中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

探究精神獎

050415

在空間坐標遇見皮克

學校名稱：國立鳳山高級中學

作者：	指導老師：
高二 高正杰 高二 許明瑞 高二 黃得晉	林逸銘

關鍵詞：格子點、柱體、錐體

摘要

將原本適用於平面的皮克定理($A=I+\frac{L}{2}-1$，其中 A 表示其格子多邊形的面積，I 表示其格子多邊形之內部所有格子點個數，L 表示為其格子多邊形之邊上所有格子點個數)，利用代數及幾何的方式推廣至三維空間之立體多面體並求出相關通式。

壹、研究動機

在某次數學小考，一道求平面坐標上三角形的面積題目，竟然是用數格子點的方式來求值，上網尋找資料才知道，原來這就是有名的皮克定理。這個極為有趣的性質，讓我們突發奇想，是否空間坐標系中的多面體也有類似的性質，期以用代數或幾何的方式找出立體空間中柱體以及椎體的類皮克定理通式。

貳、研究目的

一、找出空間坐標系中長方體的類皮克定理通式
二、找出空間坐標系中直角柱體的類皮克定理通式
三、找出空間坐標系中直角三角錐體的類皮克定理通式
四、找出空間坐標系中三垂三角錐體的類皮克定理通式

參、研究設備及器材

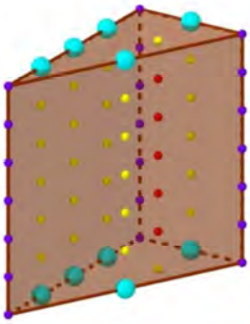
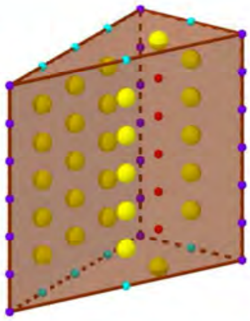
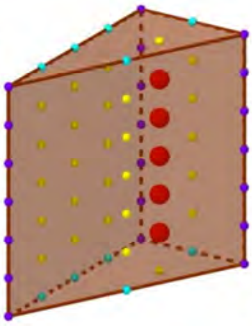
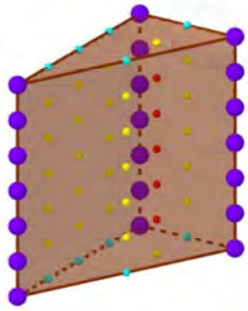
電腦（geogebra）、紙、筆。

肆、研究過程及方法

因為我們期許可將原本平面通用的皮克定理，推廣至三維的立體圖形，原皮克定理之多邊形所有頂點皆為格子點(本文之格子點皆代表整數格子點)，故本篇所探討的所有立體幾何多面體之所有頂點也限制為格子點。

名詞解釋：

長方體：所有頂點皆為格子點且長寬高皆與座標軸平行的長方體
直角柱體：所有頂點皆為格子點且其高平行座標軸的柱體
直角三角錐體：所有頂點皆為格子點且其相交的三稜皆與座標軸平行的三角錐體
三垂三角錐體：直角三角形的三角柱可以切割出三個相似的三角錐並分成 Part1、Part2、Part3
邊點(L)：在立體圖形邊上的格子點（如圖一）
面點(E)：在立體圖形的面內的格子點（如圖二）
內點(I)：在立體圖形內部的格子點（如圖三）
角點(A)：在柱體之頂點及其延伸為高的格子點（如圖四）

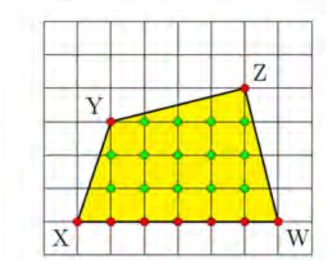





(圖一)　(圖二)　(圖三)　(圖四)

一、淺談皮克$(Pick)$定理

Georg Alexander Pick 在 1899 年正式發表一個關於計算格子點上多邊形面積的簡易公式：$A=I+\frac{L}{2}-1$，其中A表示其格子多邊形的面積，I表示其格子多邊形之內部所有格子點個數，L表示為其格子多邊形之邊上所有格子點個數

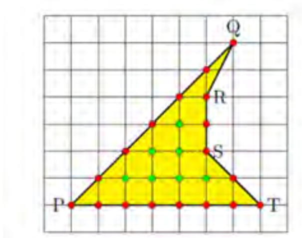
例：



如右圖，$XWZY$為一簡單四邊形，邊上有9個格子點，內部有14個格子點，面積為17.5。有:

$A=17.5$　　$I=14$　　$L=9$

滿足方程$A=I+\frac{L}{2}-1$



如右圖，$PTSRQ$為一五邊形，邊上有18個格子點，內部有7個格子點，面積為15。有:

$A=15$　　$I=7$　　$L=18$　　亦滿足方程$A=I+\frac{L}{2}-1$

有關皮克定理之相關證明，前人已經都詳加證明完成，僅此以概述方式證明皮克定理。

(一) 兩邊皆與座標軸平行的格子點矩形

如右圖，設$ADCB$為兩邊與坐標軸平行的格點矩形

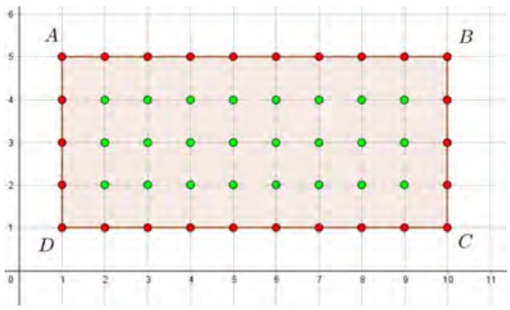
且$\overline{AD}=a$　　$\overline{AB}=b$

則$A=ab$

$I=(a-1)(b-1)$

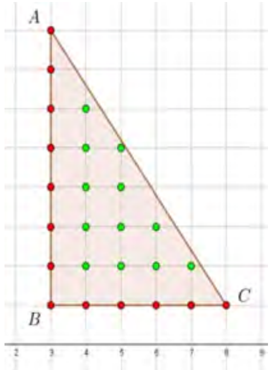
$L=2(a+b)$

能滿足方程式$A=I+\frac{L}{2}-1$



如圖 $\begin{cases} a=4,b=9 \\ A=36,I=24,L=26 \end{cases}$，公式成立。

(二) 兩股皆與座標軸平行的格子直角三角形



如右圖，ΔABC 為兩邊與坐標軸平行的格點直角三角形

設 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$ 且 $\overline{AC}$ 上有 L_{AC} 個格子點(不包含 A 、 C)

則面積 $=A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ab$

格上邊點數目 $=L_{\Delta ABC}=a+b+1+L_{AC}$ 內部格點數目 $=I_{\Delta ABC}$

作兩邊與坐標軸平行的格點矩形 $ABCD$，由於對稱關係（以對角線交點為對稱點），ΔABC 與 ΔADC 有相同面積、內部格點數目和邊上格點數目。

對於矩形 $ABCD$:

內部格點數目 $=(a-1)(b-1)=2I_{\Delta ABC}+L_{AC}$, 邊上格點數目 $=2(a+b)=2L_{\Delta ABC}-2L_{AC}-2$

$$\Rightarrow (a-1)(b-1)+a+b=2I_{\Delta ABC}+L_{\Delta ABC}-1 \quad \Rightarrow \quad ab=2I_{\Delta ABC}+L_{\Delta ABC}-2$$

$$\Rightarrow \quad 2A_{\Delta ABC}=2I_{\Delta ABC}+L_{\Delta ABC}-2 \quad \Rightarrow A_{\Delta ABC}=I_{\Delta ABC}+\frac{1}{2}L_{\Delta ABC}-1$$

所以公式 $A=I+\frac{L}{2}-1$ 成立。

(三) 任意格子點三角形

不失其一般性，作一般的格點三角形 ΔABC 如右圖。

設 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 分別有 L_{AB} 、 L_{BC} 及 L_{AC} 個格點(不包括端點 A 、 B 、 C)，

且 ΔABC 內有 I_{ABC} 個格點。

作兩邊與坐標軸平行的格點矩形 $PQCR$ 使得 A 、 B 、 C 落在矩形的邊上或頂點上。

設 $\overline{RA}=y$, $\overline{AP}=x$, $\overline{PB}=a$, $\overline{BQ}=b$

對於 $PQCR$:

$$\begin{cases} A_{PQCR}=(a+b)(x+y) \\ L_{PQCR}=2(a+b+x+y) \\ I_{PQCR}=(a+b-1)(x+y-1) \end{cases}$$

對於 ΔBQC :

$$\begin{cases} A_{\Delta BQC}=\frac{1}{2}b(x+y) \\ L_{\Delta BQC}=b+x+y+1+L_{BC} \\ I_{\Delta BQC}=\frac{1}{2}\{(b-1)(x+y-1)-L_{BC}\} \end{cases}$$

對於 ΔAPB :

$$\begin{cases} A_{\Delta APB}=\frac{1}{2}ax \\ L_{\Delta APB}=a+x+1+L_{AB} \\ I_{\Delta APB}=\frac{1}{2}\{(x-1)(a-1)-L_{AB}\} \end{cases}$$

對於 ΔACR :

$$\begin{cases} A_{\Delta ACR}=\frac{1}{2}y(a+b) \\ L_{\Delta ACR}=a+b+y+1+L_{AC} \\ I_{\Delta ACR}=\frac{1}{2}\{(y-1)(a+b-1)-L_{AC}\} \end{cases}$$

所以 $\Delta ABC=(x+y)(a+b)-\frac{1}{2}\left\{y(a+b)+ax+b(x+y)\right\}$

$$=\frac{1}{2}\left\{2bx+2ax+2by+2ay-by-ay-bx-ax-by\right\}=\frac{1}{2}(bx+ax+ay)$$

$$L_{\Delta ABC}=L_{AB}+L_{BC}+L_{AC}+3$$

$$I_{\Delta ABC}=(x+y-1)(a+b-1)-I_{\Delta QCB}-I_{\Delta ACR}-I_{\Delta APB}-L_{AB}-L_{AC}-L_{BC}$$

$$=(x+y-1)(a+b-1)-\frac{1}{2}\left\{(b-1)(x+y-1)-L_{AC}\right\}-\frac{1}{2}\left\{(x-1)(a-1)-L_{AB}\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\left\{(y-1)(a+b-1)-L_{BC}\right\}-L_{AB}-L_{AC}-L_{BC}$$

$$=(x+y-1)(a+b-1)-\frac{1}{2}\left(L_{AB}+L_{AC}+L_{BC}\right)-\frac{1}{2}\left\{bx+ax+ay-1-\left(L_{AB}+L_{AC}+L_{BC}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2A_{\Delta ABC}-1-L_{\Delta ABC}+3\right)=\frac{1}{2}\left\{2A_{\Delta ABC}-L_{\Delta ABC}+2\right\}$$

$$I_{\Delta ABC}=A_{\Delta ABC}+1-\frac{1}{2}L_{\Delta ABC}\quad\therefore A_{\Delta ABC}=I_{\Delta ABC}+\frac{1}{2}L_{\Delta ABC}-1$$

所以對於一般的格子點三角形，皮克定理成立。

(四) 任意格子點多邊形

1 已證明對於任意格子點三角形，皮克定理成立。

2.設任意格子點之 k 多邊形 $(k\geq 3)$ ，皮克定理成立。

則對於任意 $k+1$ 多邊形 $A_1A_2A_3......A_kA_{k+1}$ (簡稱 X)，皆可以找到一條對角線 A_iA_j 將其分割成一個格子點 k 多邊形(簡稱 Y)與一個格子點三角形(簡稱 Z)

我們可推得

$$A_X=A_Y+A_Z,L_X=L_Y+L_Z-2L_{A_iA_j}-2,I_X=I_Y+I_Z+L_{A_iA_j}$$

$$L_X+2I_X=L_Y+L_Z+2I_Y+2I_Z-2=(L_Y+2I_Y)+(L_Z+2I_Z)-2=2A_Y+2+2A_Z+2-2$$

$$L_X+2I_X=2A_X+2\qquad\Rightarrow A_X=I_X+\frac{1}{2}L_X-1$$

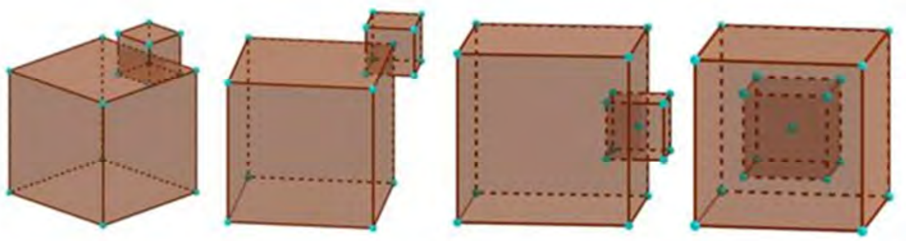
則對於任意 $k+1$ 多邊形，皮克定理亦成立，由數學歸納法知，對於格子點多邊形皮克定理皆成立

二、直角長方體研究過程

在了解皮克定理後，我們決定先從最簡單的長方體開始下手，我們猜測長方體的體積(平面坐標推廣至空間坐標)應與圍成長方體的封閉幾何圖形有關(圍成平面多邊形僅有點、線；圍成空間立方體有點、線、面)故將格子點分成：邊點(L)、面點(E)、內點(I)，並試著由邊點、面點、內點的數量試著求出長方體體積的通式

(一)柱體公式猜想:

我們想先試著用幾何的角度來猜測我們的通式。因此我們先畫了一個$(2,2,2)$長方體，並以每個格子點為中心各畫一個$(1,1,1)$長方體(如下圖)，試著以小長方體所佔的體積來猜測邊點、面點、內點的係數。

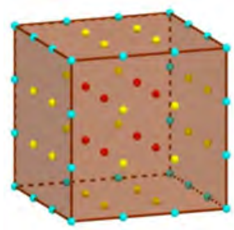


畫了圖之後可以發現每個以邊點為中心的小長方體皆有$\frac{1}{4}$的體積在大長方體內，頂點則有$\frac{1}{8}$在大長方體內，面點有$\frac{1}{2}$在大長方體內，而內點則全部體積都在大長方體內。**因此我們猜測邊點、面點、內點的係數會和$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，1有關係。**而我們在計算時將頂點歸類於邊點內，但兩者所占體積不同，因此需要以一個常數項將其補回來，故常數項為$(\frac{1}{8}-\frac{1}{4})\times 8 \Rightarrow -1$。

假設長方體的長、寬、高長為a、b、c(為了方便以序對(a,b,c)表示)

則長方體之邊點、面點、內點個數如下:

(二)(a,a,a)型(如圖五):



(圖五)

(長,寬,高)	(1,1,1)	(2,2,2)	(3,3,3)	(4,4,4)	(5,5,5)
邊點(L)個數	8	20	32	44	56
面點(E)個數	0	6	24	54	96
內點(I)個數	0	1	8	27	64
體積(V)	1	8	27	64	125

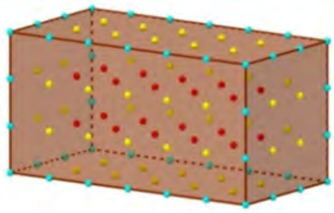
假設體積公式為$V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta$

由以上數據可得 $\begin{cases} 1=8\alpha+\delta \\ 8=20\alpha+6\beta+\gamma+\delta \\ 27=32\alpha+24\beta+8\gamma+\delta \\ 64=44\alpha+54\beta+27\gamma+\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=1,\beta=\frac{1}{2} \\ \alpha=\frac{1}{4},\delta=-1 \end{cases}$

猜測(a,a,a)型長方體之體積通式為$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L-1$。

代入$(5,5,5)$數據$\Rightarrow 1\times 64+\frac{1}{2}\times 96+\frac{1}{4}\times 56-1=125$，通式成立。

(三) (a,a,b) 型(如圖六):



(圖六)

(長,寬,高)	$(1,1,2)$	$(2,2,4)$	$(3,3,6)$	$(4,4,8)$	$(5,5,10)$
邊點(L)個數	12	28	44	60	76
面點(E)個數	0	14	48	102	176
內點(I)個數	0	3	20	63	144
體積(V)	2	16	54	128	250

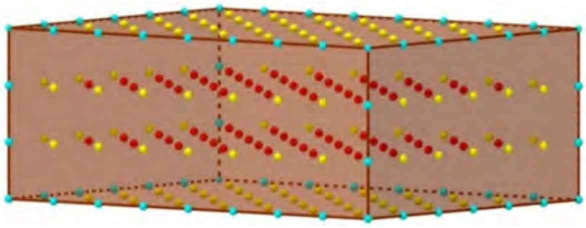
假設體積公式為 $V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta$

由以上數據可得 $\begin{cases} 2=12\alpha+\delta \\ 16=28\alpha+14\beta+3\gamma+\delta \\ 54=44\alpha+48\beta+20\gamma+\delta \\ 128=60\alpha+102\beta+63\gamma+\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma=1,\beta=\frac{1}{2} \\ \alpha=\frac{1}{4},\delta=-1 \end{cases}$

得 (a,a,b) 型長方體之體積通式也是 $V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L-1$ 。

代入 $(5,5,10)$ 數據驗證 $\Rightarrow 1\times144+\frac{1}{2}\times176+\frac{1}{4}\times76-1=250$ ，通式成立。

(四) (a,b,c) 型(如圖七):



(圖七)

(長,寬,高)	$(1,2,3)$	$(2,4,6)$	$(3,6,9)$	$(4,8,12)$	$(5,10,15)$
邊點(L)個數	20	44	68	92	116
面點(E)個數	4	46	132	262	436
內點(I)個數	0	15	80	231	504
體積(V)	6	48	162	384	750

假設體積公式為$V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta$

由以上數據可得$\begin{cases}6=20\alpha+4\beta+\delta\\48=44\alpha+46\beta+15\gamma+\delta\\162=68\alpha+132\beta+80\gamma+\delta\\384=92\alpha+262\beta+231\gamma+\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma=1,\beta=\dfrac{1}{2}\\\alpha=\dfrac{1}{4},\delta=-1\end{cases}$

得(a,b,c)型長方體之體積通式也是$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L-1$。

代入$(5,10,15)$數據驗證$\Rightarrow 1\times504+\frac{1}{2}\times436+\frac{1}{4}\times116-1=750$，通式成立。

經由上述過程我們發現，似乎長方體有類似皮克定理的相關公式而且與我們當初的猜想無誤，故我們希望以較嚴謹的數學原理來證明通式之正確性。

經計算過後發現長方體之邊點、面點、內點通式如下(設長方體的長寬高分別為a,b,c)

邊點(L)	$[(a-1)+(b-1)+(c-1)]\times4+8$
面點(E)	$[(a-1)(b-1)+(a-1)(c-1)+(b-1)(c-1)]\times2$
內點(I)	$(a-1)(b-1)(c-1)$

已知長方體之體積為abc　　故假設$V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta=abc$

$$\Rightarrow\alpha\{[(a-1)+(b-1)+(c-1)]\times4+8\}+\beta[(a-1)(b-1)+(a-1)(c-1)+(b-1)(c-1)]\times2$$
$$+\gamma(a-1)(b-1)(c-1)+\delta=abc$$
$$\Rightarrow 4\alpha(a+b+c)-4\alpha+2\beta(ab+bc+ac)-4\beta(a+b+c)+6\beta+\gamma abc$$
$$-\gamma(ac+bc+ac)+\gamma(a+b+c)-\gamma+\delta=abc$$
$$\Rightarrow\gamma abc+(2\beta-\gamma)(ab+bc+ac)+4(\alpha-\beta+\frac{1}{4}\gamma)(a+b+c)-(4\alpha-6\beta+\gamma-\delta)=abc$$

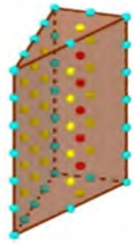
$$\Rightarrow\begin{cases}\gamma=1\\2\beta-\gamma=0\\\alpha-\beta+\dfrac{1}{4}\gamma=0\\4\alpha-6\beta+\gamma-\delta=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma=1\\\beta=\dfrac{1}{2}\\\alpha=\dfrac{1}{4}\\\delta=-1\end{cases}\Rightarrow V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L-1$$

即可得長方體之體積之通式為$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L-1$。

三、三角柱體研究過程

得出長方體體積的通式後，我們決定探討任意三角柱柱體體積的通式是否也會跟邊點、面點、內點個數有關係，所以一樣試著從邊點、面點、內點個數推導出通式。

(一)三角柱體(如圖八)



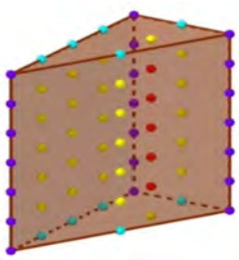
(圖八)

(a,b,c,h) (a,b,c) 為底面三角形之三邊長	$(1,1,\sqrt{2},1)$	$(2,2,2\sqrt{2},2)$	$(1,1,\sqrt{2},2)$	$(2,2,2\sqrt{2},4)$	$(1,2,\sqrt{5},3)$	$(2,4,2\sqrt{5},6)$
邊點(L)個數	6	15	9	21	14	31
面點(E)個數	0	3	0	9	2	27
內點(I)個數	0	0	0	0	0	5
體積(V)	$\frac{1}{2}$	4	1	8	3	24

假設體積公式為$V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta$

由以上數據可得$\Rightarrow\begin{cases}4=15\alpha+3\beta+\delta\\8=21\alpha+9\beta+\delta\\3=14\alpha+2\beta+\delta\\24=31\alpha+27\beta+5\gamma+\delta\end{cases}$

但在計算過程中發現這組聯立方程式無解，因此我們猜測會無解是因為**三角形的內角和只有180°，平均為60°，但是四角柱的平均角度為90°**，因此要是將在頂點上的格子點和邊點區隔開，能不能算出一個三角柱體的通式。將頂點上的格子點分開後，我們將其命名為角點(A)(如圖九)



(圖九)

而將邊點與角點隔開後之邊點、面點、內點、角點數量如下:

(a,b,c,h) (a,b,c) 為底面三角形之三邊長	$(1,1,\sqrt{2},1)$	$(2,2,2\sqrt{2},2)$	$(1,1,\sqrt{2},2)$	$(2,2,2\sqrt{2},4)$	$(1,2,\sqrt{5},3)$	$(2,4,2\sqrt{5},6)$
邊點(L)個數	0	6	0	6	2	10
面點(E)個數	0	3	0	9	2	27
內點(I)個數	0	0	0	0	0	5
角點(A)個數	6	9	9	15	12	21
體積(V)	$\frac{1}{2}$	4	1	8	3	24

假設體積公式為$V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta A+\varepsilon$

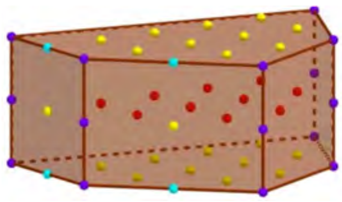
由以上數據可得$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}=6\delta+\varepsilon\\4=6\alpha+3\beta+9\delta+\varepsilon\\1=9\delta+\varepsilon\\8=6\alpha+9\beta+15\delta+\varepsilon\\24=10\alpha+27\beta+5\gamma+21\delta+\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\delta=\frac{1}{6}\text{ , }\beta=\frac{1}{2}\text{ , }\alpha=\frac{1}{4}\\\gamma=1\text{ , }\varepsilon=-\frac{1}{2}\end{cases}$

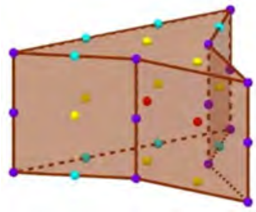
得三角柱體之體積通式為$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L+\frac{1}{6}A-\frac{1}{2}$。

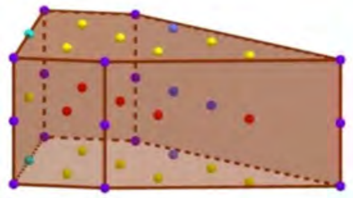
代入$(1,2,\sqrt{5},3)$數據驗證$\Rightarrow\frac{1}{2}\times2+\frac{1}{4}\times2+\frac{1}{6}\times12-\frac{1}{2}=3$，通式成立。

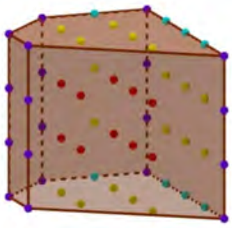
四、五角柱研究過程

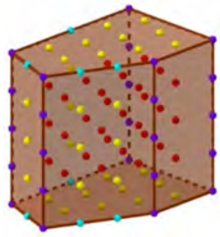
在發現三角柱和四角柱之體積通式非常相似後，我們推測五角柱也會有相似的體積通式，於是畫了六個五角柱(如圖十~十五)，以相同方式求出體積通式，確認我們的猜想是否正確。

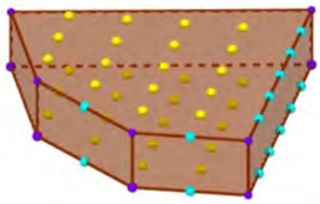

(圖十)


(圖十一)


(圖十二)


(圖十三)


(圖十四)


(圖十五)

五角柱之邊點、面點、內點、角點數量如下:

編號	圖十	圖十一	圖十二	圖十三	圖十四	圖十五
邊點(L)個數	4	8	2	8	8	14
面點(E)個數	22	8	13	18	32	34
內點(I)個數	10	2	6	10	30	0
角點(A) 個數	15	15	15	20	25	10
體積(V)	25	11	18	$\frac{51}{2}$	54	22

假設體積公式為$V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta A+\varepsilon$

由以上數據可得

$$\Rightarrow\begin{cases}4\alpha+22\beta+10\gamma+15\delta+\varepsilon=25\\8\alpha+8\beta+2\gamma+15\delta+\varepsilon=11\\8\alpha+18\beta+10\gamma+20\delta+\varepsilon=\frac{51}{2}\\8\alpha+32\beta+30\gamma+25\delta+\varepsilon=54\\14\alpha+34\beta+10\gamma+\varepsilon=22\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{1}{4}\\\beta=\frac{1}{2}\\\delta=\frac{3}{10}\\\gamma=1\\\varepsilon=-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L+\frac{3}{10}A-\frac{3}{2}$$

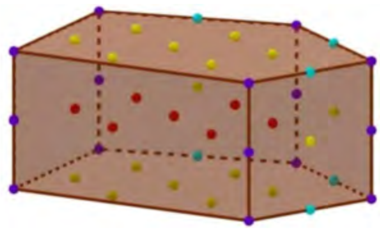
計算過後發現五角柱之體積通式即為$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L+\frac{3}{10}A-\frac{3}{2}$。

代入圖(十二)之數據驗證$\Rightarrow 1\times6+\frac{1}{2}\times13+\frac{1}{4}\times2+\frac{3}{10}\times15-\frac{3}{2}=18$，通式成立。

雖然此通式和三角柱、四角柱之通式非常相似，角點和常數項卻有不同的係數，列表如下。

三角柱	$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L+\frac{1}{6}A-\frac{1}{2}$
四角柱	$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L-1$
五角柱	$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L+\frac{3}{10}A-\frac{3}{2}$

因此我們猜測角點與常數項係數之不同是邊數不同造成的，並依照其三角柱及五角柱的公式推測 n 角柱的體積通式為 $V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L+\frac{n-2}{2n}A-\frac{n-2}{2}$ ，我們期以較嚴謹的數學原理來證明猜測的 n 角柱之體積通式之正確性。



五、n 角柱之通式推導過程

已知平面圖形之皮克定理面積公式 $A=I+\frac{1}{2}L-1$

則轉為立體柱體後柱體體為 $V=A\times h=(I+\frac{1}{2}L-1)\times h=Ih+\frac{1}{2}Lh-h$ (h 為柱體之高，且 $h\in N$)

設 I',E',L',A' 分別為柱體中內點、面點、邊點、角點的數量

則 $I'=I(h-1)=Ih-I$ $\qquad E'=2\times I+(L-n)(h-1)=2I+Lh-nh-L+n$

$L'=2(L-n)=2L-2n$ $\qquad A'=n(h+1)=nh+n$

$$\Rightarrow V=Ih+\frac{1}{2}Lh-h$$

$$=1\times(Ih-I)+\frac{1}{2}\times(2I+Lh-nh-L+n)+\frac{1}{4}(2L-2n)+\frac{n-2}{2n}(nh+n)-\frac{n-2}{2}$$

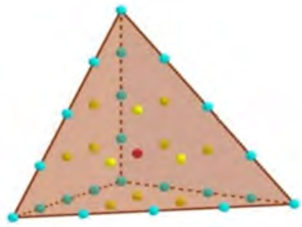
$$=I'+\frac{1}{2}E'+\frac{1}{4}L'+\frac{n-2}{2n}A'-\frac{n-2}{2}$$

經推導後發現角點之係數以及常數項皆會因角柱之邊數而有所改變，而邊點、面點、內點之係數皆固定；內點為 1，面點為 $\frac{1}{2}$ ，邊點為 $\frac{1}{4}$ 。

六、直角三角錐研究過程

在算出格子點柱體體積確實和邊點、面點、內點、角點個數有關係後，我們試著探討錐體之邊點、面點、內點個數是否也和體積有關係，故決定由與長方體最為相關的直角三角錐開始著手。**在此我們定義本篇文章之直角三角錐相交的三稜皆與座標軸平行故兩兩互相垂直。**假設直角三角錐兩兩垂直的三稜長分別為a、b、c，(為了方便以序對(a,b,c)表示)，並以V_1、L_1、E_1、I_1，代表第一層圖形的相關體積及邊面內心的數據，並一層一層等比例放大驗證。

(一)(a,a,a)型(如圖十六):



(圖十六)

三稜(a,b,c)	$(1,1,1)$	$(2,2,2)$	$(3,3,3)$	$(4,4,4)$	$(5,5,5)$
邊點(L)個數	4	10	16	22	28
面點(E)個數	0	0	4	12	24
內點(I)個數	0	0	0	1	4
體積(V)	$\frac{1}{6}$	$\frac{8}{6}$	$\frac{27}{6}$	$\frac{64}{6}$	$\frac{125}{6}$

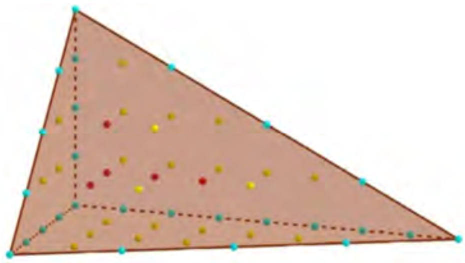
假設體積公式為$V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta$

由以上數據可得 $\begin{cases}\frac{1}{6}=4\alpha+\delta\\ \frac{8}{6}=10\alpha+\gamma+\delta\\ \frac{27}{6}=16\alpha+4\beta+\delta\\ \frac{64}{6}=22\alpha+12\beta+\gamma+\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{7}{36}\\ \beta=\frac{1}{2}\\ \gamma=1\\ \delta=-\frac{11}{18}\end{cases}$

得(a,a,a)型錐體之體積通式為$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{7}{36}L-\frac{11}{18}$。

代入$(5,5,5)$數據驗證$\Rightarrow 1\times4+\frac{1}{2}\times24+\frac{7}{36}\times28-\frac{11}{18}=\frac{125}{6}$，通式成立。

(二) (a,a,b) 型(如圖十七):



(圖十七)

三稜 (a,b,c)	$(1,1,2)$	$(2,2,4)$	$(3,3,6)$	$(4,4,8)$	$(5,5,10)$
邊點(L)個數	5	12	19	26	33
面點(E)個數	0	2	10	24	44
內點(I)個數	0	0	1	5	14
體積(V)	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{27}{3}$	$\frac{64}{3}$	$\frac{125}{3}$

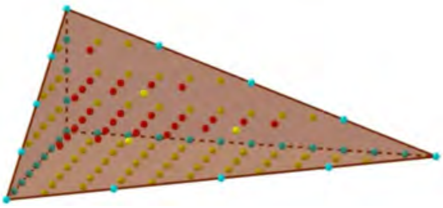
假設體積公式為 $V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta$

由以上數據可得 $\begin{cases}\frac{1}{3}=5\alpha+\delta\\ \frac{8}{3}=12\alpha+2\beta+\delta\\ \frac{27}{3}=19\alpha+10\beta+\gamma+\delta\\ \frac{64}{3}=26\alpha+24\beta+5\gamma+\delta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma=1\\ \beta=\frac{1}{2}\\ \alpha=\frac{4}{21}\\ \delta=-\frac{13}{21}\end{cases}$

得 (a,a,b) 型錐體之體積通式為 $V=I+\frac{1}{2}E+\frac{4}{21}L-\frac{13}{21}$ 。

代入 $(5,5,10)$ 數據驗證 $\Rightarrow 1\times14+\frac{1}{2}\times44+\frac{4}{21}\times33-\frac{13}{21}=\frac{125}{3}$ ，通式成立。

(三) (a,b,c) 型(如圖十八):



(圖十八)

三稜 (a,b,c)	$(1,2,3)$	$(2,4,6)$	$(3,6,9)$	$(4,8,12)$	$(5,10,15)$
邊點(L)個數	7	16	25	34	43
面點(E)個數	1	10	31	64	109
內點(I)個數	0	1	8	27	64
體積(V)	1	8	27	64	125

假設體積公式為 $V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta$

由以上數據可得 $\begin{cases}1=7\alpha+\beta+\delta\\8=16\alpha+10\beta+\gamma+\delta\\27=25\alpha+31\beta+8\gamma+\delta\\64=34\alpha+64\beta+27\gamma+\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma=1\\\beta=\frac{1}{2}\\\alpha=\frac{1}{6}\\\delta=-\frac{2}{3}\end{cases}$

得 (a,b,c) 型錐體之體積通式為 $V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{6}L-\frac{2}{3}$ 。

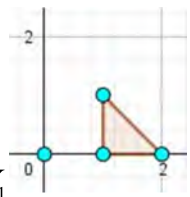
代入 $(5,5,15)$ 數據驗證 $\Rightarrow 1\times64+\frac{1}{2}\times109+\frac{1}{6}\times43-\frac{2}{3}=125$ ，通式成立。

(四)直角三角錐之分層圖規律:

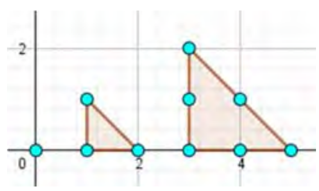
算出直角三角錐的體積通式後，我們試著從直角三角錐的分層圖找出邊點、面點、內點的規律，進而確認我們算出來的體積通式是否正確。

1. (a,a,a) 型 (分層圖如下)

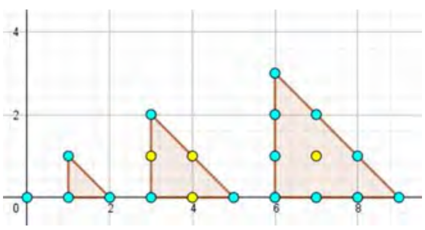
V_1



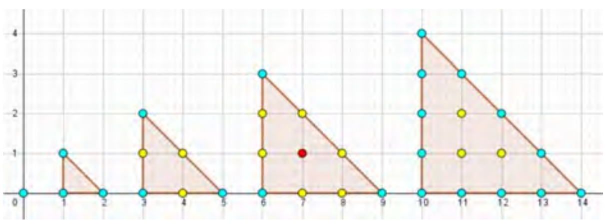
V_2



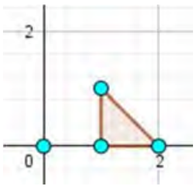
V_3

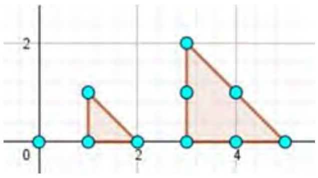


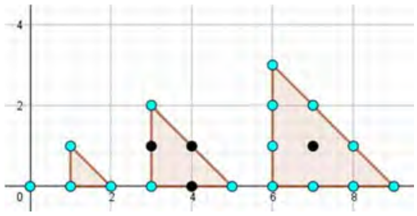
V_4

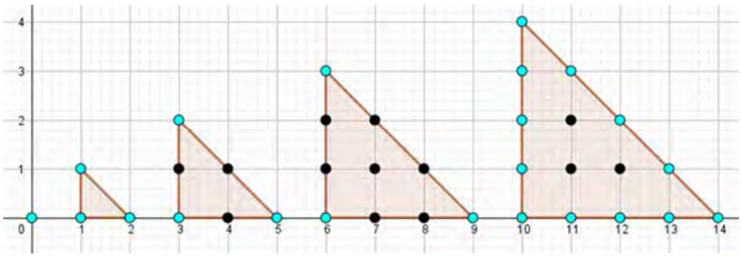


計算後發現錐體之邊點、面點、內點規律如下:
邊點規律為 $L_n = 6n-2$ (如下圖)

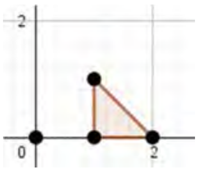
L_1


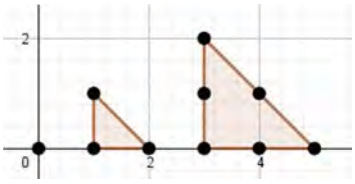
L_2


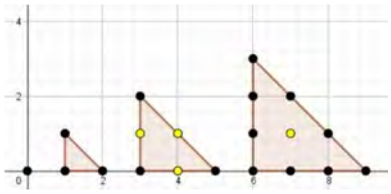
L_3


L_4


面點規律為 $E_n = 2n^2-6n+4$ (如下圖)

E_1


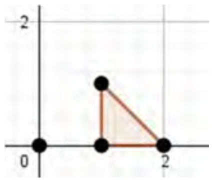
E_2


E_3


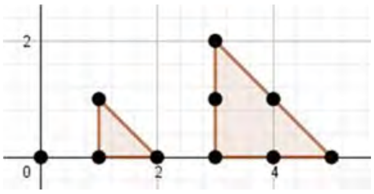
E_4


$$\begin{cases} E_1 = 0 \\ E_2 = E_1 + 0 \\ E_3 = E_2 + 4 \\ E_4 = E_3 + 8 \\ \vdots \\ E_n = E_{n-1} + 4(n-2) \end{cases} \Rightarrow E_n = 0+0+4\sum_{k=1}^{n-2} k = 4\times\frac{(n-2)(n-1)}{2} = 2n^2-6n+4$$

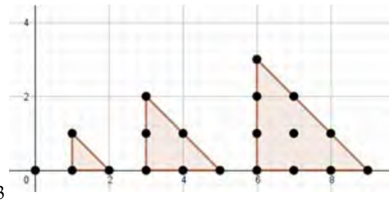
而內點規律為$I_n=\dfrac{n^3-6n^2+11n-6}{6}$ (如下圖)



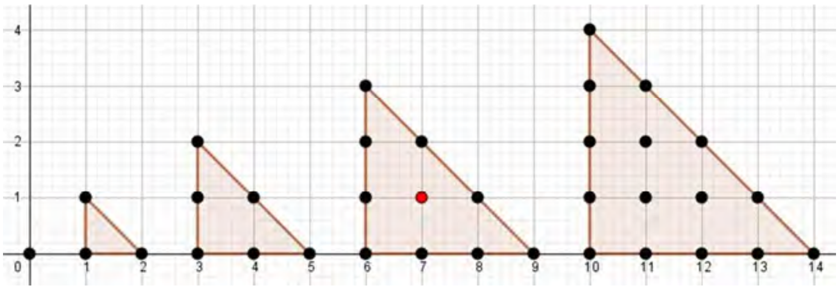
I_1



I_2



I_3



I_4

$$\begin{cases} I_1=0 \\ I_2=I_1+0 \\ I_3=I_2+0 \\ I_4=I_3+1 \\ I_5=I_4+1+2 \\ \vdots \\ I_n=I_{n-1}+[1+2+\ldots+(n-3)] \end{cases} \Rightarrow I_n=0+0+0+\sum_{k=1}^{n-3}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-3}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-3}k$$

$$=\frac{(n-3)(n-2)(2n-5)}{12}+\frac{(n-3)(n-2)}{4}=\frac{n^3-6n^2+11n-6}{6}$$

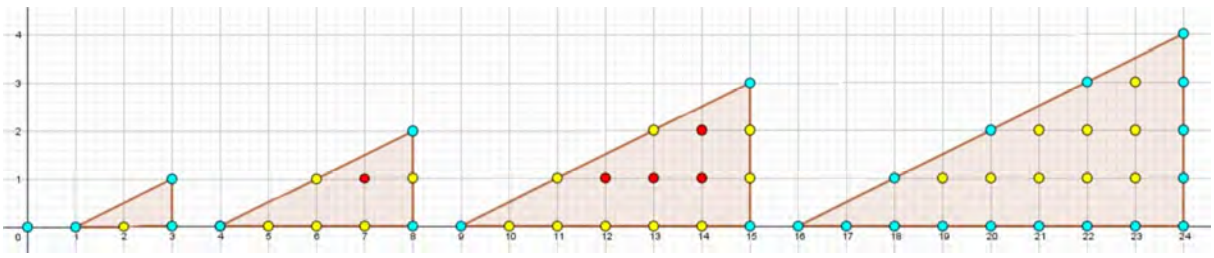
而(a,a,a)型之錐體體積為$\dfrac{1}{6}n^3$

故可推得(a,a,a)型之錐體體積規律為

$$V=\frac{1}{6}n^3=\frac{n^3-6n^2+11n-6}{6}+\frac{1}{2}(2n^2-6n+4)+\frac{7}{36}(6n-2)-\frac{11}{18}$$ 。

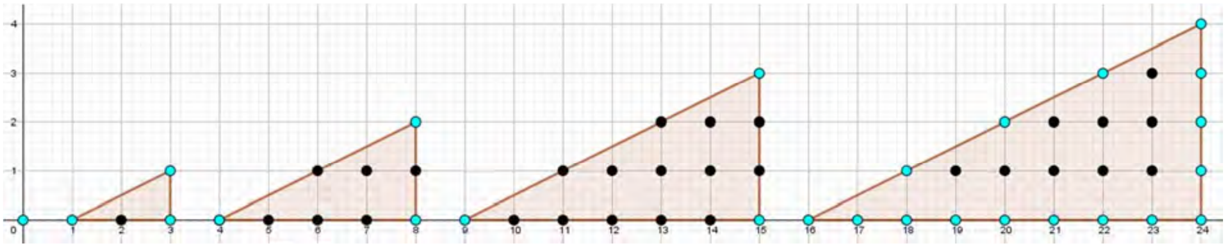
$$=I+\frac{1}{2}E+\frac{7}{36}L-\frac{11}{18}$$

2. (a,a,b)型　(分層圖如下，以$(4,4,8)$為例)

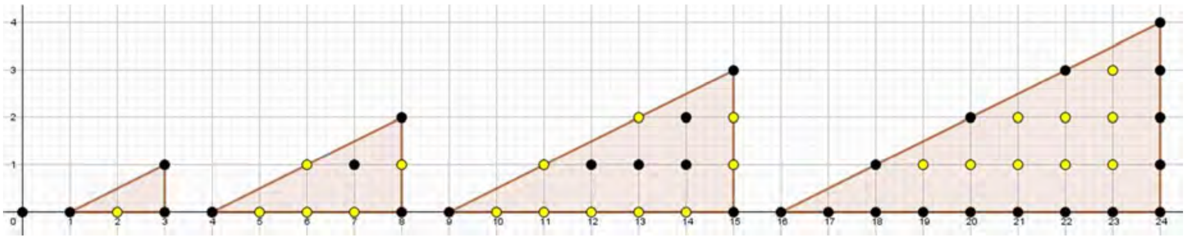


計算後發現錐體之邊點、面點、內點規律如下:

邊點規律為 $L_n = 7n - 2$ (如下圖)



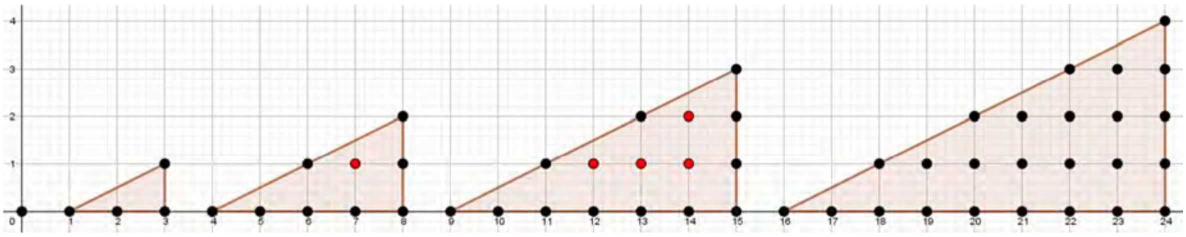
面點規律為 $E_n = 3n^2 - 7n + 4$ (如下圖)



$$\begin{cases} E_1 = 0 \\ E_2 = E_1 + 2 \\ E_3 = E_2 + 8 \\ E_4 = E_3 + 14 \\ E_5 = E_4 + 20 \\ \vdots \\ E_n = E_{n-1} + (6n-10) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow E_n = 0 + 2 + 8 + \ldots + (6n-10) \\ &= \sum_{k=2}^{n}(6k-10) = \sum_{k=1}^{n}(6k-10) - (6-10) \\ &= 6\sum_{k=1}^{n} k - 10n + 4 = 3n(n+1) - 10n + 4 = 3n^2 - 7n + 4 \end{aligned}$$

而內點規律為 $I_n = \dfrac{2n^3 - 9n^2 + 13n - 6}{6}$ (如下圖)



$$I_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-2)^2 = \sum_{k=1}^{n-2} k^2 = \frac{(n-2)(n-1)(2\text{n}-3)}{6} = \frac{2n^3 - 9n^2 + 13n - 6}{6}$$

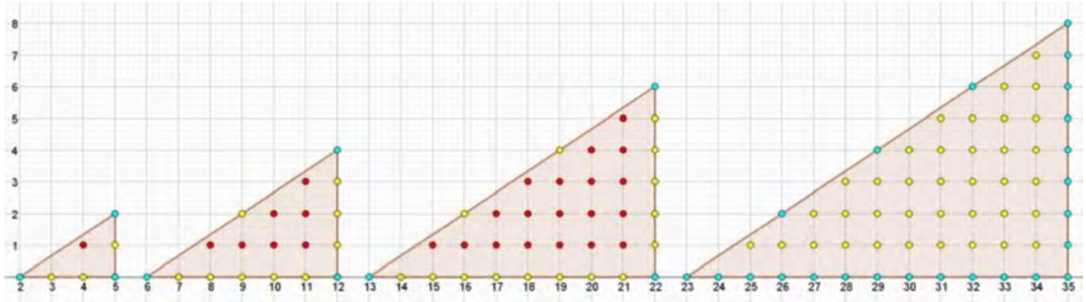
而 (a,a,b) 型之錐體體積為 $\dfrac{1}{3}n^3$

故可推得 (a,a,b) 型之錐體體積規律為

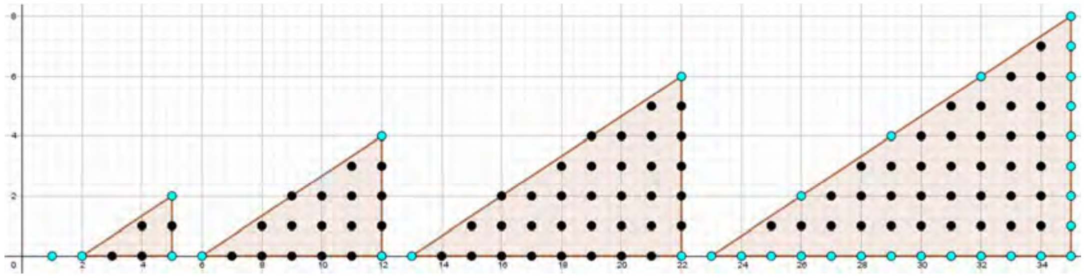
$$\begin{aligned} V = \frac{1}{3}n^3 &= \frac{2n^3 - 9n^2 + 13n - 6}{6} + \frac{1}{2}(3n^2 - 7n + 4) + \frac{4}{21}(7n-2) - \frac{13}{21} \\ &= I + \frac{1}{2}E + \frac{4}{21}L - \frac{13}{21} \end{aligned}$$

。

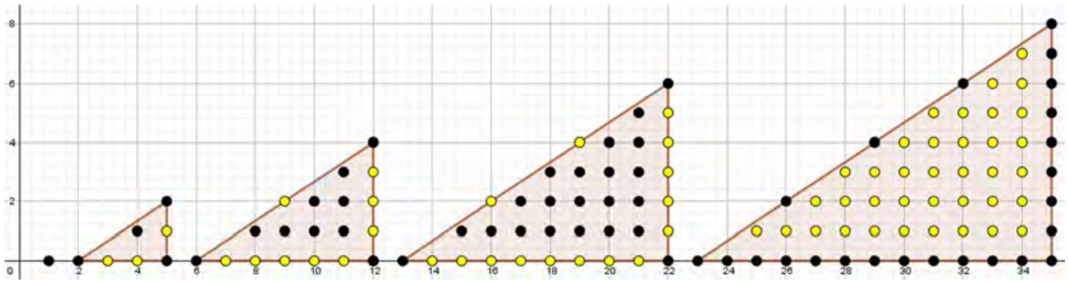
3. (a,b,c) 型 (分層圖如下，以 $(4,8,12)$ 為例)



計算後發現錐體之邊點、面點、內點規律如下:
邊點規律為 $L_n = 9n-2$ (如下圖)



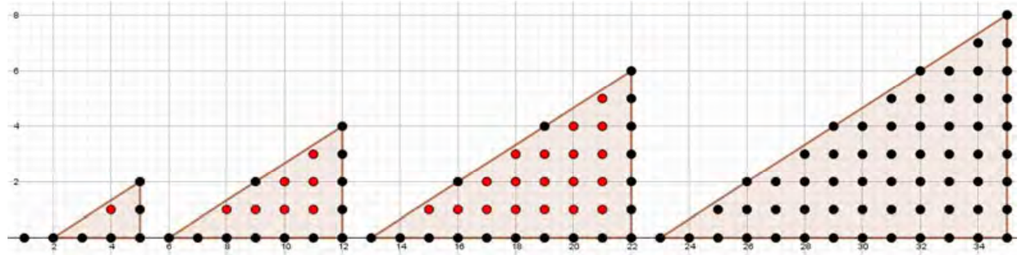
面點規律為 $E_n = 6n^2 - 9n + 4$ (如下圖)



$$\begin{cases} E_1 = 1 \\ E_2 = E_1 + 9 \\ E_3 = E_2 + 9 + 12 \\ E_4 = E_3 + 9 + 12 + 12 \\ E_5 = E_4 + 9 + 12 + 12 + 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_n = 1 + (n-1)9 + \frac{(n-2)(n-1)}{2} \times 12 = 6n^2 - 9n + 4$$

而內點規律為 $I_n = (n-1)^3$ (如下圖)



而(a,b,c)型之錐體體積為n^3故可推得(a,b,c)型之錐體體積規律為

$$V=n^3=(n-1)^3+\frac{1}{2}(6n^2-9n+4)+\frac{1}{6}(9n-2)-\frac{2}{3}$$ 。

$$=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{6}L-\frac{2}{3}$$

列表如下:

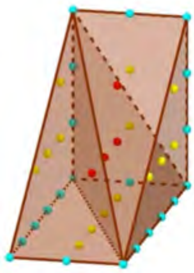
直角三角錐類型	(a,a,a)型:
邊點(L)規律	$L_n=6n-2$
面點(E)規律	$E_n=2n^2-6n+4$
內點(I)規律	$I_n=\dfrac{n^3-6n^2+11n-6}{6}$
體積(V)	$V_n=\dfrac{1}{6}n^3=I+\dfrac{1}{2}E+\dfrac{7}{36}L-\dfrac{11}{18}$

直角三角錐類型	(a,a,b)之$(1,1,2)$型:
邊點(L)規律	$L_n=7n-2$
面點(E)規律	$E_n=3n^2-7n+4$
內點(I)規律	$I_n=\dfrac{(2n^3-9n^2+13n-6)}{6}$
體積(V)	$V_n=\dfrac{1}{3}n^3=I+\dfrac{1}{2}E+\dfrac{4}{21}L-\dfrac{13}{21}$

直角三角錐類型	(a,b,c)之$(1,2,3)$型:
邊點(L)規律	$L_n=9n-2$
面點(E)規律	$E_n=6n^2-9n+4$
內點(I)規律	$I_n=(n-1)^3$
體積(V)	$V_n=n^3=I+\dfrac{1}{2}E+\dfrac{1}{6}L-\dfrac{2}{3}$

七、三垂錐研究過程

在推出直角三角錐的體積公式確定和內點、面點、邊點關係後，剛好數學課教了三垂線定理，數學老師提醒了我們，其實直角三角形的直角柱可以切割出三個相似的三角錐(如圖十九)，要不往這個方向討論看看，故我們將這三個類似的三角錐取名為三垂錐，並分成 Part1、Part2、Part3(如圖二十~二十二)三種，進而討論它們之間的內面邊點之間的關係。



(圖十九)

(一) Part1(如圖二十)

(圖二十)

原始直角三角柱三邊長	$(2,3,5)$	$(4,6,10)$	$(6,9,15)$	$(8,12,20)$	$(10,15,25)$
邊點(L)個數	11	24	37	50	63
面點(E)個數	6	38	100	192	314
內點(I)個數	1	18	80	217	459
體積(V)	5	40	135	320	625

假設體積公式為 $V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta$

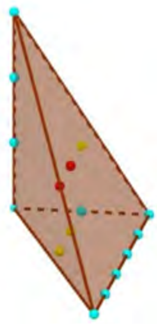
由以上數據可得

$$\begin{cases}5=11\alpha+6\beta+\gamma+\delta\\40=24\alpha+38\beta+18\gamma+\delta\\135=37\alpha+100\beta+80\gamma+\delta\\320=50\alpha+192\beta+217\gamma+\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma=1,\beta=\dfrac{1}{2}\\\alpha=\dfrac{2}{13},\delta=-\dfrac{9}{13}\end{cases}$$

得 Part1 之三垂錐體積通式為 $V=I+\frac{1}{2}E+\frac{2}{13}L-\frac{9}{13}$ 。

代入 $(10,15,25)$ 數據驗證 $\Rightarrow 1\times459+\frac{1}{2}\times314+\frac{2}{13}\times63-\frac{9}{13}=625$ ，通式成立。

(二) Part2(如圖二十一)



(圖二十一)

原始直角三角柱三邊長	$(2,3,5)$	$(4,6,10)$	$(6,9,15)$	$(8,12,20)$	$(10,15,25)$
邊點(L)個數	11	24	37	50	63
面點(E)個數	3	26	73	144	239
內點(I)個數	2	23	92	239	494
體積(V)	5	40	135	320	625

假設體積公式為$V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta$

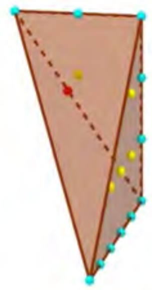
由以上數據可得

$$\begin{cases}5=11\alpha+3\beta+2\gamma+\delta\\40=24\alpha+26\beta+23\gamma+\delta\\135=37\alpha+73\beta+92\gamma+\delta\\320=50\alpha+144\beta+239\gamma+\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma=1,\beta=\dfrac{1}{2}\\\alpha=\dfrac{5}{26},\delta=-\dfrac{8}{13}\end{cases}$$

得 Part2 之三垂錐體積通式為$V=I+\dfrac{1}{2}E+\dfrac{5}{26}L-\dfrac{8}{13}$。

代入$(10,15,25)$數據驗證$\Rightarrow 1\times494+\dfrac{1}{2}\times239+\dfrac{5}{26}\times63-\dfrac{8}{13}=625$，通式成立。

(三) Part3(如圖二十二)



(圖二十二)

原始直角三角柱三邊長	$(2,3,5)$	$(4,6,10)$	$(6,9,15)$	$(8,12,20)$	$(10,15,25)$
邊點(L)個數	11	24	37	50	63
面點(E)個數	5	34	91	176	289
內點(I)個數	1	19	83	223	469
體積(V)	5	40	135	320	625

假設體積公式為$V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta$

由以上數據可得

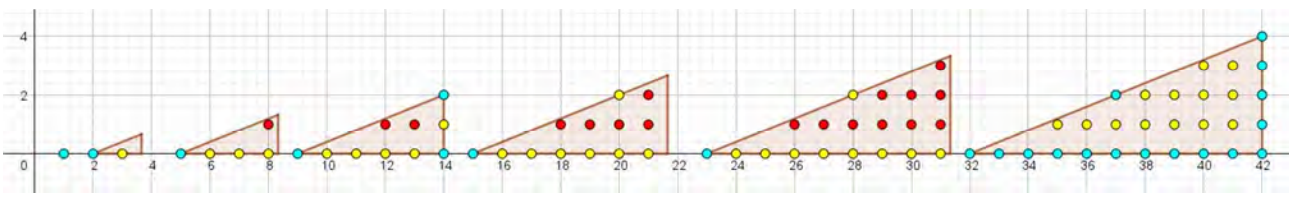
$$\begin{cases}5=11\alpha+5\beta+\gamma+\delta\\40=24\alpha+34\beta+19\gamma+\delta\\135=37\alpha+91\beta+83\gamma+\delta\\320=50\alpha+176\beta+223\gamma+\delta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma=1,\beta=\dfrac{1}{2}\\\alpha=\dfrac{5}{26},\delta=-\dfrac{8}{13}\end{cases}$$

得 Part3 之三垂錐體積通式為$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{5}{26}L-\frac{8}{13}$ 。

代入$(10,15,25)$數據驗證$\Rightarrow 1\times469+\frac{1}{2}\times289+\frac{5}{26}\times63-\frac{8}{13}=625$ ，通式成立。

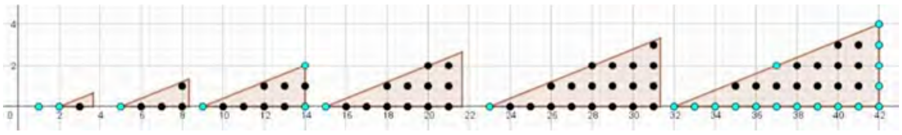
在得出三垂錐三個部分各自的體積通式後，我們想要從邊點、面點、內點的個數規律來驗證我們算出來的結果是否正確，因此畫了分層圖來找出邊點、面點、內點個數的規律。

(1) Part1 (分層圖如下)



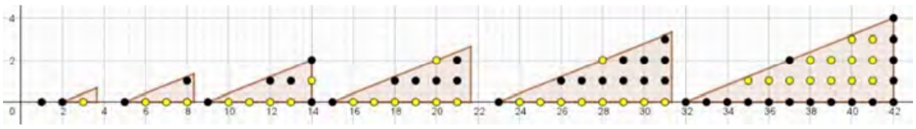
計算後發現邊點、面點、內點規律如下:

邊點規律為 $L_n = 13n - 2$ (如右圖)



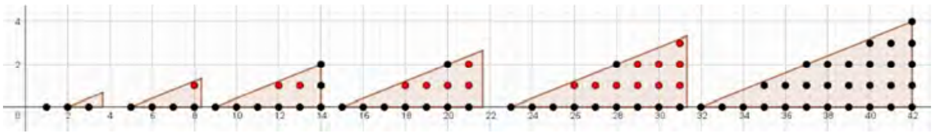
$$\begin{cases} L_1 = 11 \\ L_2 = L_1 + 13 \\ L_3 = L_2 + 13 \\ \vdots \\ L_n = L_{n-1} + 13 \end{cases} \Rightarrow L_n = 13n - 2$$

面點規律為 $E_n = 15n^2 - 13n + 4$ (如右圖)



$$\begin{cases} E_1 = 6 \\ E_2 = E_1 + 30 + 2 \\ E_3 = E_2 + (30\times 2) + 2 \\ E_4 = E_3 + (30\times 3) + 2 \\ \vdots \\ E_n = E_{n-1} + 30(n-1) + 2 \end{cases} \Rightarrow E_n = 6 + 30\left[(\frac{1+n-1}{2})(n-1)\right] + 2(n-1) = 15n^2 - 13n + 4$$

而內點規律為 $I_n = 5n^3 - \frac{15}{2}n^2 + \frac{9}{2}n - 1$ (如右圖)



$$\begin{cases} I_1 = 1 \\ I_2 = I_1 + 17 \\ I_3 = I_2 + 17 + 45 \\ I_4 = I_3 + 17 + (45\times 2) + 30 \\ I_5 = I_4 + 17 + (45\times 3) + (30\times 3) \\ I_n = I_{n-1} + 17 + 45(n-2) + 30(\frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_n = 1 + 17(n-1) + 45(\frac{1+n-2}{2})(n-2) + 30\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k + 3)$$

$$= 1 + 17n - 17 + \frac{45}{2}(n^2 - 3n + 2) + 30\left[\frac{1}{2}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{5}{2}(\frac{1+n}{2})n + 3n - 1\right]$$

$$= 1 + 17n - 17 + \frac{45}{2}n^2 - \frac{135}{2}n + 45 + 30(\frac{1}{6}n^3 - n^2 + \frac{11}{6}n - 1)$$

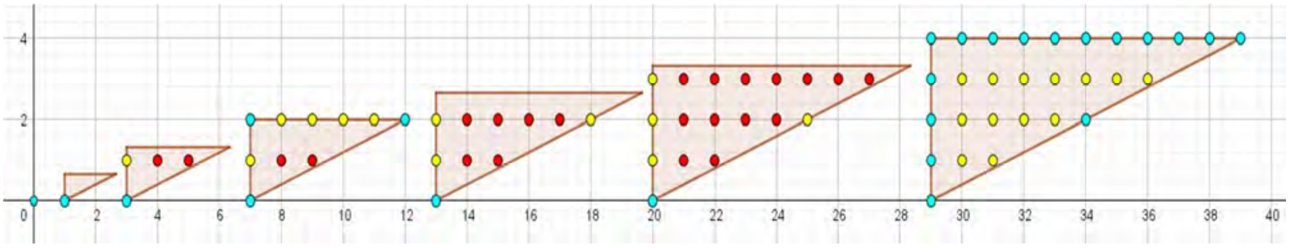
$$\Rightarrow I_n = 5n^3 - \frac{15}{2}n^2 + \frac{9}{2}n - 1$$

又 Part1 之錐體體積為 $5n^3$

故可推得 Part1 之錐體體積規律為

$$V = 5n^3 = (5n^3 - \frac{15}{2}n^2 + \frac{9}{2}n - 1) + \frac{1}{2}(15n^2 - 13n + 4) + \frac{2}{13}(13n - 2) - \frac{9}{13}$$
$$= I + \frac{1}{2}E + \frac{2}{13}L - \frac{9}{13}$$
。

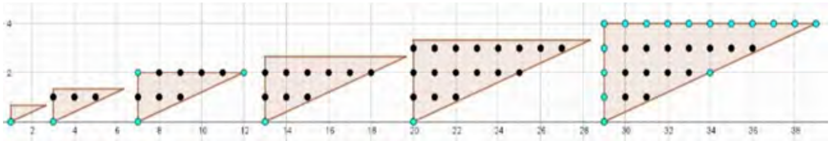
(2) Part2(分層圖如下)



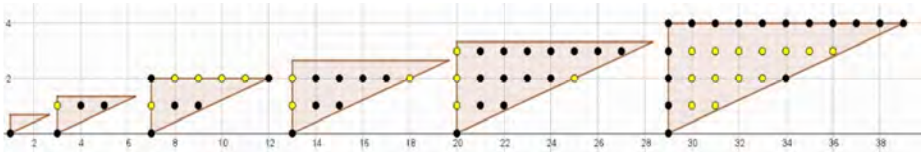
計算後發現邊點、面點、內點規律如下:

邊點規律為 $L_n = 13n - 2$ (如右圖)

$$\begin{cases} L_1 = 11 \\ L_2 = L_1 + 13 \\ L_3 = L_2 + 13 \\ \vdots \\ L_n = L_{n-1} + 13 \end{cases} \Rightarrow L_n = 13n - 2$$

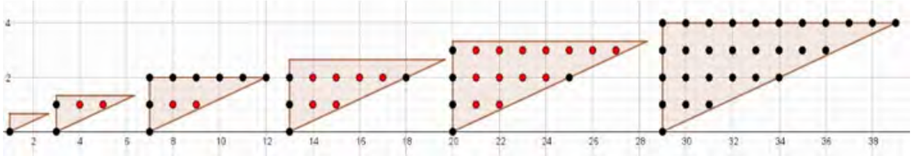


面點規律為 $E_n = 12n^2 - 13n + 4$ (如右圖)



$$\begin{cases} E_1 = 3 \\ E_2 = E_1 + 23 \\ E_3 = E_2 + 23 + 24 \\ E_4 = E_3 + 23 + (24 \times 2) \\ \vdots \\ E_n = E_{n-1} + 23 + 24(n-2) \end{cases} \Rightarrow E_n = 3 + 23(n-1) + 24\left[(\frac{1+n-2}{2})(n-2)\right] = 12n^2 - 13n + 4$$

而內點規律為 $I_n = 5n^3 - 6n^2 + 4n - 1$ (如右圖)



$$\begin{cases} I_1 = 2 \\ I_2 = I_1 + 21 \\ I_3 = I_2 + 21 + 48 \\ I_4 = I_3 + 21 + (48\times 2) + 30 \\ I_5 = I_4 + 21 + (48\times 3) + (30\times 3) \\ I_n = I_{n-1} + 21 + 48(\text{n}-2) + 30(\frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_n = 2 + 21(\text{n}-1) + 48(\frac{1+n-2}{2})(n-2) + 30\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k + 3)$$

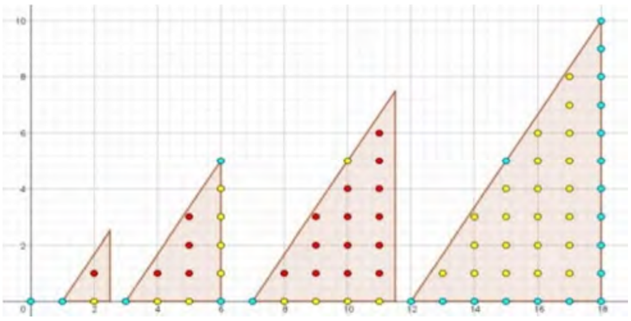
$$= 2 + 21n - 21 + 24(n^2 - 3n + 2) + 30(\frac{1}{6}n^3 - n^2 + \frac{11}{6}n - 1) = 5n^3 - 6n^2 + 4n - 1$$

又 Part2 之錐體體積為 $5n^3$　故可推得 Part2 之錐體體積規律為

$$V = 5n^3 = (5n^3 - 6n^2 + 4n - 1) + \frac{1}{2}(12n^2 - 13n + 4) + \frac{5}{26}(13n - 2) - \frac{8}{13}$$

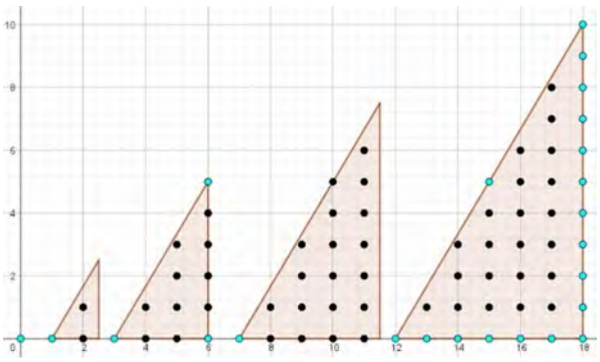
$$= I + \frac{1}{2}E + \frac{5}{26}L - \frac{8}{13}$$

(3)Part3(分層圖如下)



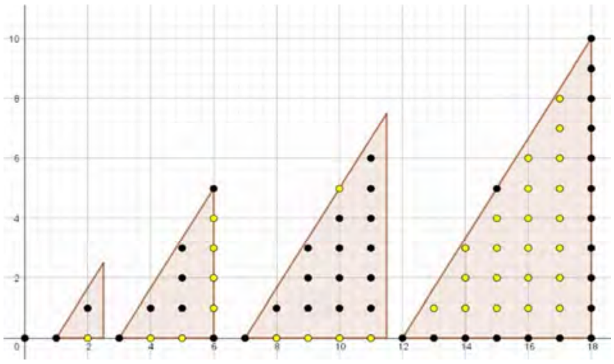
計算後發現邊點、面點、內點規律如下:

邊點規律為 $L_n = 13n - 2$ (如右圖)



$$\begin{cases} L_1 = 11 \\ L_2 = L_1 + 13 \\ L_3 = L_2 + 13 \qquad \Rightarrow L_n = 13n - 2 \\ \vdots \\ L_n = L_{n-1} + 13 \end{cases}$$

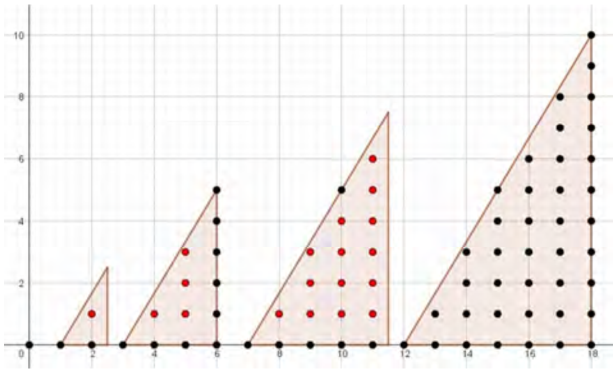
面點規律為(如右圖)



$$\begin{cases} E_1 = 5 \\ E_2 = E_1 + 29 \\ E_3 = E_2 + 29 + 28 \\ E_4 = E_3 + 29 + (28 \times 2) \\ \vdots \\ E_n = E_{n-1} + 29 + 28(n-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_n = 5 + 29(n-1) + 28\left[(\frac{1+n-2}{2})(n-2) \right] = 14n^2 - 13n + 4$$

而內點規律為 $I_n = 5n^3 - 7n^2 + 4n - 1$ (如右圖)



$$\begin{cases} I_1 = 1 \\ I_2 = I_1 + 18 \\ I_3 = I_2 + 18 + 46 \\ I_4 = I_3 + 18 + (46 \times 2) + 30 \\ I_5 = I_4 + 18 + (46 \times 3) + (30 \times 3) \\ I_n = I_{n-1} + 18 + 46(n-2) + 30 \times (\frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_n = 1 + 18(n-1) + 46(\frac{1+n-2}{2})(n-2) + 30\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{2}k^2 - \frac{5}{2}k + 3)$$

$$= 1 + 18n - 18 + 23(n^2 - 3n + 2) + 30(\frac{1}{6}n^3 - n^2 + \frac{11}{6}n - 1) = 5n^3 - 7n^2 + 4n - 1$$

又 Part3 之錐體體積為 $5n^3$　故可推得 Part3 之錐體體積規律為

$$V = 5n^3 = (5n^3 - 7n^2 + 4n - 1) + \frac{1}{2}(14n^2 - 13n + 4) + \frac{5}{26}(13n - 2) - \frac{8}{13}$$ 。

$$= I + \frac{1}{2}E + \frac{5}{26}L - \frac{8}{13}$$

伍、研究結果

一、柱體體積的類皮克定理公式

(一)長方體體積的類皮克定理公式為 $V = I + \frac{1}{2}E + \frac{1}{4}L - 1$

(二)三角柱體積的類皮克定理公式為 $V = I + \frac{1}{2}E + \frac{1}{4}L + \frac{1}{6}A - \frac{1}{2}$

(三)五角柱體積的類皮克定理公式為 $V = I + \frac{1}{2}E + \frac{1}{4}L + \frac{3}{10}A - \frac{3}{2}$

(四) n 角柱體積的類皮克定理公式為 $V = I + \frac{1}{2}E + \frac{1}{4}L + \frac{n-2}{2n}A - \frac{n-2}{2}$

二、錐體體積的類皮克定理公式

(一)直角三角錐的類皮克定理公式為$V=I+\frac{1}{2}E+\alpha L+\beta$

(二)三垂錐的類皮克定理公式為$V=I+\frac{1}{2}E+\alpha L+\beta$

陸、討論

一、根據 n 角柱體積的公式，我們可知當$n=4$時，角點(A)及邊點(L)的係數皆為$\frac{1}{4}$，故可合併成單純只有內點(I)、面點(E)及邊點(L)的公式，其餘 n 角柱的角點(A)係數，與 n 邊形的平均內角度數$\frac{n-2}{n}\bullet 180^o$有關。

二、不管是任意 n 角柱或直角三角錐或三垂錐，我們發現體積的公式，內點(I)的係數皆為 1，面點(E)的係數皆為$\frac{1}{2}$，而且錐體的點(L)的係數α與常數項β皆滿足$2\alpha-\beta=1$，這是個相當特別的關聯性。

柒、結論

當初在設定解決這個題目的時候，受限於組員的電腦能力，相關數據都是人工一步一步算出來。所有立體圖形之相關內面邊角點等的標示也是利用 GGB 一步一步畫出來，以圖最為直觀的感受。若將來能有程式設計的高手，可代為設計相關的程式，相信可以為我們節省不少的收集數據及畫圖的時間，可以將更多時間運用在相關公式性質推導上。

空間的幾何性質本就不好處理，有些猜想需透過軟體才可以明瞭是否有問題，證明也常無法透過直觀的幾何定理證明，常得配合代數方面較為嚴謹證明補助之。此為較可惜的之處，如果能透過直觀的幾何證明，相信會更振奮人心的。

因為時間的關係，無法導出直角三角錐若三稜為(a,b,c)的類皮克定理通式；三垂錐的原始直角三角柱之長、寬、高為(a,b,c)的 Part1、Part2、Part3 的類皮克定理通式。最後如果能導出任意格子點直角柱(所有頂點皆在格子點上，無須底面平行座標平面)及任意格子點三角錐(三角錐的頂點在任意的格子點上)的類皮克定理通式，實為可惜之處，值得未來深入探索之。

捌、參考資料

1. 游森棚(2018)・翰林數學課本 4・台北市:翰林。
2. 皮克公式 Pick’s Formula・取自
http://www.mathsgreat.com/article/article_008.pdf
3. 許志農（2013 年 11 月 8 日）・用格子點串起的面積公式・取自
http://pisa.math.ntnu.edu.tw/math-education/2013-10-03-02-39-03/2013-11-08-02-00-49/897-yonggezichuanqidemiangongshi
4. 蔡聰明（2002 年 2 月 27 日）・談求面積的 Pick 公式・取自
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_25_10_1/index.html

【評語】050415

1. 本作品將平面的皮克定理，推廣到三維空間之立體多面體並求出相關通式。依據平面的公式，猜測三維多面體體積為邊點、面點、內點、角點之線性組合，然後依一些特殊狀況所得的數據，去猜測出線性組合的係數。作者以此解決了長方體、三角柱體、五角柱、直角三角錐、三垂錐等等情形之皮克公式，整體手法類似，著重觀察，因此作品份量略為單薄。
2. 建議於研究中既有柱體與錐體都有結果，可以進行二者之比較。
3. 於研究中順利的找到各項之係數關係，數感表現佳，建議說明為何會有此關係。

作品海報

壹、研究動機

在某次數學小考，一道求平面坐標上三角形的面積題目，竟然是用數格子點的方式來求值，上網尋找資料才知道，原來這就是有名的皮克定理。這個極為有趣的性質，讓我們突發奇想，是否空間坐標系中的多面體也有類似的性質。上網找了相關資料後才發現沒人做過類似的研究，讓我們決定深入探討這個主題，期以用代數或幾何的方式找出立體空間中柱體以及椎體的類皮克定理通式。

貳、研究目的

一、找出空間坐標系中長方體的類皮克定理通式　二、找出空間坐標系中直角柱體的類皮克定理通式
三、找出空間坐標系中直角三角錐體的類皮克定理通式　四、找出空間坐標系中三垂三角錐體的類皮克定理通式

參、研究設備與器材

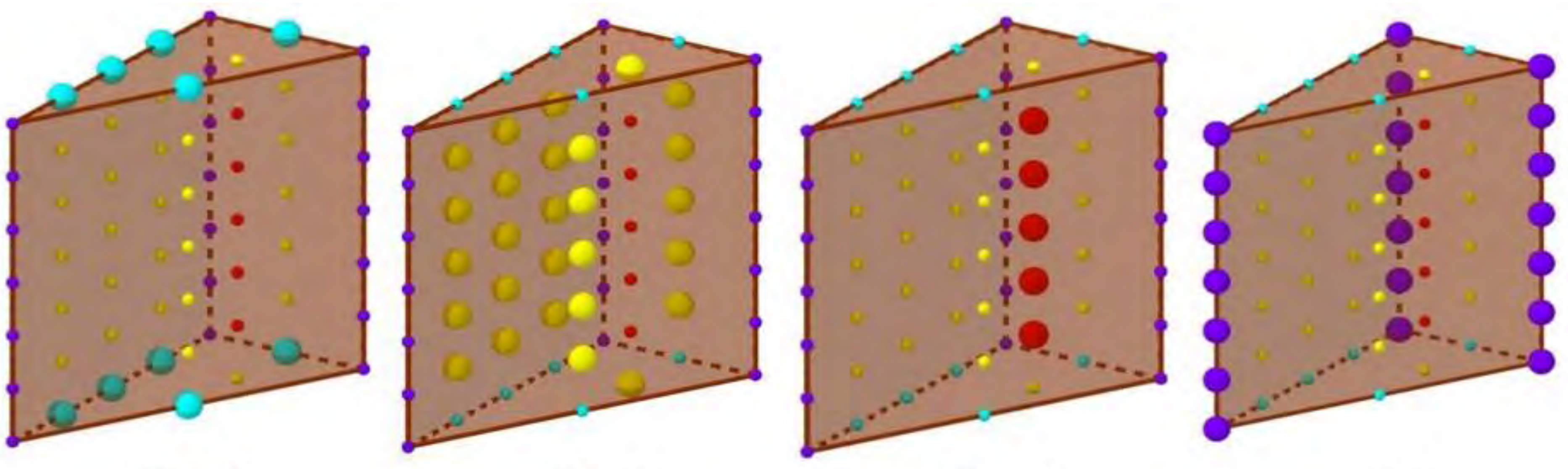
紙、筆、電腦、GeoGebra

肆、研究過程與方法

因為我們期許可將原本平面通用的皮克定理，推廣至三維的立體圖形，原皮克定理之多邊形所有頂點皆為格子點(本文之格子點皆代表整數格子點)，故本篇所探討的所有立體幾何多面體之所有頂點也限制為格子點。

名詞解釋：

長方體：所有頂點皆為格子點且長寬高皆與座標軸平行的長方體
直角柱體：所有頂點皆為格子點且其高平行座標軸的柱體
直角三角錐體：所有頂點皆為格子點且其相交的三稜皆與座標軸平行的三角錐體
三垂三角錐體：直角三角形的三角柱可以切割出三個相似的三角錐並分成 Part1、Part2、Part3。
邊點(L)：在立體圖形邊上的格子點（如圖一）　面點(E)：在立體圖形的面內的格子點（如圖二）
內點(I)：在立體圖形內部的格子點（如圖三）　角點(A)：在柱體之頂點及其延伸為高的格子點（如圖四）



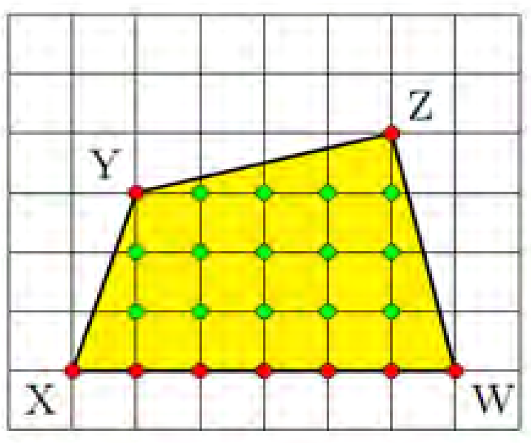
（圖一）　（圖二）　（圖三）　（圖四）

一、淺談皮克$(Pick)$定理

Georg Alexander Pick 在 1899 年正式發表一個關於計算格子點上多邊形面積的簡易公式：$A=I+\frac{L}{2}-1$，其中 A 表示其格子多邊形的面積，I 表示其格子多邊形之內部所有格子點個數，L 表示為其格子多邊形之邊上所有格子點個數。

例：

如右圖，$XWZY$ 為一簡單四邊形，邊上有9個格子點，內部有14個格子點，面積為17.5。



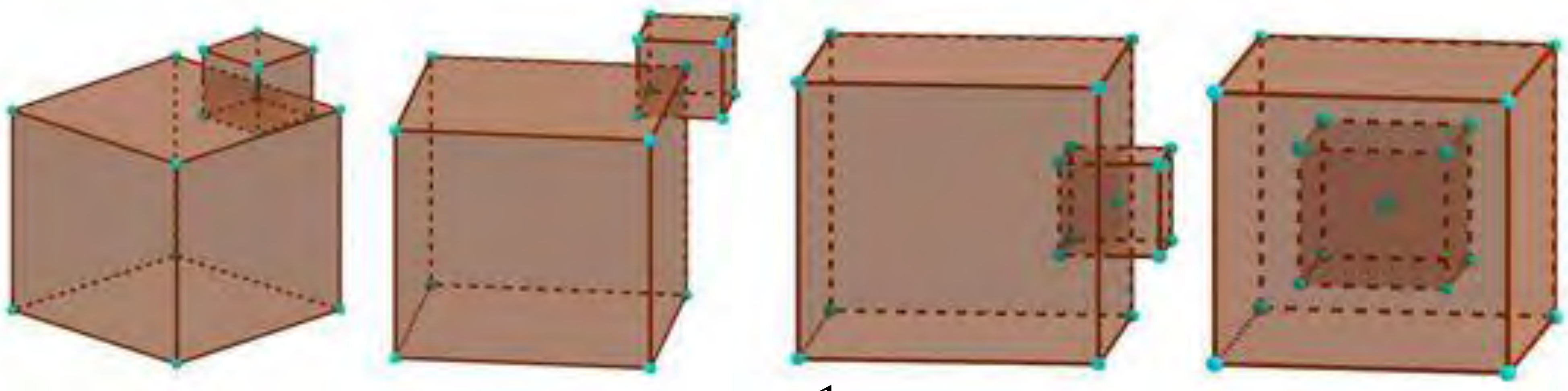
有：　$A=17.5$　　$I=14$　　$L=9$　　滿足方程 $A=I+\frac{L}{2}-1$

二、直角長方體研究過程

在了解皮克定理後，我們決定先從最簡單的長方體開始下手，我們認為長方體的體積(平面坐標推廣至空間坐標)應與圍成長方體的封閉幾何圖形有關(圍成平面多邊形僅有點、線；圍成空間立方體有點、線、面)故將格子點分成：邊點(L)、面點(E)、內點(I)，並試著由邊點、面點、內點的數量求出長方體體積的通式。

(一)柱體公式猜想:

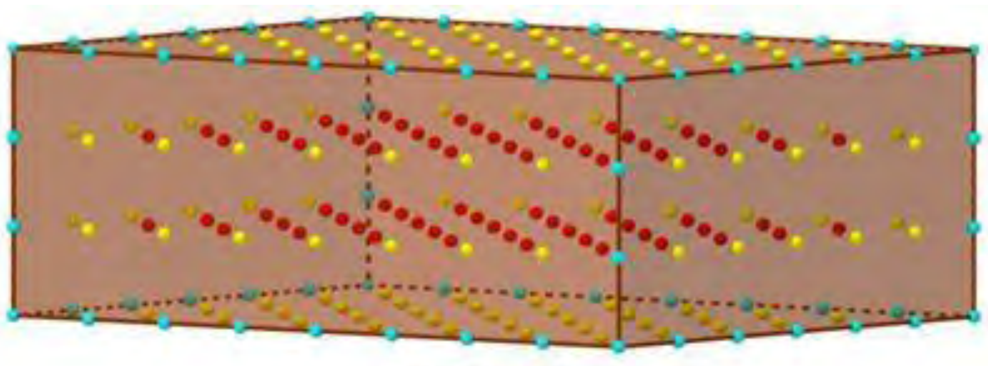
我們想先試著用幾何的角度來猜測我們的通式。因此我們先畫了一個$(2,2,2)$長方體，並以每個格子點為中心各畫一個$(1,1,1)$長方體(如下圖)，試著以小長方體所佔的體積來猜測邊點、面點、內點的係數。



畫了圖之後可以發現每個以邊點為中心的小長方體皆有$\frac{1}{4}$的體積在大長方體內，而面點有$\frac{1}{2}$在大長方體內，內點則全部都在大長方體內。因此我們猜測邊點、面點、內點的係數會和$\frac{1}{4},\frac{1}{2},1$有關係。而我們在計算時將頂點歸類於邊點內，但頂點只佔了$\frac{1}{8}$的體積，因此需要以一個常數項將其補回來，故常數項為$(\frac{1}{8}-\frac{1}{4})\times 8\Rightarrow -1$。

假設長方體的長、寬、高長為a、b、c，(為了方便以序對(a,b,c)表示)
先將長方體分為以下三種類型:

(二)(a,a,a)型
(三)(a,a,b)型
(四)(a,b,c)型(如圖五)



(圖五)

(長, 寬, 高)	$(1,2,3)$	$(2,4,6)$	$(3,6,9)$	$(4,8,12)$	$(5,10,15)$
邊點(L)個數	20	44	68	92	116
面點(E)個數	4	46	112	262	436
內點(I)個數	0	15	80	231	504
體積(V)	6	48	162	384	750

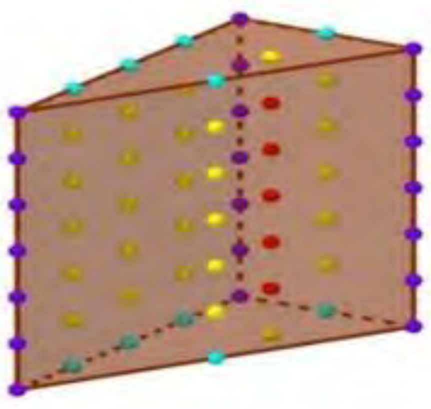
假設體積公式為$V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta$

由數據以及代入檢驗可得長方體之體積通式皆為$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L-1$，證明了我們的猜測是正確的。

三、三角柱體研究過程

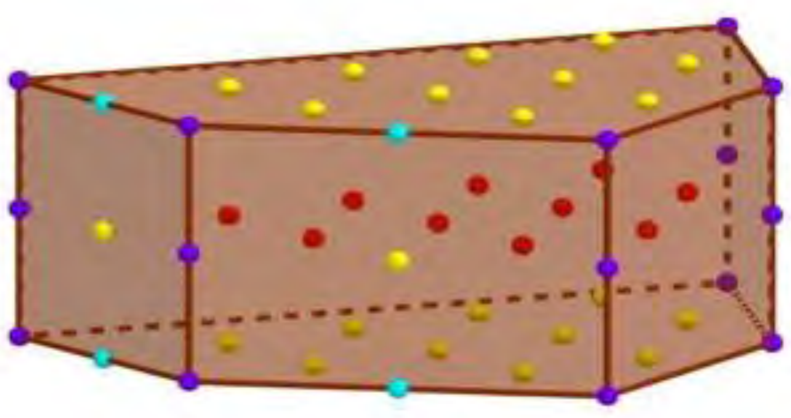
得出長方體體積的通式後，我們決定要用一樣的方法試著求出三角柱體積的通式。
但在計算過程中發現這組聯立方程式無解，因此我們猜測會無解是因為**三角形的內角和只有**180°**，平均為**60°**，**

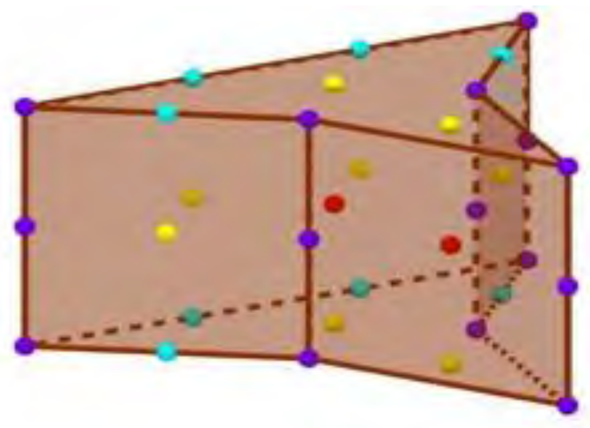
將頂點上的格子點分開後，我們將其命名為角點(A)（如圖六）
假設體積公式為$V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta A+\varepsilon$
由數據以及代入數據檢驗可得三角柱體之體積通式為$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L+\frac{1}{6}A-\frac{1}{2}$。


（圖六）

四、五角柱研究過程

在發現三角柱和四角柱之體積通式非常相似後，我們推測五角柱也會有類似的體積通式，於是畫了六個五角柱(如圖七、八)，以相同方式求出體積通式，確認我們的猜想是否正確。


（圖七）


（圖八）

編號	圖七	圖八
邊點(L)個數	4	8
面點(E)個數	22	8
內點(I)個數	10	2
角點(A)個數	15	15
體積(V)	25	11

假設體積公式為$V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta A+\varepsilon$
由數據以及代入數據檢驗可發現五角柱之體積通式即為$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L+\frac{3}{10}A-\frac{3}{2}$。
雖然此通式和三角柱、四角柱之通式非常相似，角點和常數項卻有不同的係數，列表如下。

三角柱	$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L+\frac{1}{6}A-\frac{1}{2}$	四角柱	$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L-1$	五角柱	$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L+\frac{3}{10}A-\frac{3}{2}$

因此我們猜測角點與常數項係數之不同是邊數不同造成的，並依照三角柱、四角柱及五角柱的公式推測n角柱的體積通式為$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L+\frac{n-2}{2n}A-\frac{n-2}{2}$，我們期以較嚴謹的數學原理來證明猜測的$n$角柱之體積通式之正確性。

五、n角柱之通式推導過程

已知平面圖形之皮克定理面積公式$A=I+\frac{1}{2}L-1$則轉為立體柱體後柱體體$V=A\times h=(I+\frac{1}{2}L-1)\times h=Ih+\frac{1}{2}Lh-h$
設I',E',L',A'分別為柱體中內點、面點、邊點、角點的數量
則$I'=I(h-1)=Ih-I$　　$E'=2\times I+(L-n)(h-1)=2I+Lh-nh-L+n$
$L'=2(L-n)=2L-2n$　　$A'=n(h+1)=nh+n$

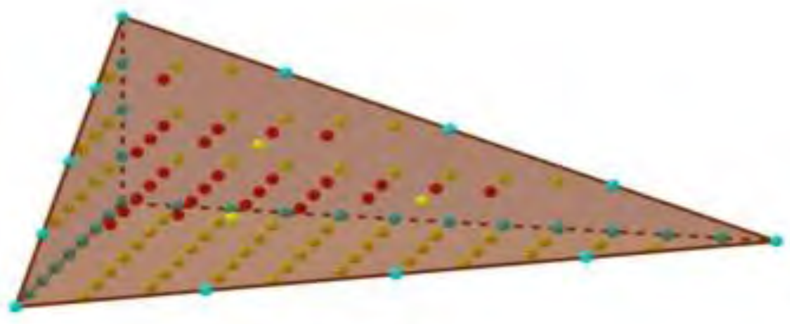
經推導後發現角點之係數以及常數項皆會因角柱之邊數而有所改變，而邊點、面點、內點之係數皆固定；內點為1，面點為$\frac{1}{2}$，邊點為$\frac{1}{4}$。

六、直角三角錐研究過程

在算出格子點柱體體積確實和邊點、面點、內點、角點個數有關係後，我們試著探討錐體之邊點、面點、內點個數是否也和體積有關係，故決定由與長方體最為相關的直角三角錐開始著手。在此我們定義本篇文章之直角三角錐相交的三稜皆與座標軸平行故兩兩互相垂直。假設直角三角錐兩兩垂直的三稜長分別為a、b、c，(為了方便以序對(a,b,c)表示)，並以V_1、L_1、E_1、I_1，代表第一層圖形的相關體積及邊面內心的數據，並一層一層等比例放大驗證。

我們在計算前先將直角三角錐分為以下三種類型：

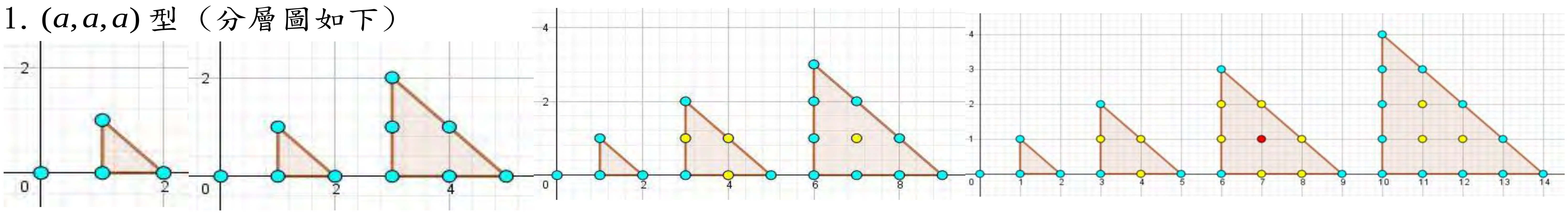
(一)(a,a,a)型
(二)(a,a,b)型
(三)(a,b,c)型(如圖九)


（圖九）

(四)直角三角錐之分層圖規律：

算出直角三角錐的體積通式後，我們試著從直角三角錐的分層圖找出邊點、面點、內點的規律，進而確認我們算出來的體積通式是否正確。

1. (a,a,a)型（分層圖如下）


V_1　　V_2　　V_3　　V_4

2. (a,a,b)型
3. (a,b,c)型

計算後發現錐體之邊點、面點、內點、體積規律如下表：

直角三角錐類型	(a,a,a)型：	(a,a,b)之$(1,1,2)$型：	(a,b,c)之$(1,2,3)$型：
邊點(L)規律	$L_n=6n-2$	$L_n=7n-2$	$L_n=9n-2$
面點(E)規律	$E_n=2n^2-6n+4$	$E_n=3n^2-7n+4$	$E_n=6n^2-9n+4$
內點(I)規律	$I_n=\frac{n^3-6n^2+11n-6}{6}$	$I_n=\frac{2n^3-9n^2+13n-6}{6}$	$I_n=(n-1)^3$
體積(V)	$V_n=\frac{1}{6}n^3=I+\frac{1}{2}E+\frac{7}{36}L-\frac{11}{18}$	$V_n=\frac{1}{3}n^3=I+\frac{1}{2}E+\frac{4}{21}L-\frac{13}{21}$	$V_n=n^3=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{6}L-\frac{2}{3}$

七、三垂錐研究過程

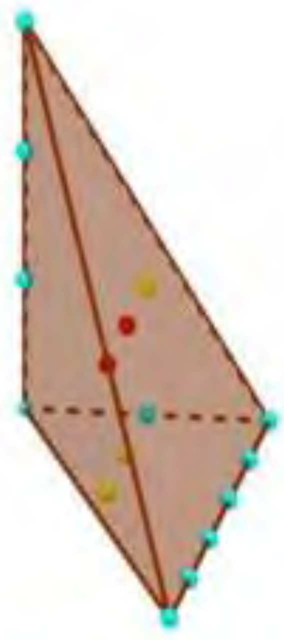
在推出直角三角錐的體積公式確實和邊點、面點、內點有關係後，剛好數學課教了三垂線定理，數學老師提醒了我們，其實直角三角形的直角柱可以切割出三個相似的三角錐(如圖十九)，要不往這個方向討論看看，故我們將這三個類似的三角錐取名為三垂錐，並分成 Part1、Part2、Part3(如圖二十~二十二)三種，進而討論它們之間的內面邊點之間的關係。

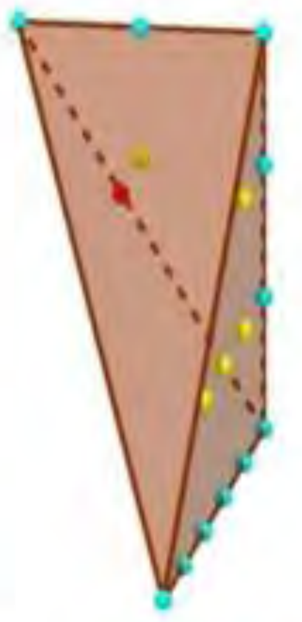
(一) Part1(如圖十)

假設體積公式為$V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta$

由數據以及代入檢驗可得 Part1 之三垂錐體積通式為$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{2}{13}L-\frac{9}{13}$。


(圖十)


(圖十一)


(圖十二)

(二) Part2(如圖十一)

假設體積公式為$V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta$

由數據以及代入檢驗可得 Part2 之三垂錐體積通式為$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{5}{26}L-\frac{8}{13}$。

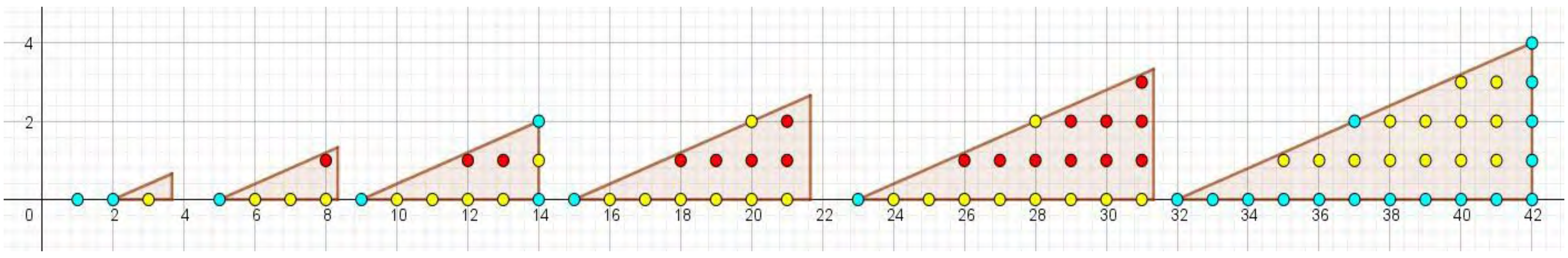
(三) Part3(如圖十二)

假設體積公式為$V=\alpha L+\beta E+\gamma I+\delta$

由數據以及代入檢驗可得 Part3 之三垂錐體積通式為$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{5}{26}L-\frac{8}{13}$。

在得出三垂錐三個部分各自的體積通式後，我們想要從邊點、面點、內點的個數規律來驗證我們算出來的結果是否正確，因此畫了分層圖來找出邊點、面點、內點個數的規律。

(1) Part1 (分層圖如下)



(2) Part2

(3) Part3

	三垂錐之 Part1.	三垂錐之 Part2.	三垂錐之 Part3.
邊點(L)規律	$L_n=13n-2$	$L_n=13n-2$	$L_n=13n-2$
面點(E)規律	$E_n=15n^2-13n+4$	$E_n=12n^2-13n+4$	$E_n=14n^2-13n+4$
內點(I)規律	$I_n=5n^3-\frac{15}{2}n^2+\frac{9}{2}n-1$	$I_n=5n^3-6n^2+4n-1$	$I_n=5n^3-7n^2+4n-1$
體積(V)	$V_n=5n^3=I+\frac{1}{2}E+\frac{2}{13}L-\frac{9}{13}$	$V_n=5n^3=I+\frac{1}{2}E+\frac{5}{26}L-\frac{8}{13}$	$V_n=5n^3=I+\frac{1}{2}E+\frac{5}{26}L-\frac{8}{13}$

伍、研究結果

柱體體積的類皮克定理公式		錐體體積的類皮克定理公式	
長方體	$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L-1$	直角三角錐	$V=I+\frac{1}{2}E+\alpha L+\beta\ (2\alpha-\beta=1)$
三角柱	$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L+\frac{1}{6}A-\frac{1}{2}$		
五角柱	$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L+\frac{3}{10}A-\frac{3}{2}$	三垂錐	$V=I+\frac{1}{2}E+\alpha L+\beta\ (2\alpha-\beta=1)$
n 角柱	$V=I+\frac{1}{2}E+\frac{1}{4}L+\frac{n-2}{2n}A-\frac{n-2}{2}$		

陸、討論與未來展望

希望能透過直觀的幾何證明，來取代代數方面的證明，能導出任意格子點直角柱及任意格子點三角錐的類皮克定理通式，相信會更振奮人心的。

柒、參考資料

1. 游森棚(2018)．翰林數學課本 4．台北市:翰林。

2. 皮克公式 Pick’s Formula．取自
http://www.mathsgreat.com/article/article_008.pdf

3. 許志農 (2013 年 11 月 8 日)．用格子點串起的面積公式．取自
http://pisa.math.ntnu.edu.tw/math-education/2013-10-03-02-39-03/2013-11-08-02-00-49/897-yonggezichuanqidemiangongshi

4. 蔡聰明 (2002 年 2 月 27 日)．談求面積的 Pick 公式．取自
http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_25_10_1/index.html