H_3$，$H_4$的圓都交於同一點$H$，這點就是**四邊形$\boldsymbol{A_1A_2A_3A_4}$的垂心**。

(參考資料 4)



◆圖 16

3. 現在我們假設**邊數$\boldsymbol{k}$不大於$\boldsymbol{n}$($\boldsymbol{n \geq 4}$)的所有$\boldsymbol{k}$邊形都有垂心$\boldsymbol{H}$**，則以H點為圓心，以原內接k邊形的半徑R為半徑的圓，會經過其餘k個$(k-1)$邊形$A_2A_3\cdots A_k$，$A_1A_3\cdots A_k$，$\cdots$，$A_1A_2\cdots A_{k-1}$的垂心，不妨稱此圓為**$\boldsymbol{k}$邊形的垂心圓**。反過來說，**以其餘$\boldsymbol{k}$個垂心為圓心，$\boldsymbol{R}$為半徑畫出的圓都會交於同一點$\boldsymbol{H}$**。



◆圖 17

4. 再來考慮圓S的內接$(n+1)$邊形$A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$。為了證明$(n+1)$個n邊形$A_2A_3\cdots A_{n+1}$，$A_1A_3\cdots A_{n+1}$，$\cdots$，$A_1A_2\cdots A_n$的垂心圓交於同一點，只需證明其中**每相鄰三個，例如$\boldsymbol{S_1}$，$\boldsymbol{S_2}$，$\boldsymbol{S_3}$交於同一點**就行了。以S_{12}，S_{13}，S_{23}表示$(n-1)$邊

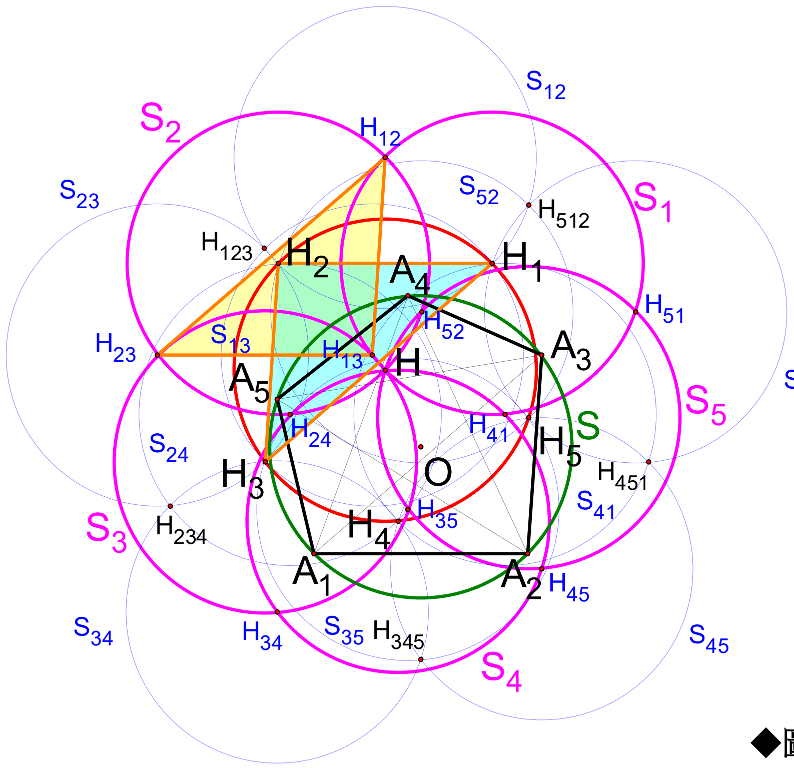
形$A_3A_4\cdots A_{n+1}$，$A_2A_4A_5\cdots A_{n+1}$，⋯，$A_1A_4A_5\cdots A_{n+1}$的垂心圓，用H_{12}，H_{13}，H_{23}表示它們的圓心；用H_1，H_2，H_3表示圓S_1，S_2，S_3的圓心，用H_{123}表示$(n-2)$邊形$A_4A_5\cdots A_{n+1}$的**垂心圓**S_{123}的圓心。在這種情形，我們得到圖 17，**只要可以證明**$\boldsymbol{\Delta H_1H_2H_3 \cong \Delta H_{23}H_{13}H_{12}}$就大功告成。

5. 首先考慮$\Delta H_1H_2H_{12}$和$\Delta H_{23}H_{13}H_{123}$，在這兩個三角形中，

   $\overline{H_{12}H_1} = \overline{H_{12}H_2} = \overline{H_{123}H_{23}} = \overline{H_{123}H_{13}} = R$，

   $$\angle H_1H_{12}H_2 = \angle H_1H_{12}H_{123} + \angle H_{123}H_{12}H_2 = 2\angle H_{13}H_{12}H_{123} + 2\angle H_{123}H_{12}H_{23}$$
   $$= 2\angle H_{13}H_{12}H_{23}\text{(菱形對角線平分對角)，}$$

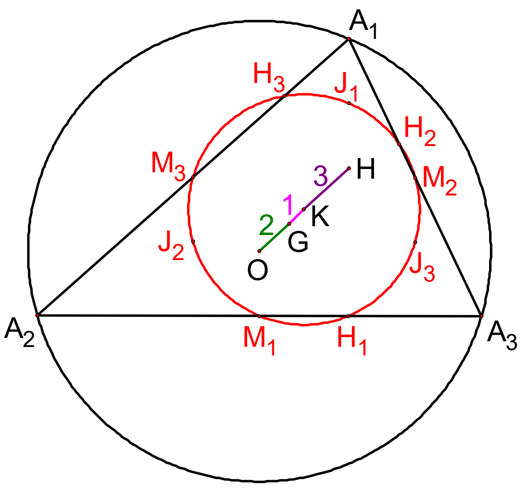
   而且$\angle H_{23}H_{123}H_{13} = 2\angle H_{13}H_{12}H_{23}$，因為它們是$\boldsymbol{\Delta H_{12}H_{13}H_{23}}$**的外接圓之同弧上的圓心角和圓周角**，故$\Delta H_1H_2H_{12} \cong \Delta H_{23}H_{13}H_{123}(SAS)$，推得$\overline{H_1H_2} = \overline{H_{23}H_{13}}$；同理可證，$\overline{H_1H_3} = \overline{H_{23}H_{12}}$和$\overline{H_2H_3} = \overline{H_{13}H_{12}}$，從而$\Delta H_1H_2H_3 \cong \Delta H_{23}H_{13}H_{12}(SSS)$，又**已知圓**$\boldsymbol{S_{23}}$**，**$\boldsymbol{S_{13}}$**和**$\boldsymbol{S_{12}}$**交於同一點**$\boldsymbol{H_{123}}$**，可以推知圓**$\boldsymbol{S_1}$**，**$\boldsymbol{S_2}$**和**$\boldsymbol{S_3}$**交於同一點**$\boldsymbol{H}$。



◆圖 18

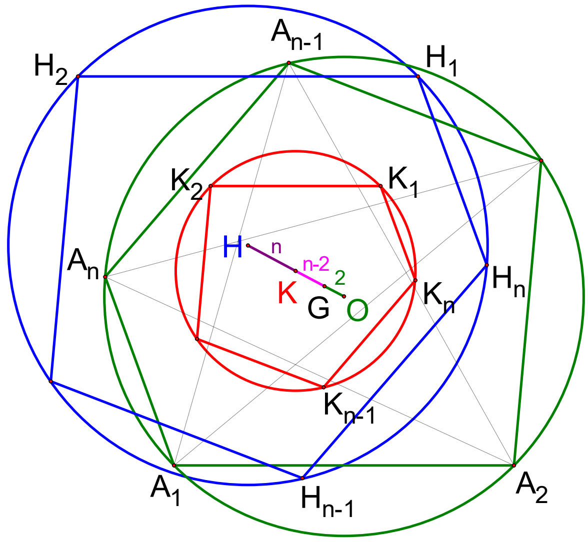
6. 如圖 18，因為如果$n(n \geq 5)$個圓(其中任意兩個都不重合)中，**每相鄰三個都相交於同一點，那麼所有的圓也交於同一點**，所以$(n+1)$個垂心圓S_1，S_2，⋯，S_n，S_{n+1}交於同一點，即圓內接$(n+1)$多邊形也有垂心。故由數學歸納法可知：**任意圓內接多邊形必有垂心**。

二、研究架構



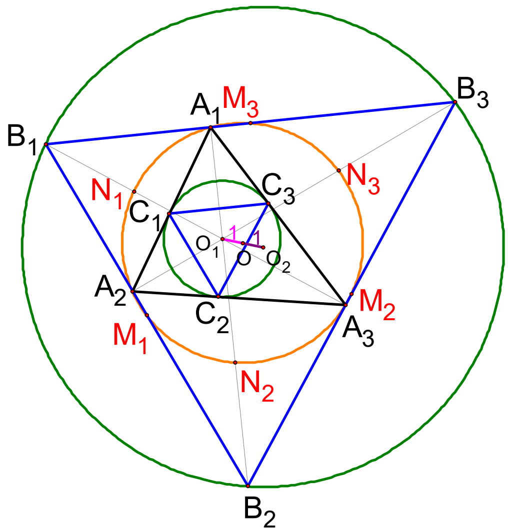
三角形 $\boldsymbol{O}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{H}$ 四心共線

類推



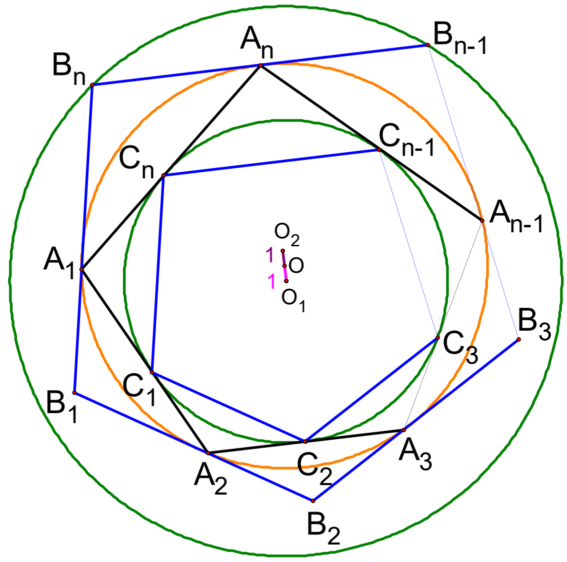
圓內接多邊形 $\boldsymbol{O}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{H}$ 四心共線

延伸思考



三角形 $\boldsymbol{O_1}$、$\boldsymbol{O}$、$\boldsymbol{O_2}$ 三心共線

類推



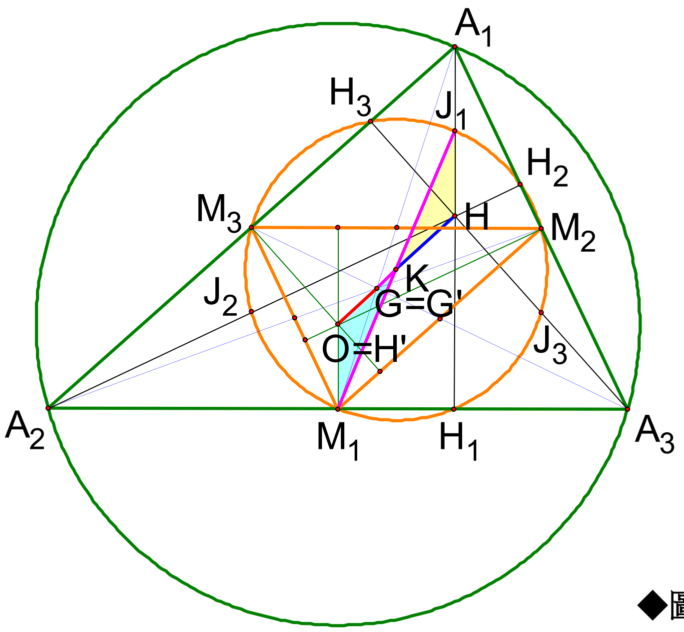
雙心多邊形 $\boldsymbol{O_1}$、$\boldsymbol{O}$、$\boldsymbol{O_2}$ 三心共線

伍、研究結果與討論

一、原定理的證明

【定理一】

如圖 19，在$\Delta A_1A_2A_3$中，如下的九點共圓：三邊的中點M_1、M_2、M_3，從三個頂點向對邊所作垂線的垂足H_1、H_2、H_3，垂心到三個頂點所連線段的中點J_1、J_2、J_3等九個點，且九點圓的圓心K是其外心O與垂心H所連線段的中點。另外，圓心K到重心G的距離是外心O到重心G距離的一半，而此四點所在的直線便是三角形的歐拉線，滿足$\overline{OG}:\overline{GH}=1:2$且$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:1:3$。
（參考資料 5）



◆圖 19

【證明】

1. 如圖 19，$\boldsymbol{M_1}$、$\boldsymbol{M_2}$、$\boldsymbol{M_3}$三點是$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_1A_3}$、$\overline{A_1A_2}$的中點，因為$\Delta A_1A_2A_3$的中垂線正好是$\Delta M_1M_2M_3$的高線，所以$\Delta M_1M_2M_3$的垂心剛好是$\Delta A_1A_2A_3$的外心。又因為$\overline{M_1M_2}//\overline{A_2A_1}$，$\overline{M_2M_3}//\overline{A_3A_2}$，所以四邊形$M_1M_2M_3A_2$為平行四邊形，推知對角線$\overline{M_1M_3}$和$\overline{M_2A_2}$互相平分，同理，$\overline{M_1M_2}$和$\overline{M_3A_3}$、$\overline{M_2M_3}$和$\overline{M_1A_1}$也互相平分，故$\Delta A_1A_2A_3$和$\Delta M_1M_2M_3$有共同重心$G$，由相關位置可以看出$\boldsymbol{\Delta M_1M_2M_3}$**正是**$\boldsymbol{\Delta A_1A_2A_3}$**繞重心**$\boldsymbol{G}$**旋轉**$\boldsymbol{180°}$**之後再縮小一半**的結果。
2. 現在假設$\Delta A_1A_2A_3$的垂心H，外心O和重心G，以及$\Delta M_1M_2M_3$的垂心$H'=O$，外心K和重心$G'=G$，由於在旋轉和縮放時角度的關係不變，$\Delta A_1A_2A_3$的垂心H

自然變換到$\Delta M_1M_2M_3$的垂心H'，又H'同時也是$\Delta A_1A_2A_3$的外心O，所以$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{O}$**三點共線(稱為歐拉線)**且$\boldsymbol{\overline{GH} = 2\overline{OG}}$，**從而**$\boldsymbol{\overline{OG}：\overline{GH} = 1：2}$； 又因$\overline{HA_1}$透過旋轉180°和縮小一半之後，變換到$\overline{OM_1}$，因此 $\overline{HA_1} = 2\overline{OM_1}$。接著再將$\Delta A_1A_2A_3$的外心$O$繞$G$旋轉180°之後再縮小一半，得到$\Delta M_1M_2M_3$ 的外心K，因此$\boldsymbol{\overline{OG} = 2\overline{GK}}$，即$\boldsymbol{K}$**到重心**$\boldsymbol{G}$**的距離是外心**$\boldsymbol{O}$**到重心**$\boldsymbol{G}$**距離的一半**。

3. 由於$\overline{GH} = 2\overline{OG} = 4\overline{GK}$，所以$\overline{KH} = \overline{GH} - \overline{GK} = 3\overline{GK}$，$\overline{OK} = \overline{OG} + \overline{GK} = 3\overline{GK}$，故$\overline{KH} = \overline{OK}$，即$\boldsymbol{K}$**是**$\boldsymbol{\overline{HO}}$**的中點**。推知$\boldsymbol{\overline{OG}：\overline{GK}：\overline{KH} = 2\overline{GK}：\overline{GK}：3\overline{GK}}$
$\boldsymbol{= 2：1：3}$。
4. 又$\overline{HA_1} = 2\overline{OM_1}$，因此若將$\overline{M_1K}$延長之後，會交到$\overline{A_1H}$的中點$J_1$，並且有$\overline{M_1K} = \overline{KJ_1}$，在直角三角形$\Delta M_1H_1J_1$中，$K$是斜邊$\overline{M_1J_1}$的中點，所以有$\overline{KH_1} = \overline{KJ_1} = \overline{KM_1}$。同理可證，$\overline{KH_2} = \overline{KJ_2} = \overline{KM_2}$，$\overline{KH_3} = \overline{KJ_3} = \overline{KM_3}$。
故以K為圓心，$\overline{KM_1}$為半徑的圓**會通過**$\boldsymbol{M_1}$、$\boldsymbol{M_2}$、$\boldsymbol{M_3}$、$\boldsymbol{H_1}$、$\boldsymbol{H_2}$、$\boldsymbol{H_3}$、$\boldsymbol{J_1}$、$\boldsymbol{J_2}$、$\boldsymbol{J_3}$ **九個點，因而此圓又稱為九點圓**。

二、原定理的推廣

我們先以數學動態幾何軟體 GGB 畫出圓內接四邊形和五邊形的四心，發現它們的四心O、G、K、H也會共歐拉線，也和三角形有相對應的結果。

為了證明新的定理，我們需先證明下面這個引理：

【引理一】

設在$\boldsymbol{n}$邊形$\boldsymbol{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}$中用$\boldsymbol{G_1}$表示$\boldsymbol{(n-1)}$邊形$\boldsymbol{A_2A_3\cdots A_n}$的重心，用$\boldsymbol{G_2}$表示$\boldsymbol{(n-1)}$邊形$\boldsymbol{A_1A_3\cdots A_n}$的重心，⋯，用$\boldsymbol{G_n}$表示$\boldsymbol{(n-1)}$邊形$\boldsymbol{A_1A_2\cdots A_{n-1}}$的重心。則$\boldsymbol{n}$邊形$\boldsymbol{G_1G_2\cdots G_{n-1}G_n}$相似於已知$\boldsymbol{n}$邊形$\boldsymbol{A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n}$。（參考資料 3）

【證明】

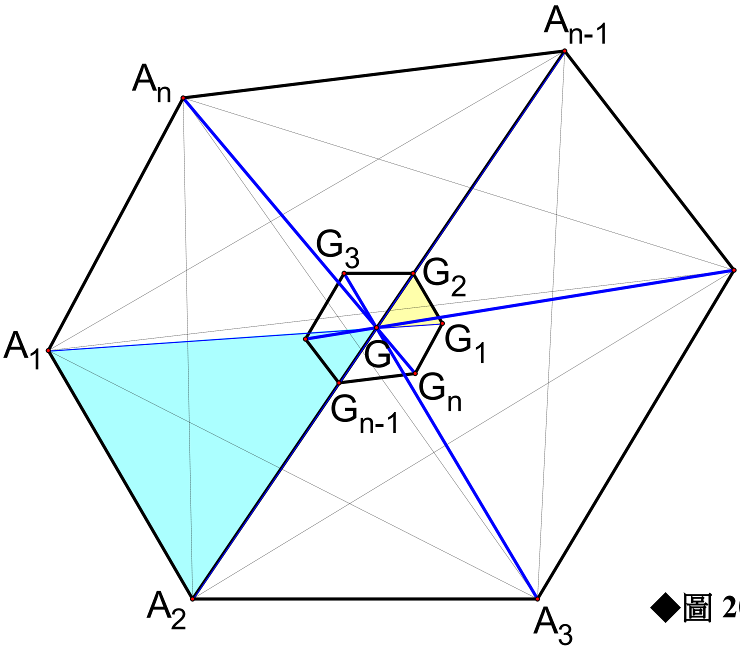
如圖 20，由前面的證明可知：$\overline{G_1G_2}//\overline{A_1A_2}$且$\frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{1}{n-1}$。

同理$\overline{G_2G_3}//\overline{A_2A_3}$且$\frac{\overline{G_2G_3}}{\overline{A_2A_3}} = \frac{1}{n-1}$，⋯，$\overline{G_{n-1}G_n}//\overline{A_{n-1}A_n}$且$\frac{\overline{G_{n-1}G_n}}{\overline{A_{n-1}A_n}} = \frac{1}{n-1}$。

又n邊形的所有中線$\overline{A_1G_1}$、$\overline{A_2G_2}$、⋯、$\overline{A_nG_n}$交於一點G，且被這點分成

比$(n-1):1$的線段，所以n邊形$G_1G_2\cdots G_{n-1}G_n$和n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$

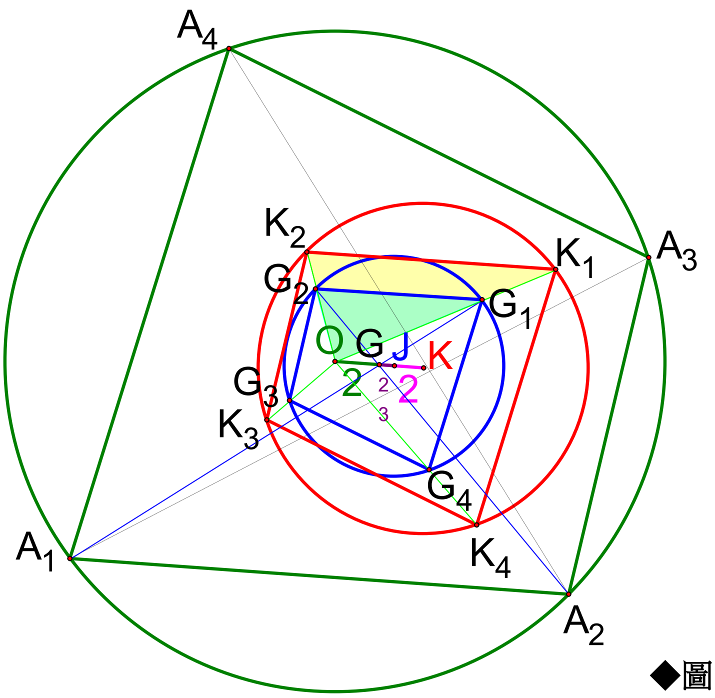
的**位似中心為G，位似比為$-\frac{1}{n-1}$**，故**n邊形$G_1G_2\cdots G_{n-1}G_n\sim n$邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$**。



◆圖 20

【定理二】

在圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$中，其外心為O、重心為G、歐拉圓圓心為K、垂心為H，則此四心會共線，又$\overline{OG}:\overline{GK}=2:2$，且$K$為$\overline{OH}$的中點，從而$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:2:4$且$\overline{OG}:\overline{GH}=1:3$。



◆圖 21

【證明】

1. 如圖 21，因為四邊形$G_1G_2G_3G_4$~四邊形$A_1A_2A_3A_4$，又兩中線$\overline{A_1G_1}$和$\overline{A_2G_2}$相交於四邊形$A_1A_2A_3A_4$的重心G，且$\frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{A_1A_2}}=\frac{\overline{GG_1}}{\overline{GA_1}}=\frac{\overline{GG_2}}{\overline{GA_2}}=\frac{1}{3}$，所以**兩四邊形的位似中心為$\boldsymbol{G}$，位似比為$-\frac{1}{3}$**，從而**四邊形$\boldsymbol{G_1G_2G_3G_4}$也有外心$\boldsymbol{J}$**，

   令$\overline{OG}=2$，則$\overline{GJ}=\frac{2}{3}$，故$O$、$G$、$J$三點共線，且$\overline{OJ}=\overline{OG}+\overline{GJ}=\frac{8}{3}$。

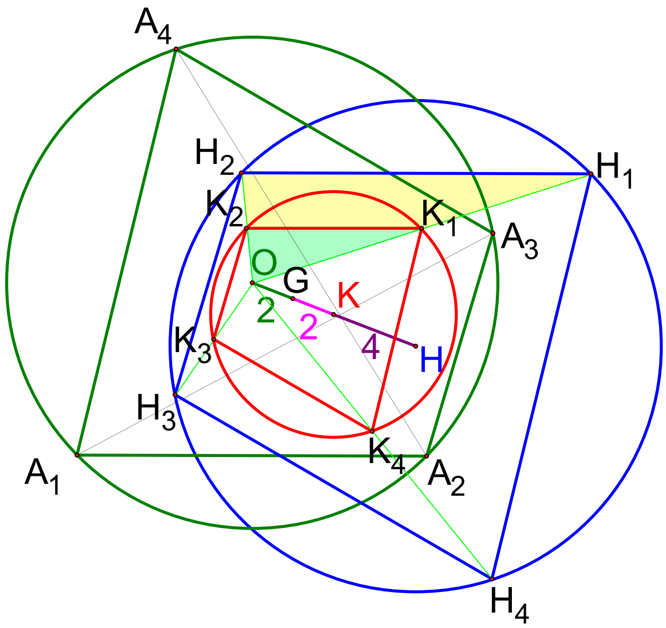
2. 因為O、G_1、K_1三點共線，O、G_2、K_2三點共線且$\frac{\overline{OG_1}}{\overline{OK_1}}=\frac{\overline{OG_2}}{\overline{OK_2}}=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$，

   所以$\Delta G_1OG_2 \sim \Delta K_1OK_2(SAS)$，推知$\frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{K_1K_2}}=\frac{\overline{OG_1}}{\overline{OK_1}}=\frac{\overline{OG_2}}{\overline{OK_2}}=\frac{2}{3}$。

   同理有$\frac{\overline{G_2G_3}}{\overline{K_2K_3}}=\frac{\overline{G_3G_4}}{\overline{K_3K_4}}=\frac{\overline{G_4G_1}}{\overline{K_4K_1}}=\frac{2}{3}$，因此**四邊形$\boldsymbol{G_1G_2G_3G_4}$~四邊形$\boldsymbol{K_1K_2K_3K_4}$**，

   且**兩四邊形的位似中心為$\boldsymbol{O}$，位似比為$\frac{2}{3}$**，推得$\overline{OK}=\frac{3}{2}\overline{OJ}=\frac{3}{2}\times\frac{8}{3}=4$，

   $\overline{GK}=\overline{OK}-\overline{OG}=4-2=2$，故$O$、$G$、$K$三點共線且$\overline{OG}:\overline{GK}=2:2$。



◆圖 22

3. 如圖 22，因為O、K_1、H_1三點共線，O、K_2、H_2三點共線且$\frac{\overline{OK_1}}{\overline{OH_1}}=\frac{\overline{OK_2}}{\overline{OH_2}}=\frac{1}{2}$，

   所以$\Delta K_1OK_2 \sim \Delta H_1OH_2(SAS)$，推知$\frac{\overline{K_1K_2}}{\overline{H_1H_2}}=\frac{\overline{OK_1}}{\overline{OH_1}}=\frac{\overline{OK_2}}{\overline{OH_2}}=\frac{1}{2}$。

   同理有$\frac{\overline{K_2K_3}}{\overline{H_2H_3}}=\frac{\overline{K_3K_4}}{\overline{H_3H_4}}=\frac{\overline{K_4K_1}}{\overline{H_4H_1}}=\frac{1}{2}$，因此四邊形$K_1K_2K_3K_4$~四邊形$H_1H_2H_3H_4$，

   且**兩四邊形的位似中心為$\boldsymbol{O}$，位似比為$\frac{1}{2}$**，推得$\overline{OH}=2\overline{OK}=2\times4=8$，

$\overline{KH} = \overline{OH} - \overline{OK} = 8 - 4 = 4$，從而$O$、$K$、$H$三點共線且$\overline{OK} = \overline{KH}$，

即**歐拉圓圓心K為外心O和垂心H的中點**，故四心O、G、K、H會共線

且$\overline{OG}：\overline{GK}：\overline{KH} = 2：2：4$，推知$\overline{OG}：\overline{GH} = 2：6 = 1：3$。

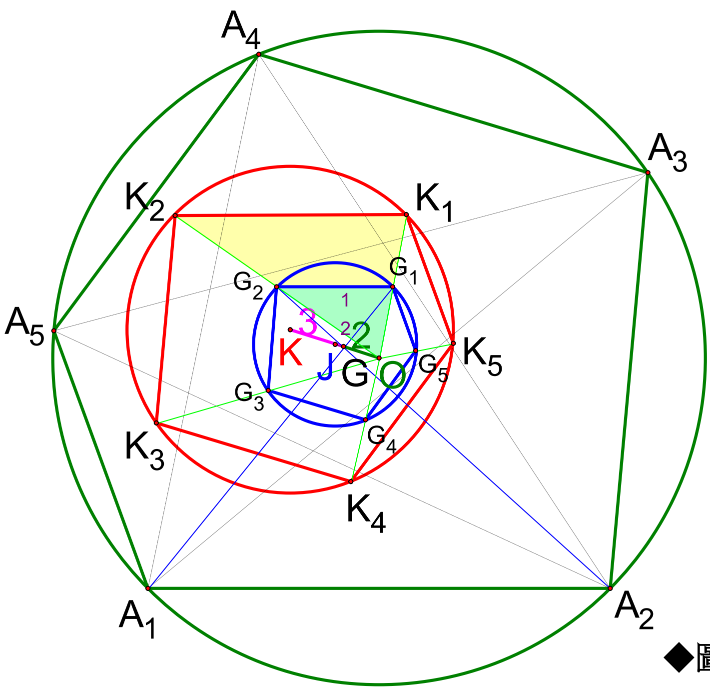
【定理三】

在圓內接五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$中，其外心為O、重心為G、歐拉圓圓心為K、垂心為H，則此四心會共線，又$\overline{OG}：\overline{GK} = 2：3$，且$K$為$\overline{OH}$的中點，從而$\overline{OG}：\overline{GK}：\overline{KH} = 2：3：5$且$\overline{OG}：\overline{GH} = 1：4$。

【證明】

1. 如圖 23，因為五邊形$G_1G_2G_3G_4G_5$~五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$，又兩中線$\overline{A_1G_1}$和$\overline{A_2G_2}$相交於五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$的重心G，且$\frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{GG_1}}{\overline{GA_1}} = \frac{\overline{GG_2}}{\overline{GA_2}} = \frac{1}{4}$，所以**兩五邊形的位似中心為$G$，位似比為$-\frac{1}{4}$**，從而**五邊形$G_1G_2G_3G_4G_5$也有外心$J$**。

   令$\overline{OG} = 2$，則$\overline{GJ} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$，故$O$、$G$、$J$三點共線，且$\overline{OJ} = \overline{OG} + \overline{GJ} = \frac{5}{2}$。



◆**圖 23**

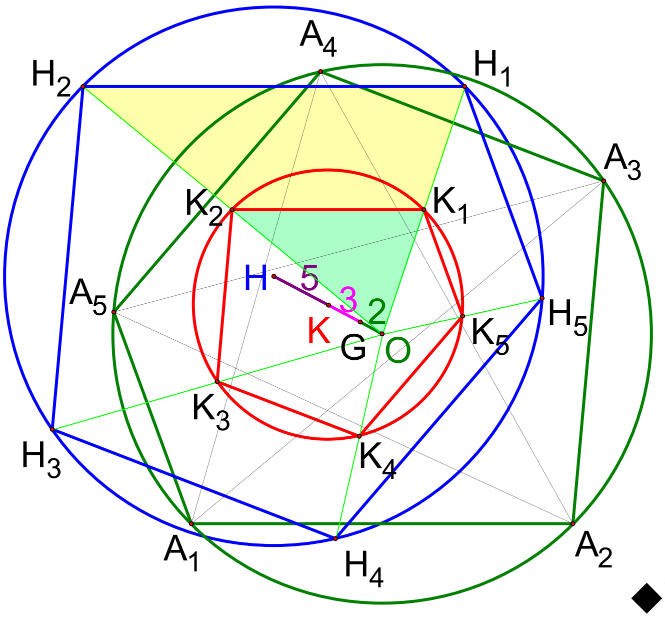
2. 因為O、G_1、K_1三點共線，O、G_2、K_2三點共線且$\frac{\overline{OG_1}}{\overline{OK_1}} = \frac{\overline{OG_2}}{\overline{OK_2}} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$，

   所以$\Delta G_1OG_2 \sim \Delta K_1OK_2(SAS)$，推知$\frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{K_1K_2}} = \frac{\overline{OG_1}}{\overline{OK_1}} = \frac{\overline{OG_2}}{\overline{OK_2}} = \frac{1}{2}$。

同理有$\frac{\overline{G_2G_3}}{\overline{K_2K_3}}=\frac{\overline{G_3G_4}}{\overline{K_3K_4}}=\frac{\overline{G_4G_1}}{\overline{K_4K_1}}=\frac{1}{2}$，因此五邊形$G_1G_2G_3G_4G_5$~五邊形$K_1K_2K_3K_4K_5$，

且**兩五邊形的位似中心為$\boldsymbol{O}$，位似比為 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$**，推得$\overline{OK}=2\overline{OJ}=2\times\frac{5}{2}=5$，

$\overline{GK}=\overline{OK}-\overline{OG}=5-2=3$，故$O$、$G$、$K$三點共線$\overline{OG}:\overline{GK}=2:3$。



◆**圖 24**

3. 如圖 24，因為O、K_1、H_1三點共線，O、K_2、H_2三點共線且$\frac{\overline{OK_1}}{\overline{OH_1}}=\frac{\overline{OK_2}}{\overline{OH_2}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，

所以$\Delta K_1OK_2\sim\Delta H_1OH_2(SAS)$，推知$\frac{\overline{K_1K_2}}{\overline{H_1H_2}}=\frac{\overline{OK_1}}{\overline{OH_1}}=\frac{\overline{OK_2}}{\overline{OH_2}}=\frac{1}{2}$。

同理有$\frac{\overline{K_2K_3}}{\overline{H_2H_3}}=\frac{\overline{K_3K_4}}{\overline{H_3H_4}}=\frac{\overline{K_4K_1}}{\overline{H_4H_1}}=\frac{1}{2}$，因此五邊形$K_1K_2K_3K_4K_5$~五邊形$H_1H_2H_3H_4H_5$，

且**兩五邊形的位似中心為$\boldsymbol{O}$，位似比為 $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$**，推得$\overline{OH}=2\overline{OK}=2\times5=10$，

$\overline{KH}=\overline{OH}-\overline{OK}=10-5=5$，從而$O$、$K$、$H$三點共線且$\overline{OK}=\overline{KH}$，

即**歐拉圓圓心$\boldsymbol{K}$為外心$\boldsymbol{O}$和垂心$\boldsymbol{H}$的中點**，故四心O、G、K、H會共線

且$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:3:5$，推知 $\overline{OG}:\overline{GH}=2:8=1:4$。

如**附件一**，我們再以 GGB 畫出**其它邊數的圓內接多邊形的四心**，陸續發現圓內接六邊形、七邊形、八邊形和九邊形等的四心O、G、K、H也會共歐拉線，且在六邊形時，$\overline{OG}:\overline{GK}=2:4$，$\overline{OK}:\overline{KH}=6:6$；七邊形時，$\overline{OG}:\overline{GK}=2:5$，$\overline{OK}:\overline{KH}=7:7$；八邊形時，$\overline{OG}:\overline{GK}=2:6$，$\overline{OK}:\overline{KH}=8:8$；九邊形時，$\overline{OG}:\overline{GK}=2:7$，$\overline{OK}:\overline{KH}=9:9$，也和三角形有相對應的結果。

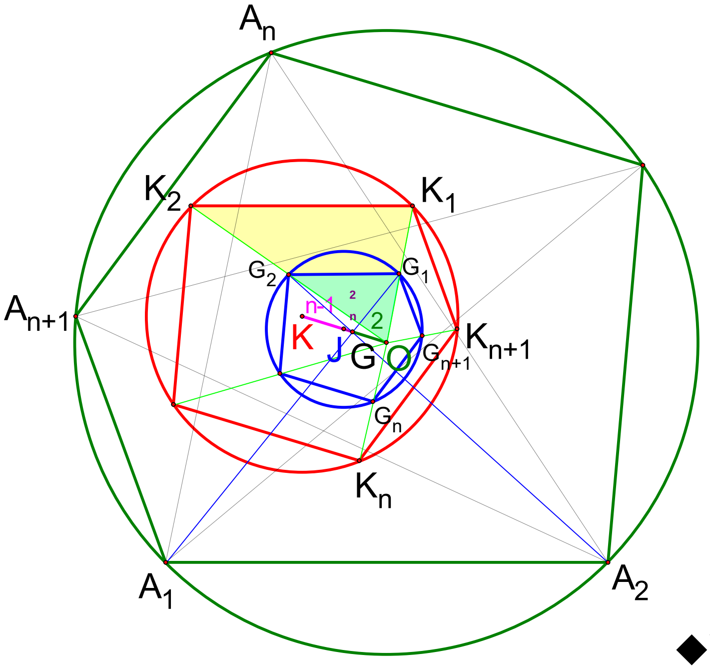
於是我們猜測其它圓內接n邊形應該也有類似的性質，即圓內接$n(n \geq 4)$邊形$A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n$，其四心$\boldsymbol{O}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{H}$**也會共歐拉線，且**$\overline{\boldsymbol{OG}}:\overline{\boldsymbol{GK}} = \mathbf{2}:(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})$，$\overline{\boldsymbol{OK}}:\overline{\boldsymbol{KH}} = \boldsymbol{n}:\boldsymbol{n}$**，即**$\overline{\boldsymbol{OG}}:\overline{\boldsymbol{GK}}:\overline{\boldsymbol{KH}} = \mathbf{2}:(\boldsymbol{n}-\mathbf{2}):\boldsymbol{n}$。

【定理四】

在圓內接n邊形$A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n$中，其外心為O、重心為G、歐拉圓圓心為K、垂心為H，則此四心會共線，又$\overline{OG}:\overline{GK} = 2:(n-2)$，且$K$為$\overline{OH}$的中點，從而$\overline{\boldsymbol{OG}}:\overline{\boldsymbol{GK}}:\overline{\boldsymbol{KH}} = \mathbf{2}:(\boldsymbol{n}-\mathbf{2}):\boldsymbol{n}$**且**$\overline{\boldsymbol{OG}}:\overline{\boldsymbol{GH}} = \mathbf{1}:(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})$。

【證明】

1. 現在我們假設邊數k不大於$n(n \geq 4)$的所有圓內接k邊形都有類似的性質，即圓內接多邊形$n(n \geq 4)$邊形$A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n$，其四心O、G、K、H會共一直線，且$\overline{OG}:\overline{GK} = 2:(n-2)$，其歐拉圓圓心$K$恆為外心$O$和垂心$H$的中點，滿足$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH} = 2:(n-2):n$。再來考慮圓內接$(n+1)$邊形$A_1A_2 \cdots A_nA_{n+1}$。如圖 25，因為$(n+1)$邊形$G_1G_2 \cdots G_nG_{n+1} \sim (n+1)$邊形$A_1A_2 \cdots A_nA_{n+1}$，又兩中線$\overline{A_1G_1}$和$\overline{A_2G_2}$相交於$(n+1)$邊形$A_1A_2 \cdots A_nA_{n+1}$的重心$G$，且$\frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{\overline{GG_1}}{\overline{GA_1}} = \frac{\overline{GG_2}}{\overline{GA_2}} = \frac{1}{n}$，所以**兩個**$(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$**邊形的位似中心為**$\boldsymbol{G}$，**位似比為**$-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$，從而$(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})$**邊形**$\boldsymbol{G_1G_2 \cdots G_nG_{n+1}}$**也有外心**$\boldsymbol{J}$，令$\overline{OG} = 2$，則$\overline{GJ} = \frac{2}{n}$，故$O$、$G$、$J$三點共線，且$\overline{OJ} = \overline{OG} + \overline{GJ} = 2 + \frac{2}{n} = \frac{2(n+1)}{n}$。



◆**圖 25**

2. 因為O、G_1、K_1三點共線，O、G_2、K_2三點共線且$\frac{\overline{OG_1}}{\overline{OK_1}}=\frac{\overline{OG_2}}{\overline{OK_2}}=\frac{2}{(n-2)+2}=\frac{2}{n}$，

所以$\Delta G_1OG_2 \sim \Delta K_1OK_2(SAS)$，推知$\frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{K_1K_2}}=\frac{\overline{OG_1}}{\overline{OK_1}}=\frac{\overline{OG_2}}{\overline{OK_2}}=\frac{2}{n}$。

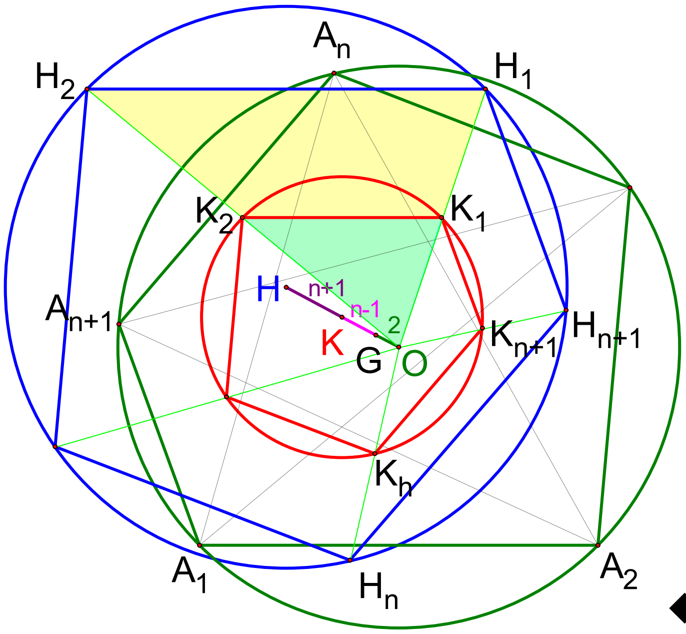
同理有$\frac{\overline{G_2G_3}}{\overline{K_2K_3}}=\frac{\overline{G_3G_4}}{\overline{K_3K_4}}\cdots=\frac{\overline{G_nG_{n+1}}}{\overline{K_nK_{n+1}}}=\frac{\overline{G_{n+1}G_1}}{\overline{K_{n+1}K_1}}=\frac{2}{n}$，

因此$(n+1)$邊形$G_1G_2\cdots G_nG_{n+1}\sim(n+1)$邊形$K_1K_2\cdots K_nK_{n+1}$，

且**兩個$(n+1)$邊形的位似中心為O，位似比為$\frac{2}{n}$**，

推得$\overline{OK}=\frac{n}{2}\overline{OJ}=\frac{n}{2}\times\frac{2(n+1)}{n}=n+1$，$\overline{GK}=\overline{OK}-\overline{OG}=(n+1)-2=n-1$，

故O、G、K三點共線$\overline{OG}:\overline{GK}=2:(n-1)=2:[(n+1)-2]$也成立。



◆**圖 26**

3. 如圖 26，因為O、K_1、H_1三點共線，O、K_2、H_2三點共線且$\frac{\overline{OK_1}}{\overline{OH_1}}=\frac{\overline{OK_2}}{\overline{OH_2}}=\frac{1}{2}$，

所以$\Delta K_1OK_2 \sim \Delta H_1OH_2(SAS)$，推知$\frac{\overline{K_1K_2}}{\overline{H_1H_2}}=\frac{\overline{OK_1}}{\overline{OH_1}}=\frac{\overline{OK_2}}{\overline{OH_2}}=\frac{1}{2}$。

同理有 $\frac{\overline{K_2K_3}}{\overline{H_2H_3}}=\frac{\overline{K_3K_4}}{\overline{H_3H_4}}\cdots=\frac{\overline{K_{n+1}K_1}}{\overline{H_{n+1}H_1}}=\frac{1}{2}$，所以$(n+1)$邊形$K_1K_2\cdots K_nK_{n+1}\sim(n+1)$邊形$H_1H_2\cdots H_nH_{n+1}$，且**兩個$(n+1)$邊形的位似中心為$O$，位似比為$\frac{1}{2}$**，推得

$\overline{OH}=2\overline{OK}=2(n+1)$，$\overline{KH}=\overline{OH}-\overline{OK}=2(n+1)-(n+1)=n+1$，

從而O、K、H三點共線且$\overline{OK}=\overline{KH}$，即歐拉圓圓心$K$為外心$O$和垂心$H$的中點，故四心$O$、$G$、$K$、$H$會共線

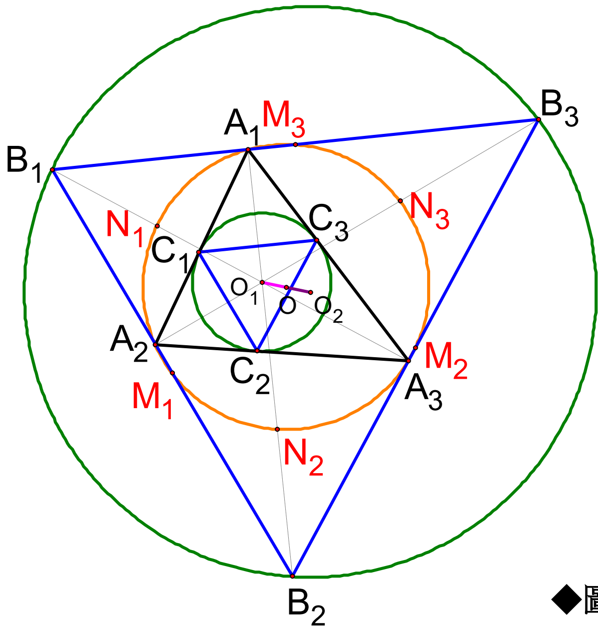
且$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:(n-1):(n+1)=2:[(n+1)-2]:(n+1)$也成立。

故由數學歸納法可知：對任意的圓內接n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$，設其外心為O、重心為G、歐拉圓圓心為K、垂心為H，則此四心會共線，當然**也就有歐拉線且$\overline{OG}:\overline{GK}=2:(n-2)$**，又**歐拉圓圓心$K$恆為外心$O$和垂心$H$的中點**，故$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:(n-2):n$，推知 $\overline{OG}:\overline{GH}=2:(2n-2)=1:(n-1)$。

我們知道三角形除了等腰三角形外，其內心並不會在歐拉線上，但如果考慮另外三個旁心所形成三角形的外心，會發現三角形的外心、內心與旁心三角形的外心也會共線，而有以下的定理：

【定理五】

設$\Delta A_1A_2A_3$的外心為O，內心為O_1，旁心三角形$\Delta B_1B_2B_3$的外心為O_2，則此三心會共線且O點為$\overline{O_1O_2}$的中點。



【證明】

◆圖 27

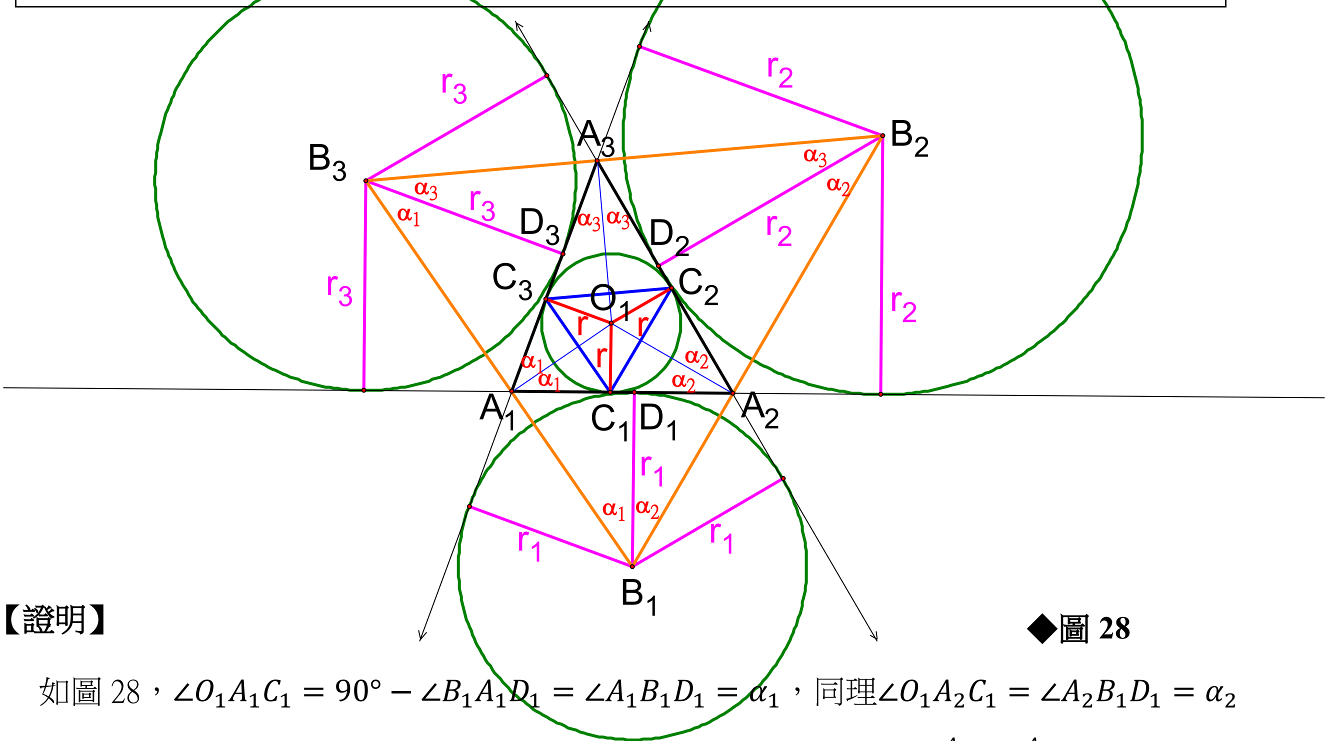
如圖 27，因為$\overleftrightarrow{A_1O_1}\perp\overleftrightarrow{B_1B_3}$**(同一頂點處內、外角平分線互相垂直)**，且$\overleftrightarrow{A_1O_1}$必過旁心$B_2$**(一內角平分線和另兩內角的外角平分線必相交於旁心)**，所以$\overleftrightarrow{B_2A_1}$為$\overline{B_1B_3}$的垂線。同理有 $\overleftrightarrow{B_3A_2}$為$\overline{B_1B_2}$的垂線，$\overleftrightarrow{B_1A_3}$為$\overline{B_2B_3}$的垂線。故$\Delta A_1A_2A_3$的內心$O_1$也是$\Delta B_1B_2B_3$的垂心。又$A_1$、$A_2$、$A_3$ 分別為$\overline{B_3B_1}$、$\overline{B_1B_2}$、$\overline{B_2B_3}$ 的垂足，故$\Delta A_1A_2A_3$的外心O也是$\Delta \mathrm{B_1B_2B_3}$的九點圓圓心。由任意三角形的九點圓圓心為垂心和外心的中點可知：**此三心會共線且O點為$\overline{O_1O_2}$的中點**。

當多邊形同時有外接圓和內切圓時，稱其為**雙心多邊形**(參考資料 6)。如**附件二**，我們以 GGB 進行研究問題的幾何實驗，分別找出雙心四邊形、五邊形、六邊形、七邊形、八邊形等的內心、外心與旁心多邊形的外心，**發現此三心會共線，且外心也是內心和旁心多邊形外心的中點**。於是我們猜測其它雙心n邊形應該也具有相同的性質，即雙心$n(n \geq 4)$邊形$A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n$**的外心$\boldsymbol{O}$正好是內心$\boldsymbol{O_1}$和旁心$\boldsymbol{n}$邊形的外心$\boldsymbol{O_2}$之中點**。

為了證明其它雙心$n(n \geq 4)$邊形也有相同的結果，我們需先證明下面這個引理：

【引理二】

如圖 28，設$\Delta A_1A_2A_3$中，其內切圓半徑為 r，$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$ 的旁切圓半徑分別為 r_1、r_2、r_3，則 $r_1 = \frac{r}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}}$，$r_2 = \frac{r}{tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}}$，$r_3 = \frac{r}{tan\frac{A_3}{2}tan\frac{A_1}{2}}$。 (參考資料 7)



◆**圖 28**

【證明】

如圖 28，$\angle O_1A_1C_1 = 90° - \angle B_1A_1D_1 = \angle A_1B_1D_1 = \alpha_1$，同理$\angle O_1A_2C_1 = \angle A_2B_1D_1 = \alpha_2$，因為$\overline{A_1A_2} = \overline{A_1C_1} + \overline{C_1A_2} = \frac{r}{tan\alpha_1} + \frac{r}{tan\alpha_2} = \frac{r}{tan\frac{A_1}{2}} + \frac{r}{tan\frac{A_2}{2}} = \mathrm{r}(\frac{tan\frac{A_1}{2}+tan\frac{A_2}{2}}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}})$，

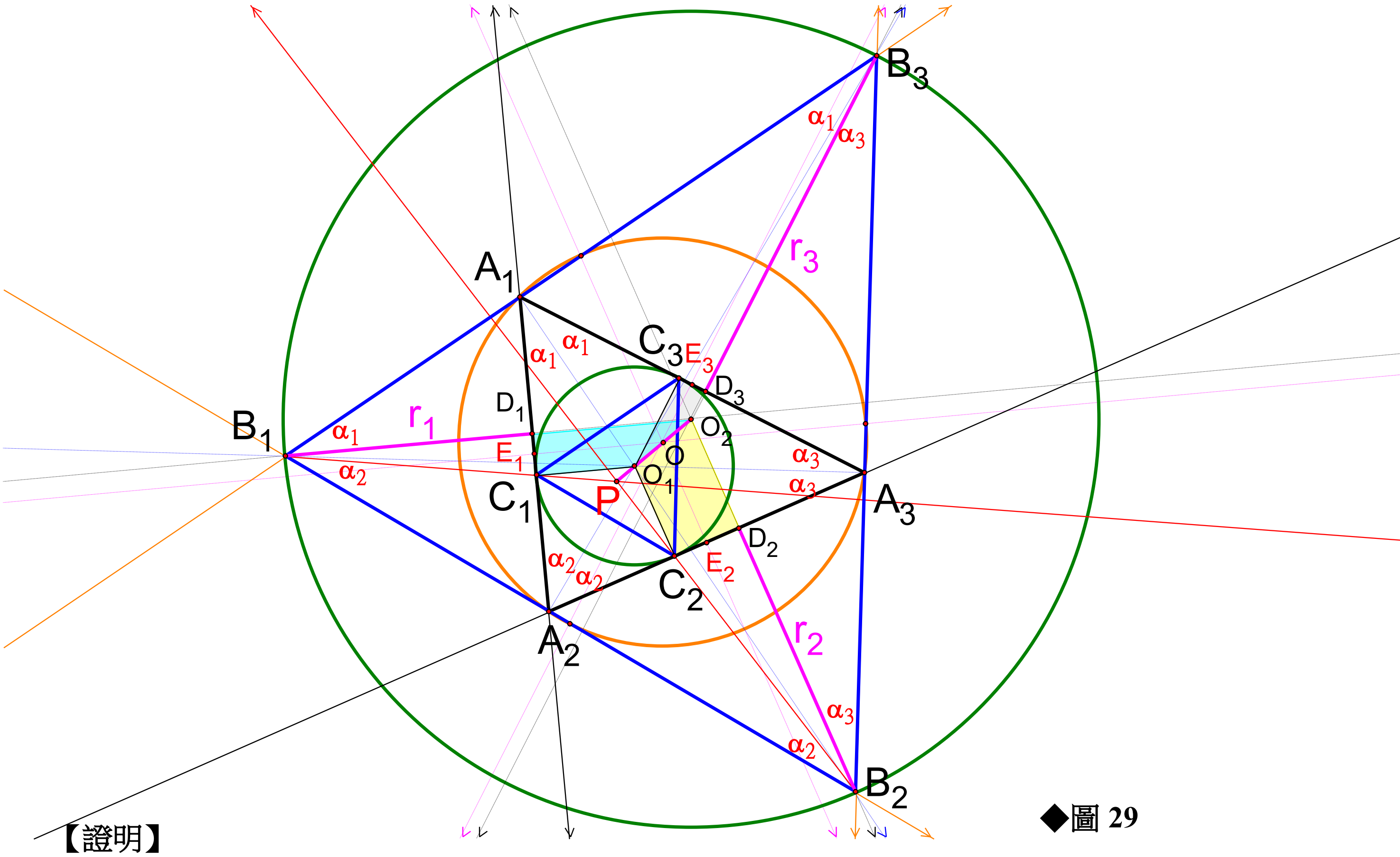
且 $\overline{A_1A_2} = \overline{A_1D_1} + \overline{D_1A_2} = r_1(tan\alpha_1 + tan\alpha_2) = r_1(tan\frac{A_1}{2} + tan\frac{A_2}{2})$，

所以$r(\frac{tan\frac{A_1}{2}+tan\frac{A_2}{2}}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}}) = r_1(tan\frac{A_1}{2} + tan\frac{A_2}{2})$，推得$r_1 = \frac{r}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}}$，

同理有$r_2 = \frac{r}{tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}}$，$r_3 = \frac{r}{tan\frac{A_3}{2}tan\frac{A_1}{2}}$。

【定理六】

設雙心n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的外心為O，其內心也是內切圓切點n邊形$C_1C_2\cdots C_{n-1}C_n$的外心為O_1，其旁心n邊形$B_1B_2\cdots B_{n-1}B_n$的外心為O_2，則此三心會共線且O點為$\overline{O_1O_2}$的中點。(參考資料 7)



◆圖 29

【證明】

1.(1)如圖 29，設$\Delta A_1A_2A_3$的旁心三角形為$\Delta B_1B_2B_3$，內切圓切點三角形為$\Delta C_1C_2C_3$，

$\because \overline{A_1C_1}=\overline{A_1C_3}$(切線等長)，且$\overline{A_1O_1}$平分$\angle C_1A_1C_3$，$\therefore \overline{C_1C_3}\perp\overline{A_1O_1}$。

且$\overline{B_1B_3}\perp\overline{A_1O_1}$(同一頂點處內、外角平分線互相垂直)，$\therefore \overline{B_1B_3}//\overline{C_1C_3}$。

同理有 $\overline{B_1B_2}//\overline{C_1C_2}$，$\overline{B_2B_3}//\overline{C_2C_3}$，所以**旁心三角形$\Delta B_1B_2B_3$和內切圓切點三角形$\Delta C_1C_2C_3$會相似**。

(2)連接$\overrightarrow{B_1C_1}$和$\overrightarrow{B_2C_2}$，設交於P點，則P點為$\Delta B_1B_2B_3$和$\Delta C_1C_2C_3$的位似中心。

又三者的外心依序為O、O_2、O_1，所以連接$\overleftrightarrow{O_1C_1}$、$\overleftrightarrow{O_1C_2}$、$\overleftrightarrow{O_1C_3}$，必分別垂直$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$於點$C_1$、$C_2$、$C_3$；再分別作$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$的中垂線，則此三中垂線必相交於$\Delta A_1A_2A_3$的外心$O$，且分別垂直$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$於$E_1$、$E_2$、$E_3$。

(3)作$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$、$\overleftrightarrow{B_3D_3}$分別垂直$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$於點$D_1$、$D_2$、$D_3$，

則$\overline{B_1D_1}$、$\overline{B_2D_2}$、$\overline{B_3D_3}$分別為$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_1A_3}$的旁切圓半徑。

設$\overline{B_1D_1}=r_1$，$\overline{B_2D_2}=r_2$，$\overline{B_3D_3}=r_3$，$\Delta\mathrm{A_1A_2A_3}$的內切圓半徑為r，

由引理二知 $r_1=\frac{r}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}}$，$r_2=\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}}$，$r_3=\frac{r}{tan\frac{A_3}{2}tan\frac{A_1}{2}}$。

推得 $\overline{A_1D_1}=r_1tan\frac{A_1}{2}=\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}}=\overline{A_2C_1}$，$\overline{A_2D_2}=r_2tan\frac{A_2}{2}=\frac{r}{tan\frac{A_3}{2}}=\overline{A_3C_2}$，

$\overline{A_3D_3}=r_3tan\frac{A_3}{2}=\frac{r}{tan\frac{A_1}{2}}=\overline{A_1C_3}$。

且 $\overline{A_1E_1}=\overline{A_2E_1}$，$\overline{A_2E_2}=\overline{A_3E_2}$，$\overline{A_3E_3}=\overline{A_1E_3}$，

所以 $\overline{A_2E_1}-\overline{A_2C_1}=\overline{A_1E_1}-\overline{A_1D_1}\Rightarrow\overline{C_1E_1}=\overline{E_1D_1}$，$\boldsymbol{E_1}$**為**$\boldsymbol{\overline{C_1D_1}}$**的中點**。

$\overline{A_3C_2}-\overline{A_3E_2}=\overline{A_2D_2}-\overline{A_2E_2}\Rightarrow\overline{C_2E_2}=\overline{E_2D_2}$，$\boldsymbol{E_2}$**為**$\boldsymbol{\overline{C_2D_2}}$**的中點**。

$\overline{A_1E_3}-\overline{A_1C_3}=\overline{A_3E_3}-\overline{A_3D_3}\Rightarrow\overline{C_3E_3}=\overline{E_3D_3}$，$\boldsymbol{E_3}$**為**$\boldsymbol{\overline{C_3D_3}}$**的中點**。

設$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$相交於一點$O_2'$，則$O_1$、$O$、$O_2'$在$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$的投影點

分別為C_1、E_1、D_1和C_2、E_2、D_2。

因為 $\overline{O_1O_2'}$在兩條相交直線上的投影點均被O點的的投影點所平分，

所以 $\boldsymbol{O}$**點為**$\boldsymbol{\overline{O_1O_2'}}$ **的中點**……①。

同理，若設$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_3D_3}$相交於一點$O''_2$，

則O_1、O、O''_2在$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_1A_3}$的投影點分別為C_1、E_1、D_1和C_3、E_3、D_3。

因為 $\overline{O_1O''_2}$在兩條相交直線上的投影點均被O點的的投影點所平分，

所以 $\boldsymbol{O}$**點也是**$\boldsymbol{\overline{O_1O''_2}}$ **的中點**……②。

由①、②可知：$O_2'=O''_2$，即$\boldsymbol{\overleftrightarrow{B_1D_1}}$**、**$\boldsymbol{\overleftrightarrow{B_2D_2}}$**、**$\boldsymbol{\overleftrightarrow{B_3D_3}}$**相交於一點**$\boldsymbol{O_2'}$。

(4)又$\angle\mathrm{A_1B_1D_1}=\frac{\angle A_1}{2}=\angle\mathrm{A_1B_3D_3}$，$\angle\mathrm{A_2B_1D_1}=\frac{\angle A_2}{2}=\angle\mathrm{A_2B_2D_2}$，

$\angle\mathrm{A_3B_2D_2}=\frac{\angle A_3}{2}=\angle\mathrm{A_3B_3D_3}$，

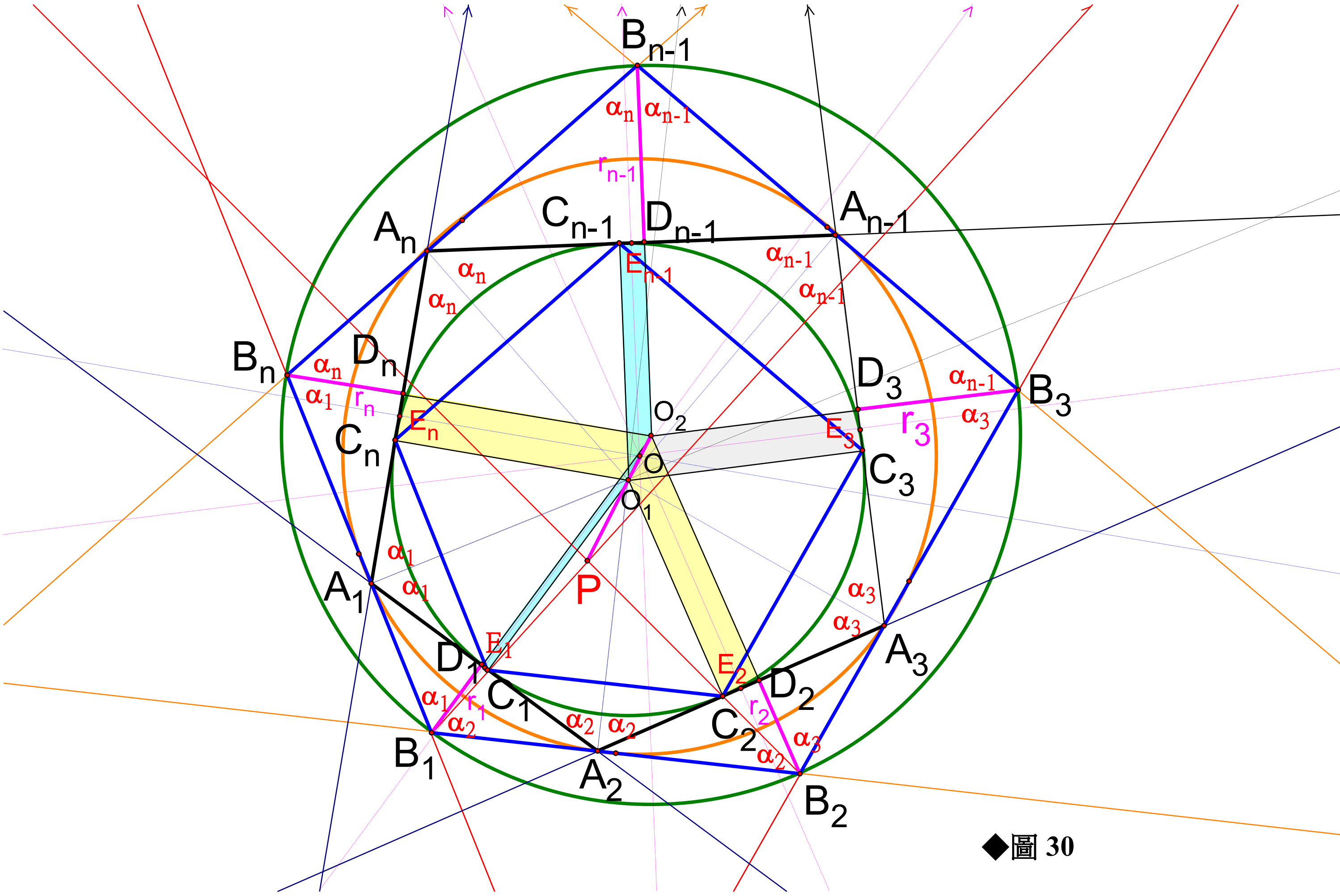
所以 $\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$、$\overleftrightarrow{B_3D_3}$的交點$O_2'$，滿足$\overline{O'_2B_1}=\overline{O'_2B_2}=\overline{O'_2B_3}$，

因此$\boldsymbol{O_2'}$**也是**$\Delta\boldsymbol{B_1B_2B_3}$**的外心**$\boldsymbol{O_2}$，即$\boldsymbol{O_2'=O_2}$。

故$\boldsymbol{O}$**點為**$\boldsymbol{\overline{O_1O_2}}$ **的中點**，且$\boldsymbol{P}$**、**$\boldsymbol{O_1}$**、**$\boldsymbol{O_2}$**三點共線**。

2. (1)如圖 30，雙心n邊形為$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$，其旁心$n$邊形為$B_1B_2\cdots B_{n-1}B_n$，內切圓切點$n$邊形為$C_1C_2\cdots C_{n-1}C_n$，同 1(1)可知：$\overline{B_1B_2}//\overline{C_1C_2}$，$\overline{B_2B_3}//\overline{C_2C_3}$，⋯，$\overline{B_{n-1}B_n}//\overline{C_{n-1}C_n}$，$\overline{B_nB_1}//\overline{C_nC_1}$，現在連接$\overrightarrow{B_1C_1}$和$\overrightarrow{B_2C_2}$，設交於$P$點，欲證明$\boldsymbol{P}$**點即為旁心**$\boldsymbol{n}$**邊形**$\boldsymbol{B_1B_2\cdots B_{n-1}B_n}$**和切點**$\boldsymbol{n}$**邊形**$\boldsymbol{C_1C_2\cdots C_{n-1}C_n}$**的位似中心**。

又三者的外心依序為O、O_2、O_1，所以連接$\overleftrightarrow{O_1C_1}$、$\overleftrightarrow{O_1C_2}$、$\overleftrightarrow{O_1C_3}$、⋯、$\overleftrightarrow{O_1C_{n-1}}$、$\overleftrightarrow{O_1C_n}$，必分別垂直$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$於點$C_1$、$C_2$、⋯、$C_{n-1}$、$C_n$；再分別作$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$的中垂線，則此$n$條中垂線必相交於雙心$n$邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的外心$O$，且設其分別垂直$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$於點$E_1$、$E_2$、⋯、$E_{n-1}$、$E_n$。



◆圖 30

(2)作$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$分別垂直$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$於$D_1$、$D_2$，則$\overline{B_1D_1}$、$\overline{B_2D_2}$分別為$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$的旁切圓半徑。設$\overline{B_1D_1}=r_1$，$\overline{B_2D_2}=r_2$，雙心$n$邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的內切圓半徑為$r$，

由引理二知 $r_1=\frac{r}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}}$，$r_2=\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}}$。

推得 $\overline{A_1D_1}=r_1tan\frac{A_1}{2}=\frac{r}{tan\frac{A_2}{2}}=\overline{A_2C_1}$，$\overline{A_2D_2}=r_2tan\frac{A_2}{2}=\frac{r}{tan\frac{A_3}{2}}=\overline{A_3C_2}$。

且 $\overline{A_1E_1}=\overline{A_2E_1}$，$\overline{A_2E_2}=\overline{A_3E_2}$，

所以 $\overline{A_2E_1}-\overline{A_2C_1}=\overline{A_1E_1}-\overline{A_1D_1}\Rightarrow\overline{C_1E_1}=\overline{E_1D_1}$，$\boldsymbol{E_1}$**為**$\boldsymbol{\overline{C_1D_1}}$**的中點**。

$\overline{A_3C_2}-\overline{A_3E_2}=\overline{A_2D_2}-\overline{A_2E_2}\Rightarrow\overline{C_2E_2}=\overline{E_2D_2}$，$\boldsymbol{E_2}$**為**$\boldsymbol{\overline{C_2D_2}}$**的中點**。

設$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$相交於一點$O_2'$，則$O_1$、$O$、$O_2'$在$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$的投影點

分別為C_1、E_1、D_1和C_2、E_2、D_2。

因為$\overline{O_1O_2'}$在兩相交直線上的投影點均被O點的投影點所平分，

所以$\boldsymbol{O}$**點為**$\boldsymbol{\overline{O_1O_2'}}$ **的中點**。

再作$\overleftrightarrow{B_3D_3}$、⋯、$\overleftrightarrow{B_{n-1}D_{n-1}}$、$\overleftrightarrow{B_nD_n}$分別垂直$\overline{A_3A_4}$、⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$

於點D_3、⋯、D_{n-1}、D_n，

則$\overline{B_3D_3}$、⋯、$\overline{B_{n-1}D_{n-1}}$、$\overline{B_nD_n}$分別為$\overline{A_3A_4}$、⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$的旁切圓

半徑。設$\overline{B_3D_3}=r_3$，⋯，$\overline{B_{n-1}D_{n-1}}=r_{n-1}$，$\overline{B_nD_n}=r_n$，

同上可得 E_3為$\overline{C_3D_3}$的中點，⋯，E_{n-1}為$\overline{C_{n-1}D_{n-1}}$的中點，$E_n$為$\overline{C_nD_n}$的中點。

同 1(3)可得 $\boldsymbol{\overleftrightarrow{B_3D_3}}$**、⋯、**$\boldsymbol{\overleftrightarrow{B_{n-1}D_{n-1}}}$**、**$\boldsymbol{\overleftrightarrow{B_nD_n}}$**相交於一點**$\boldsymbol{O_2'}$。

(3)又$\angle\mathrm{A_1B_1D_1}=\frac{\angle A_1}{2}=\angle\mathrm{A_1B}_n\mathrm{D}_n$，$\angle\mathrm{A_2B_1D_1}=\frac{\angle A_2}{2}=\angle\mathrm{A_2B_2D_2}$，

$\angle\mathrm{A_3B_2D_2}=\frac{\angle A_3}{2}=\angle\mathrm{A_3B_3D_3}$，⋯$\angle\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-2}\mathrm{D}_{n-2}=\frac{\angle A_{n-1}}{2}=\angle\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{D}_{n-1}$，

$\angle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{D}_{n-1}=\frac{\angle A_n}{2}=\angle\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n$，

所以 $\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$、$\overleftrightarrow{B_3D_3}$、⋯、$\overleftrightarrow{B_{n-1}D_{n-1}}$、$\overleftrightarrow{B_nD_n}$的交點$O_2'$，

滿足 $\overline{O'_2B_1}=\overline{O'_2B_2}=\overline{O'_2B_3}=\cdots=\overline{O'_2B_n}$，

因此$\boldsymbol{O_2'}$**也是旁心**$\boldsymbol{n}$**邊形**$\boldsymbol{B_1B_2\cdots B_{n-1}B_n}$**的外心**$\boldsymbol{O_2}$，即$\boldsymbol{O_2'=O_2}$。

故$\boldsymbol{O}$**點為**$\boldsymbol{\overline{O_1O_2}}$ **的中點**，且$\boldsymbol{P}$**、**$\boldsymbol{O_1}$**、**$\boldsymbol{O_2}$**三點共線**。

陸、結論

一、 $\Delta A_1A_2A_3$的**歐拉線上依序有**外心O、重心G、九點圓(或稱**歐拉圓**)圓心K和垂心H等四心，又$\boldsymbol{\overline{OG}:\overline{GK}=2:1}$，且九點圓圓心$K$為外心$O$和垂心$H$的**中點**，從而$\boldsymbol{\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:1:3}$且$\boldsymbol{\overline{OG}:\overline{GH}=1:2}$。

二、 圓內接n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的**歐拉線上依序也有**外心O、重心G、歐拉圓圓心K、垂心H等四心，又$\boldsymbol{\overline{OG}:\overline{GK}=2:(n-2)}$，且歐拉圓圓心$K$恆為外心$O$和垂心$H$的**中點**，從而$\boldsymbol{\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:(n-2):n}$且$\boldsymbol{\overline{OG}:\overline{GH}=1:(n-1)}$。

三、 設$\Delta A_1A_2A_3$的外心為O，內心為O_1，旁心三角形$\Delta B_1B_2B_3$的外心為O_2，則此三心會共線且$\boldsymbol{O}$**點為**$\boldsymbol{\overline{O_1O_2}}$**的中點**。

四、 設雙心n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的外心為O，內心為O_1，旁心n邊形$B_1B_2\cdots B_{n-1}B_n$的外心為O_2，則此三心也會共線且$\boldsymbol{O}$**點為**$\boldsymbol{\overline{O_1O_2}}$**的中點**。

五、 圓內接n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的歐拉圓圓心K是n個$(n-1)$邊形的歐拉圓圓心K_1，K_2，$\cdots K_n$的**外心**；而垂心H是n個$(n-1)$邊形的垂心H_1，H_2，$\cdots H_n$的**外心**，但重心G**並不是**n個$(n-1)$邊形的重心G_1，G_2，$\cdots G_n$的**外心**。

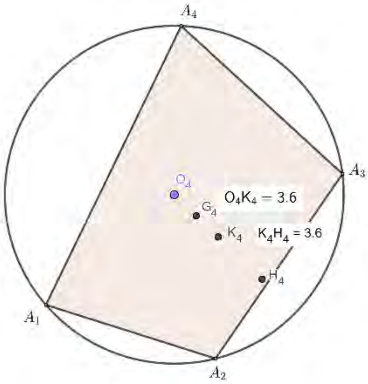
六、$\Delta A_1A_2A_3$的外心O是旁心三角形$\Delta B_1B_2B_3$的**歐拉圓圓心**，內心O_1是旁心三角形$\Delta B_1B_2B_3$的**垂心**，但**其它雙心**$\boldsymbol{n(n\geq 4)}$**邊形**$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$**並沒有**這樣的性質。

柒、參考資料及其他

1. 左銓如・季素月著。初等幾何研究。九章出版社，P149~156。
2. 黃家禮編著。幾何明珠。九章出版社，P119~120 和 P150~151。
3. 李冬梅・白世忠譯。幾何學中的歸納法。九章出版社・開明(大陸)出版社，P101~119。
4. 笹部貞市郎原著。幾何學辭典。九章出版社，P87~138。
5. 張海潮(98 年 6 月)。從旋轉及縮放看尤拉線及九點圓。數學傳播 33 卷 2 期，中央研究院數學研究所，P48~51。
6. RADIC, M. and ZATEZALO, A. : About some kinds of bicentric polygon and concerning relations, Math. Maced. 4 (2006), 47 – 73.
7. 李孟龍　莊耀鈞。層層疊疊-雙心多邊形面積的一個有趣性質。中華民國第五十六屆中小學科展。
8. 馮志剛著。數學歸納法的證明方法與技巧。華東師範大學出版社。

附件一

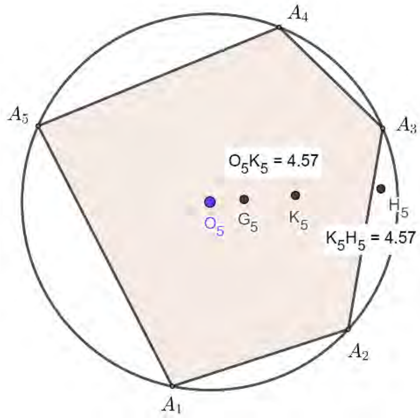
圓內接多邊形四心O(外心)、G(重心)、K(歐拉圓圓心)、H(垂心)之間距離關係的觀察



$\overline{O_4G_4} : \overline{G_4K_4} = 1 : 1$

$\overline{O_4K_4} : \overline{K_4H_4} = 1 : 1$

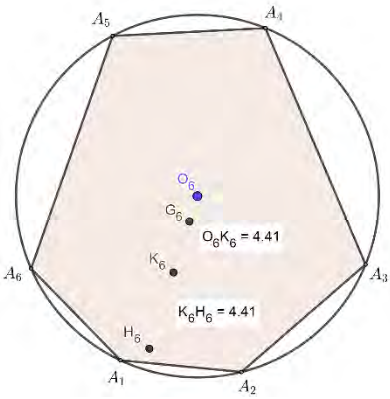
$\overline{O_4G_4} : \overline{G_4K_4} : \overline{K_4H_4} = 1 : 1 : 2$



$\overline{O_5G_5} : \overline{G_5K_5} = 2 : 3$

$\overline{O_5K_5} : \overline{K_5H_5} = 1 : 1$

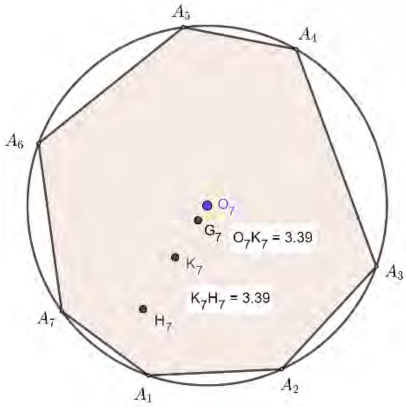
$\overline{O_5G_5} : \overline{G_5K_5} : \overline{K_5H_5} = 2 : 3 : 5$



$\overline{O_6G_6} : \overline{G_6K_6} = 2 : 4$

$\overline{O_6K_6} : \overline{K_6H_6} = 1 : 1$

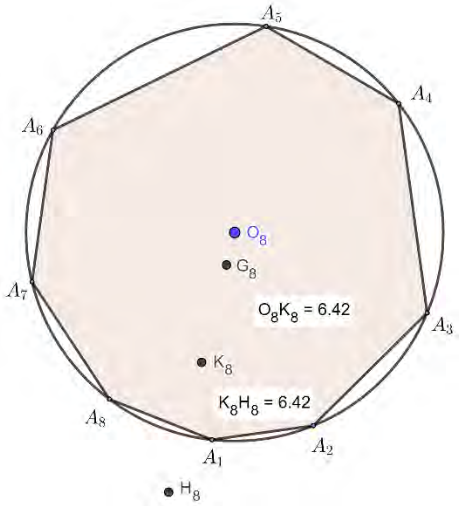
$\overline{O_6G_6} : \overline{G_6K_6} : \overline{K_6H_6} = 2 : 4 : 6$



$\overline{O_7G_7} : \overline{G_7K_7} = 2 : 5$

$\overline{O_7K_7} : \overline{K_7H_7} = 1 : 1$

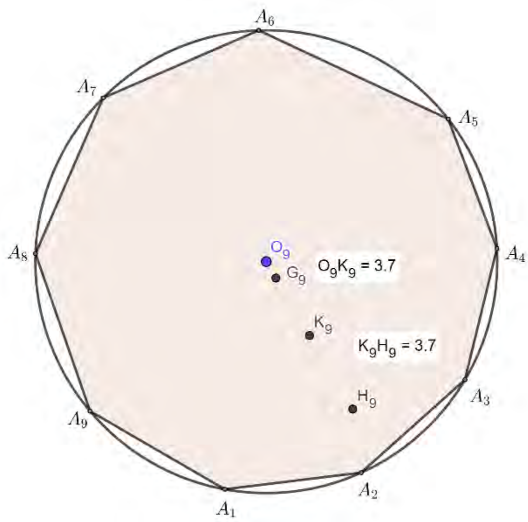
$\overline{O_7G_7} : \overline{G_7K_7} : \overline{K_7H_7} = 2 : 5 : 7$



$\overline{O_8G_8} : \overline{G_8K_8} = 2 : 6$

$\overline{O_8K_8} : \overline{K_8H_8} = 1 : 1$

$\overline{O_8G_8} : \overline{G_8K_8} : \overline{K_8H_8} = 2 : 6 : 8$



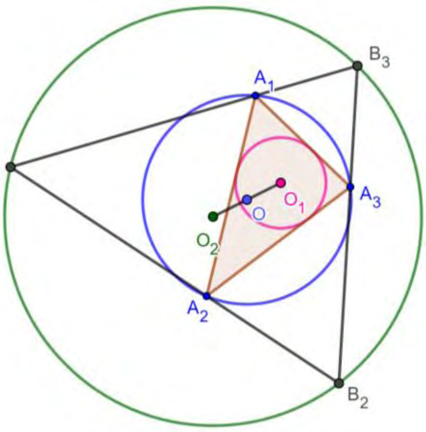
$\overline{O_9G_9} : \overline{G_9K_9} = 2 : 7$

$\overline{O_9K_9} : \overline{K_9H_9} = 1 : 1$

$\overline{O_9G_9} : \overline{G_9K_9} : \overline{K_9H_9} = 2 : 7 : 9$

附件二

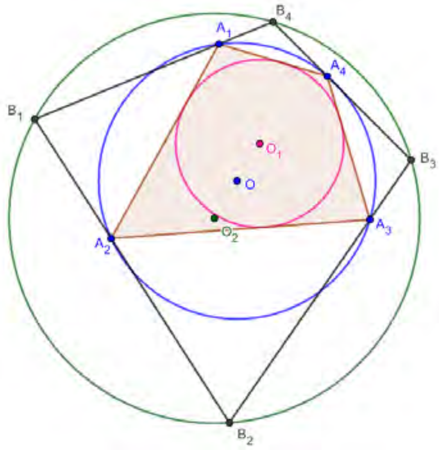
雙心三角形、四邊形、五邊形、六邊形、七邊形、八邊形內心、外心與旁心多邊形的外心之間距離關係的觀察



$\overline{OA_1} = 2.02$

$\overline{OA_2} = 2.02$

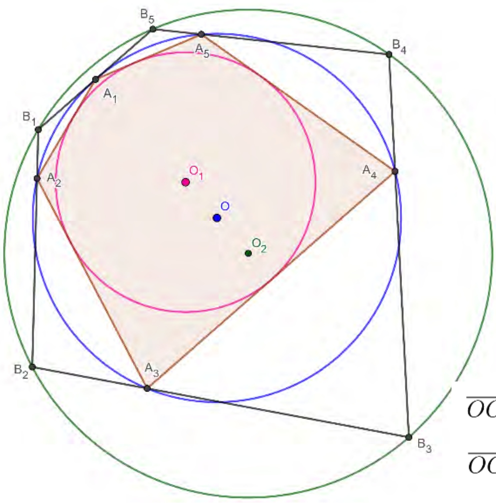
$\overline{OA_1} : \overline{OA_2} = 1:1$



$\overline{OO_1} = 2.76$

$\overline{OO_2} = 2.76$

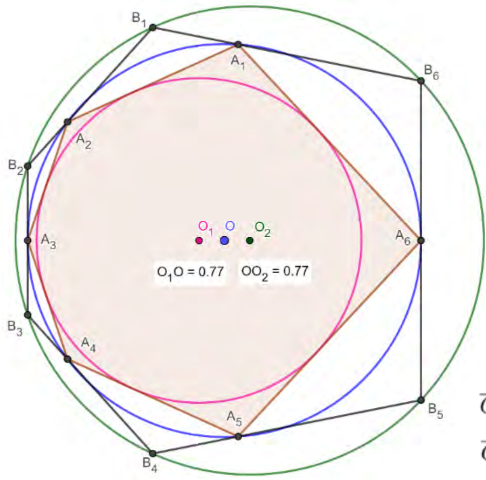
$\overline{OO_1} : \overline{OO_2} = 1:1$



$\overline{OO_1} = 2.927$

$\overline{OO_2} = 2.927$

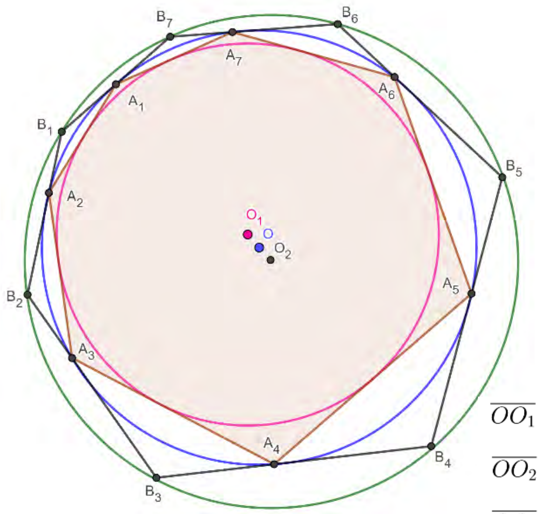
$\overline{OO_1} : \overline{OO_2} = 1:1$



$\overline{OO_1} = 0.77$

$\overline{OO_2} = 0.77$

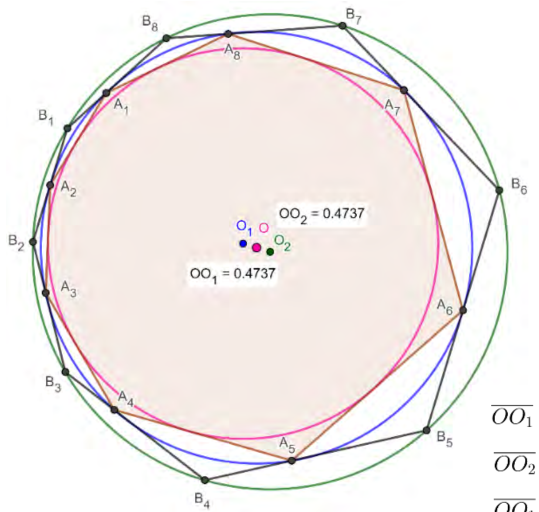
$\overline{OO_1} : \overline{OO_2} = 1:1$



$\overline{OO_1} = 0.911$

$\overline{OO_2} = 0.911$

$\overline{OO_1} : \overline{OO_2} = 1:1$



$\overline{OO_1} = 0.4737$

$\overline{OO_2} = 0.4737$

$\overline{OO_1} : \overline{OO_2} = 1:1$

【評語】050416

1. 作品很完整呈現幾何圖形之探究並得到驗證的結果。報告呈現可以口說再加上動畫表示其辛苦研究之成果。

2. 歐拉圓或歐拉線是三角形之重要性質，作者在本作品將之推廣到多邊形。先重新定義多邊形重心、中線、k 階中線並證明其存在性。但是對於歐拉圓的推廣，只能定義於圓內接多邊形。研究步驟依序圓內接四邊形(定理二)、圓內接五邊形(定理三)、圓內接 n 邊形(定理四)以數學歸納法串聯。其間參雜一些第 56 界全國科展作品內容延伸。作品的內容深度有加強空間。

3. 建議可考慮將研究目的接續列出研究問題。在研究結果部分，需交代那些性質參考自那些參考資料，那些部分是否自創，(例如定理 2 後列出有參考引理 1),可明白展現自己努力的成果。

作品海報

摘要

三角形的外心O、重心G、九點圓圓心K和垂心H**會依序在同一直線上**，這條直線就稱為**三角形的歐拉線**，又$\overline{\boldsymbol{OG}}:\overline{\boldsymbol{GK}}=\mathbf{2}:\mathbf{1}$，且**$K$為$\overline{OH}$的中點**，從而$\overline{\boldsymbol{OG}}:\overline{\boldsymbol{GK}}:\overline{\boldsymbol{KH}}=\mathbf{2}:\mathbf{1}:\mathbf{3}$且$\overline{\boldsymbol{OG}}:\overline{\boldsymbol{GH}}=\mathbf{1}:\mathbf{2}$。我們發現當多邊形**有外接圓時(圓內接多邊形)**，也會有**相對應的結果**。即圓內接$n(n\ge 3)$邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的外心O、重心G、歐拉圓圓心K和垂心H**會依序在同一直線上**，不妨稱此直線為**圓內接多邊形的歐拉線**，又$\overline{\boldsymbol{OG}}:\overline{\boldsymbol{GK}}=\mathbf{2}:(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})$，且**$K$恆為$\overline{OH}$的中點**，從而$\overline{\boldsymbol{OG}}:\overline{\boldsymbol{GK}}:\overline{\boldsymbol{KH}}=\mathbf{2}:(\boldsymbol{n}-\mathbf{2}):\boldsymbol{n}$且$\overline{\boldsymbol{OG}}:\overline{\boldsymbol{GH}}=\mathbf{1}:(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})$。

無獨有偶，我們發現三角形的外心O、內心O_1、旁心三角形的外心O_2**也會共線，且O點為$\overline{O_1O_2}$的中點**；而當多邊形**同時有外接圓和內切圓時(雙心多邊形)**，也會有**相同的結果**。即**雙心$n(n\ge 3)$邊形**$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的**外心O**正好是**內心O_1**和旁心n邊形的**外心O_2**之**中點**。

壹、研究動機

三角形的歐拉線依序經過其**外心、重心、九點圓(或稱歐拉圓)圓心和垂心**。這讓我們聯想到**此歐拉線**是否可以推廣到**其它邊數的圓內接多邊形**，因此決定以此當作研究題材。

貳、研究目的

本研究的目的在探討並尋找其它**圓內接多邊形**，看看是否符合：**外心、重心、歐拉圓圓心和垂心四點共線的性質**，並觀察**這四心之間的距離比**是否有一定的關係。如果進一步考慮**三角形的內心**和**旁心三角形的外心**，看看和三角形的**其它心**是否有**共線的現象**？如果有，可否類推到其它**雙心多邊形**？最後試著利用所定義的**多邊形重心**、**圓內接多邊形的歐拉圓圓心**、**垂心**以及**旁心多邊形的外心**的性質，證明此結果為真。

參、研究設備及器材

本研究主要利用 GSP 與Geogebra 等**電腦動態幾何軟體**進行研究問題的**幾何實驗**，透過**實驗觀察**、**猜測**與**驗證**，然後**提出研究結果並加以證明**。

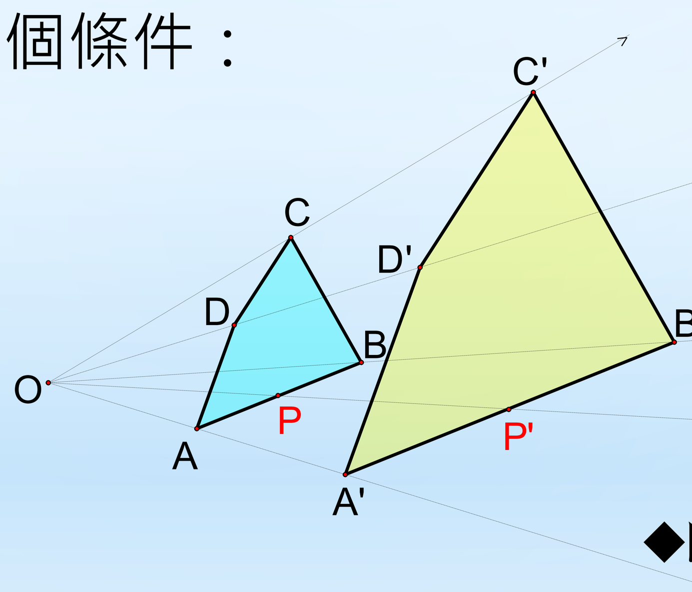
肆、研究過程或方法

一、文獻探討與前置研究

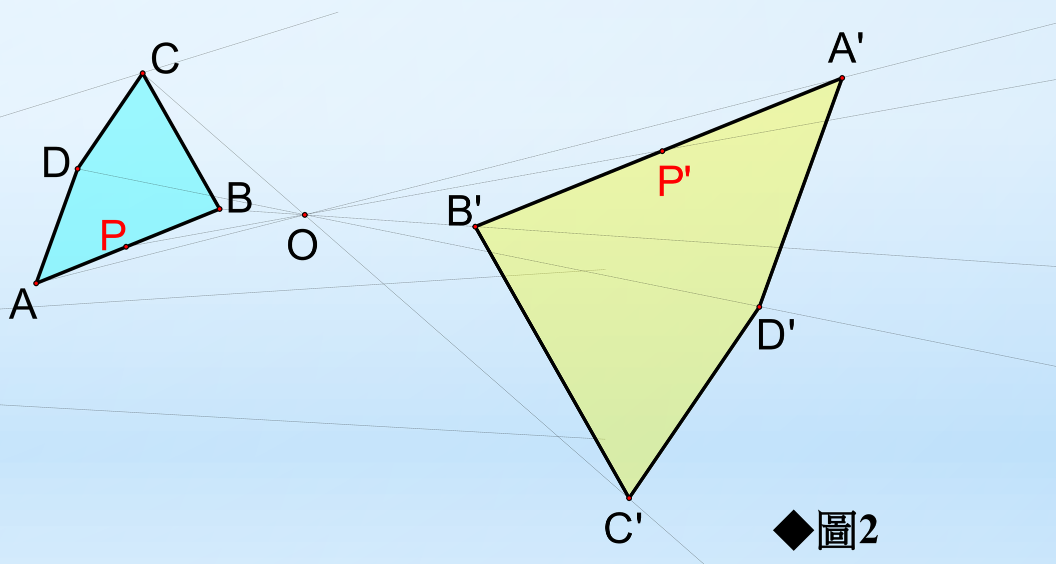
(一)位似變換

1. **定義:** O是平面π上一個定點，H是平面上的變換。若對於任一對應點P、P'，都有 $\overrightarrow{\boldsymbol{OP'}}=\boldsymbol{k}\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$ **(k為非零實數)**，則**稱H為位似變換**，記為$\boldsymbol{H(O,k)}$，O叫做**位似中心**，k叫做**位似比**。(參1)

定義中的條件 $\overrightarrow{\boldsymbol{OP'}}=\boldsymbol{k}\overrightarrow{\boldsymbol{OP}}$ 等價於如下三個條件：
(1) O，P，P'共線；
(2) $\overline{OP'}=|k|\overline{OP}$；
(3) 當$k>0$時，P，P'在O點同側，
如圖1，此時O點叫做**外位似中心**；
當$k<0$時，P，P'在O點異側，
如圖2，此時O點叫做**內位似中心**。



◆圖1



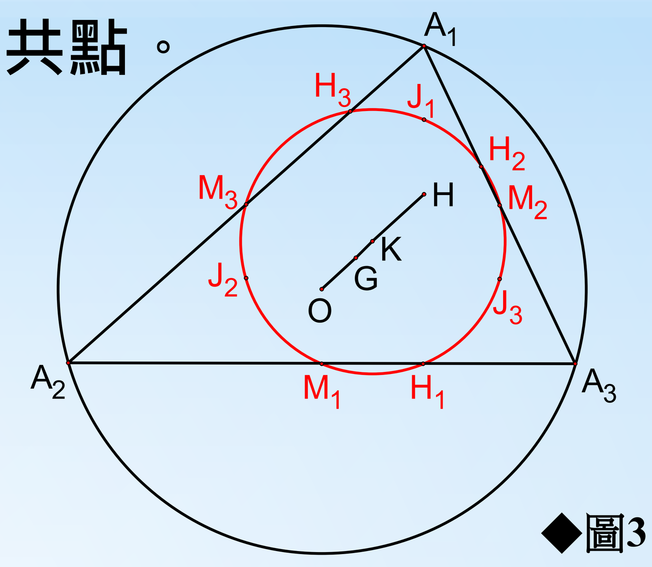
◆圖2

2. **性質:**
(1) 位似變換是相似變換，所以位似變換**具有相似變換的所有性質**。
(2) 在位似變換下，**位似中心是不變點**，**過位似中心的直線是不變直線**。
(3) 在位似變換下，**對應線段之比相等**，**對應角相等**，**不過中心的對應直線平行**。
(4) 位似圖形一定是相似圖形，並且位似圖形的**對應線段平行**，**過對應頂點的直線共點**。

(二)歐拉線與九點圓

1.歐拉線：任意三角形的**垂心H**、**重心G和外心O**，**三點共線**，且$\overline{HG}=2\overline{GO}$，而這三點所在的直線稱為**三角形的歐拉線**。

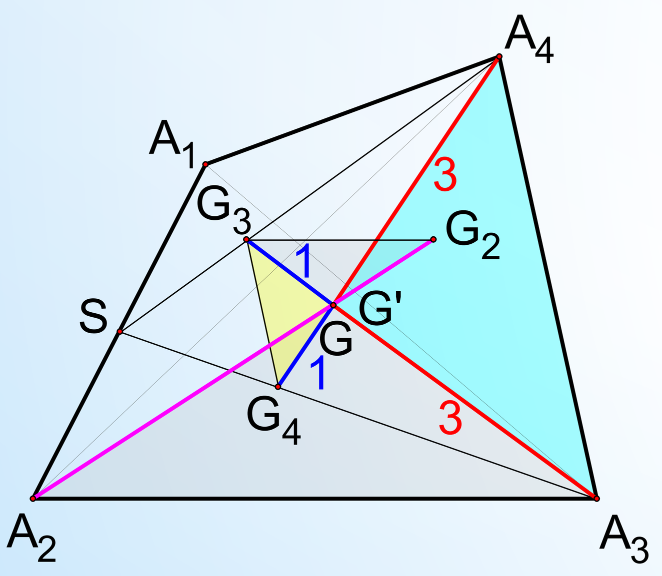
2.九點圓：任意三角形**三條高的垂足**、**三邊的中點**，以及**垂心與頂點的三條連線的中點**，**這九點共圓**，這個圓通常稱為三角形的**九點圓**，或稱**歐拉圓**。



◆圖3

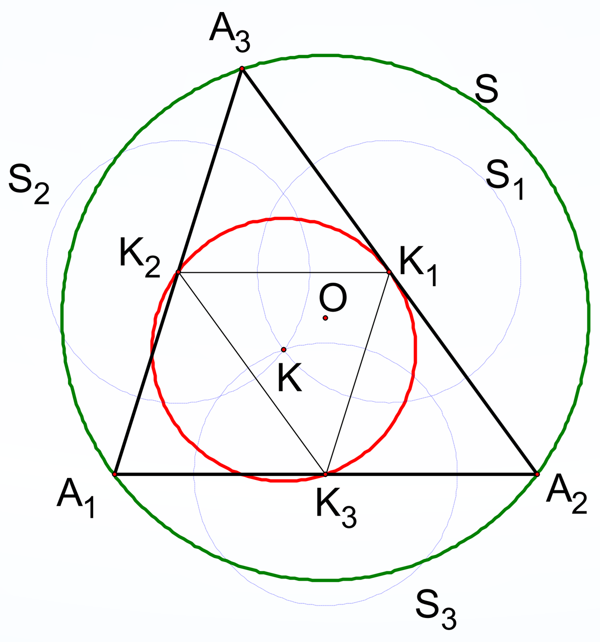
如圖3，在$\Delta A_1A_2A_3$中，如下的九點共圓：**三邊的中點M_1、M_2、M_3**，從**三個頂點向對邊所作垂線的垂足H_1、H_2、H_3**，**垂心到三個頂點所連線段的中點J_1、J_2、J_3**等九個點，且**九點圓的圓心K是其外心O與垂心H所連線段的中點**。另外，**圓心K到重心G的距離是外心O到重心G距離的一半**。此四點所在的直線就是三角形的歐拉線。(參2)

(三)多邊形的中線和重心定義



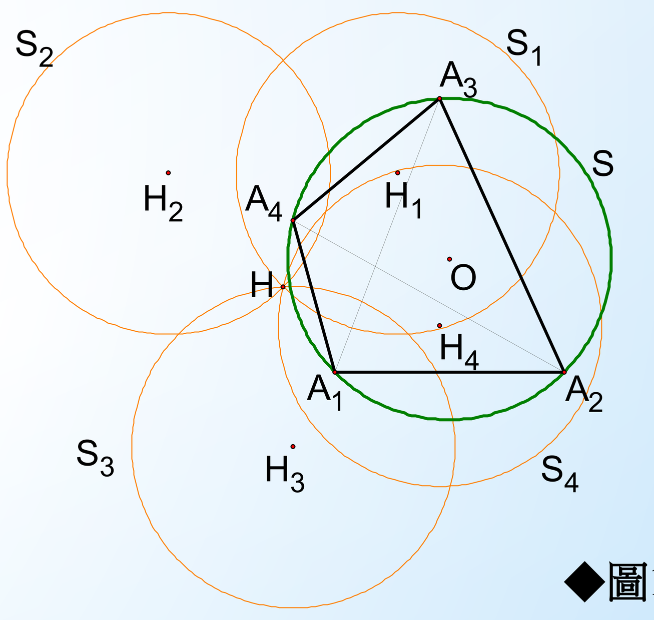
◆圖6

(四)圓內接多邊形的歐拉圓圓心定義



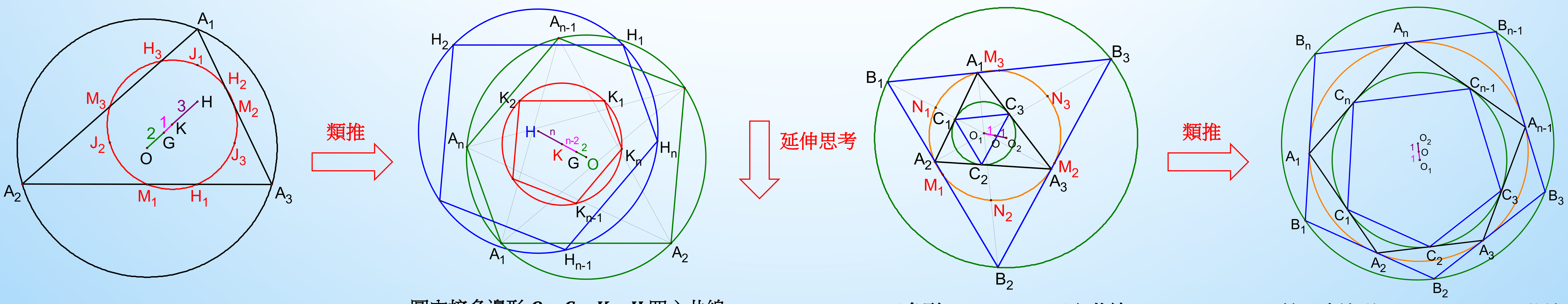
◆圖10

(五)圓內接多邊形的垂心定義



◆圖15

二、研究架構



三角形 $\boldsymbol{O}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{H}$ 四心共線　圓內接多邊形 $\boldsymbol{O}$、$\boldsymbol{G}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{H}$ 四心共線　三角形 $\boldsymbol{O_1}$、$\boldsymbol{O}$、$\boldsymbol{O_2}$ 三心共線　雙心多邊形 $\boldsymbol{O_1}$、$\boldsymbol{O}$、$\boldsymbol{O_2}$ 三心共線

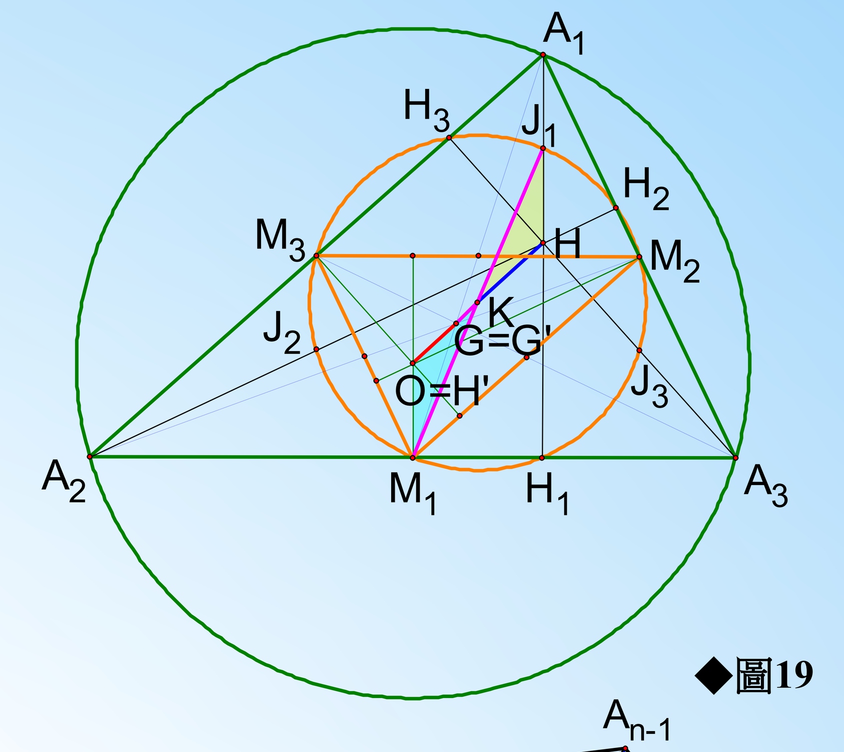
伍、研究結果與討論

一、原定理的證明

【定理一】

如圖19，在$\Delta A_1A_2A_3$中，如下的九點共圓：三邊的中點M_1、M_2、M_3，從三個頂點向對邊所作垂線的垂足H_1、H_2、H_3，垂心到三個頂點所連線段的中點J_1、J_2、J_3等九個點，且九點圓的圓心K是其外心O與垂心H所連線段的中點。

另外，圓心K到重心G的距離是外心O到重心G距離的一半，而此四點所在的直線就是三角形的歐拉線，滿足$\overline{OG}:\overline{GH}=1:2$且$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:1:3$。(參5)



◆圖19

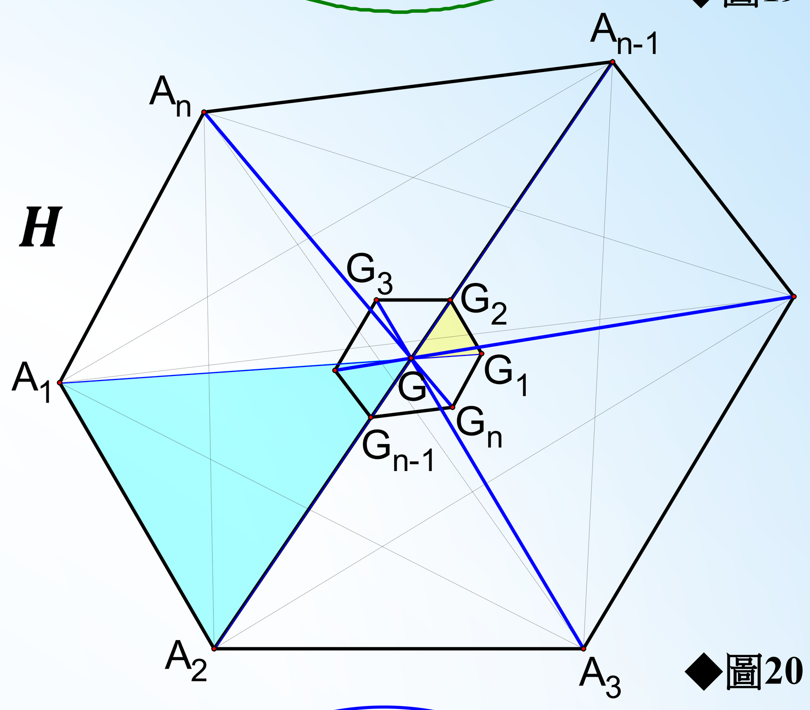
二、原定理的推廣

我們先以數學動態幾何軟體GGB畫出圓內接四邊形和五邊形的四心,發現它們的四心O、G、K、H也會共歐拉線，也和三角形有相對應的結果。為了證明新的定理,我們需先證明下面這個引理:

【引理一】

如圖20，設在n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$中用G_1表示$(n-1)$邊形$A_2A_3\cdots A_n$的重心，用G_2表示$(n-1)$邊形$A_1A_3\cdots A_n$的重心，…，用G_n表示$(n-1)$邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}$的重心。

則n邊形$G_1G_2\cdots G_{n-1}G_n$相似於已知n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$。(參3)



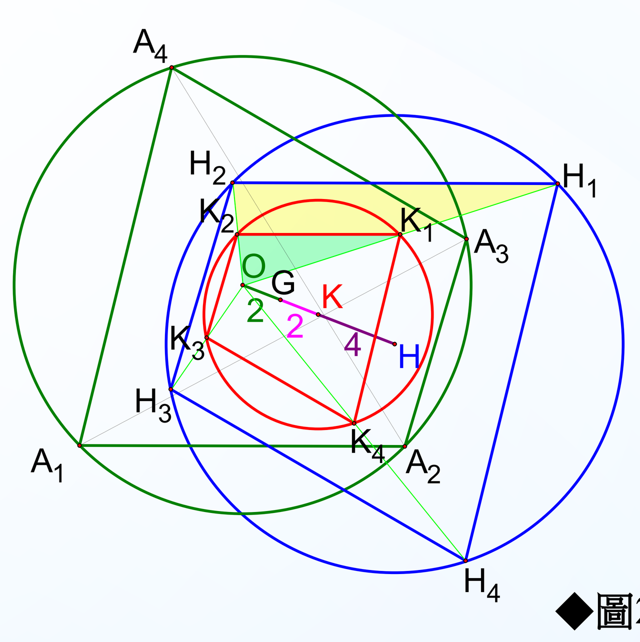
◆圖20

【定理二】

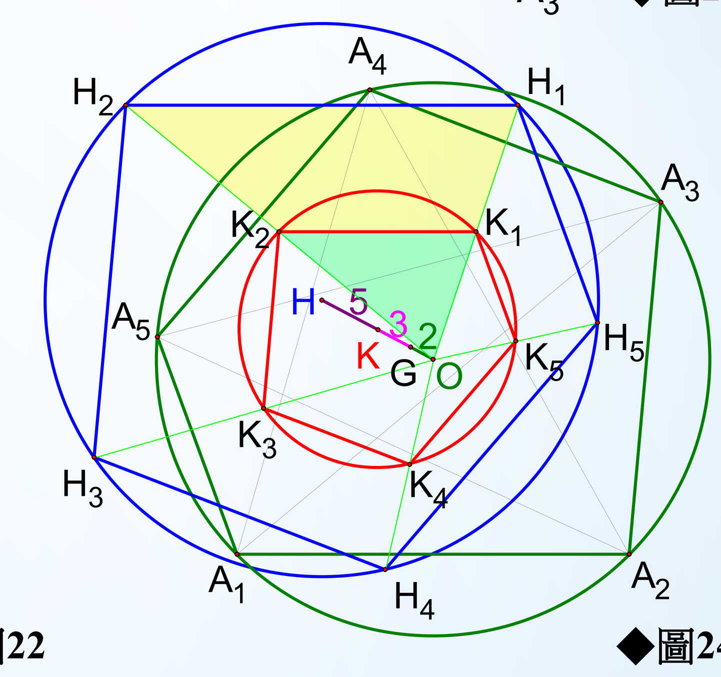
如圖22，在圓內接四邊形$A_1A_2A_3A_4$中，其外心為O、重心為G、歐拉圓圓心為K、垂心為H，則此四心會共線，又$\overline{OG}:\overline{GK}=2:2$，且$K$為$\overline{OH}$的中點，從而$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:2:4$且$\overline{OG}:\overline{GH}=1:3$。

【定理三】

如圖24，在圓內接五邊形$A_1A_2A_3A_4A_5$中，其外心為O、重心為G、歐拉圓圓心為K、垂心為H，則此四心會共線，又$\overline{OG}:\overline{GK}=2:3$，且$K$為$\overline{OH}$的中點，從而$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:3:5$且$\overline{OG}:\overline{GH}=1:4$。



◆圖22



◆圖24

如附件一，我們再以GGB畫出其它邊數的圓內接多邊形的四心，陸續發現圓內接六邊形、七邊形、八邊形和九邊形等的四心O、G、K、H也會共歐拉線，且在六邊形時，$\overline{OG}:\overline{GK}=2:4$，$\overline{OK}:\overline{KH}=6:6$；七邊形時，$\overline{OG}:\overline{GK}=2:5$，$\overline{OK}:\overline{KH}=7:7$；八邊形時，$\overline{OG}:\overline{GK}=2:6$，$\overline{OK}:\overline{KH}=8:8$；九邊形時，$\overline{OG}:\overline{GK}=2:7$，$\overline{OK}:\overline{KH}=9:9$，也和三角形有相對應的結果。

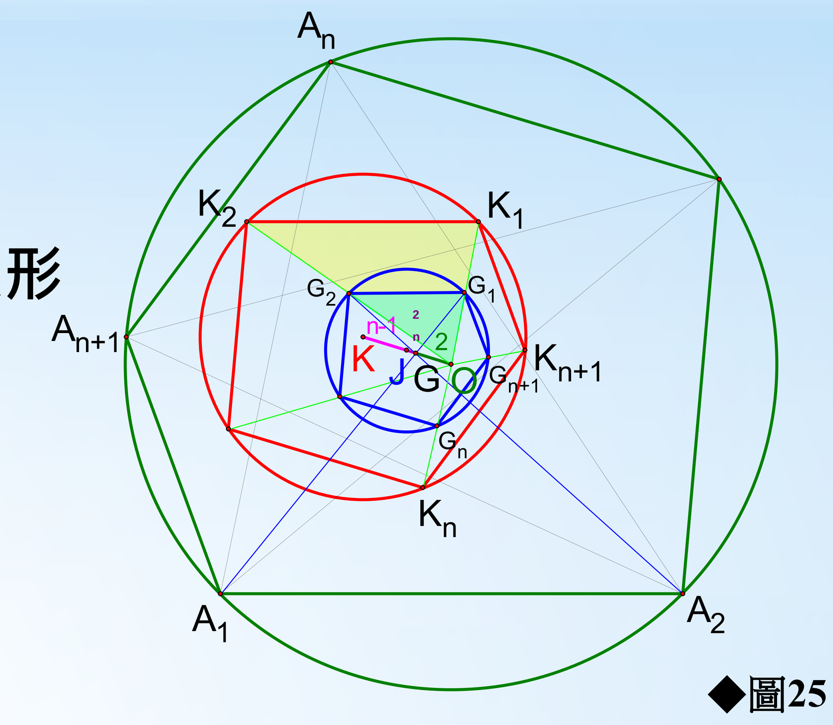
於是我們猜測其它圓內接n邊形應該也有類似的性質，即圓內接$n(n\geq 4)$邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$，其四心O、G、K、H也會共歐拉線，且$\overline{OG}:\overline{GK}=2:(n-2)$，$\overline{OK}:\overline{KH}=n:n$，即$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:(n-2):n$。

【定理四】

在圓內接n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$中，其外心為O、重心為G、歐拉圓圓心為K、垂心為H，則此四心會共線，又$\overline{OG}:\overline{GK}=2:(n-2)$，且$K$為$\overline{OH}$的中點，從而$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:(n-2):n$ 且$\overline{OG}:\overline{GH}=1:(n-1)$。

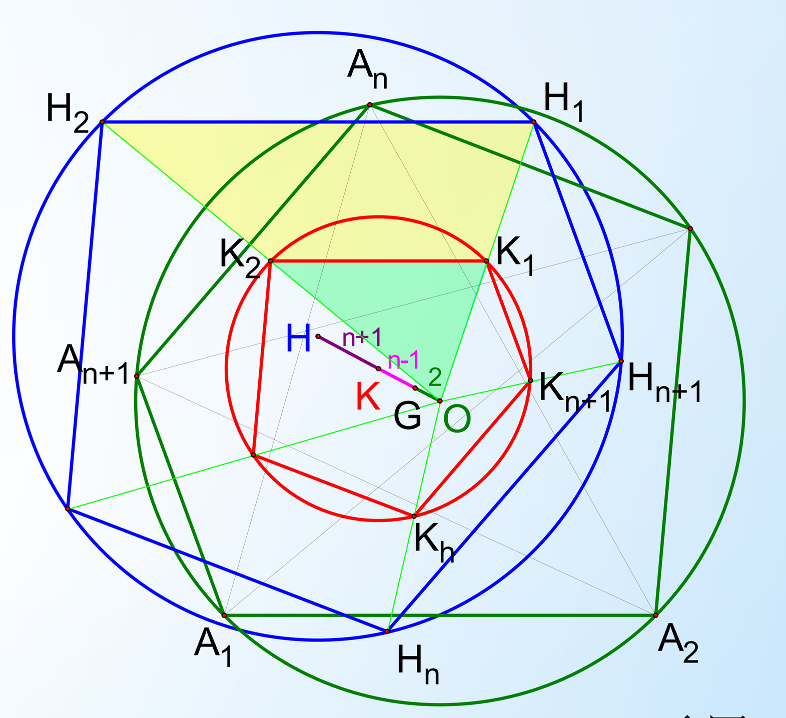
【證明】

1. 現在我們假設邊數k不大於$n(n\geq 4)$的所有圓內接k邊形都有類似的性質，即圓內接多邊形$n(n\geq 4)$邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$，其四心 O、 G、K、H會共一直線，且$\overline{OG}:\overline{GK}=2:(n-2)$，其歐拉圓圓心$K$恆為外心$O$和垂心$H$的中點，滿足$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:(n-2):n$。再來考慮圓內接$(n+1)$邊形$A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$。
   如圖25，因為 $(n+1)$邊形$G_1G_2\cdots G_n\,G_{n+1}\sim(n+1)$邊形$A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$，又兩中線$\overline{A_1G_1}$和$\overline{A_2G_2}$相交於$(n+1)$邊形$A_1A_2\cdots A_nA_{n+1}$的重心$G$，且 $\frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{A_1A_2}}=\frac{\overline{GG_1}}{\overline{GA_1}}=\frac{\overline{GG_2}}{\overline{GA_2}}=\frac{1}{n}$，所以 兩個$(n+1)$邊形的位似中心為 G，位似比為 $-\frac{1}{n}$，從而 $(n+1)$邊形$G_1G_2\cdots G_n\,G_{n+1}$也有外心 J，令$\overline{OG}=2$，則$\overline{GJ}=\frac{2}{n}$，故$O$、$G$、$J$三點共線，且$\overline{OJ}=\overline{OG}+\overline{GJ}=2+\frac{2}{n}=\frac{2(n+1)}{n}$。
2. 因為 O、G_1、K_1三點共線，O、G_2、K_2三點共線且$\frac{\overline{OG_1}}{\overline{OK_1}}=\frac{\overline{OG_2}}{\overline{OK_2}}=\frac{2}{(n-2)+2}=\frac{2}{n}$，
   所以 $\Delta G_1OG_2\sim\Delta K_1OK_2(SAS)$，推知$\frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{K_1K_2}}=\frac{\overline{OG_1}}{\overline{OK_1}}=\frac{\overline{OG_2}}{\overline{OK_2}}=\frac{2}{n}$。
   同理有 $\frac{\overline{G_2G_3}}{\overline{K_2K_3}}=\frac{\overline{G_3G_4}}{\overline{K_3K_4}}\cdots=\frac{\overline{G_nG_{n+1}}}{\overline{K_nK_{n+1}}}=\frac{\overline{G_{n+1}G_1}}{\overline{K_{n+1}K_1}}=\frac{2}{n}$，因此 $(n+1)$邊形$G_1G_2\cdots G_n\,G_{n+1}\sim(n+1)$邊形$K_1K_2\cdots K_n\,K_{n+1}$，且兩個$(n+1)$邊形的位似中心為 O，位似比為 $\frac{2}{n}$，$\overline{OJ}=\frac{2}{n}\overline{OK}$，
   推得 $\overline{OK}=\frac{n}{2}\overline{OJ}=\frac{n}{2}\times\frac{2(n+1)}{n}=n+1$，$\overline{GK}=\overline{OK}-\overline{OG}=(n+1)-2=n-1$，
   故 O、G、K三點共線，$\overline{OG}:\overline{GK}=2:(n-1)=2:[(n+1)-2]$也成立。



◆圖25

3. 如圖26，因為 O、K_1、H_1三點共線，O、K_2、H_2三點共線
   且 $\frac{\overline{OK_1}}{\overline{OH_1}}=\frac{\overline{OK_2}}{\overline{OH_2}}=\frac{1}{2}$，所以 $\Delta K_1OK_2\sim\Delta H_1OH_2(SAS)$，推知 $\frac{\overline{K_1K_2}}{\overline{H_1H_2}}=\frac{\overline{OK_1}}{\overline{OH_1}}=\frac{\overline{OK_2}}{\overline{OH_2}}=\frac{1}{2}$。
   同理有 $\frac{\overline{K_2K_3}}{\overline{H_2H_3}}=\frac{\overline{K_3K_4}}{\overline{H_3H_4}}\cdots=\frac{\overline{K_{n+1}K_1}}{\overline{H_{n+1}H_1}}=\frac{1}{2}$，所以 $(n+1)$邊形$K_1K_2\cdots K_n\,K_{n+1}\sim(n+1)$邊形$H_1H_2\cdots H_n\,H_{n+1}$，且兩個$(n+1)$邊形的位似中心為$O$，位似比為$\frac{1}{2}$，$\overline{OK}=\frac{1}{2}\overline{OH}$，
   推得 $\overline{OH}=2\overline{OK}=2(n+1)$，$\overline{KH}=\overline{OH}-\overline{OK}=2(n+1)-(n+1)=n+1$，
   從而 O、K、H三點共線且$\overline{OK}=\overline{KH}$，即歐拉圓圓心$K$為外心$O$和垂心$H$的中點，
   故四心O、G、K、H會共線$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:(n-1):(n+1)$
   $=2:[(n+1)-2]:(n+1)$也成立。



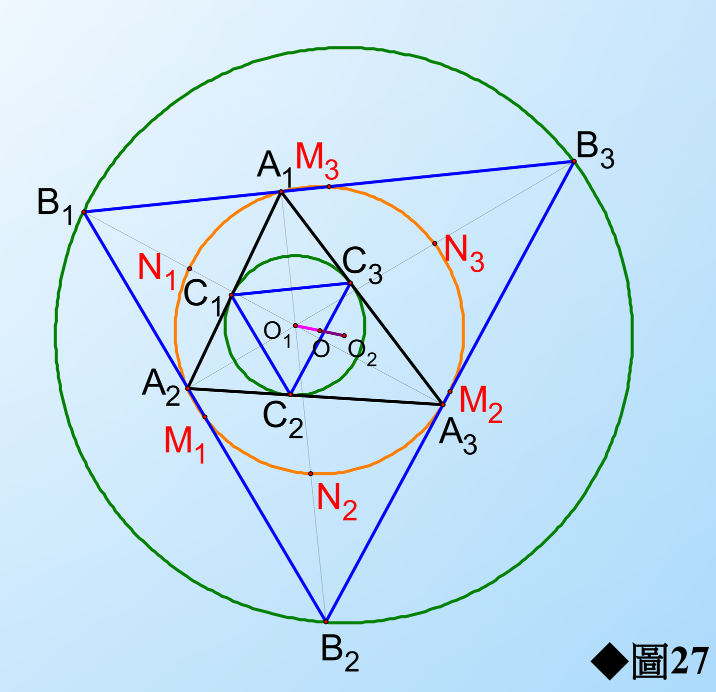
◆圖26

由數學歸納法可知：對任意的圓內接n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$，設其外心為O、重心為G、歐拉圓圓心為K、垂心為H，則此四心會共線，當然也就有歐拉線且$\overline{OG}:\overline{GK}=2:(n-2)$，又歐拉圓圓心$K$恆為外心$O$和垂心$H$的中點，故 $\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:(n-2):n$，推知 $\overline{OG}:\overline{GH}=2:(2n-2)=1:(n-1)$。

我們知道三角形除了等腰三角形外，其內心並不會在歐拉線上，但如果考慮另外三個旁心所形成三角形的外心，會發現三角形的外心、內心與旁心三角形的外心也會共線，而有以下的定理：

【定理五】

如圖27，設$\Delta A_1A_2A_3$的外心為O，內心為O_1，旁心三角形$\Delta B_1B_2B_3$的外心為O_2，則此三心會共線且O點為$\overline{O_1O_2}$的中點。



◆圖27

當多邊形同時有外接圓和內切圓時，稱其為**雙心多邊形**(參6)。如附件二，我們以GGB進行研究問題的幾何實驗，分別找出雙心四邊形、五邊形、六邊形、七邊形、八邊形等的內心、外心與旁心多邊形的外心，**發現此三心會共線，且外心也是內心和旁心多邊形外心的中點**。於是我們猜測**其它雙心n邊形應該也具有相同的性質**，即**雙心$n(n\geq 4)$邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的外心O正好是內心O_1和旁心n邊形的外心O_2之中點**。

為了證明**其它雙心$n(n\geq 4)$邊形**也有相同的結果，我們需先證明下面這個引理：

【引理二】

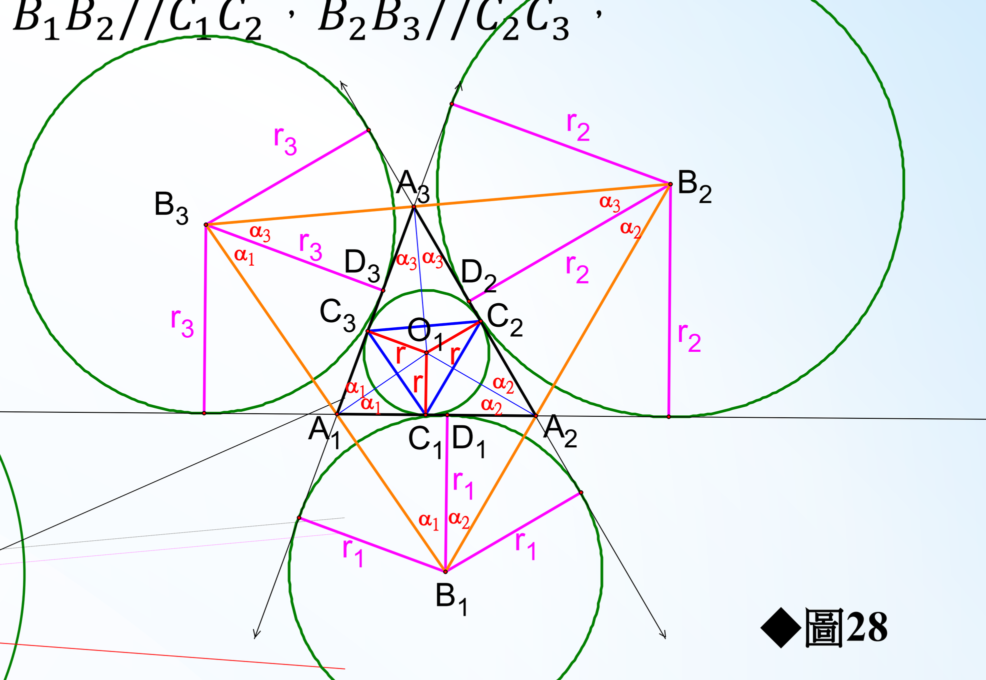
如圖28，設$\Delta A_1A_2A_3$中，其內切圓半徑為 r，$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$ 的旁切圓半徑分別為 r_1、r_2、r_3，則 $r_1=\dfrac{r}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}}$，$r_2=\dfrac{r}{tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}}$ ，$r_3=\dfrac{r}{tan\frac{A_3}{2}tan\frac{A_1}{2}}$。(參7)

【定理六】

設雙心n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的外心為O，其內心也是內切圓切點n邊形$C_1C_2\cdots C_{n-1}C_n$的外心為O_1，其旁心n邊形$B_1B_2\cdots B_{n-1}B_n$的外心為O_2，則此三心會共線且O點為$\overline{O_1O_2}$的中點。

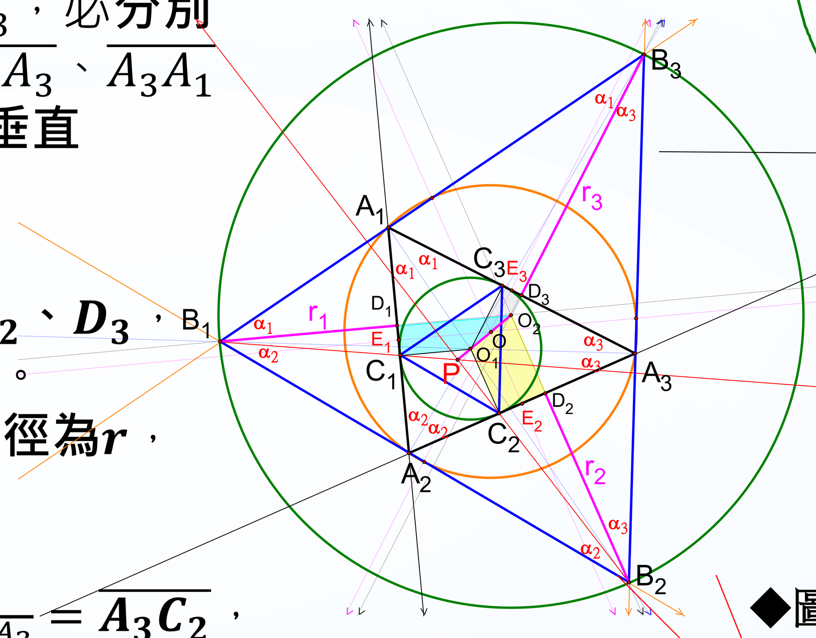
【證明】

1.(1)**如圖29**，設$\Delta A_1A_2A_3$的旁心三角形為$\Delta B_1B_2B_3$，內切圓切點三角形為$\Delta C_1C_2C_3$，$\because \overline{A_1C_1}=\overline{A_1C_3}$**(切線等長)**，且 $\overline{A_1O_1}$平分$\angle C_1A_1C_3$，$\therefore$ **$\overline{C_1C_3}\perp\overline{A_1O_1}$**。且**$\overline{B_1B_3}\perp\overline{A_1O_1}$(同一頂點處內、外角平分線互相垂直)**，$\therefore \overline{B_1B_3}//\overline{C_1C_3}$。同理有 $\overline{B_1B_2}//\overline{C_1C_2}$，$\overline{B_2B_3}//\overline{C_2C_3}$，所以旁心三角形**$\Delta B_1B_2B_3$和內切圓切點三角形$\Delta C_1C_2C_3$會相似**。



◆圖28

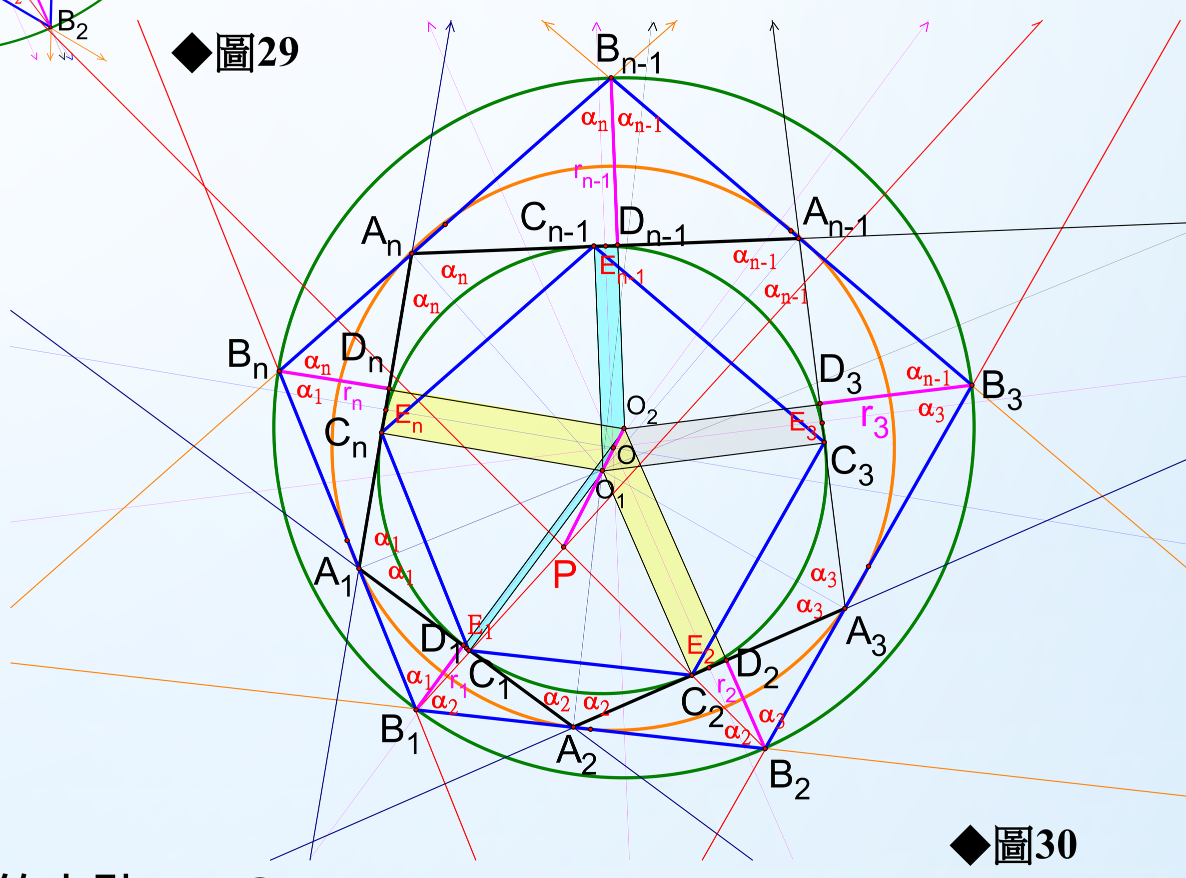
(2)**連接$\overleftrightarrow{B_1C_1}$和$\overleftrightarrow{B_2C_2}$，設交於$P$點，則$P$點為$\Delta B_1B_2B_3$和$\Delta C_1C_2C_3$的位似中心**。
又三者的外心依序為**O、O_2、O_1**，所以連接$\overleftrightarrow{O_1C_1}$、$\overleftrightarrow{O_1C_2}$、$\overleftrightarrow{O_1C_3}$，**必分別垂直**$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$**於點$C_1$、$C_2$、$C_3$**；再分別作$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$的中垂線，則此三中垂線必相交於**$\Delta A_1A_2A_3$的外心$O$**，且分別垂直$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$**於$E_1$、$E_2$、$E_3$**。



◆圖29

(3)作**$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$、$\overleftrightarrow{B_3D_3}$分別垂直**$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$**於點$D_1$、$D_2$、$D_3$**，
則$\overline{B_1D_1}$、$\overline{B_2D_2}$、$\overline{B_3D_3}$分別為$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$**的旁切圓半徑**。
設**$\overline{B_1D_1}=r_1$，$\overline{B_2D_2}=r_2$，$\overline{B_3D_3}=r_3$**，$\Delta A_1A_2A_3$**的內切圓半徑為r**，
由引理二知 $r_1=\dfrac{r}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}}$，$r_2=\dfrac{r}{tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}}$，$r_3=\dfrac{r}{tan\frac{A_3}{2}tan\frac{A_1}{2}}$。
推得 $\overline{A_1D_1}=r_1tan\frac{A_1}{2}=\dfrac{r}{tan\frac{A_2}{2}}=\overline{A_2C_1}$，$\overline{A_2D_2}=r_2tan\frac{A_2}{2}=\dfrac{r}{tan\frac{A_3}{2}}=\overline{A_3C_2}$，
$\overline{A_3D_3}=r_3tan\frac{A_3}{2}=\dfrac{r}{tan\frac{A_1}{2}}=\overline{A_1C_3}$。

且 $\overline{A_1E_1}=\overline{A_2E_1}$，$\overline{A_2E_2}=\overline{A_3E_2}$，$\overline{A_3E_3}=\overline{A_1E_3}$，
所以 $\overline{A_2E_1}-\overline{A_2C_1}=\overline{A_1E_1}-\overline{A_1D_1}\Rightarrow\overline{C_1E_1}=\overline{E_1D_1}$，**$E_1$為$\overline{C_1D_1}$的中點**。
$\overline{A_3C_2}-\overline{A_3E_2}=\overline{A_2D_2}-\overline{A_2E_2}\Rightarrow\overline{C_2E_2}=\overline{E_2D_2}$，**$E_2$為$\overline{C_2D_2}$的中點**。
$\overline{A_1E_3}-\overline{A_1C_3}=\overline{A_3E_3}-\overline{A_3D_3}\Rightarrow\overline{C_3E_3}=\overline{E_3D_3}$，**$E_3$為$\overline{C_3D_3}$的中點**。
設$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$相交於一點$O_2'$，則$O_1$、$O$、$O_2'$在$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$的投影點分別為 C_1、E_1、D_1和C_2、E_2、D_2。
因為 $\overline{O_1O_2'}$在兩條相交直線上的投影點**均被O點的的投影點所平分**，
所以 **O點為$\overline{O_1O_2'}$ 的中點**⋯⋯①。
同理，若**設$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_3D_3}$相交於一點$O''_2$**，
則O_1、O、O''_2在$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_1A_3}$的投影點分別為C_1、E_1、D_1和C_3、E_3、D_3。
因為 $\overline{O_1O''_2}$在兩條相交直線上的投影點**均被O點的的投影點所平分**，所以**O點也是$\overline{O_1O''_2}$ 的中點**⋯⋯②。
由①、②可知：$O_2'=O''_2$，即 **$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$、$\overleftrightarrow{B_3D_3}$相交於一點$O_2'$**。



◆圖30

(4)又**$\angle A_1B_1D_1=\frac{\angle A_1}{2}=\angle A_1B_3D_3$，$\angle A_2B_1D_1=\frac{\angle A_2}{2}=\angle A_2B_2D_2$，$\angle A_3B_2D_2=\frac{\angle A_3}{2}=\angle A_3B_3D_3$**，
所以 **$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$、$\overleftrightarrow{B_3D_3}$的交點$O_2'$**，滿足**$\overline{O'_2B_1}=\overline{O'_2B_2}=\overline{O'_2B_3}$**，因此**$O_2'$也是$\Delta B_1B_2B_3$的外心$O_2$**，**即$O_2'=O_2$**。
故O點為$\overline{O_1O_2}$ 的中點，且P、O_1、O_2三點共線。

2. (1)**如圖30**，**雙心n邊形**為$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n(n\geq 4)$，其**旁心$n$邊形**為$B_1B_2\cdots B_{n-1}B_n$，**內切圓切點$n$邊形**為$C_1C_2\cdots C_{n-1}C_n$，**同1(1)可知**：$\overline{B_1B_2}//\overline{C_1C_2}$，$\overline{B_2B_3}//\overline{C_2C_3}$，⋯，$\overline{B_{n-1}B_n}//\overline{C_{n-1}C_n}$，$\overline{B_nB_1}//\overline{C_nC_1}$，現在**連接$\overleftrightarrow{B_1C_1}$和$\overleftrightarrow{B_2C_2}$，設交於$P$點**，欲證明**$P$點即為旁心$n$邊形$B_1B_2\cdots B_{n-1}B_n$和切點$n$邊形$C_1C_2\cdots C_{n-1}C_n$的位似中心**。 又三者的外心依序為**$O$、$O_2$、$O_1$**，所以連接$\overleftrightarrow{O_1C_1}$、$\overleftrightarrow{O_1C_2}$、$\overleftrightarrow{O_1C_3}$、⋯、$\overleftrightarrow{O_1C_{n-1}}$、$\overleftrightarrow{O_1C_n}$，**必分別垂直**$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、 ⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$**於點$C_1$、$C_2$、⋯、$C_{n-1}$、$C_n$**；再分別作$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$的中垂線，則**此$n$條中垂線必相交於雙心$n$邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的外心$O$**，且**分別垂直**$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$、⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、 $\overline{A_nA_1}$**於點E_1、E_2、⋯、E_{n-1}、E_n**。

(2)作$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$**分別垂直**$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$**於**$D_1$、$D_2$，則$\overline{B_1D_1}$、$\overline{B_2D_2}$分別為 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$**的旁切圓半徑**。設$\overline{B_1D_1}=r_1$，$\overline{B_2D_2}=r_2$，**雙心n邊形**$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的**內切圓半徑為r**，由引理二知 $r_1=\dfrac{r}{tan\frac{A_1}{2}tan\frac{A_2}{2}}$，$r_2=\dfrac{r}{tan\frac{A_2}{2}tan\frac{A_3}{2}}$。
推得 $\overline{A_1D_1}=r_1tan\frac{A_1}{2}=\dfrac{r}{tan\frac{A_2}{2}}=\overline{A_2C_1}$，$\overline{A_2D_2}=r_2tan\frac{A_2}{2}=\dfrac{r}{tan\frac{A_3}{2}}=\overline{A_3C_2}$。且 $\overline{A_1E_1}=\overline{A_2E_1}$，$\overline{A_2E_2}=\overline{A_3E_2}$，
所以 $\overline{A_2E_1}-\overline{A_2C_1}=\overline{A_1E_1}-\overline{A_1D_1}\Rightarrow\overline{C_1E_1}=\overline{E_1D_1}$，**$E_1$為$\overline{C_1D_1}$的中點**。$\overline{A_3C_2}-\overline{A_3E_2}=\overline{A_2D_2}-\overline{A_2E_2}\Rightarrow\overline{C_2E_2}=\overline{E_2D_2}$，**$E_2$為$\overline{C_2D_2}$的中點**。
設$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$相交於一點$O_2'$，則$O_1$、$O$、$O_2'$在$\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_2A_3}$的投影點分別為**$C_1$、$E_1$、$D_1$和$C_2$、$E_2$、$D_2$**。
因為 $\overline{O_1O_2'}$在兩相交直線上的投影點**均被O點的投影點所平分**，所以 **O點為$\overline{O_1O_2'}$ 的中點**。
再作$\overleftrightarrow{B_3D_3}$、⋯、$\overleftrightarrow{B_{n-1}D_{n-1}}$、$\overleftrightarrow{B_nD_n}$分別垂直$\overline{A_3A_4}$、⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$ 於點**D_3、⋯、D_{n-1}、D_n**，
則$\overline{B_3D_3}$、⋯、$\overline{B_{n-1}D_{n-1}}$、$\overline{B_nD_n}$分別為$\overline{A_3A_4}$、⋯、$\overline{A_{n-1}A_n}$、$\overline{A_nA_1}$**的旁切圓半徑**。設$\overline{B_3D_3}=r_3$，⋯，$\overline{B_{n-1}D_{n-1}}=r_{n-1}$，$\overline{B_nD_n}=r_n$，
同上可得 E_3為$\overline{C_3D_3}$的中點，⋯，**E_{n-1}為$\overline{C_{n-1}D_{n-1}}$的中點**，**$E_n$為$\overline{C_nD_n}$的中點**。**同1(3)可得 $\overleftrightarrow{B_3D_3}$、⋯、$\overleftrightarrow{B_{n-1}D_{n-1}}$、$\overleftrightarrow{B_nD_n}$相交於一點$O_2'$**。

(3)又**$\angle A_1B_1D_1=\frac{\angle A_1}{2}=\angle A_1B_nD_n$，$\angle A_2B_1D_1=\frac{\angle A_2}{2}=\angle A_2B_2D_2$，$\angle A_3B_2D_2=\frac{\angle A_3}{2}=\angle A_3B_3D_3$，⋯$\angle A_{n-1}B_{n-2}D_{n-2}=\frac{\angle A_{n-1}}{2}=\angle A_{n-1}B_{n-1}D_{n-1}$，$\angle A_nB_{n-1}D_{n-1}=\frac{\angle A_n}{2}=\angle A_nB_nD_n$**，所以$\overleftrightarrow{B_1D_1}$、$\overleftrightarrow{B_2D_2}$、$\overleftrightarrow{B_3D_3}$、⋯、$\overleftrightarrow{B_{n-1}D_{n-1}}$、$\overleftrightarrow{B_nD_n}$的**交點$O_2'$**，**滿足 $\overline{O'_2B_1}=\overline{O'_2B_2}=\overline{O'_2B_3}=\cdots=\overline{O'_2B_n}$**，因此**$O_2'$也是旁心$n$邊形$B_1B_2\cdots B_{n-1}B_n$的外心$O_2$**，**即$O_2'=O_2$**。**故$O$點為$\overline{O_1O_2}$ 的中點，且P、O_1、O_2三點共線**。

陸、結論

一、 $\Delta A_1A_2A_3$的**歐拉線上依序有外心O、重心G、九點圓(或稱歐拉圓)圓心K和垂心H** 等四心，又**$\overline{OG}:\overline{GK}=2:1$，且九點圓圓心$K$為外心$O$和垂心$H$的中點**，從而**$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:1:3$且$\overline{OG}:\overline{GH}=1:2$**。

二、 圓內接n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的**歐拉線上依序也有外心O、重心G、歐拉圓圓心K**、垂心H等四心，又**$\overline{OG}:\overline{GK}=2:(n-2)$**，且**歐拉圓圓心$K$恆為外心$O$和垂心$H$ 的中點**，從而**$\overline{OG}:\overline{GK}:\overline{KH}=2:(n-2):n$且 $\overline{OG}:\overline{GH}=1:(n-1)$**。

三、 設$\Delta A_1A_2A_3$的外心為**O**，內心為**O_1**，旁心三角形**$\Delta B_1B_2B_3$**的外心為**O_2**，則此三心會共線且**O點為$\overline{O_1O_2}$**的中點。

四、 設**雙心n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$**的外心為**O**，內心為**O_1**，旁心**n邊形$B_1B_2\cdots B_{n-1}B_n$** 的外心為**O_2**，則此三心也會共線且**O點為$\overline{O_1O_2}$**的中點。

五、 圓內接n邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$的**歐拉圓圓心K**是n個$(n-1)$邊形的歐拉圓圓心K_1，K_2， ⋯K_n的外心；而**垂心H**是n個$(n-1)$邊形的垂心H_1，H_2， ⋯H_n的外心，但**重心G並不是n個$(n-1)$邊形的重心G_1，G_2，⋯G_n**的外心。

六、$\Delta A_1A_2A_3$的**外心O**是旁心三角形$\Delta B_1B_2B_3$的**歐拉圓圓心**，而**內心O_1**是旁心三角形$\Delta B_1B_2B_3$的**垂心**，但其它**雙心$n(n\geq 4)$邊形$A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$**並沒有這樣的性質。

柒、參考資料及其他

1. 左銓如．季素月著。初等幾何研究。九章出版社，P149~156。
2. 黃家禮編著。幾何明珠。九章出版社，P119~120和P150~151。
3. 李冬梅．白世忠譯。幾何學中的歸納法。九章出版社．開明(大陸)出版社，P101~119。
4. 笹部貞市郎原著。幾何學辭典。九章出版社，P87~138。
5. 張海潮(98年6月)。從旋轉及縮放看尤拉線及九點圓。數學傳播33卷2期，中央研究院數學研究所，P48~51。
6. RADIC, M. and ZATEZALO, A. : About some kinds of bicentric polygon and concerning relations, Math. Maced. 4 (2006), 47-73 。
7. 李孟龍 莊耀鈞。層層疊疊-雙心多邊形面積的一個有趣性質。中華民國第五十六屆中小學科展。
8. 馮志剛著。數學歸納法的證明方法與技巧。華東師範大學出版社。