中華民國第 59 屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

050414

迷宮樂園-線,面,立體陣列路徑解

學校名稱：臺中市立大里高級中學

作者：	指導老師：
高二 賴柏瑞 高二 鄭立揚 高二 林建東	陳鑫達 歐陽昀

關鍵詞：同餘、總和最大(小)值、路徑解

摘要

本研究主題是要在一個直線(或平面、立體)陣列中，填入若干數字，找出一條路徑使所有通過的數字總和等於指定值 s。我們得到下列結果：

第一部份直線列迷宮
　一、路徑的一般解與唯一性。
第二部份平面陣列迷宮
　一、目前對總和 s 值可以判斷有無解的統計表。
第三部份立體陣列迷宮
　一、一條路徑所有通過數字的個數只能是 11、15、19。
　二、用 VLOOKUP 指令將序對 (a_0, a_2, a_1) 組數由 40 組刪減為 28 組。
　三、計算餘數 0、2、1 層這三層進出的可能方法數，列出進出組合及對應圖形。
　四、計算餘數 0～8 根這九根的進出組合。
　五、將目前找到的路徑解列表，共 24 個。

另外，這個研究在「身分認證」是可以應用的。

壹、 研究動機

在「數字的異想世界」[1,p146~147]這本書中，提到一個有趣的問題如下：

第 48 章立體迷宮

古戈爾博士在構成立體陣列的金屬球上各標記一個數字。如下圖為三維模型的圖示。這裡你要面對的挑戰是，從頂端箭頭起點依循路徑走到底部，讓所有通過的球體數字和等於 202。

古戈爾博士原本是想拿這個模型給所有可能的結婚對象看，讓她們來解答問題，如果答不出來，他就不會考慮和她們結婚。結果，莫妮卡卻把迷宮扔到古戈爾博士頭上。於是他深思之後，決定把這張圖改放在這裡首次發表。她也把模型寄給幾個國家的領導人作為禮物，結果，唉，沒有人能解開這個迷宮，事實上，地球人還沒有人能解答。你能嗎？

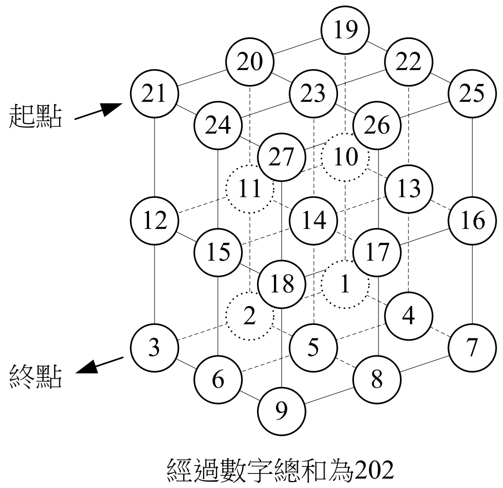


圖 1

書上[1, p390]提到一種解法：
1→20→11→14→5→4→7→8→17→26→27→18→15→6→3。至此，我們對於立體迷宮產生好奇，也想破解看看，連莫妮卡都很苦惱的問題。

貳、研究目的

第一部份直線列迷宮

一、路徑的一般解與唯一性。

第二部份平面陣列迷宮

一、目前對總和s值可以判斷有無解的統計表。

第三部份立體陣列迷宮

一、找出一條路徑所有通過數字個數的可能值。

二、找出一條路徑所有通過數字個數可能值的上下界。

三、利用$\div 3$的餘數將立體陣列分成三層，找出一條路徑在此三層通過數字個數對(a_0, a_2, a_1)的組數。

四、將一條路徑在三層通過數字個數序對的組數刪減。

五、計算餘數 0、2、1 層這三層進出的可能方法數、進出組合及對應圖形表。

六、計算餘數 0～8 根這九根的進出組合與有無解的討論。

七、寫出路徑解的表示方式，找出和(a_0, a_2, a_1)的關係，並利用目前找到的路徑解去分析每一組情形的所有路徑解。

參、研究設備及器材

紙、筆、計算器、Visio、Word 及 Excel 軟體。

肆、研究過程或方法

利用關鍵字「立體迷宮科展」在 Google 搜尋，目前找不到類似的研究。我們依下面的流程進行研究：

研究流程表

(問題一)直線列迷宮

(問題二)平面陣列迷宮

(問題三)立體陣列迷宮

(討論一)如何找出一條路徑所有通過數字個數的可能值？

(討論二)如何找出一條路徑所有通過數字個數可能值的上下界？

(討論三)如何利用÷ 3的餘數將立體陣列分成三層，找出一條路徑在此三層通過數字個數對(a_0, a_2, a_1)的組數？

(討論四)如何將一條路徑在三層通過數字個數序對(a_0, a_2, a_1)的組數刪減？

(討論五)如何計算餘數 0、2、1 層這三層進出的可能方法數、進出組合及對應圖形？

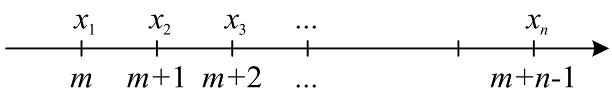
(討論六)如何計算餘數 0～8 根這九根的進出組合與討論有無解的情形？

(討論七)如何寫出路徑解的表示方式，找出和(a_0, a_2, a_1)的關係，並利用目前找到的路徑解去分析每一組情形的所有路徑解？

第一部份　直線列迷宮

先把問題簡化成「直線列的情形」，得出下面一般性的結果。

(問題一)直線列迷宮



如上圖，在一數線上選定 n 個連續正整數，設為x_1、x_2、…、x_n，依原始立體陣列迷宮移動規則，以數字x_1為起點；數字x_n為終點，每次移動只能走到相鄰的整數，在直線列的情形：一條路徑只能由左向右移動，因此數字x_1、x_2、…、x_n都會經過一次。

設一條路徑經過的所有數字總和為s，可得$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = s$—①。

為了方便計算，改設$x_1 = m$，則$x_2 = x_1 + 1 = m + 1$、$x_3 = m + 2$、…、$x_n = m + n - 1$。

則①變為：$m + (m + 1) + \cdots + (m + n - 1) = s$。

可得$nm + \frac{n(n-1)}{2} = s$，即$n\left(m + \frac{n-1}{2}\right) = s$—①'。

因為上式等號兩邊都是整數，可知左式中必須依「$\frac{n-1}{2}$是否為整數？」討論。

一、若 n 為奇數

必有$n \mid s$—②。

可知x_1、x_2、…、x_n的中間項$x_{\frac{n+1}{2}} = \frac{s}{n}$是整數，

可得x_1、x_2、…、$x_n = \frac{s}{n}-\frac{n-1}{2}$、…、$\frac{s}{n}-1$、$\frac{s}{n}$、$\frac{s}{n}+1$、…、$\frac{s}{n}+\frac{n-1}{2}$。

因x_1是正整數，要加上條件$x_1 = m = \frac{s}{n}-\frac{n-1}{2} \geq 1$—③。

③代①'得$n\left(\frac{s}{n}-\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}\right) = s$成立。

觀察①'：$n\left(m+\frac{n-1}{2}\right) = s$，可知「若 n 為奇數且$n \nmid s$，則①'無解」。

所以，①'式有解的條件是「若 n 為奇數，② $n \mid s$ 和③$\frac{s}{n}-\frac{n-1}{2} \geq 1$」。

二、若 n 為偶數

設$n = 2k$代入①'，得$2k\left(m+\frac{2k-1}{2}\right) = s$—①*。

化簡得$2km+2k^2-k = s$，即$k(2m+2k-1) = s$—④。

④式有解必須要求$k \mid s$ ，即$\frac{n}{2} \mid s$—⑤。

可知x_1、x_2、…、x_n的沒有中間項，改取中間兩項為$x_{\frac{n}{2}} = \frac{s}{n}-\frac{1}{2}$和$x_{\frac{n}{2}+1} = \frac{s}{n}+\frac{1}{2}$。

可得x_1、x_2、…、$x_n = \frac{s}{n}-\frac{n-1}{2}$、…、$\frac{s}{n}-\frac{1}{2}$、$\frac{s}{n}+\frac{1}{2}$、…、$\frac{s}{n}+\frac{n-1}{2}$。

因為$x_{\frac{n}{2}} = \frac{s}{n}-\frac{1}{2}$必須是正整數，

考慮總和$s = 2^r \times m$ (m為奇數)，由⑤可知$n = 2^{r+1} \times t$(t為奇數)且$t|m$—⑥。

因x_1是正整數，要加上條件$x_1 = m = \frac{s}{n}-\frac{n-1}{2} \geq 1$，巧合的是這和③式相同。

同理，③代①*得$n\left(\frac{s}{n}-\frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}\right) = s$成立。

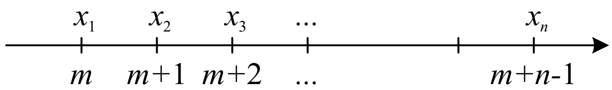
觀察①*：$n\left(m+\frac{n-1}{2}\right) = s$，可知「若 n 為偶數且$n \nmid s$，則①*無解」。

所以，①*式有解的條件是「若 n 為偶數，

③$\frac{s}{n}-\frac{n-1}{2} \geq 1$和⑥$s = 2^r \times m$ (m為奇數)，$n = 2^{r+1} \times t$(t為奇數)且$t|m$ 」。

由上面的推導，可以得出定理如下：

【定理 1】直線列迷宮路徑的一般解



如上圖，在一數線上選定 n 個連續正整數，設為x_1 、x_2 、 … 、x_n，依原始立體陣列迷宮移動規則，以數字x_1為起點；數字x_n為終點，每次移動只能走到相鄰的整數，在直線列的情形：一條路徑只能由左向右移動，因此數字x_1 、x_2 、 … 、x_n都會經過一次。

設一條路徑經過的所有數字總為s，則對給定的 n、s值，存在路徑解的充要條件如下：

(1) n 為奇數的條件：② $n \mid s$ 和③$\frac{s}{n}-\frac{n-1}{2} \geq 1$。

則有唯一的路徑解x_1 、x_2 、 … 、$x_n = \frac{s}{n}-\frac{n-1}{2}$、…、$\frac{s}{n}-1$、$\frac{s}{n}$、$\frac{s}{n}+1$、…、$\frac{s}{n}+\frac{n-1}{2}$。

(2) n 為偶數的條件：③$\frac{s}{n}-\frac{n-1}{2} \geq 1$和⑥$s = 2^r \times m$ (m為奇數)，$n = 2^{r+1} \times t$(t為奇數)且 $t|m$。

則有唯一的x_1 、x_2 、 … 、$x_n = \frac{s}{n}-\frac{n-1}{2}$、…、$\frac{s}{n}-\frac{1}{2}$、$\frac{s}{n}+\frac{1}{2}$、…、$\frac{s}{n}+\frac{n-1}{2}$。

例如：取$n = 5$、$s = 15$。

檢查條件：② $n = 5| \; s = 15$和③$\frac{s}{n}-\frac{n-1}{2} = 3-2 = 1 \geq 1$。

因此，唯一解x_1 、x_2 、 … 、$x_5 = 1$、2、 … 、5。

例如：取$n = 3$、$s = 16$。

檢查條件：② $n = 3| \; s = 16$不成立！和③$\frac{s}{n}-\frac{n-1}{2} = \frac{16}{3}-1 = \frac{13}{3} \geq 1$。因此，無解。

例如：取$n = 4$、$s = 10$。

檢查條件：③$\frac{s}{n}-\frac{n-1}{2} = \frac{5}{2}-\frac{3}{2} = 1 \geq 1$、

⑥$s = 2 \times 5(m = 5)$，$n = 4 = 2^2 \times 1(t = 1)$且$t = 1|m = 5$ 。

因此，唯一解x_1 、x_2 、x_3 、$x_4 = 1$、2 、3 、4。

同時，由⑥也可看出 $t|m = 5$ 的t有1、5。所以，取$n = 20 = 2^2 \times 5(t = 5)$亦可符合。

但此時③會變為$\frac{s}{n}-\frac{n-1}{2} = \frac{1}{2}-\frac{19}{2} = -9 \geq 1$，不成立。

若修改(問題一)的「連續正整數」條件放寬為「連續整數」，
則可得到唯一解x_1 、x_2 、 … 、$x_{20} = -9$、 -8 、. . 、10。

例如：取$n = 6$、$s = 50$。

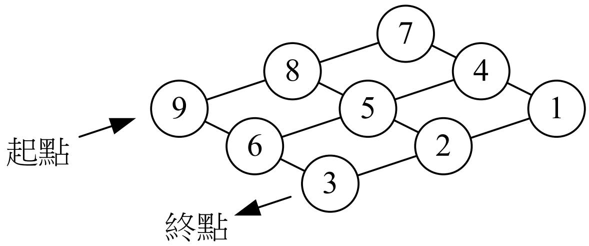
檢查條件：③$\frac{s}{n}-\frac{n-1}{2}=\frac{25}{3}-\frac{5}{2}=\frac{35}{6}\geq 1$、

⑥$s=2\times 25\ (m=25)$，$n=6=2\times 3$→不是 $2^2\times t$(t為奇數)形式，因此，無解。

第二部份　平面陣列迷宮

接下來探討「平面陣列的情形」如下：

(問題二)平面陣列迷宮



如上圖，在一個 3×3 平面陣列填上正整數 1～9，依原始立體陣列迷宮移動規則，以數字 9 為起點；數字 3 為終點，每次移動只能走到相鄰的整數。

設一條路徑經過的所有數字總和為s ，因為$9+6+3=18$、$9+8+\cdots+2+1=45$，可以估算出s的範圍是 18～45。

對總和s 值(18～45)，目前已知解數如下表：
設一條路徑經過的所有數字總個數為n 。

序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s 值	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
已知解數	有	無	無	無	無	無	無	1	無	1
n 值	3							5		5

序	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
s 值	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
已知解數	無	無	1	1	1	無	無	無	無	無
n 值			7	5	7					

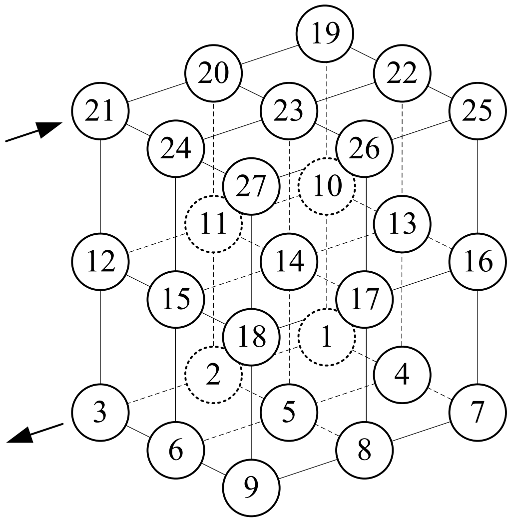
序	21	22	23	24	25	26	27	28		
s 值	38	39	40	41	42	43	44	45		
已知解數	1	無	無	無	1	無	無	2		
n 值	7				7			9		

例如：若$s=18$，可找到唯一的路徑解$9\rightarrow 6\rightarrow 3$，此路徑的$n=3$。
例如：若$s=19$，因為 9 為起點；3 為終點，可得$s-9-3=7$。但是3×3 平面陣列上，數字 7 和 9、3 均不相鄰，所以此情形無解。

第三部份　立體陣列迷宮

(討論一)如何找出一條路徑所有通過數字個數的可能值？

因為圖 1 的立體陣列中有$3\times3\times3=27$個金屬球，為了方便討論，我們將它重新設為下圖 2 的 27 個未知數x_1、x_2、x_3、 … 、x_{26}、x_{27}。每一條路徑都是由x_1進，x_{19}出。



重設

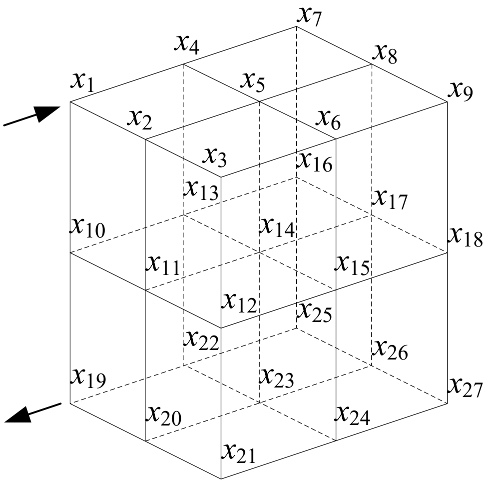
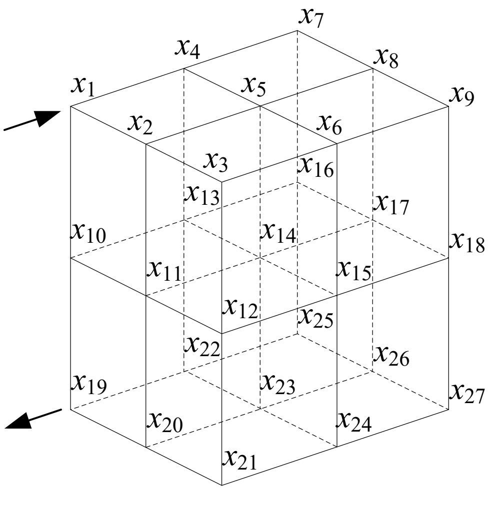


圖 1　　　　圖 2

將圖 2 以下列方式「著色」，可以得到圖 3。

若 k 是奇數，在立體陣列數字x_k標上空心圓點「○」；

若 k 是偶數，在立體陣列數字x_k標上實心圓點「●」。



著色

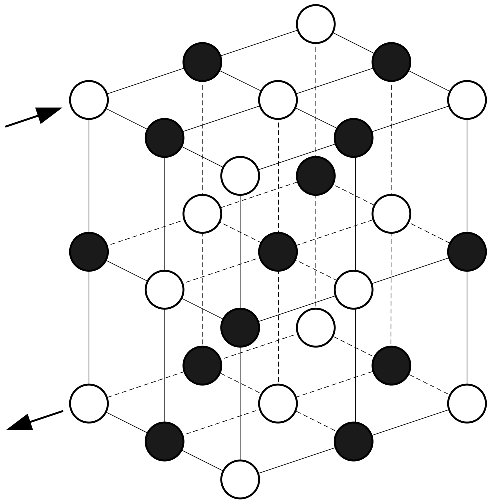


圖 2　　　　圖 3

【定理 2】

起點x_1，終點x_{19}的任一條路徑中，經過的空心圓點數必比實心圓點數多 1。

(證明)

立體陣列中，每個空心圓點的相鄰點都是實心圓點，反之亦然。所以，任一條路徑的空心、實心圓點必交錯出現。

因x_1和x_{19}都是空心圓點，扣除x_{19}後的路徑中，空心及實心圓點數兩者一樣多。因此可知任一路徑中，空心點數比實心點數多 1，得證。

【推理 1】

任一條路徑所有通過數字個數的球數必是奇數

(證明)

由定理 1 知空心點數比實心點數多 1。

設空心點數有 k 個，則實心點數有 $k-1$ 個(其中$2 \le k \le 14$)，

可得球數有$k+(k-1)=2k-1$個是奇數。

【定義 1】

若整數a、b分別$\div m$的餘數相同，則稱a、b除以m「同餘」；以$a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$表示。

【定理 3】

若一條路徑所有通過數字總和是 202，則此路徑所有通過數字的個數$n=4k-1$ (其中k為正整數)。已知$3 \le n \le 27$，可得$n=3$、7、11、15、19、23、27。

(證明)

設此路徑所有通過數字的個數為 n 個，為 Y_1、Y_2、Y_3、 … 、$Y_{\mathrm{n}-1}$、Y_{n}。

已知此路徑所有通過數字總和是 202，則 $Y_1+Y_2+Y_3+\cdots+Y_{\mathrm{n}-1}+Y_{\mathrm{n}}=202$。

由定理 2 可以假設 Y_1、Y_2、Y_3、 … 、$Y_{\mathrm{n}-1}$、Y_{n}中，有 m 個除 2 餘 1 的數和 m-1 個除 2 餘 0 的數，可得 $1m+0(m-1) \equiv 202 (\mathrm{mod}\ 2) \Rightarrow m \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$，

設$\mathrm{m}=2k$ (其中 k 為正整數)，則 $n=4k-1$。

(討論二)如何找出一條路徑所有通過數字個數可能值的上下界？

設此路徑所有通過數字的個數為 n 個，為 Y_1、Y_2、Y_3、 … 、$Y_{\mathrm{n}-1}$、Y_{n}，

且$1 \le$ Y_1、Y_2、Y_3、 … 、$Y_{\mathrm{n}-1}$、$Y_{\mathrm{n}} \le 27$。

已知此路徑所有通過數字總和是 202，則 $Y_1+Y_2+Y_3+\cdots+Y_{\mathrm{n}-1}+Y_{\mathrm{n}}=202$。

1.找出立體陣列中數字總和最大值，一一驗證總和是否大於題目要求的 202？

若總和小於 202，表示立體陣列中取 n 個數字任意組合一定不會超過 202，故無解。

例如：$n=3$時，$Y_1+Y_2+Y_3=202$。

因 $Y_1+Y_2+Y_3 \le 27+26+25=78<202$，所以無解。

列表如下，可知 n 的可能值為 11、15、19、23、27 (共 5 個)。

n值	所有通過數字總和最大值	解的情形
3	$27+26+25=78<202$	無解
7	$27+26+\cdots+21=168<202$	無解

n值	所有通過數字總和最大值	解的情形
11	$27+26+\cdots+17=242>202$	可能有解
15	$27+26+\cdots+13=300>202$	可能有解
19	$27+26+\cdots+9=342>202$	可能有解
23	$27+26+\cdots+5=368>202$	可能有解
27	$27+26+\cdots+1=378>202$	可能有解

上面 n 的可能值，換成討論「數字總和最小值」可以再做一次刪減。

2.找出立體陣列中數字總和最小值，一一驗證總和是否小於題目要求的 202？

若總和大於 202，表示立體陣列中取 n 個數字任意組合一定會超過 202，故無解。

列表如下，可知 n 可能值剩下 11、15、19 (共 3 個)。

n值	所有通過數字總和最大值	解的情形
11	$1+2+\cdots+11=66<202$	可能有解
15	$1+2+\cdots+15=120<202$	可能有解
19	$1+2+\cdots+19=190<202$	可能有解
23	$1+2+\cdots+23=276>202$	無解
27	$1+2+\cdots+27=378>202$	無解

(討論三)如何利用$\div 3$的餘數將立體陣列分成三層，找出一條路徑在此三層通過數字個數序對(a_0,a_2,a_1)的組數？

觀察圖 1 中，立體陣列 27 個數字$\div 3$所得到的餘數分布，如圖 4。可以發現餘數是 0 的數字有 9 個，都在同一平面上。類似地，餘數是 1 和餘數是 2 的數字也各有 9 個，都在同一平面上。我們給出下面的定義。

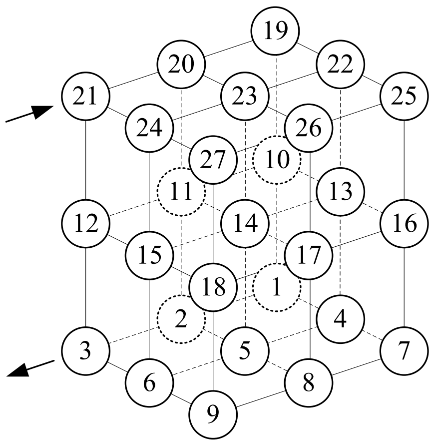


圖 1

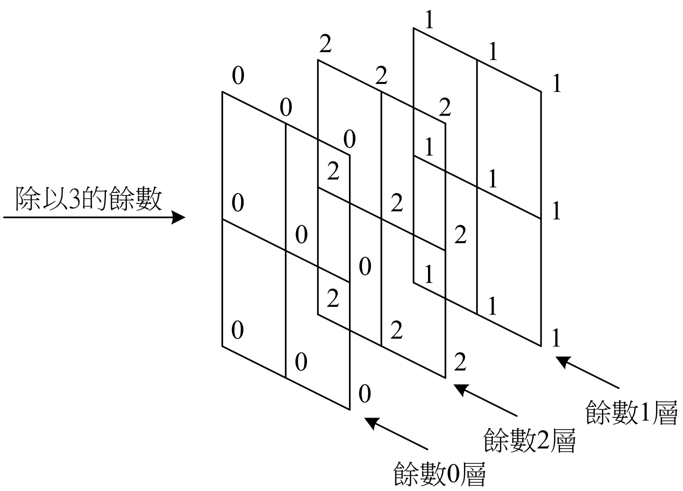


圖 4

【定義 2】

立體陣列 27 個數字中，

(1)÷ 3餘數是 0 的數字有 9 個，都在同一平面上，稱此平面為「餘數 0 層」。

(2)÷ 3餘數是 2 的數字有 9 個，都在同一平面上，稱此平面為「餘數 2 層」。

(3)÷ 3餘數是 1 的數字有 9 個，都在同一平面上，稱此平面為「餘數 1 層」。

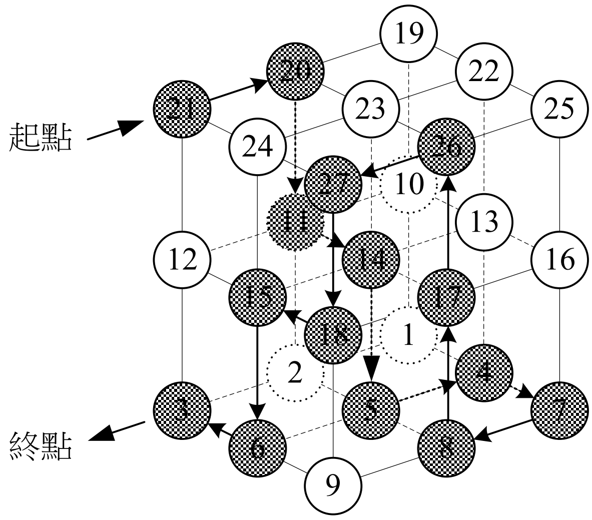
【定義 3】

若一條路徑經過餘數 0 層、餘數 2 層、餘數 1 層的數字各有a_0、a_2、a_1個，此情形以序對(a_0, a_2, a_1)表示。

例如：書上[1, p390]提到一條路徑解：

21→20→11→14→5→4→7→8→17→26→27→18→15→6→3 (如下圖)，可算出

$(a_0, a_2, a_1) = (6,7,2)$。



【性質 3】

若一條路徑經過餘數 0 層、餘數 2 層、餘數 1 層的數字個數序對是(a_0, a_2, a_1)，則

(1) $a_0 = 2$、3、 … 、9。

(2) a_2和$a_1 = 0$、2、3、 … 、9。

(證明)

(1)因為一條路徑的終點起點和都在餘數 0 層，所以a_0是≥ 2的正整數，且$a_0 \leq 9$。

(2)若一條路徑未經過餘數 1 層，則$a_2 = 0$。

若一條路徑經過餘數 1 層，因為終點在餘數 0 層，則$a_2 \geq 2$，且$a_2 \leq 9$。

同理，可以得出$a_1 = 0$或$a_1 \geq 2$，且$a_1 \leq 9$。

設一條路徑所有通過數字的個數為 n 個，為 Y_1、Y_2、Y_3、 … 、Y_{n-1}、Y_n。

已知此路徑所有通過數字總和是 202，則 $Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots + Y_{n-1} + Y_n = 202$。

若一條路徑經過餘數 0 層、餘數 2 層、餘數 1 層的數字個數序對是(a_0, a_2, a_1)，可得

(方程 1)$a_0 + a_2 + a_1 = n$。

(方程 2) $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n \equiv 0a_0 + 2a_2 + 1a_1 \equiv 202(\bmod 3) \Rightarrow 2a_2 + a_1 \equiv 1(\bmod 3)$。

按照依$a_2 \div 3$的餘數是 0、1 或 2 討論，有下面 3 類要計算。

(1)若$a_2 \equiv 0 \pmod 3$，可得$a_1 \equiv 1 \pmod 3$
(2)若$a_2 \equiv 1 \pmod 3$，可得$a_1 \equiv 2 \pmod 3$
(3)若$a_2 \equiv 2 \pmod 3$，可得$a_1 \equiv 0 \pmod 3$

再加上由(討論一、二)得出 n 可能值=11、15、19。總共要分$3 \times 3 = 9$種情形，計算序對(a_0, a_2, a_1)的所有可能組數。下面舉例說明：

例如：當 n=11 時，
(方程 1)$a_0 + a_2 + a_1 = 11 \Rightarrow a_0 = 11 - a_2 - a_1$。
(方程 2)若$a_2 \equiv 0 \pmod 3$且$a_1 \equiv 1 \pmod 3$
由性質 3 可知$a_2 = 0$、3、6、9且$a_1 = 4$、7。
因為經過餘數 1 層，必經過餘數 2 層，可知$a_2 = 0$不合。其餘列表計算如下

$a_2 \equiv 0 \pmod 3$	$a_1 \equiv 1 \pmod 3$	$a_0 = 11 - a_2 - a_1$	解的情形	(a_0, a_2, a_1)
3	4	4	可能有解	(4,3,4)
3	7	1	無解	
6	4	1	無解	
6	7	-2	無解	
9	4	-2	無解	
9	7	-5	無解	

完整的計算見(附錄一)。
由(附錄一)可知序對(a_0, a_2, a_1)可能組合有 40 種(如下表)，其中$a_0 + a_2 + a_1 = n$。

n值	(a_0, a_2, a_1)	組數
11	(4,3,4)、(5,4,2)、(2,4,5)、(2,7,2)、(9,2,0)、(6,2,3)、(3,2,6)、(6,5,0)、(3,5,3)、(3,8,0)	10
15	(8,3,4)、(5,3,7)、(5,6,4)、(2,6,7)、(2,9,4)、(9,4,2)、(6,4,5)、(3,4,8)、(6,7,2)、(3,7,5)、(7,2,6)、(4,2,9)、(7,5,3)、(4,5,6)、(7,8,0)、(4,8,3)	16
19	(9,3,7)、(9,6,4)、(6,6,7)、(6,9,4)、(3,9,7)、(7,4,8)、(7,7,5)、(4,7,8)、(8,2,9)、(8,5,6)、(5,5,9)、(8,8,3)、(5,8,6)、(2,8,9)	14

(討論四)如何將一條路徑在三層通過數字個數序對(a_0, a_2, a_1)的組數刪減？

在(討論二)利用數字總和最大(小)值估計 n 值上下界，只單純考慮用 1~27 計算。實際上餘數 0、2、1 層的數字範圍較小，可以對序對(a_0, a_2, a_1)作較精細的估計。

(步驟 1)利用數字總和最大值估計
先將實際上餘數 0 層(除起點數字 21、終點數字 3 外)、餘數 2、1 層各層的數字按「遞減」排序。

例如：如下表，

數值		餘0層數字遞減	餘0層最大值和	餘0層數字遞增	餘0層最小值和		餘2層數字遞減	餘2層最大值和	餘0層數字遞增	餘0層最小值和		餘1層數字遞減	餘1層最大值和	餘1層數字遞增	餘1層最小值和	
0		0	0	0	0		0	0	0	0		0	0	0	0	
1		21	21	21	21		26	26	2	2		25	25	1	1	
2		3	24	3	24		23	49	5	7		22	47	4	5	
3		27	51	6	30		20	69	8	15		19	66	7	12	
4		24	75	9	39		17	86	11	26		16	82	10	22	
5		18	93	12	51		14	100	14	40		13	95	13	35	
6		15	108	15	66		11	111	17	57		10	105	16	51	
7		12	120	18	84		8	119	20	77		7	112	19	70	
8		9	129	24	108		5	124	23	100		4	116	22	92	
9		6	135	27	135		2	126	26	126		1	117	25	117	
		第1,2項除外		第1,2項除外												
序號	a0	a2	a1		餘0層和	餘2層和	餘1層和	最大值和	符不符合		餘0層和	餘2層和	餘1層和	最小值和	符不符合	可能有解
1	4	3	4		75	69	82	226	符合		39	15	22	76	符合	1
2	5	4	2		93	86	47	226	符合		51	26	5	82	符合	2
3	2	4	5		24	86	95	205	符合		24	26	35	85	符合	3
4	2	7	2		24	119	47	190	不符合		24	77	5	106	符合	
5	9	2	0		135	49	0	184	不符合		135	7	0	142	符合	

(1)餘數 0 層(除起點數字 21、終點數字 3 外)數字的「遞減」排序：
(21、3)、27、24、18、15、12、9、6。

(2)餘數 2 層數字的「遞減」排序：26、23、20、17、14、11、8、5、2。

(步驟 2)利用「累計求和」算出餘數 0 層(除起點數字 21、終點數字 3 外)、餘數 2、1 層「數字總和最大值」下界排序。

例如：如下表，餘數 0 層(除起點數字 21、終點數字 3 外)「數字總和最大值」下界排序：21、24、51、75、93、108、120、129、135。

(步驟 3)對(討論三)40 組序對(a_0, a_2, a_1)每一種情形算出「該路徑數字總和最大值」，若小於 202 則該序對(a_0, a_2, a_1)的路徑是無解的。

例如：如下表，序對(4,3,4)的「該路徑數字總和最大值」是 226，可能有解。
但是序對(2,7,2)的「該路徑數字總和最大值」是$190 < 202$，一定無解。

(步驟 4)利用數字總和最小值可以仿照(步驟 1~3)估計，再做一次刪減。

(步驟 5)因為(步驟 1~4)手算容易出錯，後來找到 Excel 軟體中的 VLOOKUP 指令可以寫出程式，將 40 組序對(a_0, a_2, a_1)利用數字總和最大(小)值篩檢，如下表。

完整的計算列表見(附錄二)。

由(附錄二)可知序對(a_0, a_2, a_1)可能組合剩下 28 種(如下表)，其中$a_0 + a_2 + a_1 = n$。值得注意的是：$n = 15$的序對(a_0, a_2, a_1)組數並未減少。

n值	(a_0, a_2, a_1)	組數
11	(4,3,4)、(5,4,2)、(2,4,5)、(6,2,3)、(3,2,6)、(6,5,0)、(3,5,3)	7
15	(8,3,4)、(5,3,7)、(5,6,4)、(2,6,7)、(2,9,4)、(9,4,2)、(6,4,5)、(3,4,8)、(6,7,2)、(3,7,5)、(7,2,6)、(4,2,9)、(7,5,3)、(4,5,6)、(7,8,0)、(4,8,3)	16
19	(6,6,7)、(7,4,8)、(7,7,5)、(8,5,6)、(5,8,6)	5

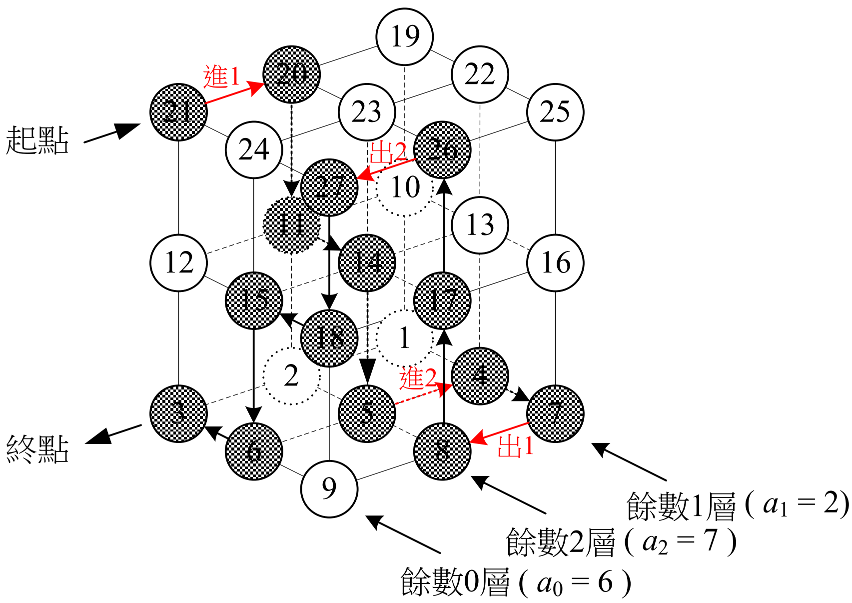
(討論五)如何計算餘數 0、2、1 層這三層進出的可能方法數、進出組合及對應圖形？

目前可以知道一條路徑經過餘數 0、2、1 層的數字個數序對(a_0, a_2, a_1)的可能情形及一條路徑經過的數字總個數n可能值是 11、15、19。但是對於一條路徑的分析還不夠精細，接下來研究「餘數 0、2、1 層這三層進出的可能方法數？」，先給出定義如下。

【定義 4】
(1)若一條路徑由餘數 0 層移動至餘數 2 層或由餘數 2 層移動至餘數 1 層，稱為「進」。若是反方向移動稱為「出」。
(2)「進」的總次數以「n(進)」表示，「出」的總次數以「n(出)」表示。
(3)第 k 次移動後，「進」的總次數以「n_k(進)」表示，「出」的總次數以「n_k(出)」表示。

例如：觀察下圖中的一條路徑解，序對$(a_0, a_2, a_1) = (6,7,2)$，$n$ (進) = 2，n (出) = 2。

路徑序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
路徑解	21	20	11	14	5	4	7	8	17	26	27	18	15	6	3
除 3 餘數	0	2	2	2	2	1	1	2	2	2	0	0	0	0	0
移動方向		進 1				進 2		出 1			出 2				



起點 21，終點 3 的任一條路徑均符合下面條件：

(條件 1)第 k 次移動後，n_k(進) ≥ n_k(出)。

(條件 2) 第 k 次移動後，n_k(進)− n_k(出) ≤ 2，即 n_k(進) ≤ n_k(出) ＋2。

(條件 3) n(進) = n(出)：因為起點 21，終點 3 都在餘數 0 層。

(條件 4-1)若一條路徑經過的數字總個數 n 是 11 或 15，則n(進)、n(出) ≥ 1：

若一條路徑經過的數字總個數 n 是 11 或 15，因餘數 0 層的數字只有 9 個，可知任一條路徑必至少「進出」餘數 2 層 1 次。

(條件 4-2)若一條路徑經過的數字總個數 n 是 19，則n(進)、n(出) ≥ 2：

若一條路徑經過的數字總個數 n 是 19，因餘數 0、2 層的數字都只有 9 個，可知任一條路徑一定會經過餘數 1 層，則必至少「進出」餘數 2、1 層各 1 次。

(條件 5)$n(進)、n(出) \le \frac{n-1}{2}$：

因為任一條路徑經過的數字總個數為n，則總移動次數為，得$n(進)+n(出) \le n$。

又由(條件 3)可知$n(進)=n(出)$，故得知。

因為(條件 1、2)和排列組合問題「一路領先」類似，一樣可以使用「先建構街道圖，再用累加法算出餘數 0、2、1 層這三層進出的可能方法數」。舉例說明如下：

例如：$n(進)=n(出)=3$，簡稱「3 進 3 出」。

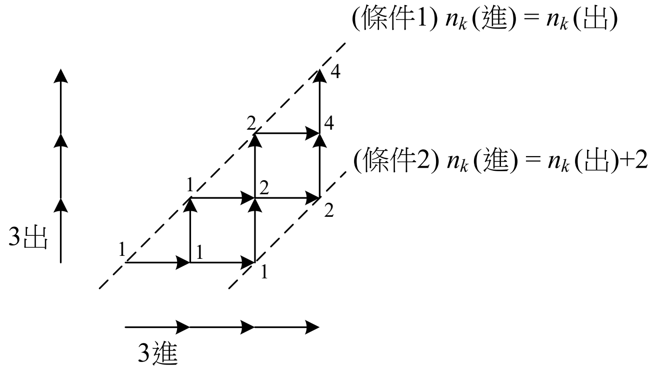
以「→」表示「進」，「↑」表示「出」。「3 進 3 出」符合(條件 1、2、3)的街道圖如下，用累加法算出餘數 0、2、1 層這三層進出的可能方法數是 4 種。可列出如下：

(1)進出進出進出：街道圖中最上方的走法。

(2)進出進進出出

(3)進進出出進出

(4)進進出進出出：街道圖中最下方的走法。

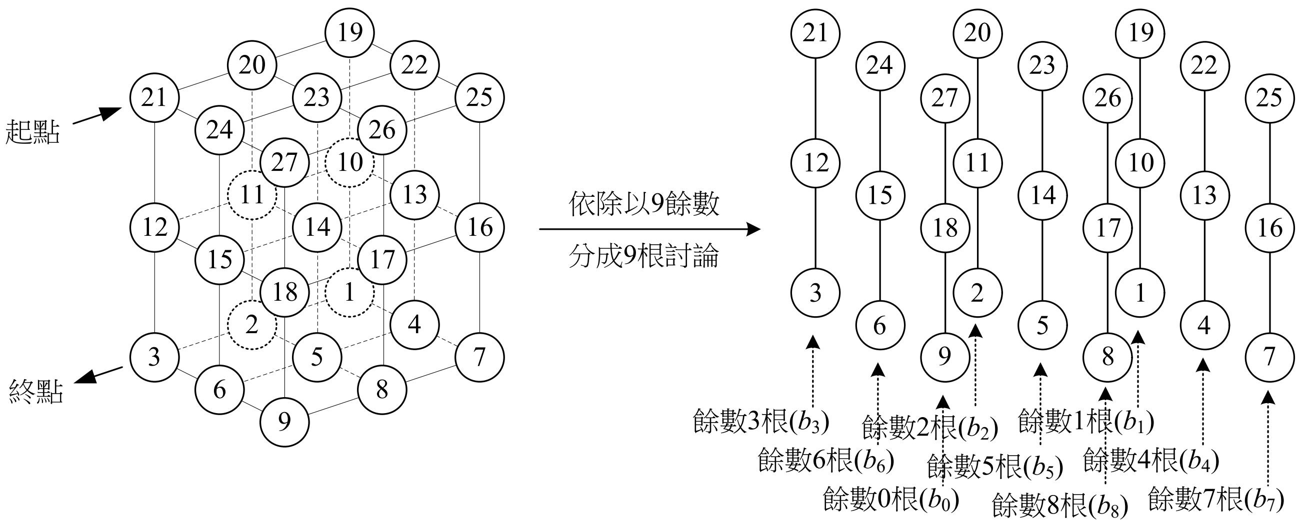


完整的街道圖及可能方法數的列表見(附錄三)，進出組合及對應圖形表見(附錄四)。

m 進 m 出	m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6
方法數	1	2	4	8	16	32

總和$s=202$目前找到的路徑解有 22 個見(附錄五)，對特定總和s目前找到的路徑解見(附錄六)，對總和 s 值(36～378)的已知解數如(附錄七)。

(討論六)如何計算餘數 0～8 根這九根的進出組合與討論有無解的情形？



由(討論五)可知分餘數 0、2、1 層討論還不夠！接下來，將立體陣列 27 個數字(1～27)依除以 9 的餘數(0～8)分成 9 類。如上圖，可以看出每類的數字各有 3 個，都在同一根數字連線段上，定義如下：

【定義 5】

將立體陣列 27 個數字(1～27)依除以 9 的餘數(0～8)分成 9 類，分別是「餘數 0 類」={ 9、18、27 }、「餘數 1 類」={ 1、10、19 }、「餘數 2 類」={ 2、11、20 }、…、「餘數 8 類」={ 8、17、26 }。

(1)因為「餘數 0 類」={ 9、18、27 }三個數字在立體陣列上的位置是同一根數字連線段，稱此根數字連線段為「餘數 0 根」。依此類推，「餘數 1 根」、「餘數 2 根」……「餘數 8 根」分別是「餘數 1 類」={ 1、10、19 }、「餘數 2 類」={ 2、11、20 }、…、「餘數 8 類」={ 8、17、26 }所在的該根數字連線段。

(2)設一條路徑經過「餘數 0 根」、「餘數 1 根」、「餘數 2 根」……「餘數 8 根」的數字各有 b_0、b_1、b_2、…、b_8個，由規則可知

① b_3= 2、3 且 b_0、b_1、b_2、b_4、…、b_8= 0、1、2、3。

② $b_3+b_6+b_0=a_0$、$b_2+b_5+b_8=a_2$、$b_1+b_4+b_7=a_1$。

(3) $S_0=$一條路徑經過餘數 0 層的所有數字和。同理，$S_2=$一條路徑經過餘數 2 層的所有數字和、$S_1=$一條路徑經過餘數 1 層的所有數字和。

由【性質 3】可知 $a_0=2$、3、 …、9且 a_2和$a_1=0$、2、3、 …、9。
依【定義 5】(2)的關係式可以分別列出(b_3，b_6，b_0)、(b_2，b_5，b_8)、(b_1，b_4，b_7)的可能解。

例如：若 $a_0=2$，則 $b_3+b_6+b_0=2$。可能解如下：

b_3	b_6	b_0	$3b_3+6b_6+0b_0$(mod 9)
2	0	0	6

例如：若 $a_2=2$，則 $b_2+b_5+b_8=2$。可能解如下：

b_2	b_5	b_8	$2b_2+5b_5+8b_8$ (mod 9)
2	0	0	4
1	1	0	7
1	0	1	1
0	2	0	1
0	1	1	4
0	0	2	7

例如：若 $a_1=0$，則 $b_1+b_4+b_7=0$。可能解如下：

b_1	b_4	b_7	$b_1+4b_4+7b_7$ (mod 9)
0	0	0	0

仔細計算請參考(附錄八)。利用(附錄八)的表，可以討論每一個序對(a_0,a_2,a_1)可能組合對應的路徑解有幾個？例如：(a_0,a_2,a_1) =(6、5、0)只有 2 個路徑解。

伍、研究結果

第一部份直線列迷宮

一、路徑的一般解與唯一性。

第二部份平面陣列迷宮

一、目前對總和s值可以判斷有無解的統計表。

第三部份立體陣列迷宮

一、若一條路徑所有通過數字總和是 202，則此路徑所有通過數字的個數$n = 4k - 1$(其中k為正整數)。

二、若一條路徑所有通過數字總和是 202，則路徑所有通過的數字個數只可能是 11、15、19。

三、利用$\div 3$的餘數將立體陣列分成三層，找出一條路徑在此三層通過數字個數的序對(a_0, a_2, a_1)的組數可能有 40 組。

四、利用 Excel 的 VLOOKUP 指令計算通過數字的總和最大(小)值，將一條路徑在三層通過數字個數的序對組數由 40 組刪減為 28 組。

五、利用組合的街道圖計算餘數 0、2、1 層這三層進出的可能方法數，列出進出組合及對應圖形。

六、計算餘數 0～8 根這九根的進出組合，得出(a_0, a_2, a_1) =(6、5、0)只有 2 個路徑解。

七、將目前找到的路徑解列表，共 24 個。

陸、討論

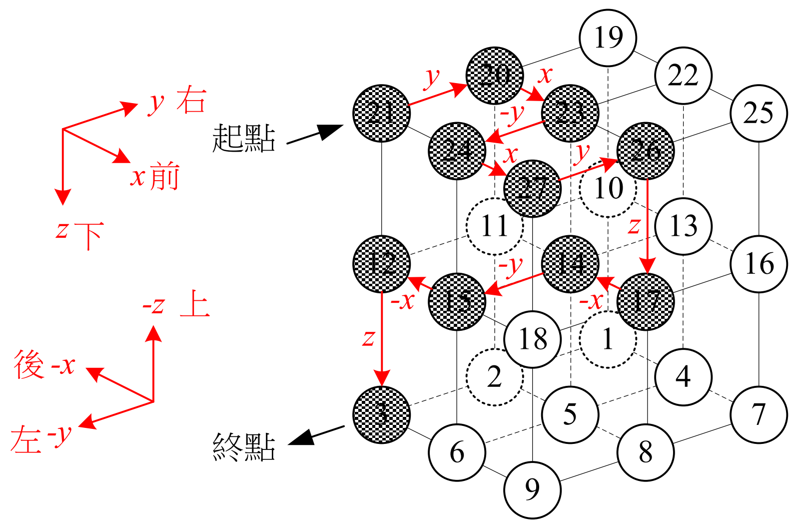
(討論七)如何寫出路徑解的表示方式，找出和(a_0, a_2, a_1)的關係，並利用目前找到的路徑解去分析每一組情形的所有路徑解？

一、如何寫出路徑解的表示方式

(說明)

一條路徑在立體陣列上移動方向，共有 3 個軸向。(討論 5)只完成餘數 0、2、1 層這三層進出的可能方法數。為了完整寫出一條路徑移動的表示方式，必須規定「立體陣列 3 個軸向如何標示？」定義如下：

【定義 6】



如上圖，將一條路徑的移動方式規定如下

(1)和 21 移至 24 方向相同且平行稱為「*x* 移動」或「前」，以「$\xrightarrow{x}$」表示。若是反方向移動稱為「-*x* 移動」或「後」，以「$\xrightarrow{-x}$」表示。

(2)和 21 移至 20 方向相同且平行稱為「*y* 移動」或「右」，以「$\xrightarrow{y}$」表示。若是反方向移動稱為「-*y* 移動」或「左」，以「$\xrightarrow{-y}$」表示。

(3)和 21 移至 12 方向相同且平行稱為「*z* 移動」或「下」，以「$\xrightarrow{z}$」表示。若是反方向移動稱為「-*z* 移動」或「上」，以「$\xrightarrow{-z}$」表示。

例如：上圖中的路徑解可以「仔細」表示為$21 \xrightarrow{y} 20 \xrightarrow{x} 23 \xrightarrow{-y} 24 \xrightarrow{x} 27 \xrightarrow{y} 26 \xrightarrow{z} 17 \xrightarrow{-x} 14 \xrightarrow{-y} 15 \xrightarrow{-x} 12 \xrightarrow{z} 3$。

二、移動方向和路徑解的關係

從立體陣列可以看出(定義 5)6 個移動方式對路徑所有通過數字總和的影響，如下表：

移動	*x*	-*x*	*y*	-*y*	*z*	-*z*
移動前後數字的大小變化	+3	-3	-1	+1	-9	+9

透過上表可以把「6 個移動方式」對路徑所有通過數字總和的影響，分析如下：

例如：

路徑序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
(6,5,0)	21	20	23	24	27	26	17	14	15	12	3
除 3 餘數	0	2	2	0	0	2	2	2	0	0	0

進出		進 1		出 1		進 2			出 2			
移動方式		y	x	-y	x	y	z	-x	-y	-x	z	
移動前後數字的大小變化		-1	+3	+1	+3	-1	-9	-3	+1	-3	-9	

上面的路徑解寫成下列形式：

$$21 \xrightarrow{y(-1)} 21-1=20$$
$$\xrightarrow{x(+3)} 21-1+3=23$$
$$\xrightarrow{-y(+1)} 21-1+3+1=24$$
$$\xrightarrow{x(+3)} 21-1+3+1+3=27$$
$$\xrightarrow{y(-1)} 21-1+3+1+3-1=26$$
$$\xrightarrow{z(-9)} 21-1+3+1+3-1-9=17$$
$$\xrightarrow{-x(-3)} 21-1+3+1+3-1-9-3=14$$
$$\xrightarrow{-y(+1)} 21-1+3+1+3-1-9-3+1=15$$
$$\xrightarrow{-x(-3)} 21-1+3+1+3-1-9-3+1-3=12$$
$$\xrightarrow{z(-9)} 21-1+3+1+3-1-9-3+1-3-9=3$$

上面的式子以「縱向」來看，依序 21 有 11 次；(-1)有 10 次；…；(-3)有 2 次；(-9)有 2 次，可出路徑所有通過數字總和

$$s = 21 \times 11 + (-1) \times 10 + 3 \times 9 + 1 \times 8 + 3 \times 7 + (-1) \times 6 + (-9) \times 5 + (-3) \times 4 + 1 \times 3 + (-3) \times 2 + (-9) \times 1 = 202$$

上面的式子對於解出所有的情形很重要，是之後研究的重點。

柒、應用

我們曾經將此問題諮詢 4 位教授的意見如下：

一、甲教授(專長密碼學)建議

1.應該擴展為是否其解有非常巨大數量？

2.這個比較是屬於身分認證的問題(利用 password)！

3.這應該是屬於一般有趣的數學問題，若要應用在密碼學似乎有點難度！

二、乙教授(專長密碼學)建議

這個問題看起來和密碼學比較沒關係，當然如果好好深入設計一下也許可以和密碼牽上邊。這個問題比較偏向離散數學和圖論，也許你可以問問看相關專業的老師看看他們有甚麼意見。

三、丙教授(專長組合數學)建議

找所有解的話，還值的一做，但我相信，應該沒有什麼好辦法。

不過，我想你們可以先把 1~27 的數加起來是 202 的有幾組解找出來。

每一組再去 check 能不能走，可能可以看出端倪。

剛剛的答案，我算了。是 1208692 組。

四、丁教授(專長深度學習)建議

這個問題和通訊協定及深度學習沒什麼關係。

五、戊教授(身分認證)建議

此問題可以探討直線與平面路徑。

六、己教授(身分認證)建議

1.立體陣列路徑數字總和是 202 時，是否有最多解？

2.立體陣列路徑可以列出數字總和在範圍最小 36～最大 378 時有無解的統計表。

七、庚教授(身分認證)建議

建議使用軟體(如 scratch)製作立體陣列迷宮遊戲，藉操作尋找路徑解。

八、辛教授(身分認證)建議

此問題可以應用在「身分認證」

捌、參考資料及其他

1.(2003)柯利弗德．皮寇弗(Clifford A. Pickover)著；蔡承志、楊台勇譯（民 92）。數字的異想世界。第 48 章立體迷宮(146-147,390 頁)。臺北市：商周出版：城邦文化發行。

【評語】050414

此作品對於解題的想法以及過程有相當完整清楚的說明，但研究結果中，作者於一維狀況產出一般性狀況分析，其餘均只能考慮本題特例。建議可以研究一般情形，不指定特殊進出位置，或是總和數字可以是變數去進行分析，這樣可以讓作品更加深入。於應用性上，這是有趣的路徑問題，建議可以此結果為基礎，發展桌遊。例如：二維魔方陣、數獨，亦或三維的魔術方塊等等。

作品海報

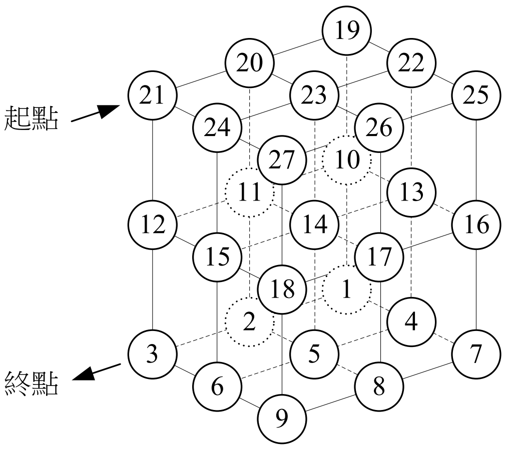
壹、研究動機

在「數字的異想世界」[1,p146~147]這本書中，提到一個有趣的問題如下：

第 48 章立體迷宮

古戈爾博士在構成立體陣列的金屬球上各標記一個數字。如下圖為三維模型的圖示。這裡你要面對的挑戰是，從頂端箭頭起點依循路徑走到底部，讓所有通過的球體數字和等於 202。

古戈爾博士……，事實上，地球人還沒有人能解答。你能嗎？



經過數字總和為202

書上[1, p390]提到一種解法：21→20→11→14→5→4→7→8→17→26→27→18→15→6→3。至此，我們對於立體迷宮產生好奇，也想破解看看，連莫妮卡都很苦惱的問題。

貳、研究目的

第一部份　直線列迷宮

一、路徑的一般解與唯一性。

第二部份　平面陣列迷宮

一、目前對總和s 值可以判斷有無解的統計表。

第三部份　立體陣列迷宮

一、找出一條路徑所有通過數字個數的可能值。

二、找出一條路徑所有通過數字個數可能值的上下界。

三、利用÷ 3的餘數將立體陣列分成三層，找出一條路徑在此三層通過數字個數對 (a_0, a_2, a_1)的組數。

四、將一條路徑在三層通過數字個數序對的組數刪減。

五、計算餘數 0、2、1 層這三層進出的可能方法數、進出組合及對應圖形表。

六、計算餘數 0～8 根這九根的進出組合與有無解的討論。

七、寫出路徑解的表示方式，找出和(a_0, a_2, a_1)的關係，並利用目前找到的路徑解去分析每一組情形的所有路徑解。

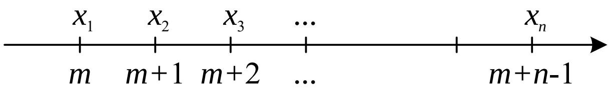
參、研究設備及器材

紙、筆、計算器、Visio、Word、Excel 及 Scratch 軟體。

肆、研究過程

第一部份　直線列迷宮

(問題一)直線列迷宮



如上圖，在一數線上選定 n 個連續正整數，設為x_1、x_2、…、x_n，依原始立體陣列迷宮移動規則，以數字x_1為起點；數字x_n為終點，每次移動只能走到相鄰的整數，在直線列的情形：一條路徑只能由左向右移動，因此數字x_1、x_2、…、x_n都會經過一次。

【定理 1】

設一條路徑經過的所有數字總為s，則對給定的 n、s值，存在路徑解的充要條件如下：

(1) n 為奇數的條件：② $n \mid s$ 和③$\frac{s}{n}-\frac{n-1}{2}\geq 1$。

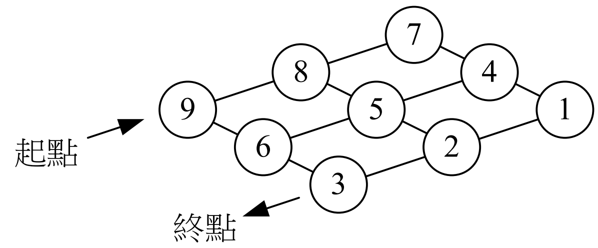
則有唯一的路徑解x_1、x_2、…、$x_n = \frac{s}{n}-\frac{n-1}{2}$、…、$\frac{s}{n}-1$、$\frac{s}{n}$、$\frac{s}{n}+1$、…、$\frac{s}{n}+\frac{n-1}{2}$。

(2) n 為偶數的條件：③$\frac{s}{n}-\frac{n-1}{2}\geq 1$和⑥$s=2^r\times m$ (m為奇數)，$n=2^{r+1}\times t$(t為奇數)且$t|m$。

則有唯一的x_1、x_2、…、$x_n=\frac{s}{n}-\frac{n-1}{2}$、…、$\frac{s}{n}-\frac{1}{2}$、$\frac{s}{n}+\frac{1}{2}$、…、$\frac{s}{n}+\frac{n-1}{2}$。

第二部份　平面陣列迷宮

(問題二)平面陣列迷宮



如上圖，在一個 3 × 3 平面陣列填上正整數 1～9，依原始立體陣列迷宮移動規則，以數字 9 為起點；數字 3 為終點，每次移動只能走到相鄰的整數。設一條路徑經過的所有數字總和為s，因為$9+6+3=18$、$9+8+\cdots+2+1=45$，可以估算出s的範圍是 18～45。

對總和s 值(18～45)，目前已知解數如下表：

序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	28
s 值	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27		45
已知解數	有	無	無	無	無	無	無	1	無	1		2
n 值	3							5		5		9

第三部份　立體陣列迷宮

(討論一)如何找出一條路徑所有通過數字個數的可能值？

(討論二)如何找出一條路徑所有通過數字個數可能值的上下界？

設此路徑所有通過數字的個數為 n 個，為Y_1、Y_2、Y_3、 ... 、Y_{n-1}、Y_n，且$1\le Y_1$、Y_2、Y_3、 ... 、Y_{n-1}、$Y_n\le 27$。

已知此路徑所有通過數字總和是 202，則$Y_1+Y_2+Y_3+\cdots+Y_{n-1}+Y_n=202$。

1.找出立體陣列中數字總和最大值，一一驗證總和是否大於題目要求的 202？

若總和小於 202，表示立體陣列中取 n 個數字任意組合一定不會超過 202，故無解。

例如：$n=3$時，$Y_1+Y_2+Y_3=202$。因$Y_1+Y_2+Y_3\le 27+26+25=78<202$，所以無解。

列表如下，可知 n 的可能值為 11、15、19、23、27(共 5 個)。

n值	所有通過數字總和最大值	解的情形
3	$27+26+25=78<202$	無解
7	$27+26+\cdots+21=168<202$	無解
11	$27+26+\cdots+17=242>202$	可能有解
…		
27	$27+26+\cdots+1=378>202$	可能有解

上面 n 的可能值，換成討論「數字總和最小值」可以再做一次刪減。

2.找出立體陣列中數字總和最小值，一一驗證總和是否小於題目要求的 202？……

列表如下，可知 n 可能值剩下 11、15、19(共 3 個)。

(討論三)如何利用$\div$ 3的餘數將立體陣列分成三層，找出一條路徑在此三層通過數字個數序對(a_0,a_2,a_1)的組數？

觀察圖 1 中，立體陣列 27 個數字$\div$ 3所得到的餘數分布，如圖 4。可以發現餘數是 0 的數字有 9 個，都在同一平面上。類似地，餘數是 1 和餘數是 2 的數字也各有 9 個，都在同一平面上。我們給出下面的定義。

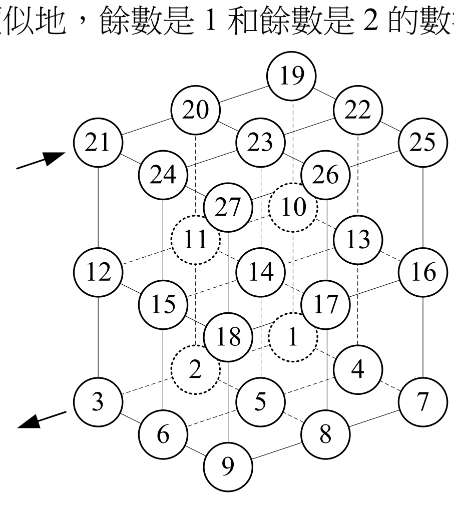


圖 1

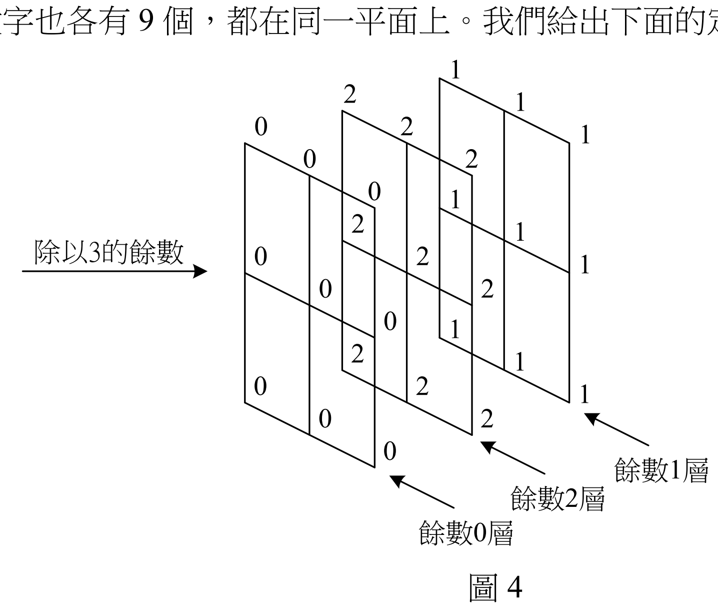


圖 4

(討論四)如何將一條路徑在三層通過數字個數序對(a_0,a_2,a_1)的組數刪減？

(步驟 5)因為(步驟 1~4)手算容易出錯，後來找到 Excel 軟體中的 VLOOKUP 指令可以寫出程式，將 40 組序對(a_0,a_2,a_1)利用數字總和最大(小)值篩檢，如(附錄二)。

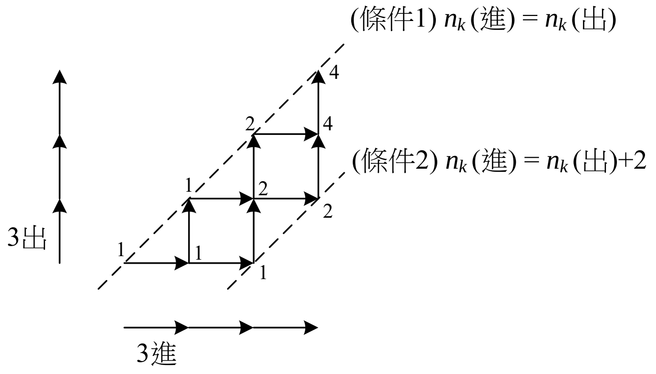
(討論五)如何計算餘數 0、2、1 層這三層進出的可能方法數、進出組合及對應圖形？

例如：$n(進)=n(出)=3$，簡稱「3 進 3 出」。

以「→」表示「進」,「↑」表示「出」。「3 進 3 出」符合(條件 1、2、3)的街道圖如下，用累加法算出餘數 0、2、1 層這三層進出的可能方法數是 4 種。可列出如下：

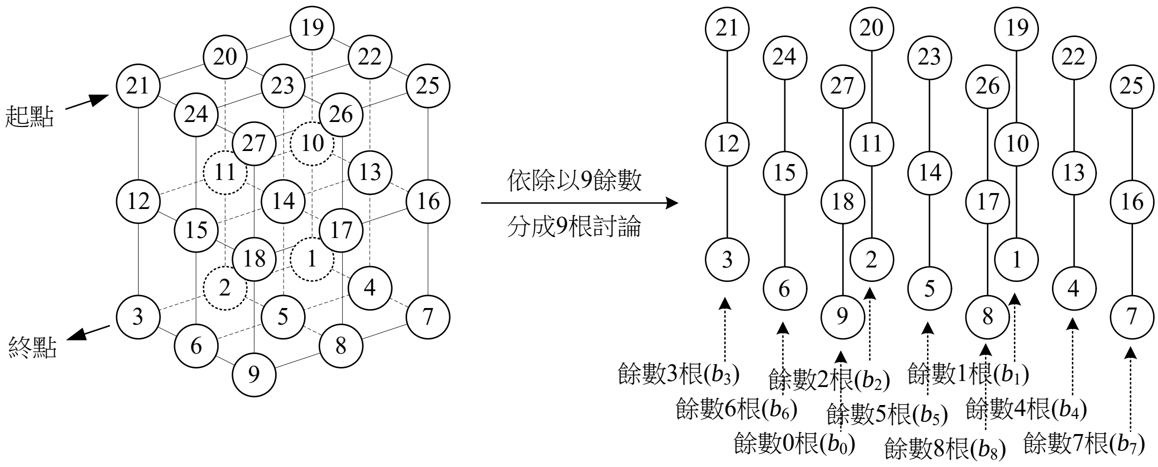
(1)進出進出進出：街道圖中最上方的走法。 (2)進出進進出出

(3)進進出出進出 (4)進進出進出出：街道圖中最下方的走法。



完整的街道圖及可能方法數的列表見(附錄三)，進出組合及對應圖形表見(附錄四)。總和 $s=202$ 目前找到的路徑解有 22 個見(附錄五)，對特定總和s目前找到的路徑解見(附錄六)，對總和s值(36～378)的已知解數如(附錄七)。

(討論六)如何計算餘數 0～8 根這九根的進出組合與討論有無解的情形？

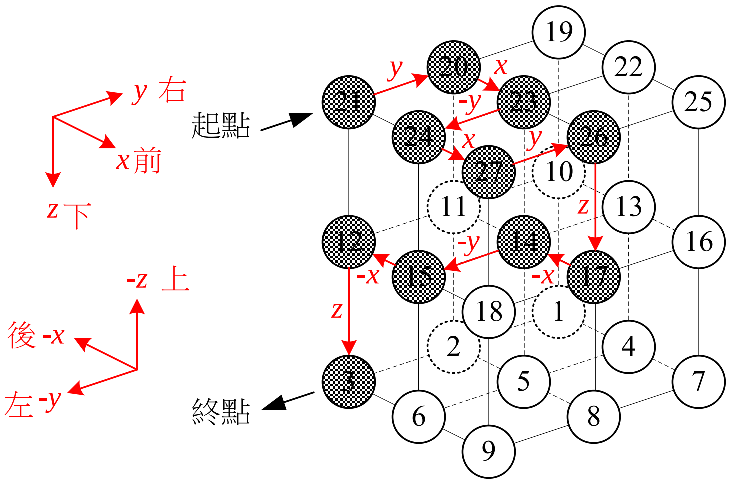


伍、研究結果 (詳見報告)

陸、討論

(討論七)如何寫出路徑解的表示方式，找出和(a_0,a_2,a_1)的關係，並利用目前找到的路徑解去分析每一組情形的所有路徑解？

【定義 6】



(1)和 21 移至 24 方向相同且平行稱為「x 移動」或「前」，以「$\xrightarrow{x}$」表示。…，以「$\xrightarrow{-x}$」表示。

(2)和 21 移至 20 方向相同且平行稱為「y 移動」或「右」，以「$\xrightarrow{y}$」表示。…，以「$\xrightarrow{-y}$」表示。

(3)和 21 移至 12 方向相同且平行稱為「z 移動」或「下」，以「$\xrightarrow{z}$」表示。…，以「$\xrightarrow{-z}$」表示。

例如:上圖中的路徑解可「仔細」表示為$21\xrightarrow{y}20\xrightarrow{x}23\xrightarrow{-y}24\xrightarrow{x}27\xrightarrow{y}26\xrightarrow{z}17\xrightarrow{-x}14\xrightarrow{-y}15\xrightarrow{-x}12\xrightarrow{z}3$。

柒、應用

我們曾經將此問題諮詢 8 位教授的意見。

捌、參考資料

1.(2003)柯利弗德．皮寇弗(Clifford A. Pickover)著；蔡承志、楊台勇譯（民 92）。數字的異想世界。第 48 章立體迷宮(146-147,390 頁)。臺北市：商周出版：城邦文化發行。