中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

第二名

050413

渾「圓」有「定」—從七圓定理到雙心六圓的推廣

學校名稱：臺北市立麗山高級中學

作者：	指導老師：
高二 黎蒨華	林永發
高二 黃緯翔	江秀桂

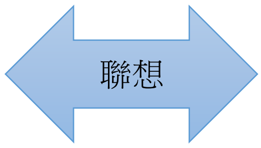
關鍵詞：七圓定理、反演變換、極點極線

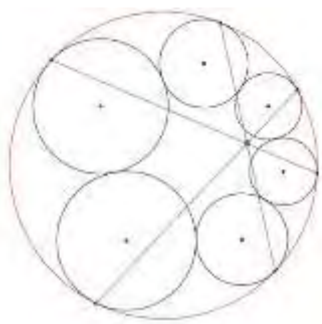
摘　　要

本研究將從七圓定理出發，試圖改變切圓個數，探討共點的存在性；更進一步推廣「六個與兩內離圓分別均外切與內切的環切圓」之雙心六圓，探討其共點、共線、共圓及共錐等性質；研究有驚人的發現「當六個環切圓轉動時，其各類對應點連線之共點必為定點，且在連心線上。」推廣至不同個數的環切圓時亦成立；當兩內離圓甚至推廣至兩外離圓或是圓與直線時，亦發現其諸線共點、諸點共線、諸點共圓、諸點共錐等性質必成立。

壹、研究動機

在閱讀有關反演變換的文獻時，意外發現一個有趣、形似湯圓的圖形：在一個大碗中放入六顆湯圓；在一個大圓中有六個小圓均與其內切，若兩相鄰小圓均外切，則其對應內切點連線共點，這就是「七圓定理」；雖名為「七圓」，關鍵卻在於其中的「六圓」，如下圖。





圖片來源：2017-12-18 自由時報 https://health.ltn.com.tw/

這樣一個恰巧相切又共點的圖形，該如何作圖呢？除了諸線共點的性質外，是否會有諸點共線、諸點共圓等特性？如果不是六個小圓而是更多圓或少圓呢？又或同時內外切於兩個內離圓，甚至同時外切於兩個外離圓的情形？於是展開本研究。

貳、研究目的及問題

本研究試圖從七圓定理的性質探討與推廣，進而研究雙心六圓，以至多圓時的作圖關係式與共點、共線、共圓、共錐的不變性探討，研究問題如下：

一、探討七圓定理的性質與多圓的推廣。

二、探討雙心六圓的構圖關係式與性質。

三、以雙心六圓的結果探討雙心多圓的性質。

四、試研究雙心多圓在兩外離圓及圓與直線的性質。

參、研究方法

一、研究工具

主要透過 *GSP* 與 *GeoGeBra* 幾何軟體進行幾何問題實驗研究，透過實驗觀察、臆測與驗證，最後提出研究結果並加以證明。

二、文獻探討

本研究涉及利用反演做三切圓構圖，並透過極點極線、*Brianchon*、*Pascal* 定理及根心定理等探討共點共線等問題，文獻探討如下：

(一) 反演變換

如圖 0-1，給定平面上半徑為r、圓心為O的圓，對平面上任一異於O的點P，將其變換為$\overrightarrow{OP}$上的一點P'，使得$\overline{OP}\times\overline{OP'}=r^2$，則稱「**$P'$為$P$互為關於圓$O$的反演點**」。

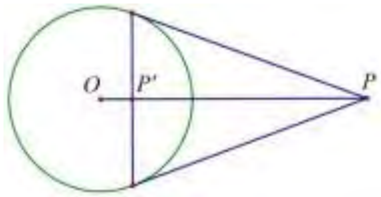


圖 0-1

【性質 1-1】反演圖形

任一圖形F上所有點作關於O的反演點，形成一新的圖形F'，

稱「**F'為F關於O的反演圖形**」。常用圖形之反演結果如下：

(1) 過O之一直線反演成過O之一直線。 (2)不過O之一直線反演成過O之一圓。

(3) 過O之一圓反演成不過O之一直線。 (4)不過O之一圓反演成不過O之一圓。

(二) 反演與極點極線

如圖 0-2，若A'為A關於圓 O的反演點，過A作垂直$\overline{AA'}$的直線 L，則稱「**直線 L 為A'關於圓 O的極線；A'為此直線 L 的極點。**」

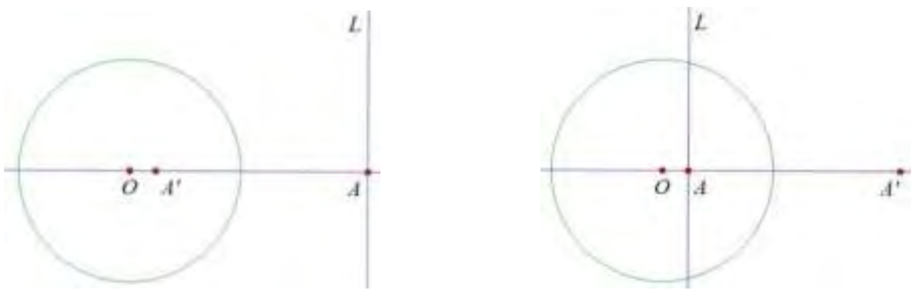


圖 0-2：極點在圓外或圓內的情形

【性質 2-1】**極線的判別性質**(參考文獻[3])

過圓錐曲線(圓)Γ外的 P點作兩割線交Γ於 E、F、G、H；作$\overleftrightarrow{EH}$、$\overleftrightarrow{FG}$交於P'，$\overleftrightarrow{EG}$、$\overleftrightarrow{FH}$交於N；又$\overleftrightarrow{P'N}$交Γ於 A、B兩點($\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$恰為Γ的兩條切線)，則性質如下：如圖 0-3

(1)$\overleftrightarrow{P'N}$為 P關於O的極線；$\overleftrightarrow{PP'}$為 N關於 O的極線；$\overleftrightarrow{PN}$為P'關於O的極線。

(2)當 P在Γ外，過 P作Γ的割線，則其兩交點的切線交點(如 M點)必在 P對應的極線上。

(3)當 P在Γ外時，過 P作Γ的兩條切線，則兩切點的連線為 P的極線。(如$\overleftrightarrow{AB}$)

(4)當Γ為圓時，上述極點與反演中心的連線垂直所對應的極線。(如$\overleftrightarrow{OP}\perp\overleftrightarrow{P'N}$)

圖 0-3：橢圓時亦成立，但$\overleftrightarrow{OP}$與$\overleftrightarrow{P'N}$不一定垂直

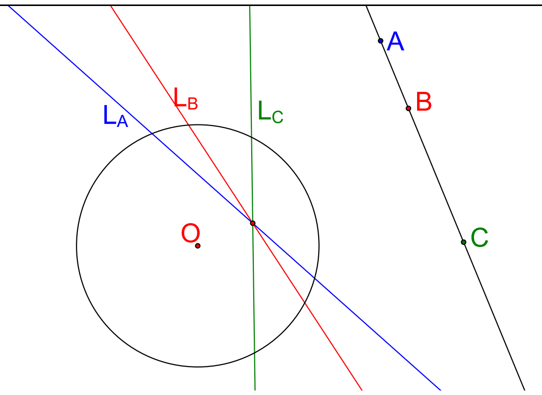


圖 0-4：極點與極線共點共線判別

【性質 2-2】**共點共線的極線判別法**（參考文獻[1]）

平面上有一圓 O及 A、B、C三點，L_A、L_B、L_C分別為 A、B、C關於圓 O的極線，若 A、B、C三點共線，則L_A、L_B、L_C三線共點，反之亦然。如圖 0-4

(三) *Brianchon*、*Pascal* 定理與根心定理

【*Pascal* 神秘六邊形定理】

若六邊形內接於一個圓，則其三組對邊的延長線交點共線。

【*Brianchon* 定理】

若六邊形外切於一個圓，則其三條對角線必共交一點。

上述兩者為對偶定理，其逆敘述均成立。

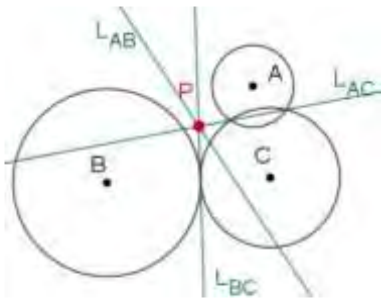


圖 0-5 根心P到三圓切線等長

【根心定理】

平面上圓心不共線的三圓 A、B、C，若L_{AB}、L_{Bc}、L_{AC}分別為圓 A 與 B、圓 B 與 C、圓 A 與 C 的根軸，則L_{AB}、L_{Bc}、L_{AC}三線共點，稱其為「三圓 A、B、C 的根心」，如圖 0-5。

肆、研究過程與結果

一、七圓定理的性質與多圓的推廣

七圓定理的構圖方法，除了參考「*Apollonius* 問題-作一圓與三圓相切」(參考文獻[4])，也可利用反演簡化構圖的難度，藉此開始我們的研究。

(一) 七圓定理的性質探討

為證明七圓定理，*Stanley Rabinowitz* (1987)曾提出兩個引理(參考文獻[6])，如下：

[引理 1] 圓上弦的 *Ceva* 定理

> 給定圓O及圓上六點 A_1、A_2、⋯、A_6，若 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$、$\overleftrightarrow{A_3A_6}$共交一點$A$，則
>
> $\overline{A_1A_2}\times\overline{A_3A_4}\times\overline{A_5A_6}=\overline{A_2A_3}\times\overline{A_4A_5}\times\overline{A_6A_1}$，反之亦然，如圖 1-1(a)。

仿照其方法證明，我們將它推廣至圓上 4*n*+2 個點的一般情形時也成立，如圖 1-1(b)。

[引理 2] 圓上兩切圓切點距離與半徑關係

> (1)兩外切小圓O_1、O_2分別與大圓 O 內切於 A_1、A_2兩點，若其半徑分別為 r_1、r_2與R
>
> 則$\overline{A_1A_2}=2R\sqrt{\frac{r_1}{(R-r_1)}}\sqrt{\frac{r_2}{(R-r_2)}}=2Rf(r_1)f(r_2)$ ，其中$f(r_i)=\sqrt{\frac{r_i}{(R-r_i)}}$ 。如圖 1-2。
>
> (2) 兩外切小圓O_1、O_2分別與大圓 O 外切於 A_1、A_2兩點，若其半徑分別為 r_1、r_2與R
>
> 則$\overline{A_1A_2}=2R\sqrt{\frac{r_1}{(R+r_1)}}\sqrt{\frac{r_2}{(R+r_2)}}=2Rg(r_1)g(r_2)$ ，其中$g(r_i)=\sqrt{\frac{r_i}{(R+r_i)}}$ 。

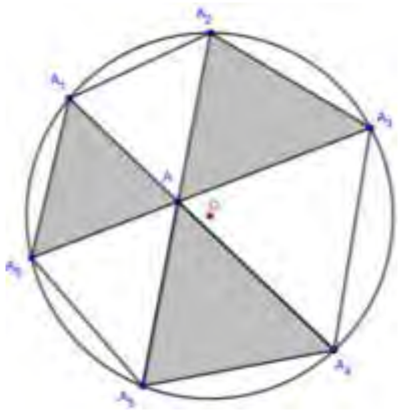


圖 1-1(a)

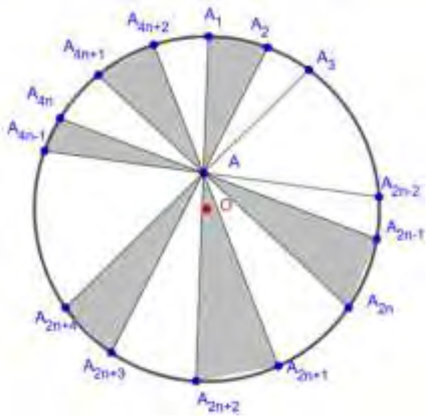


圖 1-1(b)

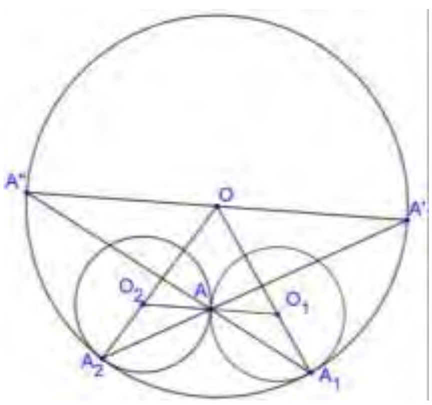
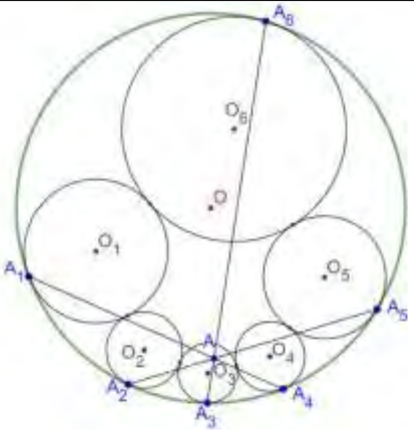


圖 1-2

【定理 1-1】七圓定理的構成條件

給定半徑R的大圓O，與六個半徑r_1~r_6的小圓O_1~O_6均內切於A_1~A_6(或外切於B_1~B_6)，若此六圓相鄰兩圓均外切，則對應內切點(或外切點)的三條連線共點，如圖 1-3。



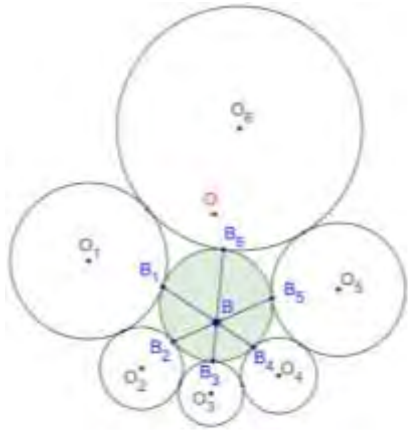


圖 1-3　A、B點均分別為該圓 O之 *Stanley* 點

<證明>　(⇒)因為相鄰兩圓均外切且內切於大圓，根據[引理 2]

$$\overline{A_1A_2} = 2Rf(r_1)f(r_2)\ \text{、}\ \overline{A_3A_4} = 2Rf(r_3)f(r_4)\ \text{、}\ \overline{A_5A_6} = 2Rf(r_5)f(r_6)$$

$$\overline{A_2A_3} = 2Rf(r_2)f(r_3)\ \text{、}\ \overline{A_4A_5} = 2Rf(r_4)f(r_5)\ \text{、}\ \overline{A_6A_1} = 2Rf(r_6)f(r_1)$$

則$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_3A_4} \times \overline{A_5A_6} = \overline{A_2A_3} \times \overline{A_4A_5} \times \overline{A_6A_1} \Rightarrow \overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$、$\overleftrightarrow{A_3A_6}$必共點$A$。([引理 1])

(⇐)因為共點 A，由[引理 1]逆定理 $\overline{A_1A_2} \times \overline{A_3A_4} \times \overline{A_5A_6} = \overline{A_2A_3} \times \overline{A_4A_5} \times \overline{A_6A_1}$.........(1)

假設圓O_1~O_5均內切圓 O於A_1~A_5，且均與前相鄰圓外切，設圓O_6與圓O_1 、O_5均外切，但與圓 O內切於A_6'，所以根據前述$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$、$\overleftrightarrow{A_3A_6'}$也共交於$A$點，

又由[引理 1]逆定理　$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_3A_4} \times \overline{A_5A_6'} = \overline{A_2A_3} \times \overline{A_4A_5} \times \overline{A_6'A_1}$.............(2)

由(1)(2)可知 $A_6' = A_6$，故 6 個小圓兩相鄰圓均外切，得證。 ■

上述共點 A 或 B，不妨稱之為「圓 O與切圓O_1~O_6的 ***Stanley* 點**」，它有什麼特別之處呢？

【定理 1-2】***Stanley* 點就是 *Brianchon* 點**

設圓O與六個兩相鄰均外切的圓O_i，內切於A_i， $i = 1$~6，已知$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$、$\overleftrightarrow{A_3A_6}$共交於 A 點，則切點為A_1~A_6的圓O外切六邊形D_1~D_6，其對角線 $\overleftrightarrow{D_1D_4}$、$\overleftrightarrow{D_2D_5}$、$\overleftrightarrow{D_3D_6}$ 也共交於 A點。換句話說「***Stanley* 點就是 *Brianchon* 點**」，***Stanley*點在 *Brianchon* 線上**。

<證明>

1. 根據【定理 1-1】七圓定理，$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$、$\overleftrightarrow{A_3A_6}$三線共交一點$A$。

2. $A_1 \sim A_6$為圓 O 內接六邊形，設$\overleftrightarrow{A_1A_2} \cap \overleftrightarrow{A_4A_5} = P$、$\overleftrightarrow{A_2A_3} \cap \overleftrightarrow{A_5A_6} = Q$、$\overleftrightarrow{A_1A_6} \cap \overleftrightarrow{A_3A_4} = R$。由【性質 2-1】，$\overleftrightarrow{D_1D_4}$、$\overleftrightarrow{D_2D_5}$、$\overleftrightarrow{D_3D_6}$分別為 P、Q、R 關於圓 O 的極線；又由 *Pascal* 定理，P、Q、R 三點共線，由【性質 2-2】知$\overleftrightarrow{D_1D_4}$、$\overleftrightarrow{D_2D_5}$、$\overleftrightarrow{D_3D_6}$必共交一點，即 *Brianchon* 點。
3. 上述P 其關於圓 O 的極線為$\overleftrightarrow{D_1D_4}$，但由【性質 2-1】，$\overline{A_2A_5} \cap \overline{A_3A_6} = A$，$A$ 點必在P點關於圓 O 的極線上，所以$\overleftrightarrow{D_1D_4}$必通過$A$點；同理$\overleftrightarrow{D_2D_5}$、$\overleftrightarrow{D_3D_6}$也必通過 A 點。因此$\overleftrightarrow{A_1A_4} \cap \overleftrightarrow{A_2A_5} \cap \overleftrightarrow{A_3A_6} = \overleftrightarrow{D_1D_4} \cap \overleftrightarrow{D_2D_5} \cap \overleftrightarrow{D_3D_6}$ 均共點 *Stanley* 點，也就是 *Brianchon* 點，見圖 1-4。 ■

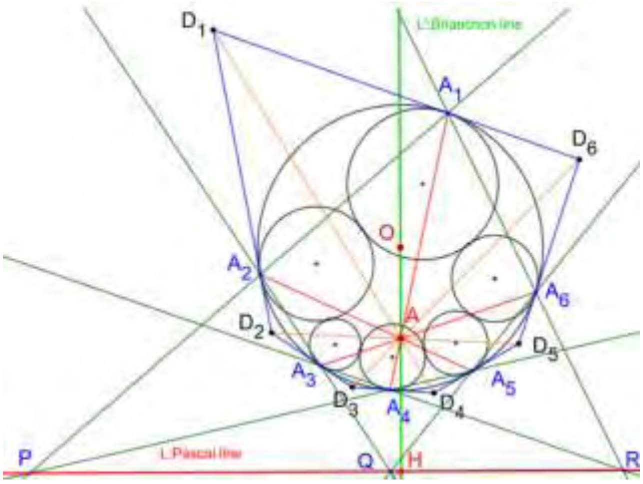


圖 1-4：*Stanley* 點在 *Brianchon* 線上

上述，令人驚奇的是「**圓內六個切圓的七圓定理竟然同時存在雙心六邊形共定點(*Brianchon* 點)與共定線(*Pascal* 線)的特性**」(參考文獻[1])，若僅從「七圓定理」字面思考，很難想像竟與雙心六邊形有關。顯見數學命名，真的很重要！然而，如果不是六個切圓的七圓定理，而是不同數量的切圓，那麼多圓的情形是否也成立呢？

(二) 多圓情形的推廣

首先探討奇數個切圓情形，發現除了 3 個切圓時有共點外，如圖 1-5(a)，其它以其內切點與鄰切點對應連線都不一定有共點，以 9 個切圓為例，如圖 1-5(b)。

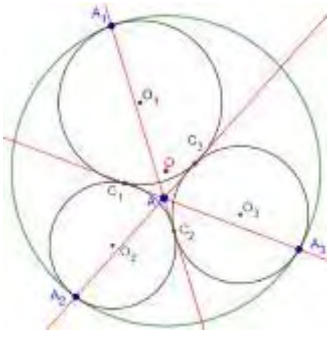


圖 1-5(a) 3 個切圓

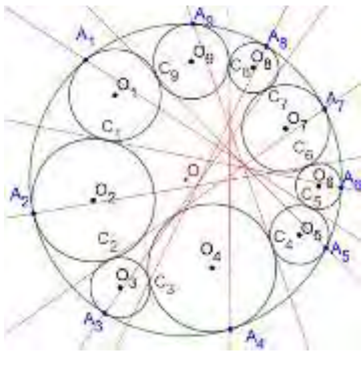
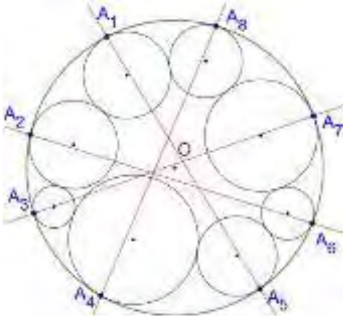


圖 1-5(b) 9 個切圓

再者，發現偶數個切圓時其對應內切點連線也不一定會共點；以 8 個切圓為例，如圖 1-6(a)。反之，若已知共交 A 點，先作以A_1~A_7為圓 O 內切點且相鄰均外切的圓O_1~O_7，再作與圓 O 內切於A_8的圓O_8，也不一定與圓O_1 、O_7外切，如圖 1-6(b)；12 或 16 個切圓時亦然。



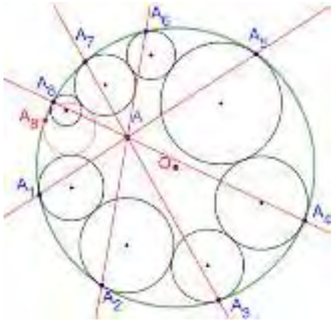
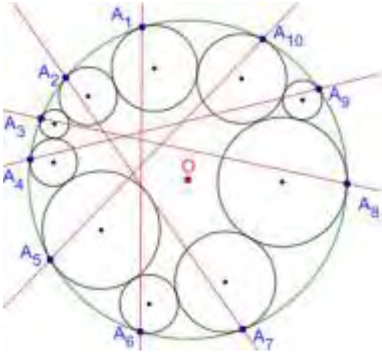


圖 1-6(a) 8 個切圓不一定共點　　　　圖 1-6(b) 共點但 8 個圓不一定相切

然而在 6、10、14 或 18 個圓時卻發現「若對應內切點連線共交一點，則兩相鄰切圓均外切」。不禁懷疑 4n+2 個圓時「若共點則相切」。以 10 個圓為例如下，4n+2 時亦同。

【定理 1-3】4n+2 個圓時共點則相切

與圓 O 均內切的 4n+2 個切圓，若其對應內切點連線共交一點，則其兩相鄰切圓均外切，反之不一定成立，以下以 10 個圓為例，如圖 1-7。



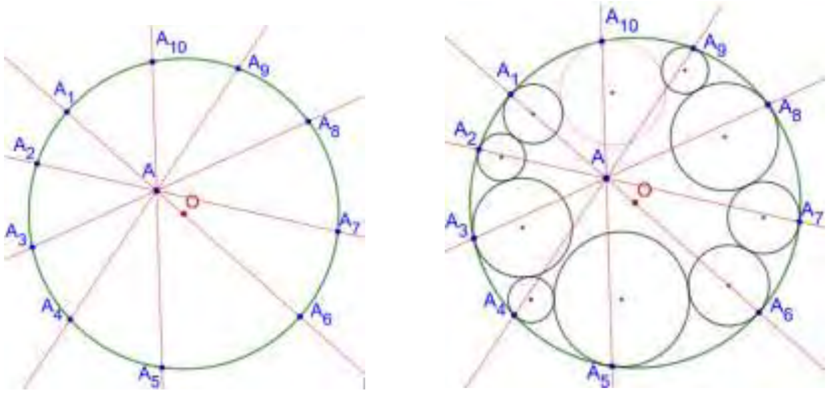


圖 1-7 (a) 10 個圓相切但未共點　　　　圖 1-7 (b) 共點時，10 個圓才會相切

<證明> 因對應內切點連線共交一點 A，根據[引理 1](4n+2)

$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_3A_4} \times \cdots \times \overline{A_9A_{10}} = \overline{A_2A_3} \times \overline{A_4A_5} \times \cdots \times \overline{A_{10}A_1}$........(1)

假設圓O_1~O_9均內切圓 O 於A_1~A_9，且均與前一個相鄰圓外切，設圓O_{10}與圓O_1 、O_9均外切，但與圓 O 內切於A'_{10}，根據[引理 2]圓上兩切圓切點距離與半徑關係，得

$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_3A_4} \times \cdots \times \overline{A_9A'_{10}} = \overline{A_2A_3} \times \overline{A_4A_5} \times \cdots \times \overline{A'_{10}A_1}$.......(2)

由(1)(2)可知 $A'_{10} = A_{10}$，故 10 個小圓兩相鄰圓均外切。 ■

「若給定兩個內離圓，是否存在六個小圓同時與大圓內切，與小圓外切呢？」，類比「**兩圓夾一個六邊形**」的雙心六邊形，我們稱形如「兩個圓夾六個小圓」的圖形為「**雙心六圓**」。

二、雙心六圓的性質探討

生活中常見如同心圓的雙心六圓，我們稱之為正雙心六圓，如圖 2-1(a)；若將它對某圓作反演，可得到偏心圓的雙心六圓，如圖 2-1(b)。

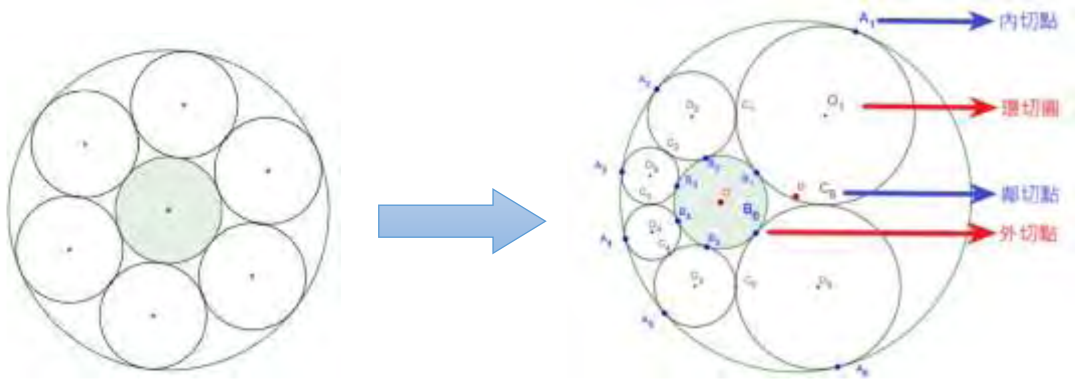


圖 2-1(a)　　　　圖 2-1(b)

為方便描述後續雙心六圓的性質探討，作以下名詞約定：

1. 六個小圓$O_1 \sim O_6$與兩大小內離圓 O 與O'分別均內切與外切，且兩相鄰小圓均外切，稱其為此兩內離圓的「**環切圓**」。
2. 環切圓與大圓 O 分別內切於$A_1 \sim A_6$，稱之為「**內切點**」。
3. 環切圓與小圓O'分別外切於$B_1 \sim B_6$，稱之為「**外切點**」。
4. 兩相鄰環切圓的切點$C_1 \sim C_6$，稱之為「**鄰切點**」。

(一) 雙心六圓的構成條件

若「給定大小兩個內離圓 O_1 、O_2，半徑為R、r，有n個環切圓」的雙心n圓，其半徑R、r及$d=\overline{O_1O_2}$構成怎樣的關係呢？文獻上（參考文獻[2]）曾利用正雙心n圓對圓O作反演推導出關係式$sin\frac{\pi}{n}=\frac{R\overline{OO_2}-r\overline{OO_1}}{R\overline{OO_2}+r\overline{OO_1}}$，同心圓時為$sin\frac{\pi}{n}=\frac{R-r}{R+r}$，其中$O$為反演圓的中心。惟若以此關係式構圓，仍受限「必須先知道反演圓的中心O的位置」，無法從R、r、d所構成的關係式來處理構圖。那麼如何找出形如$r=f(R,d)$的關係式呢？

根據文獻（參考文獻[8]）「給定任意兩內離或外離圓，以兩圓根軸與連心線交點為圓心，到圓切線長為半徑作圓（即兩圓正交圓），交連心線於兩點為此兩圓的**極限點**(*Limit point*)；若以極限點為反演中心的圓作反演，則可得同軸上一組同心圓」。透過此想法，得到以下結果：

【定理 2-1】兩個內離圓時的雙心多圓構成條件

兩個內離圓C_1、C_2，圓心分別為O_1、O_2，半徑分別為R、r，連心距$d=\overline{O_1O_2}$，$0\le d<R-r$；

若對以其極限點為反演中心的圓作反演，得兩圓C_1'、C_2'，半徑分別為R'、r'，則有以下結果：

(1) 反演後的兩圓C_1'、C_2'為同心圓。

(2) $\frac{R'}{r'}=\left\{1-\frac{2d^2}{(d^2+R^2-r^2)-\sqrt{(d^2+R^2-r^2)^2-(2dR)^2}}\right\}\frac{R}{r}$

(3) 若 $\frac{R'}{r'}=k$ ，則 $r=\frac{(1+k^2)R-\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$ ，$0<k<1$。

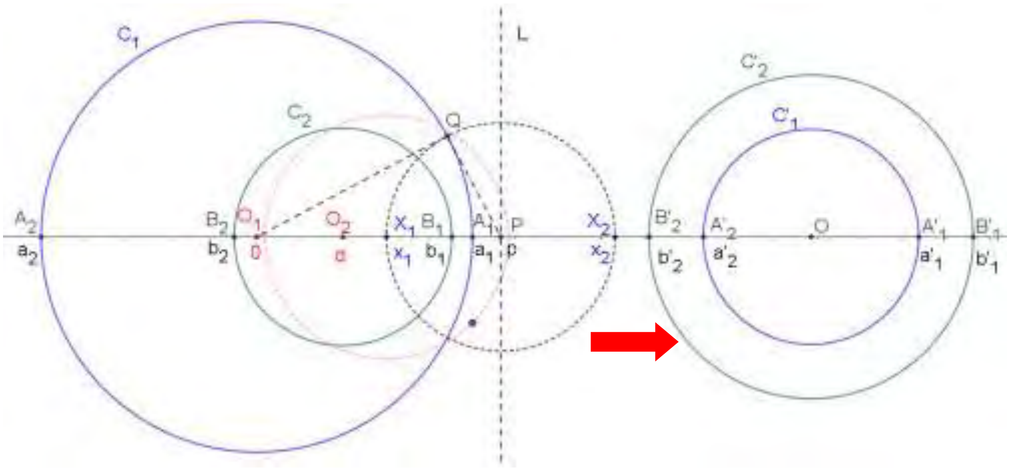


圖 2-2：兩圓C_1、C_2對圓X_1反演，再平移成兩圓C_1'、C_2'

<證明> 如上圖 2-2，設$O_1(0,0)$、$O_2(d,0)$及相關點座標位置。

設C_1：$x^2+y^2=R^2$ 、 C_2：$(x-d)^2+y^2=r^2$，

則根軸 $L=C_1-C_2$：$x=\frac{d^2+R^2-r^2}{2d}$，所以 $p=\frac{d^2+R^2-r^2}{2d}$。

$\overline{PQ}^2=\overline{O_1P}^2-\overline{O_1Q}^2=p^2-R^2$，所以 $\overline{PQ}=\sqrt{p^2-R^2}$

$x_1=\overline{O_1X_1}=\overline{O_1P}-\overline{PQ}=p-\sqrt{p^2-R^2}$ ， $x_2=\overline{O_1X_2}=\overline{O_1P}+\overline{PQ}=p+\sqrt{p^2-R^2}$，

兩圓C_1、C_2對單位圓X_1反演後的兩圓C'_1、C'_2，各點的反演點，根據定義推導如下：

$\overline{X_1A_1}\cdot\overline{X_1A_1'}=1^2\Rightarrow(a_1-x_1)\cdot(a_1'-x_1)=1\ \Rightarrow\ a_1'=x_1+\frac{1}{a_1-x_1}$ ， $(\ a_1=R\ \ )$

$\overline{X_1A_2}\cdot\overline{X_1A_2'}=1^2\Rightarrow(x_1-a_2)\cdot(x_1-a_2')=1\ \Rightarrow\ a_2'=x_1+\frac{1}{a_2-x_1}$ ， $(\ a_2=-R\ \ )$

$\overline{X_1B_1}\cdot\overline{X_1B_1'}=1^2\Rightarrow(b_1-x_1)\cdot(b_1'-x_1)=1\ \Rightarrow\ b_1'=x_1-\frac{1}{x_1-b_1}$ ， $(\ b_1=d+r\ )$

$\overline{X_1B_2}\cdot\overline{X_1B_2'}=1^2\Rightarrow(x_1-b_2)\cdot(x_1-b_2')=1\ \Rightarrow\ b_2'=x_1-\frac{1}{x_1-b_2}$ ， $(\ b_2=d-r\ )$

為簡化式子另設 $\triangle = d^2+R^2-r^2$、$\square = \sqrt{\triangle^2-(2dR)^2} \Rightarrow p=\frac{\triangle}{2d}$、 $x_1=\frac{\triangle-\square}{2d}$

(1) 欲證：$\frac{a_1'+a_2'}{2}=\frac{b_1'+b_2'}{2}$ ，圓C'_1、C'_2為同心圓。

因為 $x_1=\frac{\triangle-\square}{2d}$ 所以 $2dx_1=(\triangle-\square)$

$$\frac{a_1'+a_2'}{2}=x_1+\frac{x_1}{R^2-x_1^2} \qquad \frac{b_1'+b_2'}{2}=x_1+\frac{x_1-d}{r^2-(d-x_1)^2}$$

$$\frac{x_1}{R^2-x_1^2}=\frac{2d(2dx_1)}{4d^2R^2-(2dx_1)^2}=\frac{2d(\triangle-\square)}{(\triangle^2-\square^2)-(\triangle-\square)^2}=\frac{d}{\square}\dots\dots①$$

$$\frac{x_1-d}{r^2-(x_1-d)^2}=\frac{2d(2dx_1-2d^2)}{4d^2r^2-(2dx_1-2d^2)^2}=\frac{2d(\triangle-\square-2d^2)}{(\triangle-\square-2d^2)(\triangle+\square-2d^2)-(\triangle-\square-2d^2)^2}$$

$$=\frac{2d(\triangle-\square-2d^2)}{(\triangle-\square-2d^2)(2\square)}=\frac{d}{\square}\dots\dots②$$ ，由①②代回原式則相等，得證。

其中 $4d^2r^2=4d^2(d^2+R^2-\triangle)=4d^4+4d^2R^2-4d^2\triangle=4d^4+\triangle^2-\square^2-4d^2\triangle$

$$=(\triangle-\square-2d^2)(\triangle+\square-2d^2)$$

(2) $R'=\overline{OA_1'}=\frac{a_1'-a_2'}{2}=\frac{R}{R^2-x_1^2}$ ，$r'=\overline{OB_1'}=\frac{b_1'-b_2'}{2}=\frac{r}{r^2-(d-x_1)^2} \Rightarrow \frac{R'}{r'}=\left(\frac{r^2-(d-x_1)^2}{R^2-x_1^2}\right)\frac{R}{r}$

其中 $\frac{r^2-(d-x_1)^2}{R^2-x_1^2}=\frac{x_1^2-R^2-2dx_1+d^2+R^2-r^2}{x_1^2-R^2}=1-\frac{2dx_1-\triangle}{x_1^2-R^2}$

$$=1-\frac{2d\left(\frac{\triangle-\square}{2d}\right)-\triangle}{\left(\frac{\triangle-\square}{2d}\right)^2-R^2}=1+\frac{4d^2\square}{\triangle^2+\square^2-2\triangle\square-4d^2R^2}$$

$$=1+\frac{4d^2\square}{2\triangle^2-2\triangle\square-8d^2R^2}=1+\frac{4d^2\square}{2(\triangle^2-4d^2R^2)-2\triangle\square}$$

$$=1+\frac{4d^2\square}{2\square^2-2\triangle\square}=1-\frac{2d^2}{\triangle-\square}$$ 代回原式，即可得證。

(3) 設 $\frac{R'}{r'}=k$ ，因為兩內離圓反演後的兩圓C_1'、C_2'，半徑$R'<r'$，所以 $0<k<1$。

$$\Rightarrow k=\left\{1-\frac{2d^2}{(d^2+R^2-r^2)-\sqrt{(d^2+R^2-r^2)^2-(2dR)^2}}\right\}\frac{R}{r}$$

$$\Rightarrow kr^2-(1+k^2)Rr+(R^2-d^2)k=0$$

$\Rightarrow r=\frac{(1+k^2)R\pm\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$ (因為 $r<R$，所以取負號)

換句話說，若反演後同心圓半徑比$\frac{R'}{r'}=k$時，則反演前雙心多圓的R、r、d的關係式為：

$$r=\frac{(1+k^2)R-\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$$ ∎

若 $k=\frac{1}{3}$，即正雙心六圓，則其反演前的「兩個內離圓的雙心六圓」的構成條件為

$r=\frac{5R-\sqrt{16R^2+9d^2}}{3}$ 。接下來，我們就藉由此關係式構圖，探討一般雙心六圓的性質。

(二) 雙心六圓的性質探討

給定兩個內離圓 O與O'(半徑 R、r)且$d=\overline{OO'}$，環切圓O_1~O_n(半徑為r_1~r_n)，內切點A_1~A_n、外切點B_1~B_n，鄰切點C_1~C_n。以下以雙心六圓為例，但性質對雙心n圓均成立：

【定理 2-2】環切圓圓心共橢圓、內外切點連線共點

(1) 環切圓圓心O_i的軌跡為橢圓，$i=1$~n，也就是所有環切圓的圓心共橢圓，如圖 2-3。

(2) 同一個環切圓的內切點與外切點連線$\overleftrightarrow{A_iB_i}$共交一點，$i=1$~$n$，以$D$表之，如圖 2-4。

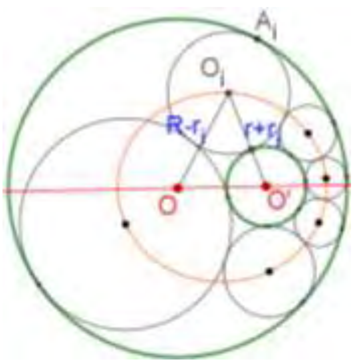


圖 2-3 環切圓圓心共橢圓

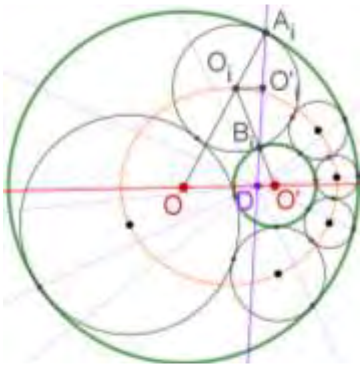


圖 2-4 內外切點連線共點 D

<證明>

(1) 如圖 2-3，$\overline{O_iO}=R-r_i$，$\overline{O_iO'}=r+r_i$ $\Rightarrow$ $\overline{O_iO}+\overline{O_iO'}=R+r$ 為定值，$i=1$~6。

∴ 環切圓圓心O_i必在一個橢圓上(圓心 O與O'為焦點)。

(2) 如圖 2-4，設$\overleftrightarrow{A_iB_i}$交$\overline{OO'}$於 D，作$\overline{O_iO_i'}//\overline{OO'}$，交$\overleftrightarrow{A_iB_i}$於$O_i'$

$\overline{A_iO_i}:\overline{A_iO}=\overline{O_iO_i'}:\overline{DO}=r_i:R$ ， $\overline{O_iB_i}:\overline{B_iO'}=\overline{O_iO_i'}:\overline{DO'}=r_i:r$

$\overline{O_iO_i'}:\overline{DO}:\overline{DO'}=r_i:R:r$ 又$\overline{OO'}$及 R、r為定值，$\overline{DO}:\overline{DO'}=R:r$，

也就是對所有的$\overleftrightarrow{A_iB_i}$必交於$D$點，$i=1$~$n$。 ∎

【定理 2-3】環切圓的鄰切點共圓、內外切點共圓

(1)鄰切點$C_1 \sim C_n$共圓，且其圓心O_c在連心線$\overleftrightarrow{OO'}$上，且$O_c = D$，如圖 2-5。

(2)任意兩個環切圓的內、外切點A_i、B_i、A_j、B_j共圓，$i, j = 1 \sim n$，且$i \neq$ j，如圖 2-6。

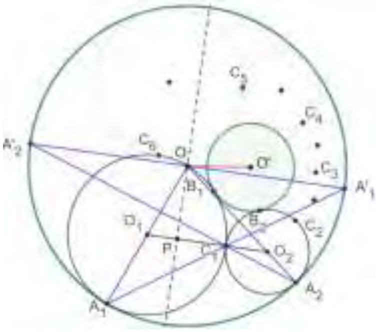


圖 2-5(a)

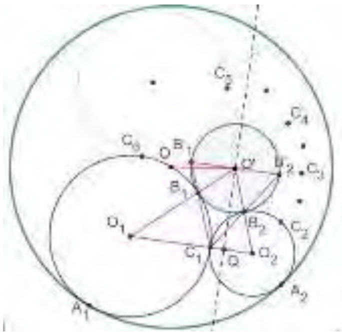


圖 2-5(b)

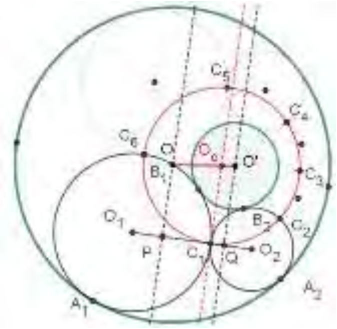


圖 2-5(c)

<證明>

(1) 內切情形：如圖 2-5(a)，$\overline{O_1C_1} = \overline{O_1A_1} = r_1$，$\overline{OA_1} = \overline{OA'_1} = R$，$\angle O_1A_1C_1 = \angle OA_1A'_1$

$\Rightarrow \Delta OA_1A'_1 \sim \Delta O_1A_1C_1$，$\overline{O_1C_1} // \overline{OA'_1}$， 同理$\overline{O_2C_1} // \overline{OA'_2}$，所以$\overline{A'_2A'_1} // \overline{O_1O_2}$

作$\overleftrightarrow{OP} \perp \overline{O_1O_2}$交$\overline{O_1O_2}$於$P$，設$\overline{C_1P} = x$ ⇒根據畢氏定理，$\overline{OO_1}^2$-$\overline{O_1P}^2 = \overline{OP}^2 = \overline{OO_2}^2$-$\overline{O_2P}^2$

$(R - r_1)^2$-$(r_1 - x)^2 = (R - r_2)^2$-$(r_2 + x)^2 \Rightarrow x = \frac{(r_1 - r_2)R}{(r_1 + r_2)}$。

<u>外切情形</u>：如圖 2-5(b)，設$\overline{C_1Q} = y$，仿照內切情形 可推得$y = \frac{(r_1 - r_2)r}{(r_1 + r_2)}$。

如圖 2-5(c)，作$\overleftrightarrow{C_1O_c} \perp \overline{O_1O_2}$交$\overline{OO'}$於$O_c$，因為$\overleftrightarrow{OP} // \overleftrightarrow{O'Q} // \overleftrightarrow{O_cC_1}$，所以

$\overline{OO_c} : \overline{O_cO'} = \overline{C_1P} : \overline{C_1Q} = x : y = \frac{(r_1 - r_2)R}{(r_1 + r_2)} : \frac{(r_1 - r_2)r}{(r_1 + r_2)} = R : r = \overline{OD} : \overline{O'D}$；因為$\overline{OO'}$及$R$、$r$為定值，且$O_c = D$，故任意兩個相鄰環切圓的根軸必通過$O_c$點，又因 O_c點為所有環切圓的根心，故到鄰切點$\overline{O_cC_i} = \overline{DC_i}$等長，故鄰切點共圓(圓心為$O_c = D$，半徑為$\overline{DC_i}$)。

(3) 由上述知鄰切點共圓半徑為$\overline{DC_i}$；根據圓冪定理$\overline{DA_i} \times \overline{DB_i} = \overline{DC_i}^2 = \overline{DA_j} \times \overline{DB_j}$

$\therefore A_i$、B_i、A_j、B_j共圓。 ∎

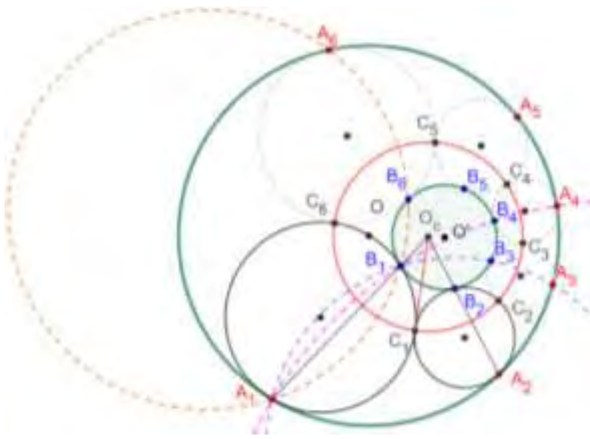


圖 2-6

設一個雙心六圓的兩個內離圓 O與O'半徑分別為 R、r，且$d=\overline{OO'}$，環切圓$O_1 \sim O_6$，內切點$A_1 \sim A_6$，外切點$B_1 \sim B_6$，鄰切點$C_1 \sim C_6$，則有以下性質：

【定理 2-4】雙心六圓的 *Stanley* 點

(1) 對應的內切點連線$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$、$\overleftrightarrow{A_3A_6}$三線共 A 點。如圖 2-7(a)

(2) 對應的外切點連線$\overleftrightarrow{B_1B_4}$、$\overleftrightarrow{B_2B_5}$、$\overleftrightarrow{B_3B_6}$三線共 B 點。如圖 2-7(b)

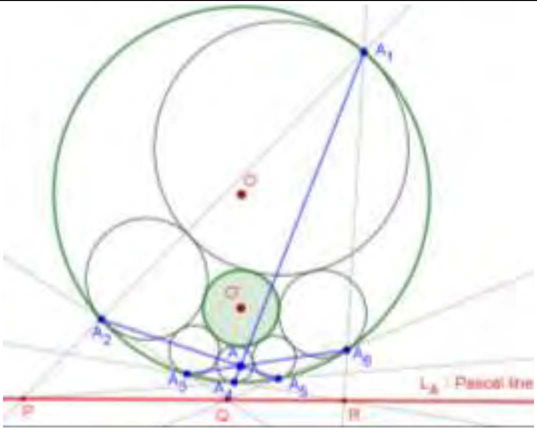


圖 2-7(a)

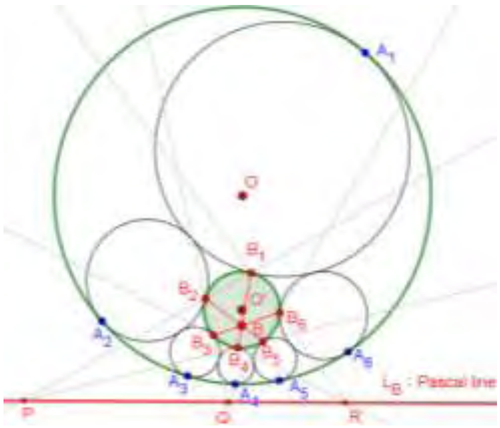


圖 2-7(b)

<證明>

根據【定理 1-1】七圓定理的構成條件，可知$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$、$\overleftrightarrow{A_3A_6}$三線必共交一點，此點以 A 點表之；同理$\overleftrightarrow{B_1B_4}$、$\overleftrightarrow{B_2B_5}$、$\overleftrightarrow{B_3B_6}$三線必共交一點，此點以 B 點表之。 ■

上述我們發現 A、B 雖非同圓的 *Brianchon* 點，但所屬 *Pascal*線L_A和L_B卻同一條，為什麼？如圖 2-8，大圓O分別對圓O_1、O_2、O_3、O_4做出兩圓根軸L_1、L_2、L_3、L_4，且$L_1 \cap L_2 = T$、$L_1 \cap L_3 = S$、$L_1 \cap L_4 = P$；當環切圓轉動時，發現 P、S、T 三點的軌跡分別呈現直線、橢圓與雙曲線。特別是P點的直線軌跡，仔細探究，得到下面結果：

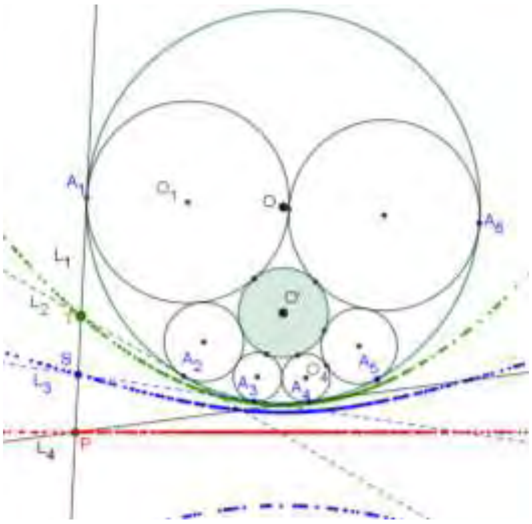


圖 2-8 根軸交點的軌跡

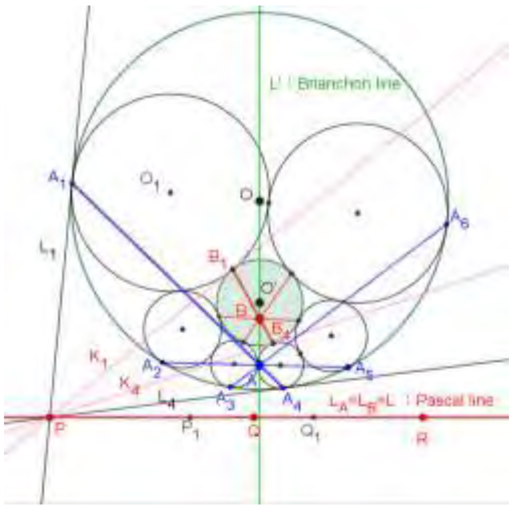


圖 2-9 四圓根心的軌跡為定線

【定理 2-5】雙心六圓 *Stanley* 點A、B與共$Pascal$線為定點、定線

(1) 若對應的兩個環切圓(如圓O_1、O_4)分別與兩內離圓 O與O'各作根軸，則此四根軸共交P點，為此**四圓的根心**。當環切圓轉動時，根心P的軌跡為一直線 L，如圖 2-9。

(2) 若L_A、L_B分別為圓 O內接六邊形A_1~A_6與圓O'內接六邊形B_1~B_6的 *Pascal* 線，則$L_A = L_B = L$；且 A、B為定點，均在$\overleftrightarrow{OO'}$上(即 *Brianchon* 線)，且與 *Pascal* 線垂直。

<證明>如圖 2-9

1° 設L_1、L_4分別為圓O與圓O_1、圓O_4的根軸；設K_1、K_4分別為圓O'與圓O_1、圓O_4的根軸；

2° 由【定理 2-3】任兩個環切圓的內外切點，四點共圓，所以A_1、A_4、B_1、B_4共圓，所以四根軸L_1、L_4、K_1、K_4會共交一點 P，為此四圓根心，即為此共圓圓心。

3° 同理對圓O與圓O'分別對圓O_2、圓O_5得根心Q；再分別對圓O_3、圓O_6得根心R。

4° P、Q、R分別為$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$、$\overleftrightarrow{A_3A_6}$關於圓$O$的極點，同時也分別為$\overleftrightarrow{B_1B_4}$、$\overleftrightarrow{B_2B_5}$、$\overleftrightarrow{B_3B_6}$關於圓$O'$的極點。根據【定理 2-4】$\overleftrightarrow{A_1A_4} \cap \overleftrightarrow{A_2A_5} \cap \overleftrightarrow{A_3A_6} = A$，$\overleftrightarrow{B_1B_4} \cap \overleftrightarrow{B_2B_5} \cap \overleftrightarrow{B_3B_6} = B$，所以由【性質 2-2】，$P$、$Q$、$R$三點必共線，如$L$；換句話說，當環切圓轉動時，根心的軌跡必為一直線$L$。

5° 若L_A、L_B分別為圓O內接六邊形A_1~A_6與圓O'內接六邊形B_1~B_6的 *Pascal*線，則由上述可知 $L_A = L_B = L$。

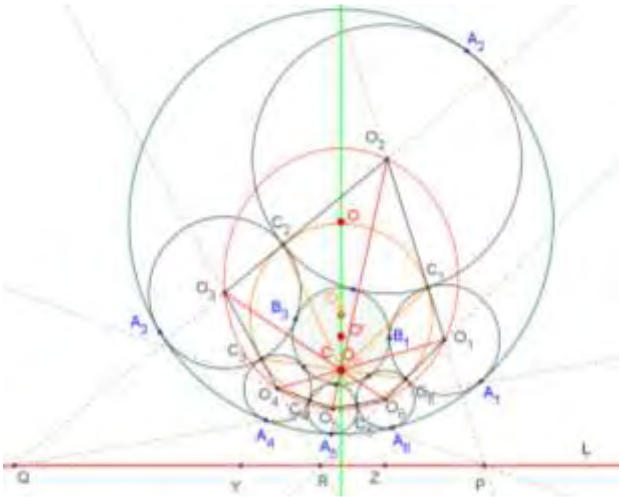
6° 因為關於圓O與圓O'，A、B分別與L互為極點、極線，故A、B均在$\overleftrightarrow{OO'}$上(即 *Brianchon* 線)，且與 *Pascal*線L垂直。又因為L為定線(參考文獻[1])，故A、B均為定點。 ■

【定理 2-6】雙心六圓對應鄰切點、環切圓圓心分別連線均分別共點且共定線

(1) 對應的鄰切點連線$\overleftrightarrow{C_1C_4}$、$\overleftrightarrow{C_2C_5}$、$\overleftrightarrow{C_3C_6}$三線共點，如$C$點。如圖 2-10

(2) 對應的環切圓圓心連線$\overleftrightarrow{O_1O_4}$、$\overleftrightarrow{O_2O_5}$、$\overleftrightarrow{O_3O_6}$三線共點，如$O_o$點，且$C = O_o$為共定點。

(3) 六邊形C_1~C_6三組對邊延長線交點共線L_c；六邊形O_1~O_6三組對邊延長線交點共線L_o。且$L_c = L_o$為共同定線(*Pascal* 線)。



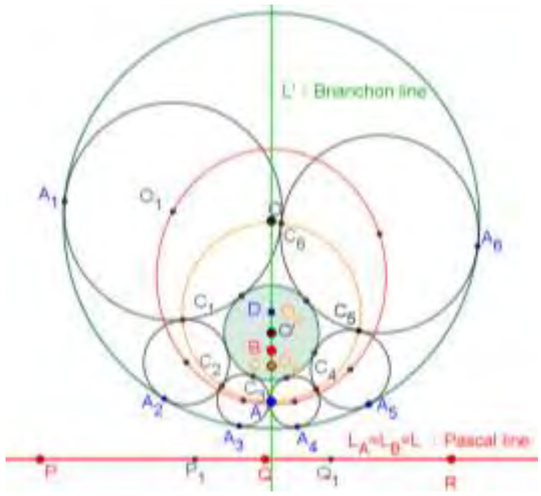


圖 2-10 環切圓轉動時C為定點，L 為定線　　　圖 2-11 共點、共線、共圓與共錐

<證明>

1° 由【定理 2-2】及【定理 2-3】，六邊形$O_1 \sim O_6$同時內接於橢圓(O和O'為兩焦點)，外切於圓O_c，所以根據 *Brianchon* 定理及 *Pascal* 定理，其三組對角線$\overleftrightarrow{O_1O_4}$、$\overleftrightarrow{O_2O_5}$、$\overleftrightarrow{O_3O_6}$會共交一點$O_o$(即 *Brianchon* 點)，其三組對邊延長線的交點 P、Q、R 會共線L_o(即 *Pascal* 線)，且「關於圓O_c，O_o與L_o互為極點、極線」。

2° 由【性質 2-1】知$\overleftrightarrow{C_1C_4}$、$\overleftrightarrow{C_2C_5}$、$\overleftrightarrow{C_3C_6}$分別為 P、Q、R關於圓O_c的極線；因 P、Q、R共線L_o，由【性質 2-2】知$\overleftrightarrow{C_1C_4}$、$\overleftrightarrow{C_2C_5}$、$\overleftrightarrow{C_3C_6}$必共交一點 C(即 *Brianchon* 點)，且「關於圓O_c，C與L_o互為極點、極線」。

3° 由上述可知 $C=O_o$。進一步推論，圓O_c內接六邊形$C_1 \sim C_6$的三組對邊延長線交點共線L_c，因為 $C= O_o$。所以$L_c = L_o$，最後以 L 表之。

4° 由上述可知，*Brianchon* 點、*Pascal* 線同時對於圓O_c和橢圓皆為極點極線關係，故知 *Brianchon* 點為圓O_c和橢圓的極限點（*Limit Point*）(參考文獻[1])。極限點是固定的，所以當環切圓$O_1 \sim O_6$轉動，其 *Brianchon* 點及 *Pascal* 線皆為固定不動。 █

■綜合上述【定理 2-2】~【定理 2-6】，當六個環切圓轉動時，則共點 A、B、$C(=O_o)$及 $D(=O_c)$四點均為定點，且均在兩個內離圓的連心線$\overleftrightarrow{OO'}$上(即 *Brianchon* 線)，並與其 *Pascal* 線垂直，如圖 2-11。

三、以雙心六圓的結果探討雙心多圓的性質

(一) 偶數個環切圓

「**雙心六邊形的 *Brianchon* 點及 *Pascal* 線性質，推廣至雙心 $2n$ 邊形也成立**」(參考文獻[1])，那麼在雙心 $2n$ 圓是否也會有雙心六圓一樣的結果呢？以雙心八圓為例，如下：

設一個雙心八圓的兩個內離圓 O 與 O' 半徑分別為 R、r 且 $d=\overline{OO'}$，環切圓 $O_1\sim O_8$，內切點 $A_1\sim A_8$，外切點 $B_1\sim B_8$，鄰切點 $C_1\sim C_8$，則有以下性質：

【定理 3-1】雙心八圓的 *Stanley* 點 A、B 與共 *Pascal* 線為定點、共定線

(1) $\overleftrightarrow{A_1A_5}\cap\overleftrightarrow{A_2A_6}\cap\overleftrightarrow{A_3A_7}\cap\overleftrightarrow{A_4A_8}=A$、$\overleftrightarrow{B_1B_5}\cap\overleftrightarrow{B_2B_6}\cap\overleftrightarrow{B_3B_7}\cap\overleftrightarrow{B_4B_8}=B$，如圖 3-1。

(2) 如圖 3-2，若對應的兩個環切圓(如圓 O_1、O_5)分別與兩內離圓 O 與 O' 各作根軸，則此四根軸共交一點 P_1，即為此**四圓的根心**。當環切圓轉動時，根心 P_1 的軌跡為一直線 L；

(3) 若 L_A、L_B 分別為圓 O 內接八邊形 $A_1\sim A_8$ 與 圓 O' 內接八邊形 $B_1\sim B_8$ 的 *Pascal* 線，則 $L_A=L_B=L$；又 A、B 為定點，均在 $\overleftrightarrow{OO'}$ 上(即 *Brianchon* 線)，且與 *Pascal* 線垂直。

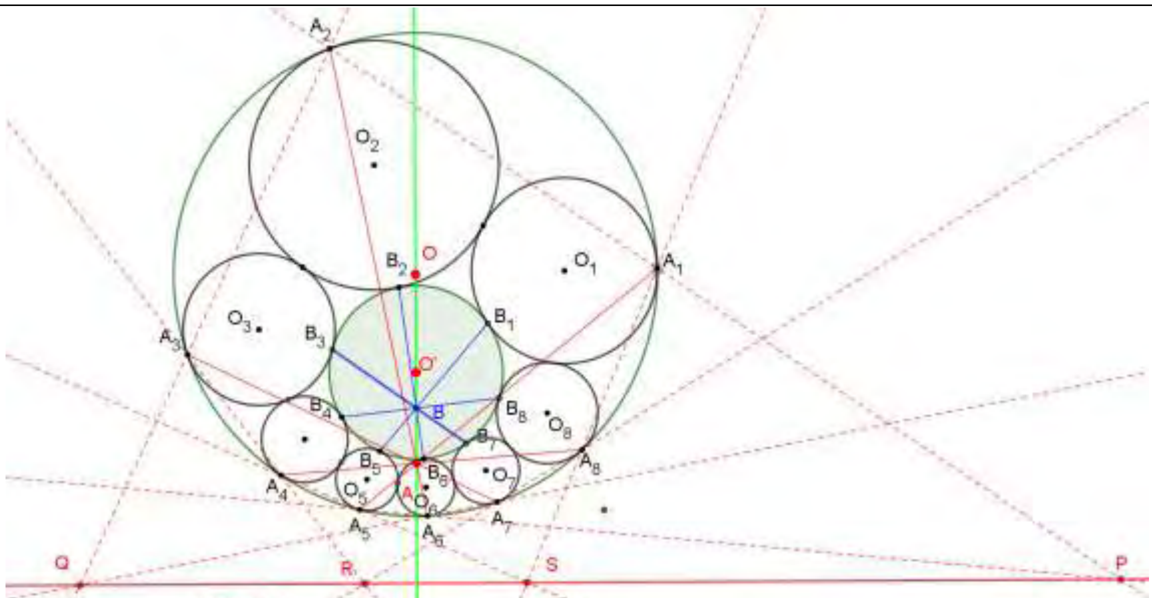


圖 3-1：雙心八圓的 *Stanley* 點 A、B 亦均為該圓時的 *Brianchon* 點

<證明>

(1) 因為「雙心六邊形的 *Brianchon* 點及 *Pascal* 線性質，推廣至雙心 $2n$ 邊形也成立」(參考文獻[1])，所以圓 O 的內接八邊形 $A_1\sim A_8$ 對邊延長線的交點共線 L_A，對角線 $\overleftrightarrow{A_1A_5}$、$\overleftrightarrow{A_2A_6}$、$\overleftrightarrow{A_3A_7}$、$\overleftrightarrow{A_4A_8}$ 共交 A 點，即是 *Stanley* 點，也是 *Brianchon* 點。同理，圓 O' 的內接八邊形

$B_1 \sim B_8$，其四組對邊延長線的交點共線L_B(即 *Pascal* 線)，對角線$\overleftrightarrow{B_1B_5}$、$\overleftrightarrow{B_2B_6}$、$\overleftrightarrow{B_3B_7}$、$\overleftrightarrow{B_4B_8}$共交 B點，即是 *Brianchon* 點，也是 *Stanley* 點。

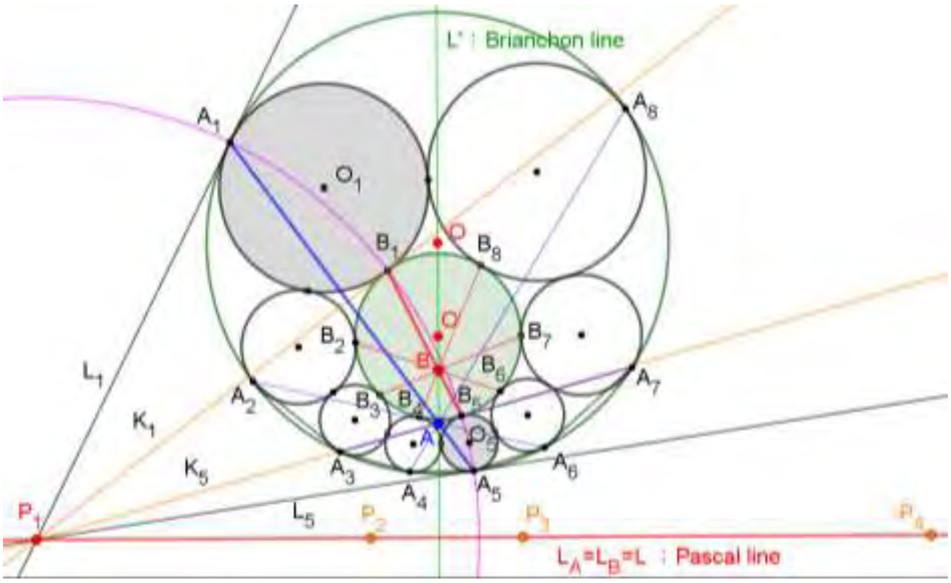


圖 3-2：四圓 O、O'、O_1、O_5的根心P_1軌跡為 *Pascal* 線

(2)(3) 如圖 3-2

1° 設L_1、L_5分別為圓O與圓O_1、圓O_5的根軸；設K_1、K_5分別為圓O'與圓O_1、圓O_5的根軸；

2° 由【定理 2-3】任兩環切圓O_1、O_5的內外切點A_1、A_5、B_1、B_5四點共圓，故L_1、L_5、K_1、K_5四根軸會共交一點P_1，為此四圓的根心，即為此共圓圓心。

3° 同理，圓O與圓O'分別對另三組對應的兩個環切圓可得根心P_2、P_3、P_4。

4° P_1、P_2、P_3、P_4分別為$\overleftrightarrow{A_1A_5}$、$\overleftrightarrow{A_2A_6}$、$\overleftrightarrow{A_3A_7}$、$\overleftrightarrow{A_4A_8}$關於圓$O$的極點，同時也分別為$\overleftrightarrow{B_1B_5}$、$\overleftrightarrow{B_2B_6}$、$\overleftrightarrow{B_3B_7}$、$\overleftrightarrow{B_4B_8}$關於圓$O'$的極點。由(1)$\overleftrightarrow{A_1A_5} \cap \overleftrightarrow{A_2A_6} \cap \overleftrightarrow{A_3A_7} \cap \overleftrightarrow{A_4A_8} = A$，$\overleftrightarrow{B_1B_5} \cap \overleftrightarrow{B_2B_6} \cap \overleftrightarrow{B_3B_7} \cap \overleftrightarrow{B_4B_8} = B$，所以由【性質 2-2】，$P_1$、$P_2$、$P_3$、$P_4$四點必共線如$L$；換句話說，當環切圓轉動時，根心軌跡必為一直線。

5° 若L_A、L_B分別為圓 O內接八邊形$A_1 \sim A_8$與圓O'內接八邊形$B_1 \sim B_8$的 *Pascal* 線，則由上述可知 $L_A = L_B = L$。

6° 因為關於圓 O與圓O'，A、B分別與 L 互為極點、極線，故A、B均在$\overleftrightarrow{OO'}$上(即 *Brianchon* 線)，且與 *Pascal* 線L垂直。又因為L為定線，故A、B均為定點。 █

【定理 3-2】對應鄰切點、環切圓圓心連線均共定點、共定線

(1) $\overleftrightarrow{C_1C_5} \cap \overleftrightarrow{C_2C_6} \cap \overleftrightarrow{C_3C_7} \cap \overleftrightarrow{C_4C_8} = C$、$\overleftrightarrow{O_1O_5} \cap \overleftrightarrow{O_2O_6} \cap \overleftrightarrow{O_3O_7} \cap \overleftrightarrow{O_4O_8} = O_o$，且$O_o = C$共定點

(2) 八邊形$C_1 \sim C_8$四組對邊延長線交點共線L_c；八邊形$O_1 \sim O_8$四組對邊延長線交點共線L_o，且$L_c = L_o$為共同定線(*Pascal* 線)。

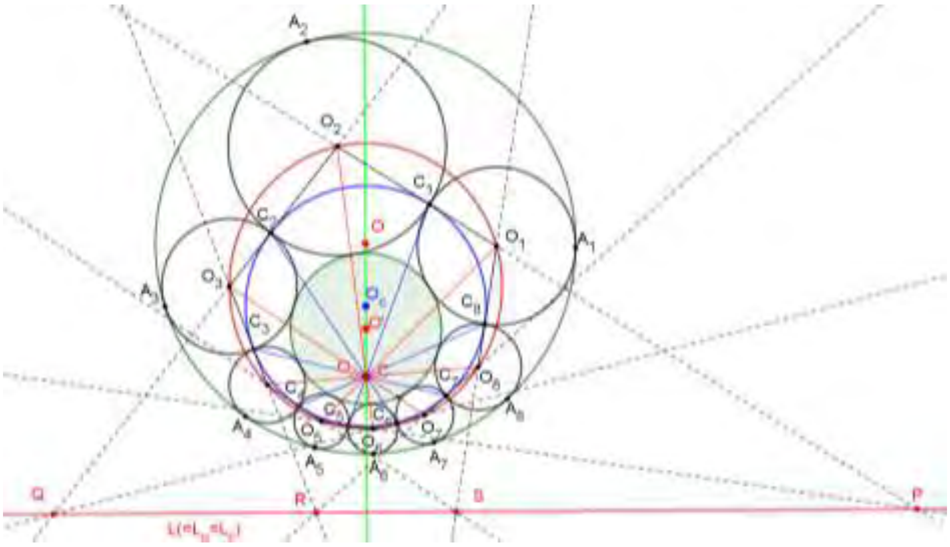


圖 3-3

<證明>如圖 3-3，仿照【定理 2-6】，證明省略。 ■

藉由「**雙心六邊形的 *Brianchon* 點及 *Pascal* 線性質，推廣至雙心 2*n* 邊形也成立**」，將雙心六圓的性質推廣至雙心八圓，同樣也可以推廣至雙心 2*n* 圓，因篇幅有限，摘述如下：

設一個雙心 2*n* 圓的兩個內離圓 O與O'半徑分別為 R、r 且圓心距為 d，環切圓$O_1 \sim O_{2n}$，內切點$A_1 \sim A_{2n}$，外切點$B_1 \sim B_{2n}$，鄰切點$C_1 \sim C_{2n}$，則有以下性質：$k = 1 \sim n$

(1) $\overleftrightarrow{A_kA_{n+k}}$、$\overleftrightarrow{B_kB_{n+k}}$、$\overleftrightarrow{C_kC_{n+k}}$、$\overleftrightarrow{O_kO_{n+k}}$均各$n$條直線分別共交 A、B、C、$O_o(= C)$點；

(2) 環切圓的內外切點連線$\overleftrightarrow{A_kB_k}$共交 D點，$k = 1 \sim 2n$。

(3) $A_1 \sim A_{2n}$，$B_1 \sim B_{2n}$，$C_1 \sim C_{2n}$、$O_1 \sim O_{2n}$等四個圓(橢圓)內接 2*n* 邊形共同一條 *Pascal* 線。

(4) A、B、C、D四點為定點且均在$\overleftrightarrow{OO'}$上，當環切圓轉動時仍為定線並垂直 *Pascal* 線。

(二) 奇數個環切圓

不同於偶數個，奇數個環切圓須打破「同類型點對應點連線」以雙心五圓為例，如下：設一個雙心五圓的兩個內離圓 O與O'半徑分別為 R、r 且$d = \overline{OO'}$，環切圓$O_1 \sim O_5$，內切點$A_1 \sim A_5$，外切點$B_1 \sim B_5$，鄰切點$C_1 \sim C_5$，則有以下性質：

【定理 3-3】雙心五圓內(外)切點與鄰切點連線共定點、共定線

(1) $\overleftrightarrow{A_1C_3} \cap \overleftrightarrow{A_2C_4} \cap \overleftrightarrow{A_3C_5} \cap \overleftrightarrow{A_4C_1} \cap \overleftrightarrow{A_5C_2} = A_c$ 、$\overleftrightarrow{B_1C_3} \cap \overleftrightarrow{B_2C_4} \cap \overleftrightarrow{B_3C_5} \cap \overleftrightarrow{B_4C_1} \cap \overleftrightarrow{B_5C_2} = B_c$ 。

(2) 如圖 3-4(b)，若圓O_1分別對圓O與O'作根軸，對應的兩個環切圓O_3 、O_4 分別對圓O與O'作割線$\overleftrightarrow{A_3A_4}$、$\overleftrightarrow{B_3B_4}$則此四線會共交一點，如$P$。環切圓轉動時，$P$軌跡為一直線 L。

(3) 若L_A 、L_B分別為圓 O 內接五邊形$A_1 \sim A_5$與圓O'內接五邊形$B_1 \sim B_5$的 *Pascal* 線，則$L_A = L_B = L$； A_c、B_c為定點在$\overleftrightarrow{OO'}$上(即 *Brianchon* 線)，且與 *Pascal* 線垂直。

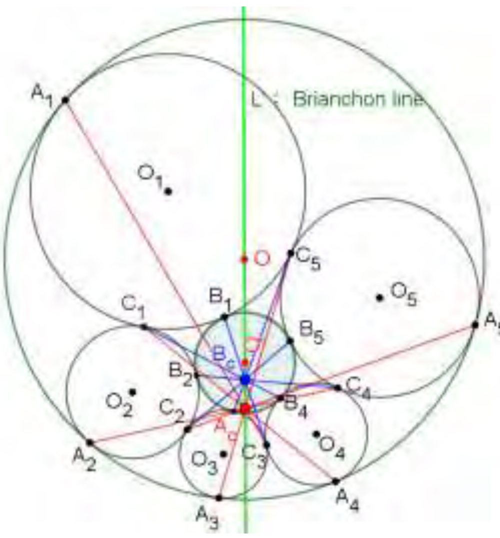


圖 3-4(a)

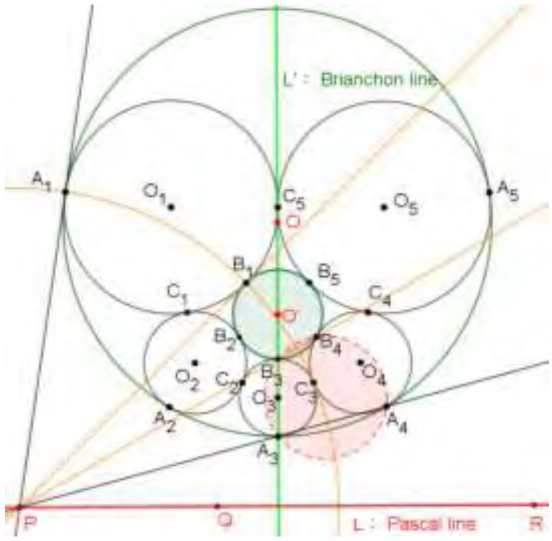


圖 3-4(b)

<證明>如圖 3-4，仿照【定理 2-4】及【定理 2-5】，證明省略。 ■

【定理 3-4】環切圓圓心與鄰切點連線共定點共定線（參考文獻[1]）

(1) $\overleftrightarrow{O_1C_3} \cap \overleftrightarrow{O_2C_4} \cap \overleftrightarrow{O_3C_5} \cap \overleftrightarrow{O_4C_1} \cap \overleftrightarrow{O_5C_2} = O_o$ 。如圖 3-5

(2) 五邊形$C_1 \sim C_5$與五邊形$O_1 \sim O_5$的「頂點的切線與對邊延長線」交點分別共線L_c、L_o，且$L_c = L_o$為共定線(*Pascal* 線)。

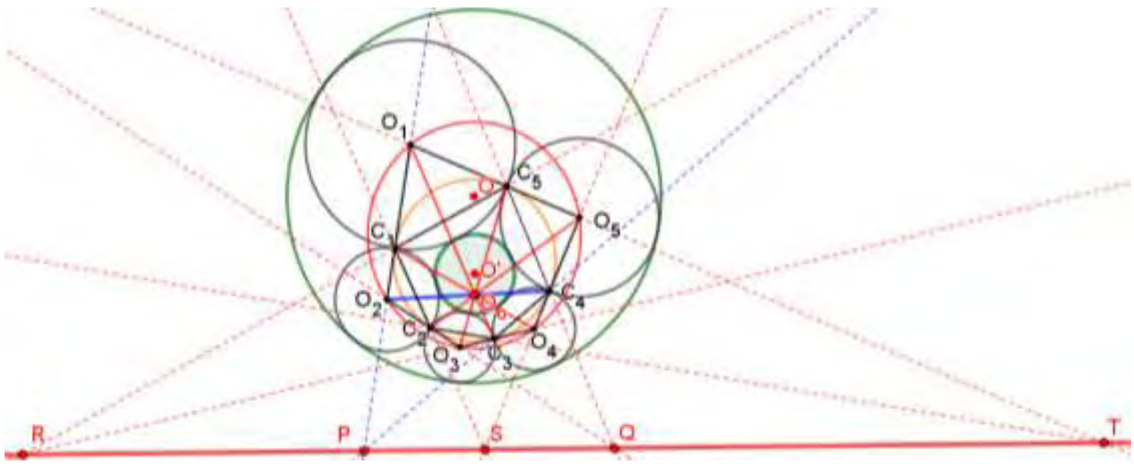


圖 3-5

<證明>

1° 由【定理 2-2】及【定理 2-3】，五邊形$O_1 \sim O_5$同時內接於橢圓(以O和O'為兩焦點)，外切於圓O_c，所以根據 *Brianchon* 定理及 *Pascal* 定理，其五組頂點與對邊切點連線$\overleftrightarrow{O_1C_3}$、$\overleftrightarrow{O_2C_4}$、$\overleftrightarrow{O_3C_5}$、$\overleftrightarrow{O_4C_1}$、$\overleftrightarrow{O_5C_2}$會共交$O_o$點(即 *Brianchon* 點)；其五組頂點切線與對邊延長線的交點 P、Q、R、S、T會共線L_o(即 *Pascal* 線)且「關於圓O_c，O_o與L_o互為極點極線」(參考文獻[1])。

2° 由【性質 2-1】知$\overleftrightarrow{O_1C_3}$、$\overleftrightarrow{O_2C_4}$、$\overleftrightarrow{O_3C_5}$、$\overleftrightarrow{O_4C_1}$、$\overleftrightarrow{O_5C_2}$分別為 P、Q、R、S、T關於圓O_c的極線；由上述知 P、Q、R、S、T 共線L_o，根據【性質 2-2】得$\overleftrightarrow{O_1C_3}$、$\overleftrightarrow{O_2C_4}$、$\overleftrightarrow{O_3C_5}$、$\overleftrightarrow{O_4C_1}$、$\overleftrightarrow{O_5C_2}$必共交 C 點，且「關於圓O_c，C與L_o互為極點極線」。

3° 由上述可知 $C=O_o$。又圓O_c的內接五邊形邊形$C_1 \sim C_5$的五組頂點切線與對邊延長線交點共線L_c，因為 $C= O_o$。所以$L_c = L_o$，最後以 L 表之。

4° 由上述可知，*Brianchon* 點、*Pascal* 線同時對於圓O_c和橢圓皆為極點極線關係，故知 *Brianchon* 點為圓O_c和橢圓的極限點。極限點是固定的，所以當環切圓$O_1 \sim O_5$轉動時，其 *Brianchon* 點為固定不動的點，*Pascal* 線為固定不動的線。 ■

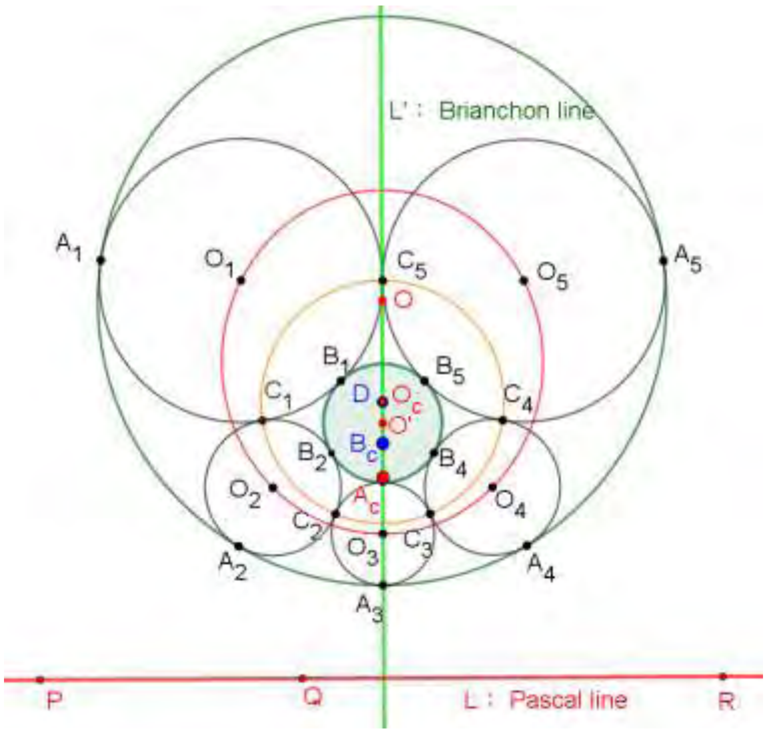


圖 3-6： A_c、B_c、D 三點共線且垂直 *Pascal* 線

如圖 3-6，至此，雙心五圓的相對應內切點、外切點對鄰切點連線所得三線共點分別為A_c、B_c及環切圓的內切點與外切點連線共 D 點，A_c、B_c、$C(=O_o)$、$D(=O_c)$均為定點均在$\overleftrightarrow{OO'}$上(即 *Brianchon* 線)，並與其 *Pascal* 線垂直。至於雙心三圓有一樣的結果，如圖 3-7。

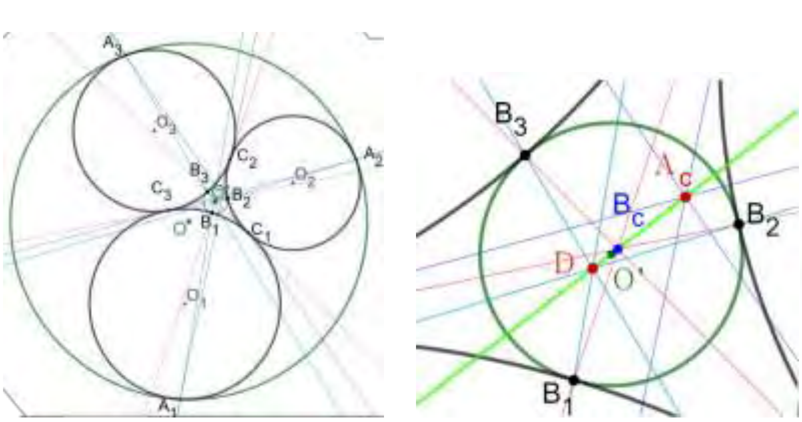


圖 3-7：雙心三圓共點共線

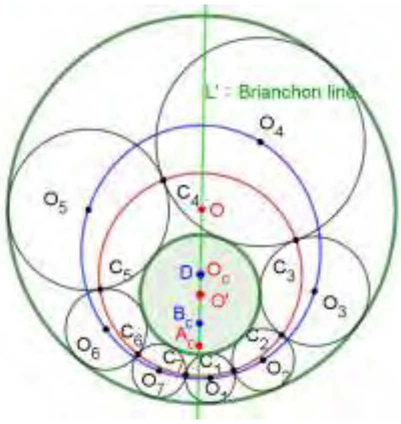


圖 3-8：雙心七圓

至於雙心七圓，仿照雙心五圓的作法可得相同結果，如圖 3-8；甚至可推廣至雙心 2*n*+1 圓 (*n* ≥1)，因篇幅有限，相關性質摘列如下：

設一個雙心 2*n*+1 圓的兩個內離圓 O與O'半徑分別為R、r且$d=\overline{OO'}$，環切圓O_1~O_{2n+1}，內切點A_1~A_{2n+1}，外切點B_1~B_{2n+1}，鄰切點C_1~C_{2n+1}，則有以下性質：$i, j= 1$~n

(1) 對應內切點與鄰切點連線$\overleftrightarrow{A_iC_{n+i}}$，$\overleftrightarrow{A_{n+1}C_{2n+1}}$，$\overleftrightarrow{A_{n+1+j}C_j}$等$2n+1$條線共$A_c$點。

(2) 對應外切點與鄰切點連線$\overleftrightarrow{B_iC_{n+i}}$，$\overleftrightarrow{B_{n+1}C_{2n+1}}$，$\overleftrightarrow{B_{n+1+j}C_j}$等$2n+1$條線共$B_c$點。

(3) 對應環切圓圓心與鄰切點連線$\overleftrightarrow{O_iC_{n+i}}$，$\overleftrightarrow{O_{n+1}C_{2n+1}}$，$\overleftrightarrow{O_{n+1+j}C_j}$等$2n+1$條線共$C(=O_o)$點。

(4) 環切圓的內外切點連線$\overleftrightarrow{A_kB_k}$ 共交 D 點，$k=1$~$2n+1$。

(5) A_1~A_{2n+1}，B_1~B_{2n+1}，C_1~C_{2n+1} 、O_1~O_{2n+1}等四組(橢)圓內接$2n+1$邊形同 *Pascal* 線。

A_c、B_c、$C(=O_o)$ 、D 為定點且均在$\overleftrightarrow{OO'}$上，當環切圓轉動時仍為定線並與 *Pascal* 線垂直。

四、雙心多圓外離情形

若給定的不是兩圓內離，而是外離，甚至是圓與直線的情形，那麼仍然會有同樣的性質嗎？

(一) 兩外離圓的情形

兩外離圓的雙心六圓如何作圖？我們仿照【定理 2-1】內離情形，透過極限點找出其構成條件，推導結果如下：

【定理 4-1】兩個外離圓的雙心多圓構成條件

兩個外離圓C_1、C_2，圓心O_1、O_2，半徑R、r，$d=\overline{O_1O_2}$，$d>R+r$；若對以其極限點為反演中心的圓作反演，得到兩圓C_1'、C_2'，半徑R'、r'，如圖 4-1，則有以下結果：

(1) 反演後的兩圓C_1'、C_2'為同心圓。

(2) $\frac{R'}{r'}=-\left\{1-\frac{2d^2}{(d^2+R^2-r^2)-\sqrt{(d^2+R^2-r^2)^2-(2dR)^2}}\right\}\frac{R}{r}$

(3) 若 $\frac{R'}{r'}=k$，則 $r=\frac{-(1+k^2)R+\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$，$k>1$。

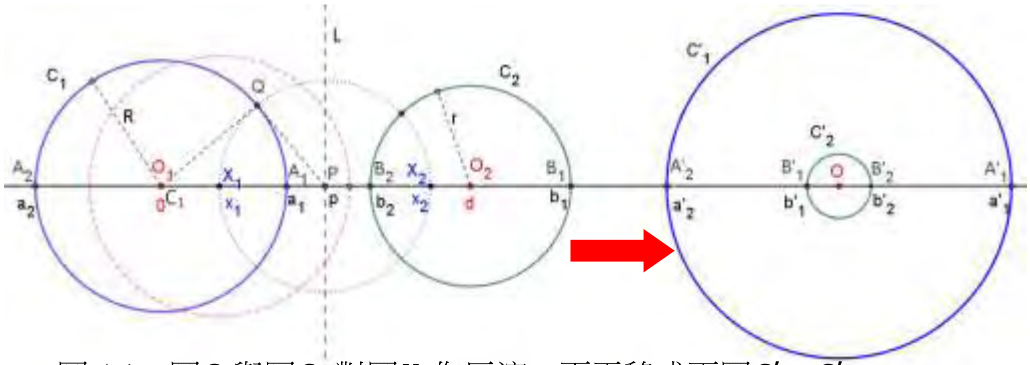


圖 4-1：圓C_1與圓C_2 對圓X_1作反演，再平移成兩圓C_1'、C_2'

若$k=3$(正雙心六圓)，則其反演前「兩外離圓的雙心六圓」的構成條件為 $\boldsymbol{r=\frac{-5R+\sqrt{16R^2+9d^2}}{3}}$；

接下來，我們就依此關係式構圖，探討「兩外離圓」情形的雙心六圓性質。

給定一個雙心n圓的兩外離圓 O與圓O'(半徑R、R')，n個環切圓O_i(半徑 r_i)，外切點A_i、B_i，鄰切點C_i，$i=1\sim n$。仍以雙心六圓為例，性質對雙心n圓均成立：

【定理 4-2】環切圓圓心共雙曲線、外切點連線共點、鄰切點共圓、外切點共圓

(1)環切圓圓心O_i的軌跡為雙曲線，也就是環切圓圓心共雙曲線。如圖 4-2

(2)環切圓O_i的外切點連線$\overleftrightarrow{A_iB_i}$必交$\overleftrightarrow{OO'}$於一定點$D$，且$\overline{OD}:\overline{O'D}=R:R'$，$i=1\sim n$。

(3)環切圓O_i的鄰切點C_i共圓，$i=1\sim n$。圓心O_c在$\overleftrightarrow{OO'}$上，且$O_c=D$。

(4)任意兩個環切圓的外切點A_i、B_i、A_j、B_j共圓，$i,j=1\sim n$，且$i\neq$ j。

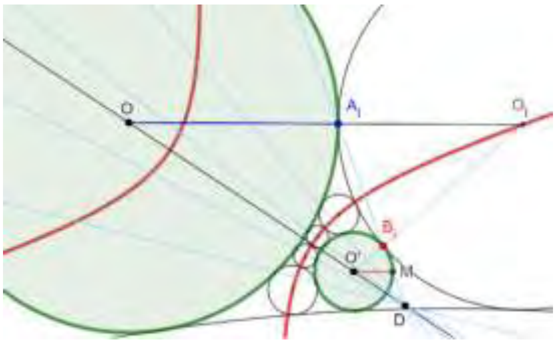


圖 4-2

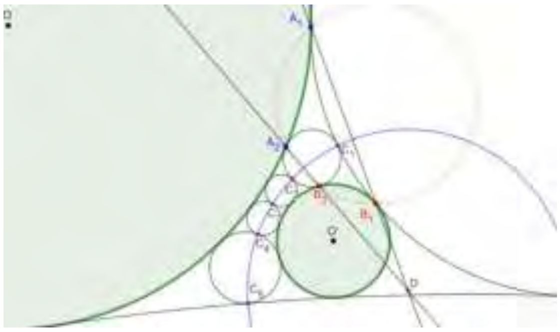


圖 4-3

<證明>

(1) (2)如圖 4-2，$\overline{O_iO} = R + r_i$，$\overline{O_iO'} = R' + r_i \Rightarrow \left|\overline{O_iO} - \overline{O_iO'}\right| = |R - R'|$為定值，$i = 1 \sim n$，

圓心O_i必在一個雙曲線上(圓心 O與O'為焦點)。另外，仿照【定理 2-2】可證得$\overleftrightarrow{A_iB_i}$必交$\overleftrightarrow{OO'}$於定點$D$，且$D$在連心線段外。

(3)(4)如圖 4-3，仿照【定理 2-3】利用相似及圓冪性質可分別證得，證明省略。 █

設雙心六圓的兩外離圓 O與O'，環切圓$O_1 \sim O_6$，外切點$A_1 \sim A_6$，$B_1 \sim B_6$，鄰切點$C_1 \sim C_6$，則有以下性質：

【定理 4-3】雙心六圓的 *Stanley* 點A、B與 *Pascal* 線為共定點、定線

(1) $\overleftrightarrow{A_1A_4} \cap \overleftrightarrow{A_2A_5} \cap \overleftrightarrow{A_3A_6} = A$、$\overleftrightarrow{B_1B_4} \cap \overleftrightarrow{B_2B_5} \cap \overleftrightarrow{B_3B_6} = B$。

(2) 如圖 4-4，若對應的兩個環切圓(如圓O_1、O_4)分別與兩外離圓 O與O'各作根軸，則此四根軸共交P點，即此**四圓的根心**。當環切圓轉動時，根心P的軌跡為一直線 L。

(3) 若L_A、L_B分別為圓 O內接六邊形$A_1 \sim A_6$與圓O'內接六邊形$B_1 \sim B_6$的 *Pascal* 線，

則$L_A = L_B = L$；且 A、B為定點均在$\overleftrightarrow{OO'}$上(即 *Brianchon* 線)，且與 *Pascal* 線垂直。

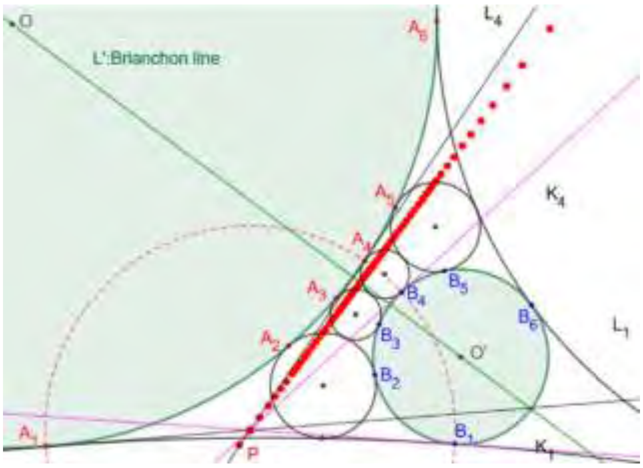


圖 4-4(a)

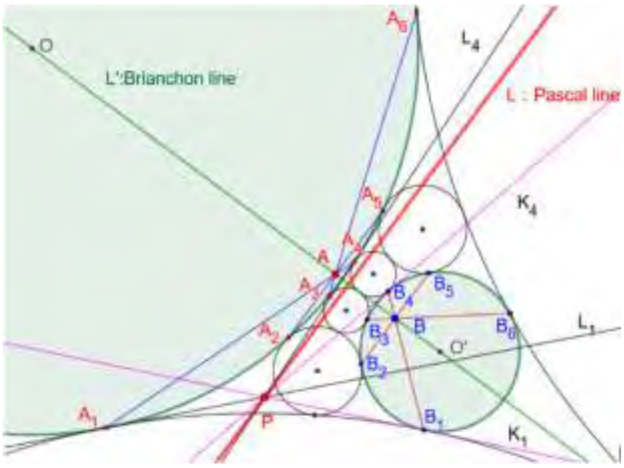


圖 4-4(b)

<證明>

(1)由【定理 1-1】可知兩外離圓上的外切點對應連線分別共交A和B點。

(2)如圖 4-4(a)

1° 設L_1、L_4分別為圓O與圓O_1、圓O_4的根軸；K_1、K_4分別為圓O'與圓O_1、圓O_4的根軸；

2° 根據【定理 4-2】A_1、A_4、B_1、B_4共圓，所以L_1、L_4、K_1、K_4四根軸會共交一點P，為此四圓的根心，即為此共圓的圓心。

3° 同理，圓O與圓O'分別對圓O_2、圓O_5得根心Q；分別對圓O_3、圓O_6得根心R。

4° 因P、Q、R分別為$\overleftrightarrow{A_1A_4}$、$\overleftrightarrow{A_2A_5}$、$\overleftrightarrow{A_3A_6}$關於圓$O$的極點，也分別為$\overleftrightarrow{B_1B_4}$、$\overleftrightarrow{B_2B_5}$、$\overleftrightarrow{B_3B_6}$關於圓$O'$的極點。由【定理 1-7】$\overleftrightarrow{A_1A_4}\cap\overleftrightarrow{A_2A_5}\cap\overleftrightarrow{A_3A_6}=A$，$\overleftrightarrow{B_1B_4}\cap\overleftrightarrow{B_2B_5}\cap\overleftrightarrow{B_3B_6}=B$，由【性質 2-2】，$P$、$Q$、$R$三點必共線 L；當環切圓轉動時，根心的軌跡必為一定直線。

(3)若L_A、L_B分別為圓O內接六邊形$A_1\sim A_6$與圓O'內接六邊形$B_1\sim B_6$的 *Pascal* 線，則由上述可知 $L_A=L_B=L$。因為關於圓O 與圓O'，A、B分別與L互為極點、極線，故A、B均在$\overleftrightarrow{OO'}$上(即 *Brianchon* 線)，且與 *Pascal* 線L垂直。又因為L為定線，故A、B均為定點。■

【定理 4-4】雙心六圓對應鄰切點連線、環切圓圓心連線均共點且共定線

(1) $\overleftrightarrow{C_1C_4}\cap\overleftrightarrow{C_2C_5}\cap\overleftrightarrow{C_3C_6}=C$，$\overleftrightarrow{O_1O_4}\cap\overleftrightarrow{O_2O_5}\cap\overleftrightarrow{O_3O_6}=O_o$ 且 $C=O_o$為共定點。

(2) 六邊形$C_1\sim C_6$三組對邊延長線交點共線L_c；六邊形$O_1\sim O_6$三組對邊延長線交點共線L_o。則 $L_c=L_o$為共定線(*Pascal* 線)。

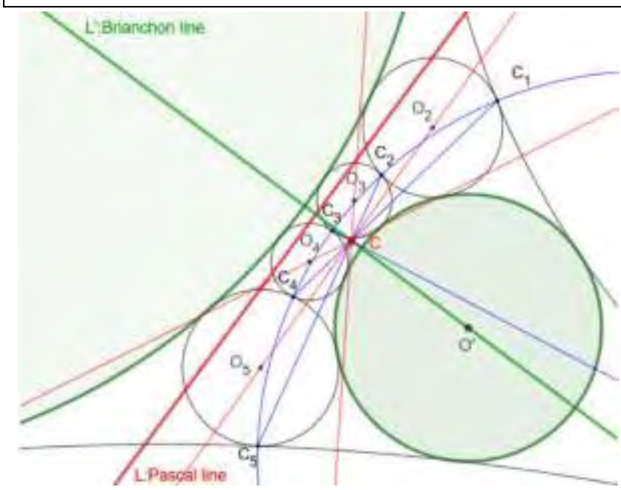


圖 4-5(a)

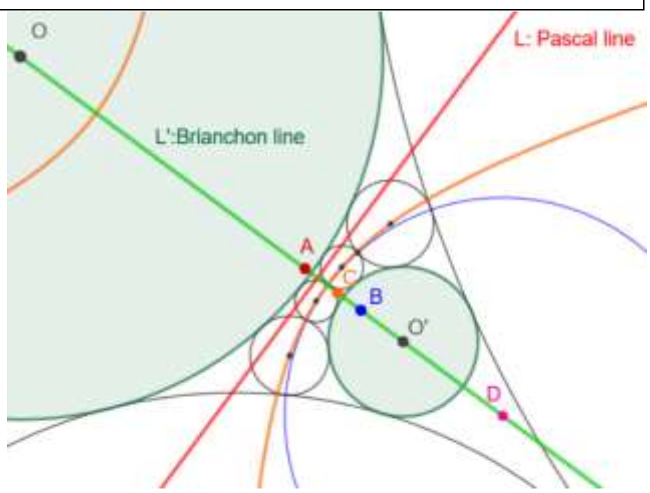


圖 4-5(b)

<證明>

1. 由【定理 4-2】，六邊形$O_1 \sim O_6$同時內接於雙曲線，外切於鄰切圓，根據 *Brianchon* 定理及 *Pascal* 定理，其三組對角線$\overleftrightarrow{O_1O_4}$、$\overleftrightarrow{O_2O_5}$、$\overleftrightarrow{O_3O_6}$會共交一點$O_o$(即 *Brianchon* 點)，其三組對邊延長線的交點 P、Q、R 會共L_o線(即 *Pascal* 線)，且「關於圓O_c，O_o與L_o互為的極點、極線」。
2. 由【性質 2-1】知$\overleftrightarrow{C_1C_4}$、$\overleftrightarrow{C_2C_5}$、$\overleftrightarrow{C_3C_6}$分別為 P、Q、R 關於鄰切圓的極線；由上述知 P、Q、R 共線L_o，根據【性質 2-2】得$\overleftrightarrow{C_1C_4}$、$\overleftrightarrow{C_2C_5}$、$\overleftrightarrow{C_3C_6}$必共交一點 C，且「關於圓O_c，C與L_o互為極點、極線」。由上述可知 $C = O_o$。
3. 又圓O_c內接六邊形$C_1 \sim C_6$的三組對邊延長線交點共線L_c，因 $C = O_o$，所以$L_c = L_o$，以 L 表之。*Brianchon* 點為圓O_c和雙曲線的極限點，極限點是固定的，故當環切圓$O_1 \sim O_6$轉動，*Brianchon* 點及 *Pascal* 線皆為固定不動。 ▮

■綜合上述，當六個環切圓轉動時，則共點 A、B、C $(=O_o)$及 D $(= O_c)$四點均為定點，且均在兩個外離圓的連心線$\overleftrightarrow{OO'}$上(即 *Brianchon* 線)，並與 *Pascal* 線垂直，如圖 4-5(b)。

若將圓想像成直線，如果不是兩圓而是一圓一線的雙心多圓，那麼性質是否仍然相同呢？

(二) 圓與直線的情形

圓與直線情形的雙心六圓如何尺規作圖？仿照前述透過極限點推導結果如下，因篇幅有限，證明省略，如圖 4-6：

【定理 4-5】圓與直線時的環切圓構成條件

給定直線C_1(想像成大圓半徑R，圓心O_1)及圓C_2(圓心O_2，半徑r)，圓心O_2到直線距離$d = \overline{O_1O_2}$，$d > r$；若以其極限點為中心的反演圓作反演得到圓C_1'、C_2'，半徑為 R'、r'，則：

(1) 反演後的兩圓C_1'、C_2'為同心圓。

(2) $\frac{R'}{r'} = \frac{d-\sqrt{d^2-r^2}}{r}$ ；若 $\frac{R'}{r'} = k$ ，則 $r = \frac{2dk}{k^2+1}$ ，$k > 1$

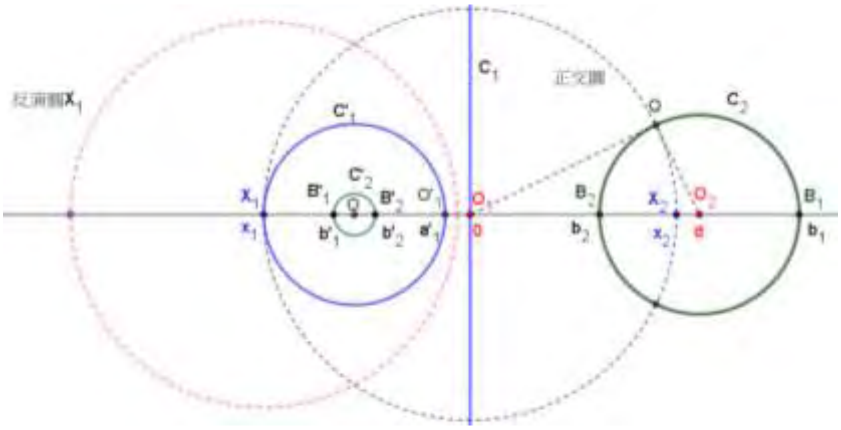


圖 4-6 直線C_1與圓C_2 對圓X_1作反演的兩圓C_1'、C_2'

若 $k = 3$ (即正雙心六圓)，則其反演前「圓與直線的雙心六圓」的構成條件為 $r = \frac{3d}{5}$ 。接下來，我們就依此關係式構圖，探討「圓與直線情形」的雙心六圓性質。

給定一直線L與直線外一圓O(半徑R)的雙心n圓， $d = d(O, L)$，n 個環切圓O_i(半徑 r_i)皆相切於圓O和直線L，外(內)切點A_i 、外切點B_i，鄰切點C_i，$i = 1 \sim n$，相關性質如下：

【定理 4-6】環切圓圓心共拋物線、外切點連線共點、鄰切點共圓、外切點共圓

(1) 環切圓圓心O_i的軌跡為拋物線，也就是環切圓圓心共拋物線，如圖 4-7。

(2) 設直線L_o過圓心O點與 L 垂直，則切點連線$\overleftrightarrow{A_iB_i}$交$L_o$於$D$點 ，$i = 1 \sim n$ ，且恰在圓O上。

(3) 環切圓O_i的鄰切點C_i共圓，$i = 1 \sim n$，且圓心$O_C = D$，如圖 4-8。

(4) 任意兩個環切圓的外切點A_i、B_i、A_j、B_j共圓，$i, j = 1 \sim n$，且$i \neq$ j。

<證明>

(1)(2)如圖 4-7，$\overline{O_iO} = R + r_i$，$d(O_i, L) = r_i$，$\overline{O_iO} = d(O_i, L) + R$；將 L 向下平移R單位得K，則$\overline{O_iO} = d(O_i, K)$，即圓心$O_i$在拋物線上(焦點 O，準線K)；仿照【定理 2-2】可得證$\overleftrightarrow{A_iB_i}$共交$D$點。

(3)(4)如圖 4-8，仿照【定理 2-3】利用相似及圓冪性質可分別證得，證明省略。 ∎

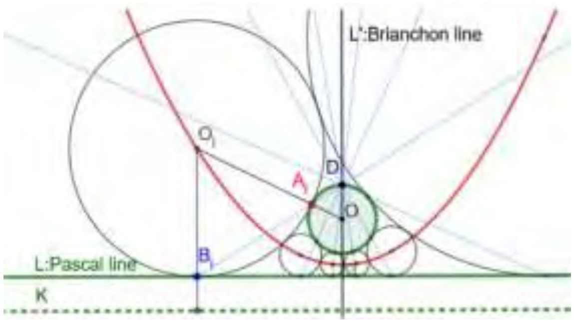


圖 4-7

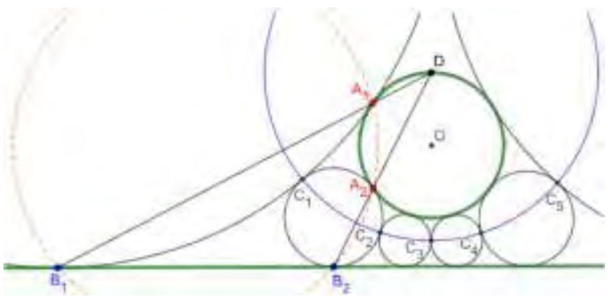


圖 4-8

給定直線L與直線外圓 O，若其環切圓O_1~O_6，外切點A_1~A_6、B_1~B_6、鄰切點C_1~C_6，則有以下性質：

【定理 4-7】對應外切點、鄰切點、環切圓圓心分別連線共點、共 *Pascal* 線

(1) $\overleftrightarrow{A_1A_4}\cap\overleftrightarrow{A_2A_5}\cap\overleftrightarrow{A_3A_6}=A$、$\overleftrightarrow{C_1C_4}\cap\overleftrightarrow{C_2C_5}\cap\overleftrightarrow{C_3C_6}=C$、$\overleftrightarrow{O_1O_4}\cap\overleftrightarrow{O_2O_5}\cap\overleftrightarrow{O_3O_6}=O_c$，且$O_c=D$

(2)當環切圓轉動時，上述 A、C、D 皆為定點，且在通過圓心 O 與直線L垂直的*Brianchon* 線上。

(3)如圖 4-10，六邊形A_1~A_6、C_1~C_6、O_1~O_6的三組對應邊延長線交點均在直線L上，即共同一條 *Pascal* 線。

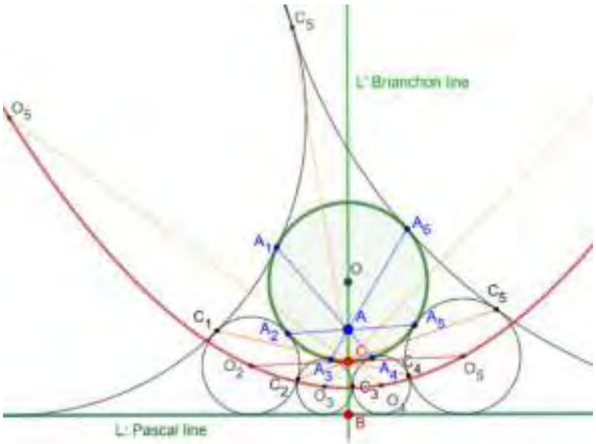


圖 4-9

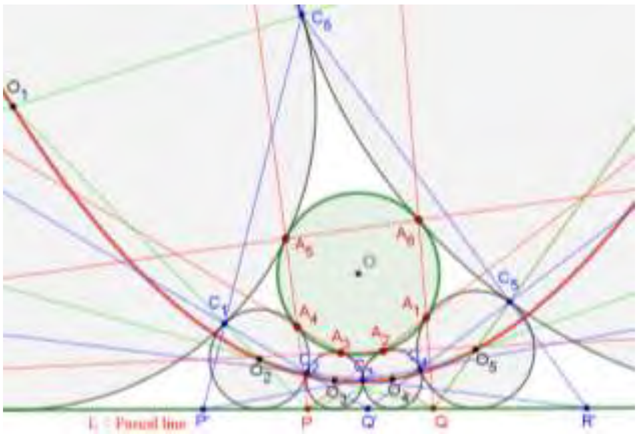


圖 4-10

<證明> 如圖 4-9，根據【定理 1-1】及仿照前述利用極點、極線即可得證，證明省略。 ■

(三) 阿波羅尼斯圓族中的雙心多圓

如圖 4-11，阿波羅尼斯圓族(參考文獻[8])為橘色圓族，其與上下藍色圓族的每一個圓均正交。本研究最後就以對其中「兩內離圓、兩外離圓或圓與直線」不同選擇來說明關係變化，

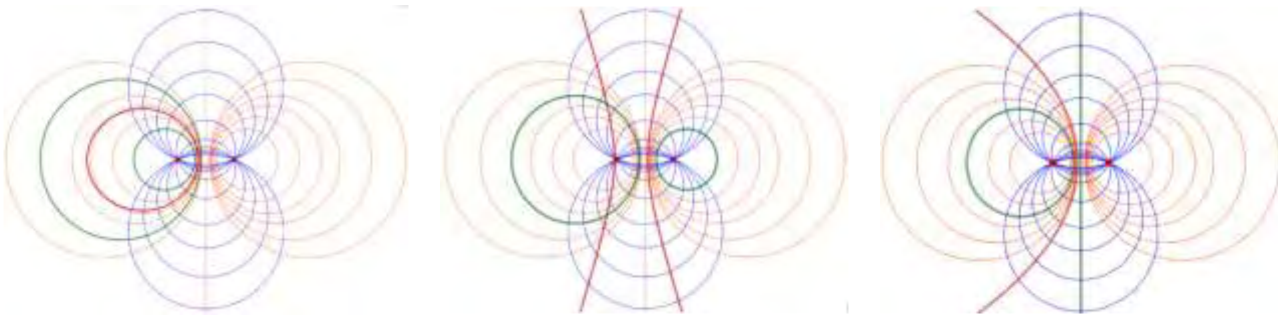


圖 4-11：兩內離圓、兩外離圓或圓與直線的雙心多圓，其環切圓圓心軌跡的變化

然後透過極限點推導雙心多圓構成關係式，藉以構圖實驗。綜合前述結果，摘列如下：

1. 阿波羅尼斯圓族有共同的根軸，同時也是雙心多圓的 *Pascal* 線。

2. 環切圓圓心共錐(橢圓、雙曲線、拋物線)。

3. 環切圓的鄰切點共圓，圓心恰為各環切圓與兩定圓(或圓與直線)切點連線的共點。

4. 以雙心六圓為例，各類點對應連線均分別共交不同定點，即為其各自所構成雙心六邊形的 *Brianchon* 點，但其 *Pascal* 線都是同一條。此結果異於雙心六邊形，如圖 4-12。

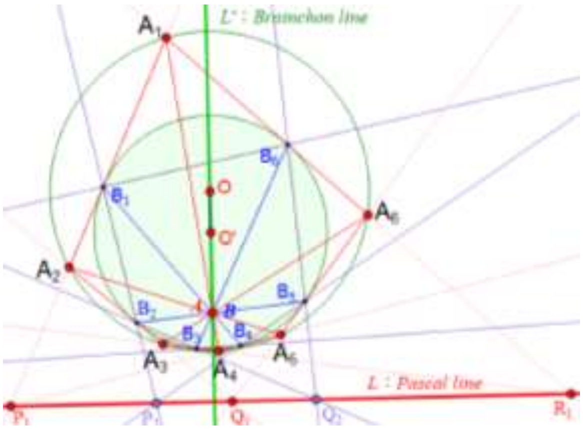


圖 4-12(a) 雙心六邊形的共定點定線

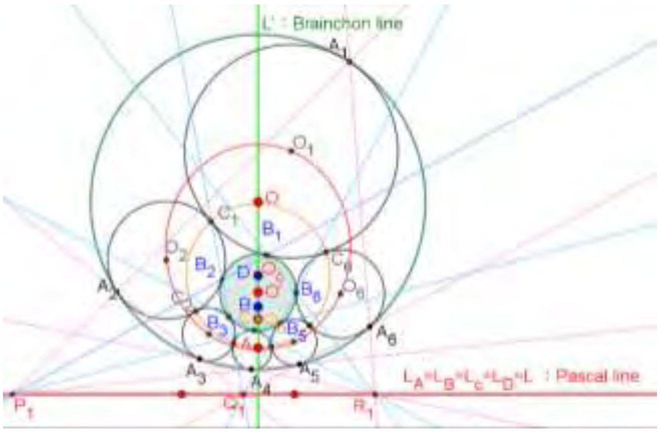


圖 4-12(b) 雙心六圓的共定點定線

最後，由【定理 2-1】、【定理 4-1】、【定理 4-5】所推導的構成關係式，若以雙心六圓為例，透過所發現的性質，推導出各定點、定線、定圓、定錐的軌跡方程式，以進一步描述圖形，表列如下，詳細過程因篇幅有限，不另贅述。

類型	構成條件	環切圓圓心軌跡為錐線 鄰切點軌跡為圓	*Pascal* 線
兩內離圓 $O(0,0)$ $O'(d,0)$ $d=\overline{OO'}$	$r=\dfrac{5R-\sqrt{16R^2+9d^2}}{3}$ $0\le d<R-r$	$\dfrac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{\frac{(R+r)^2}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{(R+r)^2-d^2}{4}}=1$ $\left(x-\dfrac{Rd}{R+r}\right)^2+y^2=\dfrac{Rrd^2}{(R+r)^2}$	$x=\dfrac{d^2+R^2-r^2}{2d}$
兩外離圓 $O(0,0)$ $O'(d,0)$ $d=\overline{OO'}$	$r=\dfrac{-5R+\sqrt{16R^2+9d^2}}{3}$ $d>R+r$	$\dfrac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{\frac{(R-r)^2}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{d^2-(R-r)^2}{4}}=1$ $\left(x-\dfrac{Rd}{R-r}\right)^2+y^2=Rr\left(\dfrac{d^2}{(R-r)^2}-1\right)$	$x=\dfrac{d^2+R^2-r^2}{2d}$
圓與直線 $O(0,0)$ $O'(d,0)$ $d=d(O',L)$	$r=\frac{3d}{5}$，$d>r$	$y^2=2(d+r)\left(x-\dfrac{d-r}{2}\right)$ $(x-(d+r))^2+y^2=2r(d+r)$	$x=d$

伍、結　　論

正如本研究作品名稱“ **渾「圓」有「定」** ”，從七圓定理一堆渾圓中，觀察共點的現象，推廣至兩內離圓、兩外離圓及圓與直線三種情形的雙心六圓，發現許多共點、共線、共圓、共錐，且有定點、定線之不變性，以至雙心多圓也成立。茲將重要結論摘列如下：

一、無論相鄰外切的六個小圓內切或外切於大圓的七圓定理，對應切點連線共交一點，稱之為 *Stanley* 點，就是 *Brianchon* 點，與 *Pascal* 線互為極點極線。

二、$4n+2$ 個與大圓均內切的小圓，若連接對應內切點所成 $2n+1$ 條直線共點，則其兩相鄰的小圓均外切，反之不一定成立。

三、給定兩圓(內離、外離)或圓與直線，有 n 個環切圓的雙心 n 圓，具有下列性質：

(一) 透過極限點可推導出雙心 n 圓的構成條件，如下：

兩內離圓：$r=\dfrac{(1+k^2)R-\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$，$0\le d<R-r$，$0<k<1$

兩外離圓：$r=-\dfrac{(1+k^2)R-\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$，$d>R+r$，$k>1$

圓與直線：$r=\dfrac{2dk}{k^2+1}$，$d>r$，$k>1$

(k為正雙心n圓的半徑比，d為連心線長 或 圓心到直線距離)

(二) 環切圓的圓心共錐(橢圓、雙曲線、拋物線)，鄰切點共圓，且均固定不動。

(三) 任一個環切圓與兩定圓(或圓與直線)的切點連線共點，且為鄰切點共圓的圓心。

(四) 任兩個環切圓的內切點、外切點與鄰切點中，任選兩種對應切點均分別四點共圓。

(五) 若 n 為偶數，則對應內切點、對應外切點、對應鄰切點、對應環切圓圓心均分別連線共點；若 n 為奇數，則內切點、外切點、環切圓圓心各自與對應的鄰切點均分別連線共點。這些共點即為其所構成雙心 n 邊形的 *Brianchon* 點，在連心線上形成 *Brianchon* 線；但即使在不同的雙心 n 邊形卻共同一條 *Pascal* 線。

(六) 當環切圓轉動時，這些共點、共線均保持不動，恆為定點、定線。

四、雙心多圓的 *Pascal* 線同時為其在阿波羅尼斯圓族中的根軸。

陸、未來展望

若將七圓定理及雙心六圓推廣至空間中的球面或球體，其諸點共線、諸線共點及諸點共圓的性質能否成立？亦或是有更令人意想不到的發現？如圖 5-1。

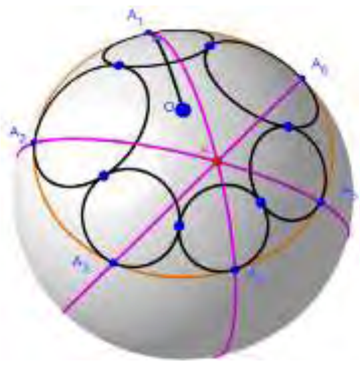


圖 5-1(a)

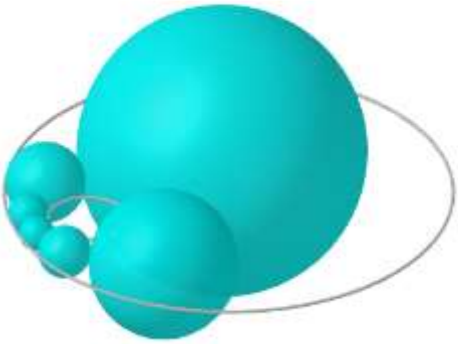


圖 5-1(b)

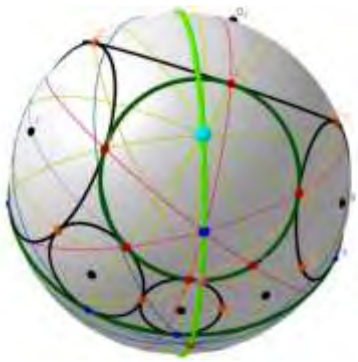


圖 5-1(c)

另外，若將環切圓想像是一個系統運轉的星體，從上述可發現縱使在渾圓的系統中運作也必存一些「共定點、定線、定圓或定錐」之不變性，未來再透過幾何量關係的描述，或許有機會勾勒出一些天體運行所蘊藏的機制，註如熱門的黑洞議題，值得日後進一步的探討。

柒、參考文獻

[1] 張霈萱(2016)。層出不窮的彩蛋有「心」「跡」—圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質探討；2016 年臺灣國際科展作品。

[2] 詹承翰、黃威郡、陶培生(2014)。甜甜圈的省思-如何構成斯泰納系圓；臺北市 103 年度中等學校學生科學研究獎助研究作品。

[3] 趙文敏(1993)。幾何學概論。台北市：九章出版社。

[4] 趙文敏(2012)。*Apollonius* 問題—兼談三條件決定圓。台北市：龍騰出版社,數亦優,第 17 刊,25-37。

[5] 許志農。普通高級中學數學，第四冊，第四章：二次曲線。新北市：龍騰出版社。

[6] Stanley Rabinowitz(1987) , the Seven Circles Theorem, with a proof based on Ceva's, Reprinted from the Pi Mu Epsilon Journal, 8(1987)441 – 449.

[7] Evelyn, C. J. A.; Money-Coutts, G. B;Tyrrell, J. A. (1974).The Seven Circles Theorem and Other New Theorems. London: Stacey International.ISBN 978-0-9503304-0-2.

[8] Limiting Point。取自 http://mathworld.wolfram.com/LimitingPoint.html。

【評語】050413

本文探討圓內接多圓以及圓外切多圓之圓心以及切點之各種性質。作品研究方向明確且聚焦，就文獻探討部分而言相當詳細。作者透過將雙心六圓變換成同心圓的手法(亦即是射影幾何的手法)給出許多有趣的觀察，例如內外切點連線共點、圓心共橢圓等等。然後作者也試著將結果推展至一般 n 個圓的情況，原本 6 圓的許多也都可以有對應的多圓的結果。整體而言是一篇相當豐富完整的作品，若可以將結果作更好的統整會更好。

作品海報

摘　要

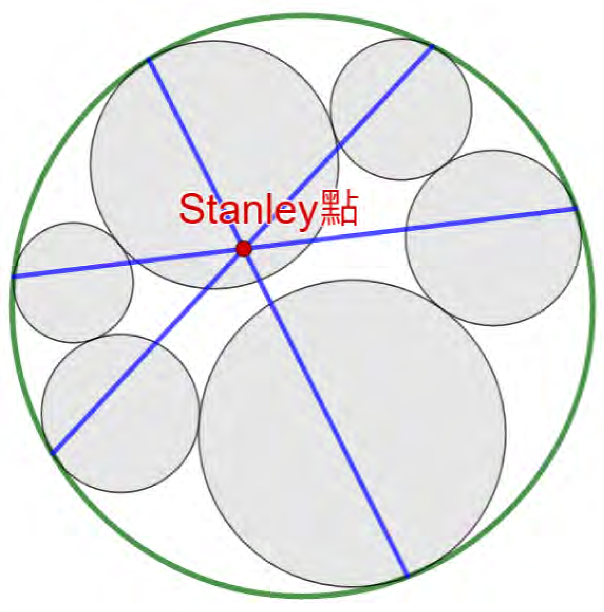
本研究從七圓定理出發，試圖改變切圓個數，探討其共點的存在性，進而推廣「六個與**兩內離圓**分別均外切與內切的**環切圓**」之**雙心六圓**，探討其共點、共線、共圓及共圓錐曲線等性質。研究有驚人的發現「當六個環切圓轉動時，各類對應點連線之共點必為定點，且在連心線上。」推廣至不同數的環切圓時亦成立；甚至推廣至**兩外離圓**或是**圓與直線**時，亦發現其諸線共點、諸點共線、諸點共圓、諸點共圓錐曲線等性質。

壹、研究動機

在閱讀有關反演變換的文獻時，意外發現一個有趣**形似湯圓的七圓定理：**「在一個大圓中有六個小圓均與其內切，若兩相鄰小圓均外切，則其對應內切點連線共點」；雖名為「七圓」，關鍵卻在於其中的「六圓」。這樣一個恰巧相切又共點的圖形，該如何作圖呢？除了諸線共點的性質外，是否會有諸點共線、諸點共圓等特性呢？如果不是六個小圓而是更多圓？又或同時內、外切於兩內離圓，甚至同時外切於兩外離圓的情形呢？於是展開本研究。

貳、研究目的與問題

一、探討七圓定理的性質與多圓的推廣。
二、探討雙心六圓的構成關係式與性質。
三、以雙心六圓的結果探討雙心多圓的性質。
四、試研究雙心多圓在兩外離圓及圓與直線等情形的性質。

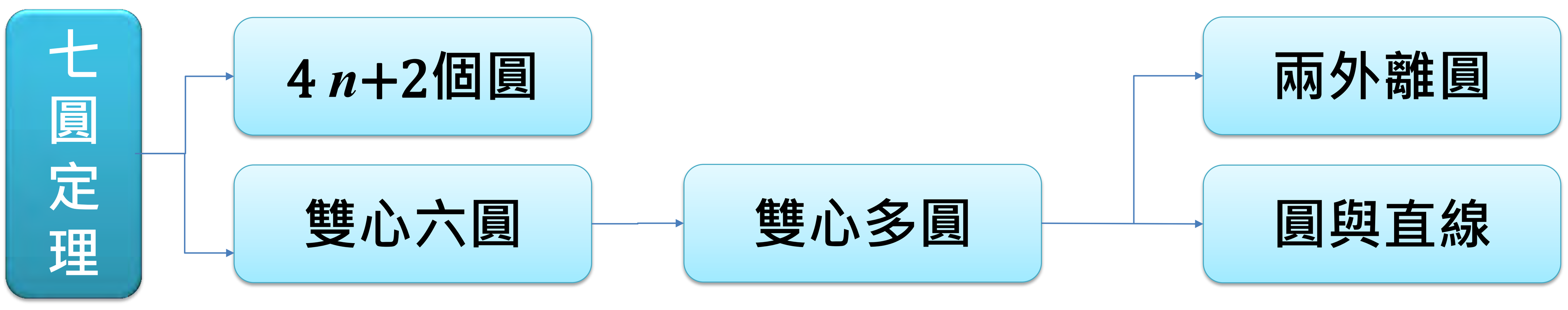


• 對應內切點連線共點，稱為***Stanley***點

參、研究方法

一、研究方法與架構

主要透過 *GSP* 與 *GeoGebra* 幾何軟體進行幾何問題實驗研究，透過實驗觀察、臆測與驗證，最後提出研究結果並加以證明。

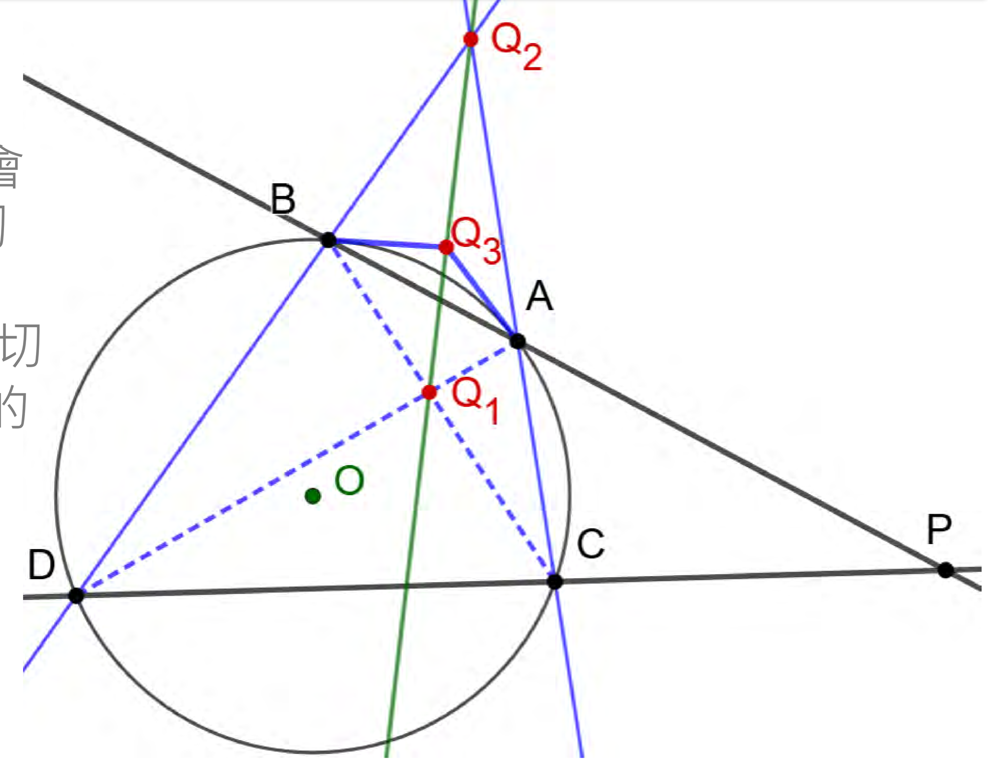


二、文獻探討

【性質1】極線的判別法 [參考文獻2]

圓O外P點作兩割線交於A、B、C、D；若$\overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC} = Q_1$、$\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD} = Q_2$，則$Q_1$、$Q_2$必在$P$關於圓$O$的極線上。

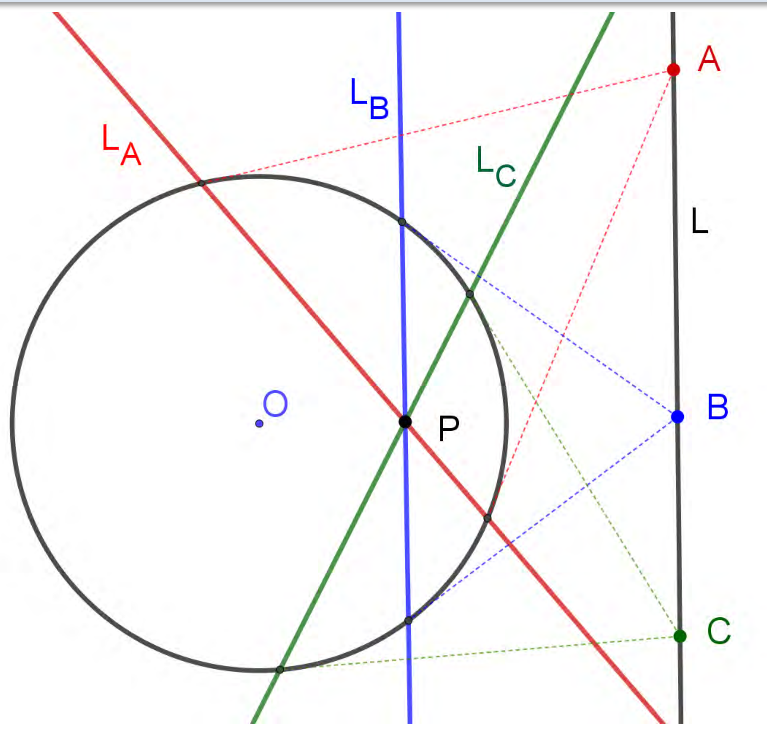
1. P點關於圓O的極線，也會通過以A、B為切點的兩切線交點Q_3。
2. 當兩割線變為切線時，兩切點連線即為P點關於圓O的極線。



【性質2】共點共線的極線判別法 [參考文獻1]

設L_A、L_B、L_C分別為A、B、C關於圓O的極線，若A、B、C三點共線，則L_A、L_B、L_C三線共點；反之亦然。

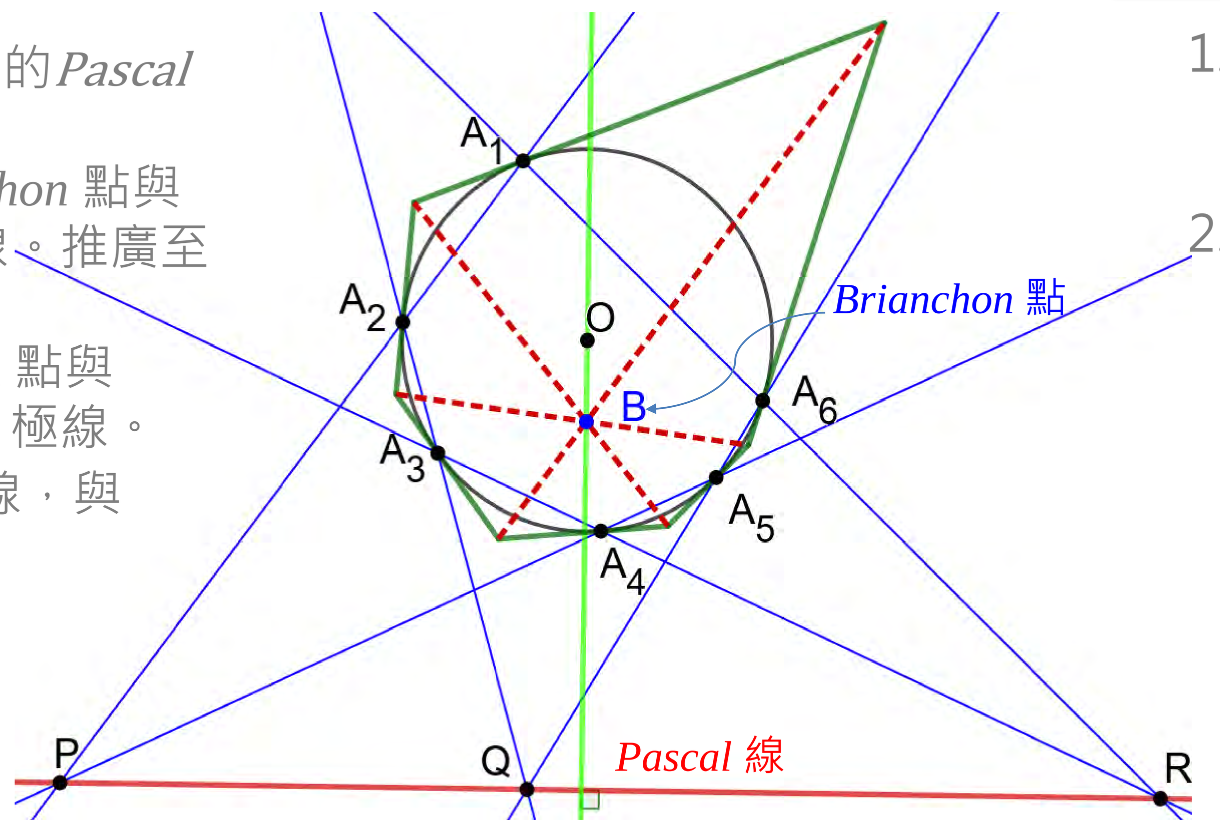
• 此時，關於圓O，P點與直線L互為極點、極線。



【性質3】*Pascal* 定理及 *Brianchon* 定理 [參考文獻1]

若六邊形內接於一圓，則三組對邊延長線交點共線；
若六邊形外切於一圓，則三條對頂點連線共交一點。
上述，反之亦然，推廣至圓錐曲線也成立。

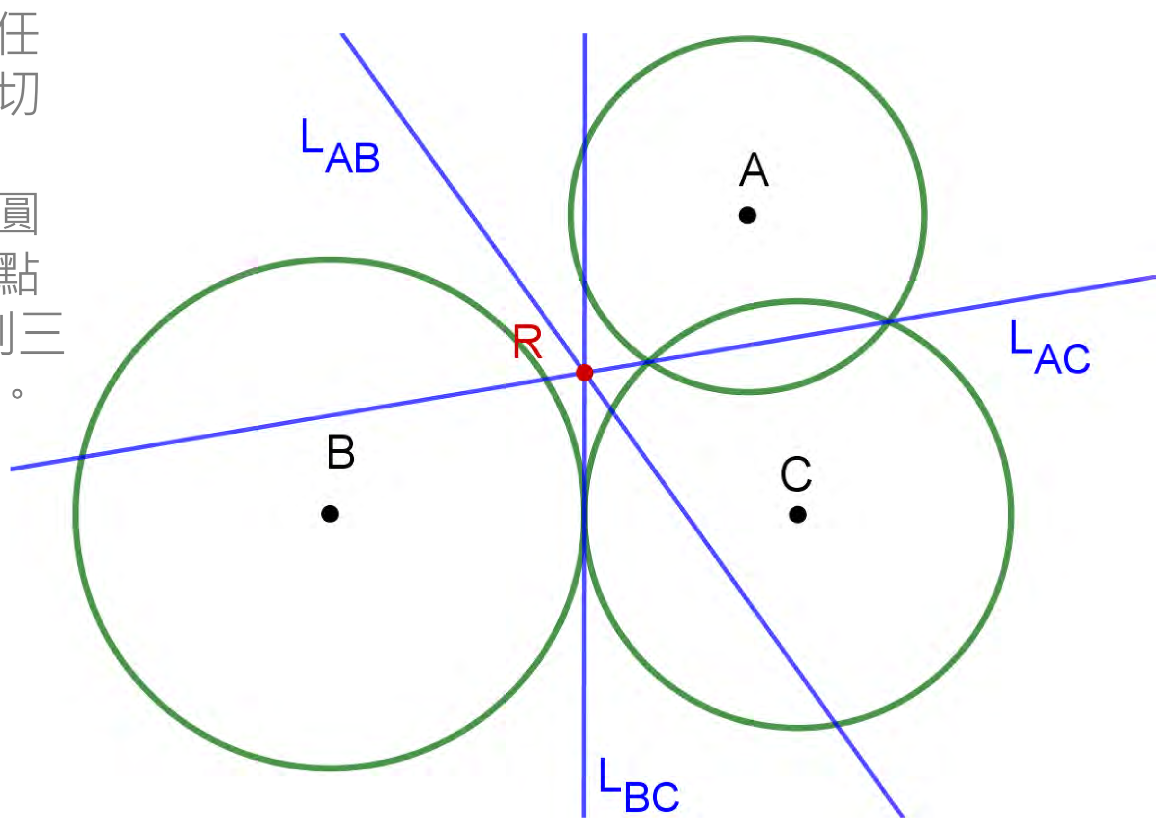
1. *Pascal*定理即為著名的*Pascal*神秘六邊形定理。
2. 雙心六邊形的*Brianchon*點與*Pascal*線為定點定線。推廣至雙心2n邊形亦成立。
3. 關於圓O，*Brianchon*點與*Pascal*線互為極點、極線。
4. 稱$\overleftrightarrow{OB}$為*Brianchon*線，與*Pascal*線垂直。



【性質4】根心定理 [參考文獻2]

圓心不共線三圓A、B、C，若L_{AB}、L_{BC}、L_{CA}分別為圓A與B、圓B與C、圓C與A的根軸，則L_{AB}、L_{BC}、L_{CA}三線共點，此點稱為此「三圓A、B、C的根心」。

1. 兩圓的根軸上任一點到兩圓的切線等長。
2. 三圓中，任兩圓根軸必共交一點R(根心)，其到三圓的切線等長。



三、前置研究

【性質5】雙心 n 圓的構成條件

給定兩圓(半徑R、r)或圓(半徑r)與直線，d為連心距或圓心到直線距離，則雙心 n 圓的構成條件如下：

兩內離圓：$r = \dfrac{(1+k^2)R-\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$

$0 \le d < R-r$，$0 < k < 1$

兩外離圓：$r = -\dfrac{(1+k^2)R-\sqrt{(1+k^2)^2R^2-4k^2(R^2-d^2)}}{2k}$

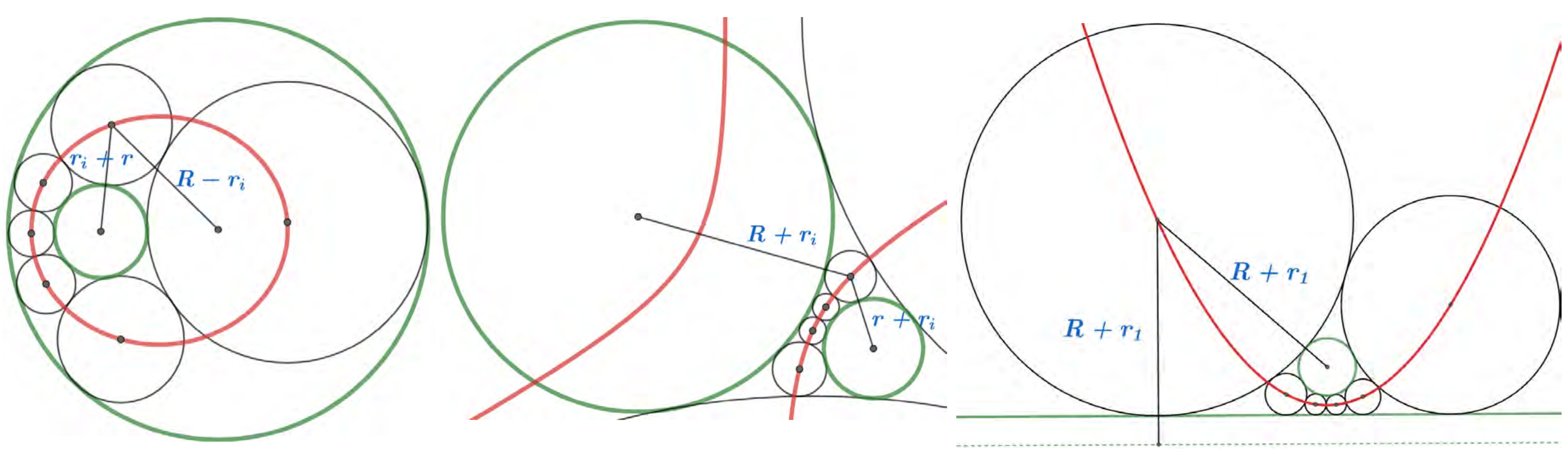
$d > R+r$，$k > 1$

圓與直線：$r = \dfrac{2dk}{k^2+1}$，$d > r$，$k > 1$

• 透過極限點[參考文獻3]，可分別推導出上述構成條件，其中k為正雙心n圓時的半徑比。

【性質6】雙心 n 圓的環切圓圓心共圓錐曲線

給定一個雙心 n 圓，則其環切圓圓心共錐：當兩圓內離時共橢圓，外離時共雙曲線，圓與直線時則共拋物線。



兩內離圓　兩外離圓　圓與直線

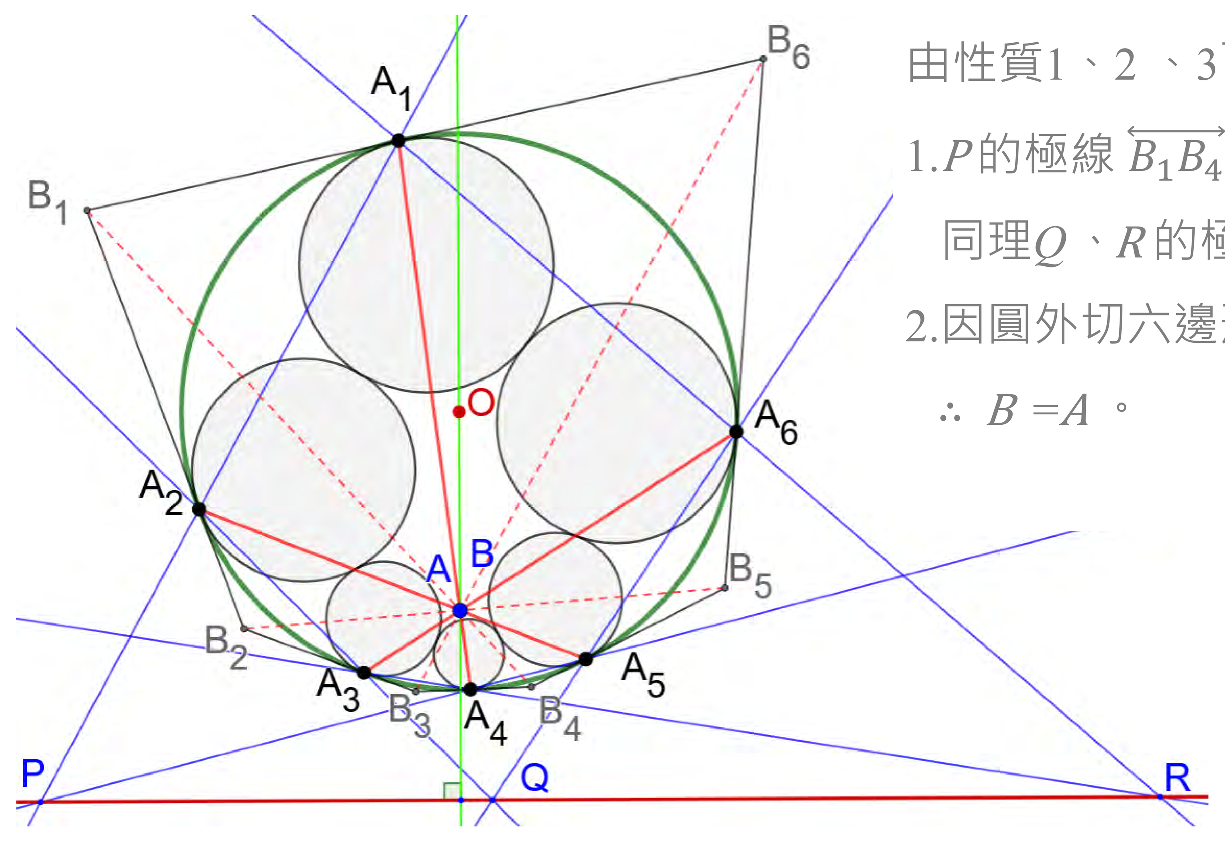
• 上述，以雙心六圓為例，透過圓錐曲線幾何定義即證得，推廣至雙心n圓均成立。

肆、研究結果與討論

一、七圓定理的性質和推廣

【定理1】*Stanley*點 = *Brianchon*點

圓O與兩相鄰均外切的六個切圓內切於$A_1\sim A_6$，若其*Stanley*點為A，其切線遞延之圓外切六邊形的*Brianchon*點為 B，則 $A=B$。



由性質1、2、3可證得。

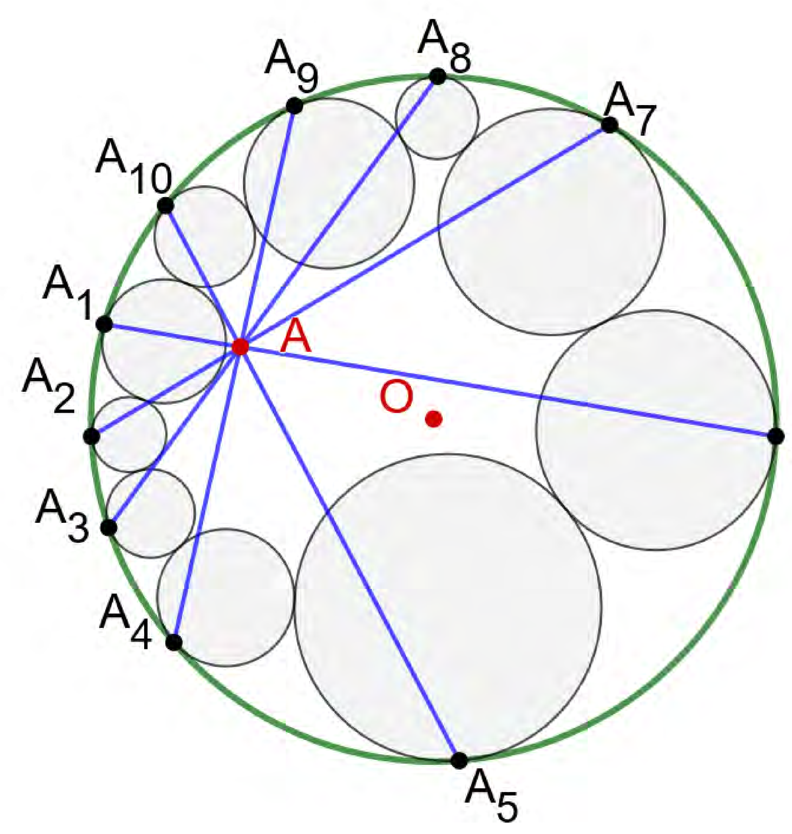
1.P的極線 $\overleftrightarrow{B_1B_4}$ 會過 A 點，
同理Q、R的極線也會過A點。

2.因圓外切六邊形對角線共交B點，
∴ $B=A$。

▲ *Stanley* 點 A 在 *Brianchon* 線上，與*Pascal*線垂直。

【定理2】$4n$+2個切圓之推廣

$4n+2$ 個圓分別內切圓O於$A_1\sim A_{4n+2}$，且皆與前一圓外切，若對應內切點連線共點，則兩相鄰圓均外切。



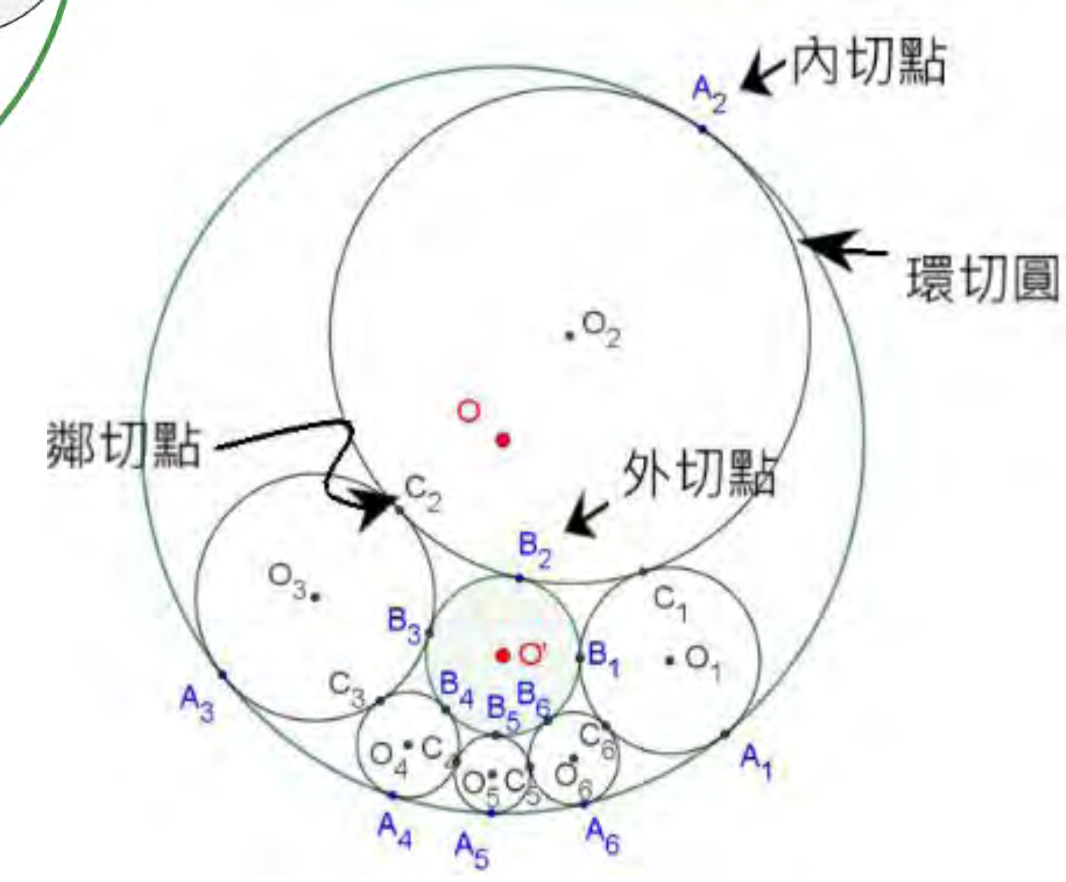
▲以10個切圓為例，
若對應內切點連線共點，
則兩相鄰圓外切。

1.7個以上切圓，兩相鄰圓均外切，但對應內切點連線不一定共點。

2.反之，只有在$4n+2$個切圓情形下，若對應內切點連線共點，則兩相鄰圓均外切。

二、雙心六圓的構成條件與性質探討

設一個雙心六圓的兩個內離圓O與O'半徑分別為R、r，連心距d；
若環切圓$O_1\sim O_6$，內切點$A_1\sim A_6$，外切點$B_1\sim B_6$，鄰切點$C_1\sim C_6$，則有以下性質：



▲名詞約定

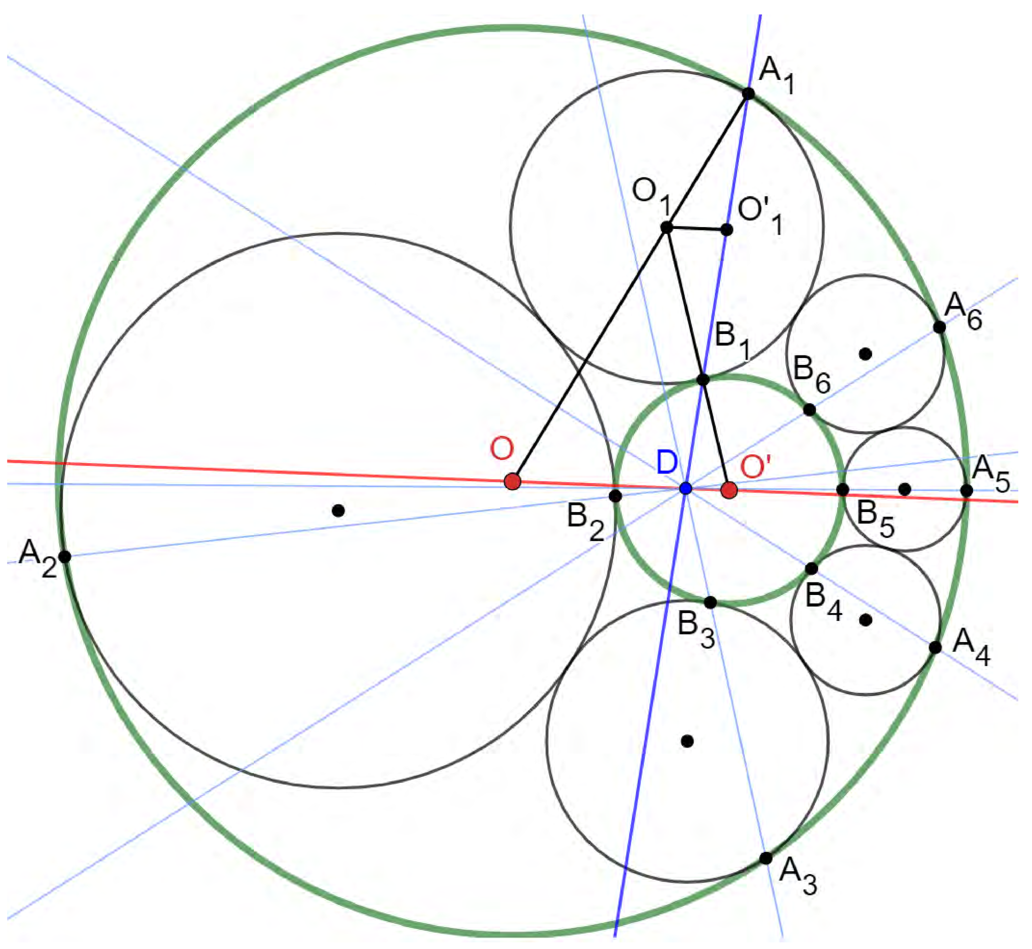
【定理3】雙心六圓的性質I（推廣至雙心n圓亦成立）

◆ 同一個環切圓內外切點連線共點

$\overleftrightarrow{A_1B_1}\cap\overleftrightarrow{A_2B_2}\cap\overleftrightarrow{A_3B_3}\cap\overleftrightarrow{A_4B_4}\cap\overleftrightarrow{A_5B_5}\cap\overleftrightarrow{A_6B_6}=D$

1.設$\overleftrightarrow{A_1B_1}$交$\overleftrightarrow{OO'}$於$D$點。

2.透過相似性質可證得$\overline{OD}:\overline{O'D}=R:r$比值固定，
且因$\overline{OO'}$、R、r均為定值，故$\overleftrightarrow{A_iB_i}$交於$D$點，$i$=1~6。



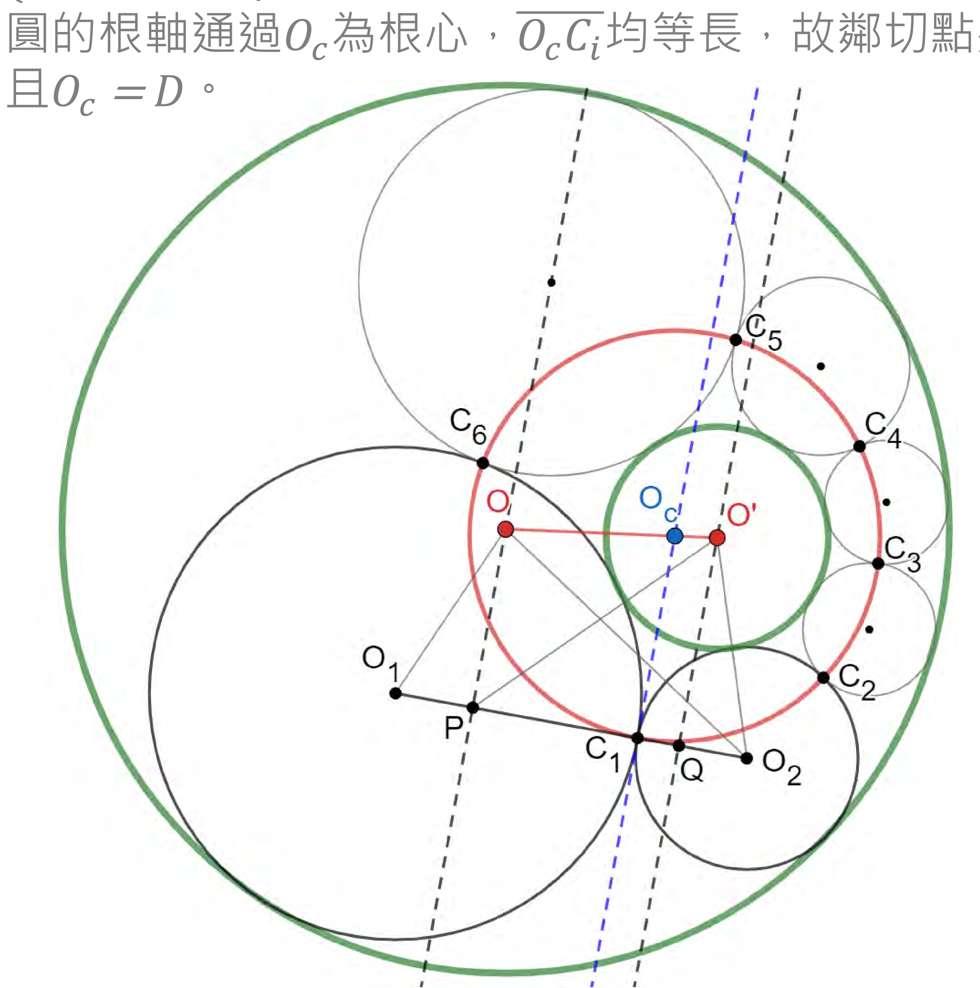
▲內、外切點連線$\overleftrightarrow{A_iB_i}$共交一點

◆ 環切圓的鄰切點共圓

鄰切點$C_1\sim C_6$共圓，圓心O_c為環切圓根心，且O_c恰為D點，也就是$O_c=D$。

1.作$\overleftrightarrow{OP}$、$\overleftrightarrow{O'Q}$、$\overleftrightarrow{O_cC_1}$垂直$\overline{O_1O_2}$，並交$\overleftrightarrow{OO'}$於$O_c$。

2.由相似及畢氏定理得$\overline{OO_c}:\overline{O'O_c}=\overline{PC_1}:\overline{QC_1}=R:r$
$(=\overline{OD}:\overline{O'D})$。因$\overline{OO'}$、$R$、$r$均為定值，故兩相鄰環切圓的根軸通過$O_c$為根心，$\overline{O_cC_i}$均等長，故鄰切點共圓且$O_c=D$。



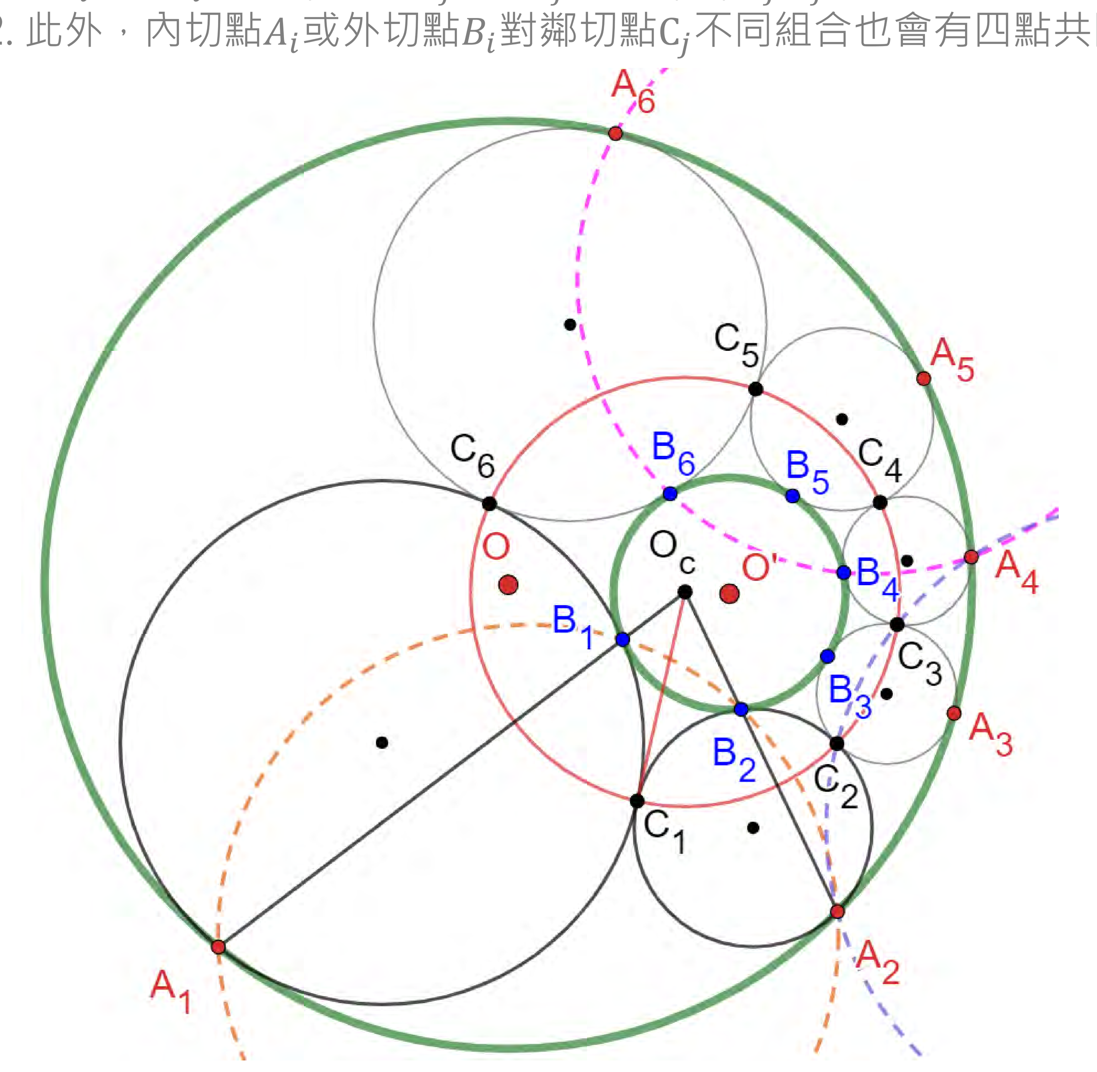
▲鄰切點$C_1\sim C_6$共圓

◆ 兩個環切圓的內外切點四點共圓

任兩個環切圓的內、外切點$A_iB_iA_jB_j$ 四點共圓，$i,j=1\sim6$，且$i\neq j$。

1.因為鄰切點共圓且$O_c=D$，根據圓冪定理可證得
$\overline{DA_i}\times\overline{DB_i}=\overline{DC_i}^2=\overline{DA_j}\times\overline{DB_j}$，故$A_i\ B_i\ A_j\ B_j$共圓。

2. 此外，內切點A_i或外切點B_i對鄰切點C_j不同組合也會有四點共圓



▲內切點與外切點、內切點與鄰切點，外切點與鄰切點的不同組合，也會有四點共圓的情形。

【定理4】雙心六圓的性質II

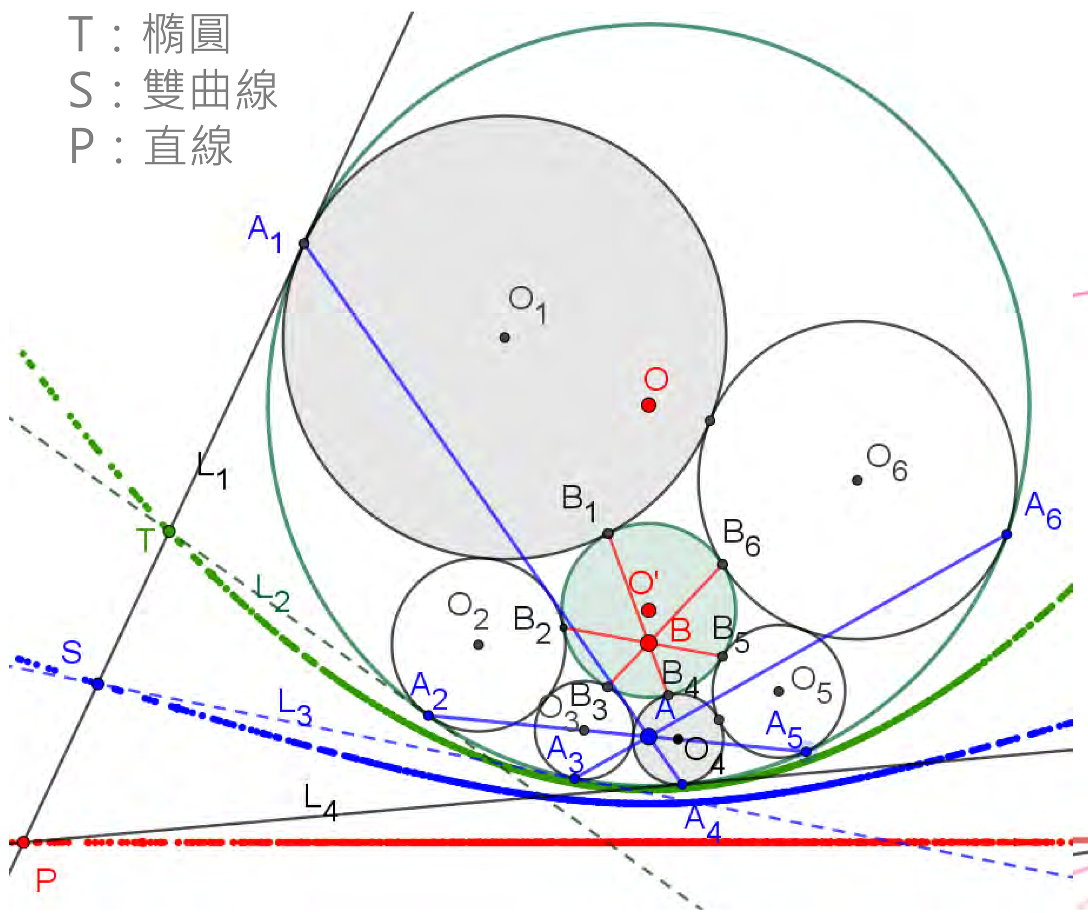
◆ *Stanley* 點A、B為定點

$\overleftrightarrow{A_1A_4}\cap\overleftrightarrow{A_2A_5}\cap\overleftrightarrow{A_3A_6}=A$

$\overleftrightarrow{B_1B_4}\cap\overleftrightarrow{B_2B_5}\cap\overleftrightarrow{B_3B_6}=B$

1. 根據七圓定理可證得
圓O 的對應內切點連線共點，如A點，
圓O'的對應外切點連線共點，如B點。

2. 軌跡點圖形
T：橢圓
S：雙曲線
P：直線



▲圓O_1、O與圓O_4、O'的根軸共交P點，
軌跡為一直線

◆ 圓O與圓O'內接六邊形共 *Pascal* 線

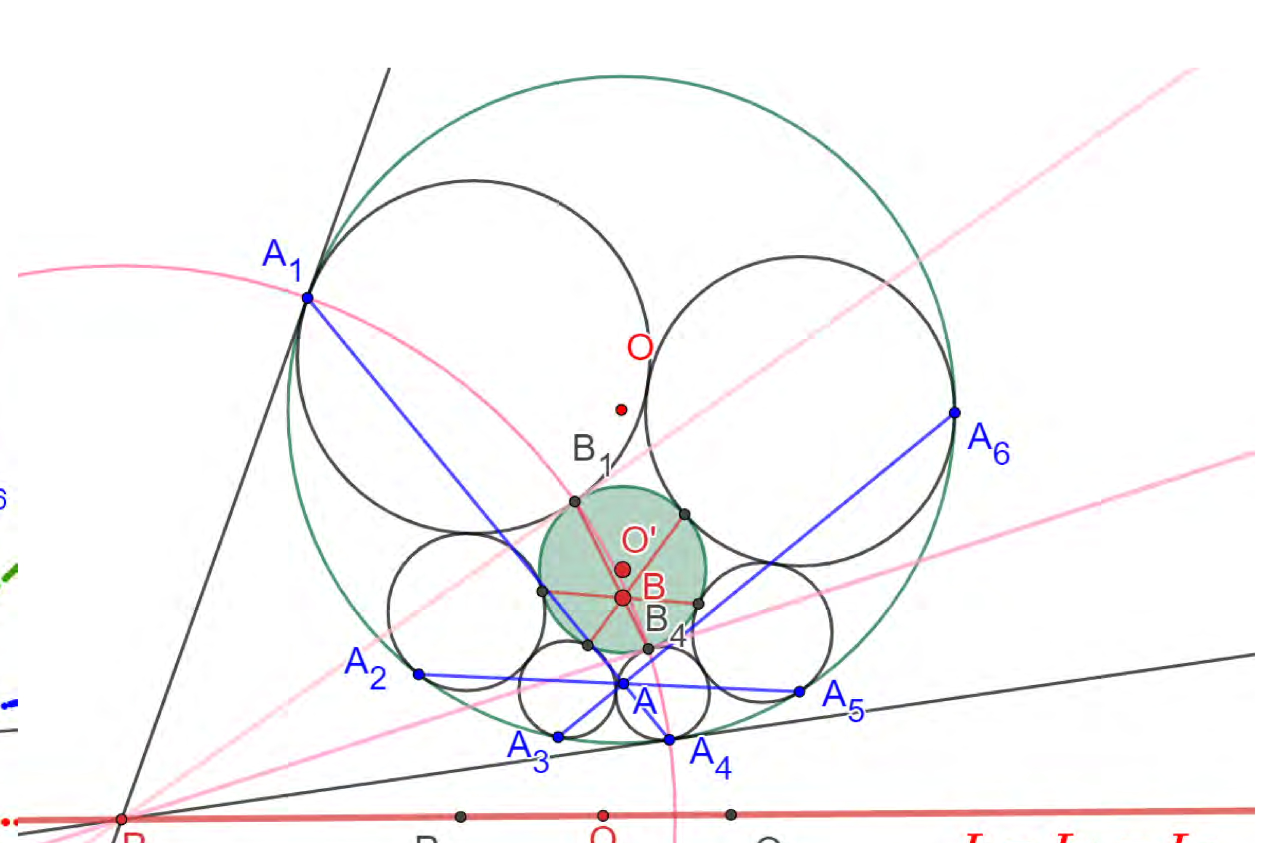
1. 圓O_i、O_{i+3}、O、O'共根心，軌跡為定線L

2. *Pascal* 線 $L_A=L_B$ 為共定線L。

由定理3四點共圓、性質4根心定理及性質1、2可證。

1.A，B分別關於圓O與O'的極線為*Pascal* 線 L_A、L_B。
(互為極點極線)

2. A，B在$\overleftrightarrow{OO'}$ *Brianchon* 線上，且垂直*Pascal*線。



▲環切圓轉動時根心的軌跡為定線L

◆ 環切圓對應鄰切點、圓心連線分別共點

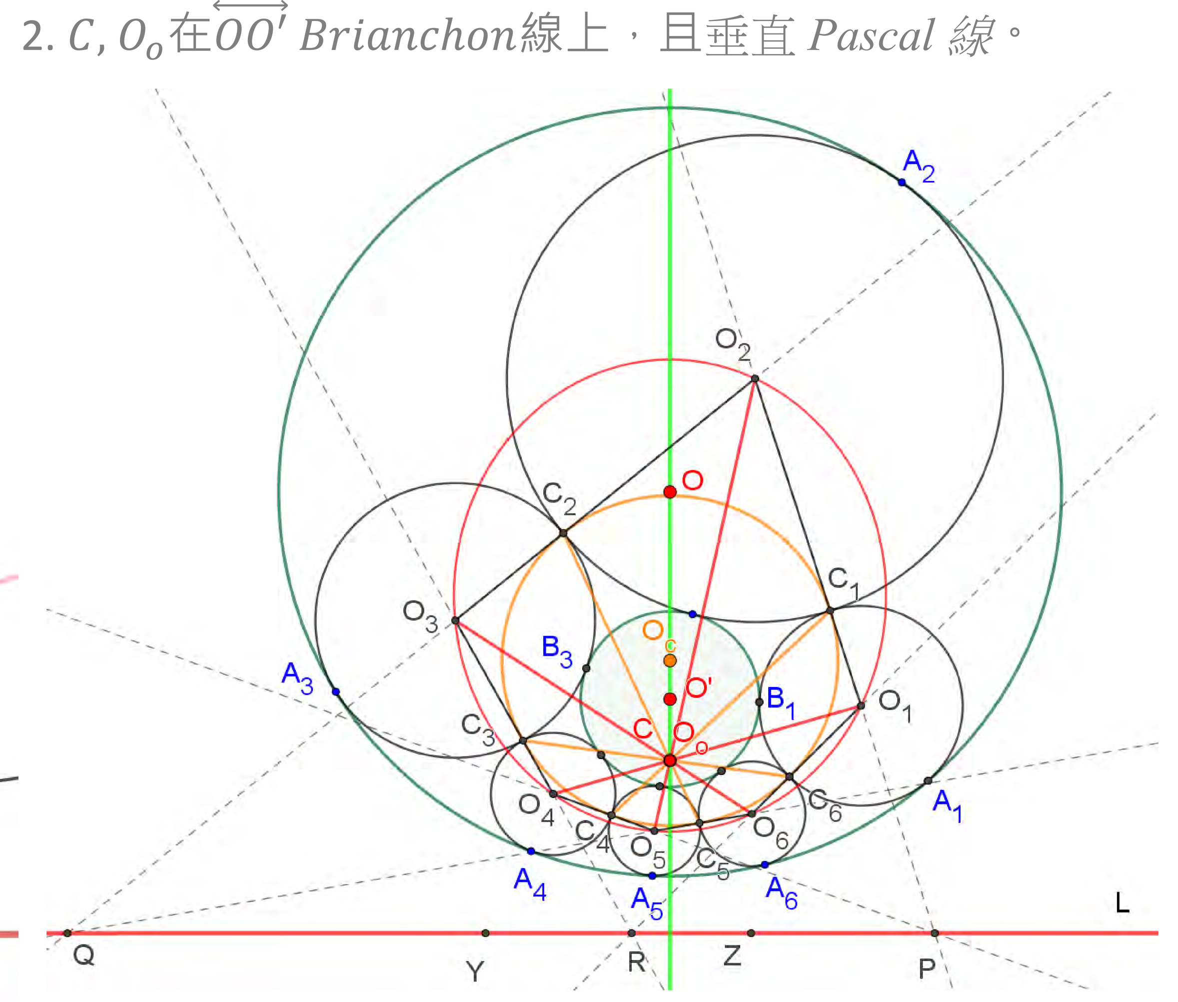
1.$\overleftrightarrow{C_1C_4}\cap\overleftrightarrow{C_2C_5}\cap\overleftrightarrow{C_3C_6}=\boldsymbol{C}=\overleftrightarrow{O_1O_4}\cap\overleftrightarrow{O_2O_5}\cap\overleftrightarrow{O_3O_6}=\boldsymbol{O_o}$

2. *Pascal* 線$L_C=L_O$ 為共定線L。

由性質1、2、3及仿照$L_A=L_B=L$可證。

1.C，O_o分別關於圓O_c與橢圓的極線同為*Pascal* 線L_C、L_O。

2.C，O_o在$\overleftrightarrow{OO'}$ *Brianchon*線上，且垂直 *Pascal* 線。

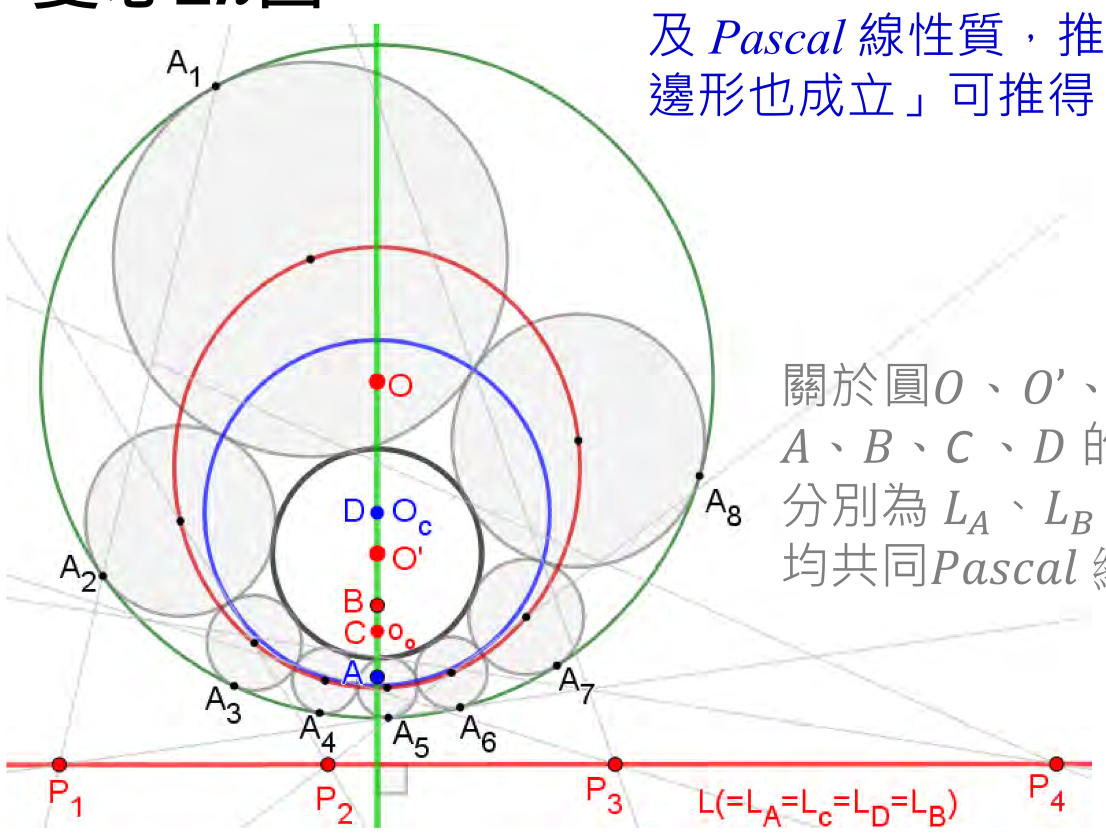


▲環切圓轉動時 C 為定點，L 為定線

三、雙心六圓性質在雙心多圓的推廣

◆ 雙心$2n$圓

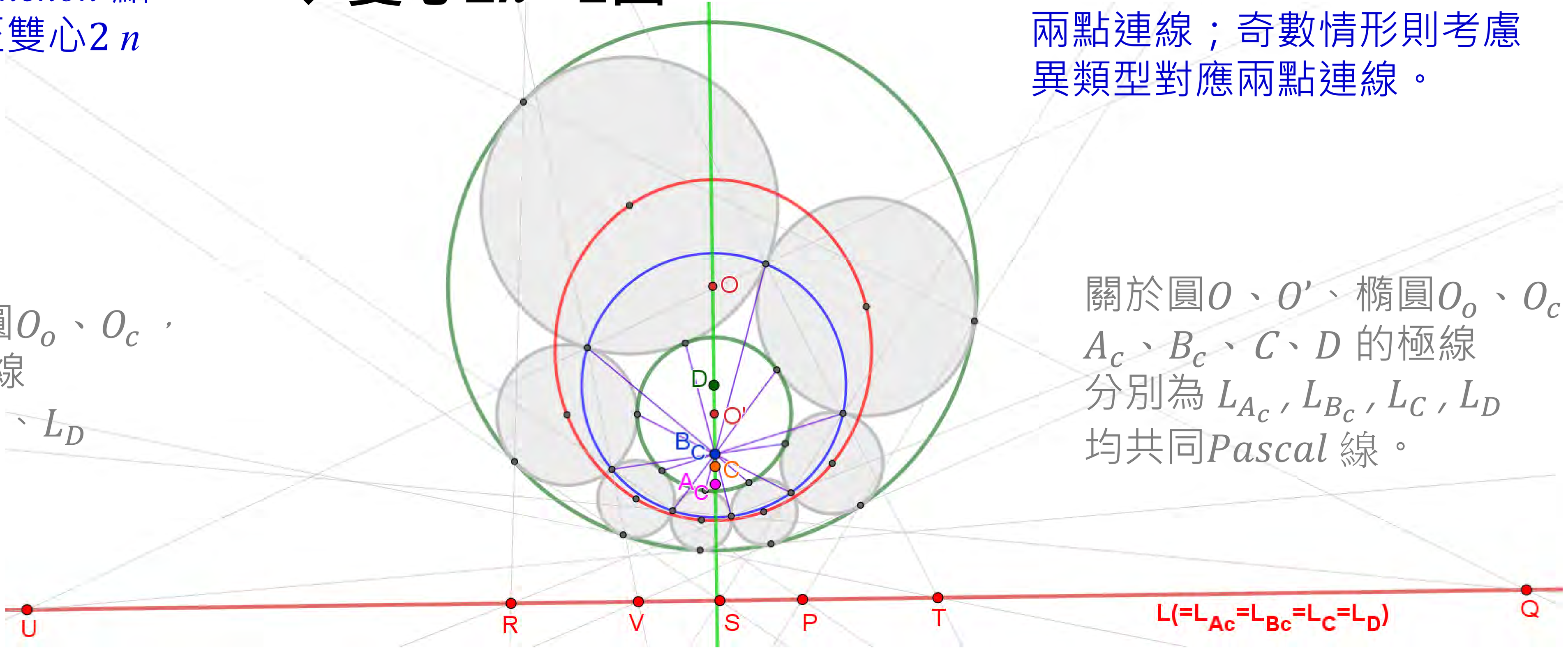
利用「雙心六邊形的 *Brianchon* 點及 *Pascal* 線性質，推廣至雙心$2n$邊形也成立」可推得 。



▲以雙心八圓為例，仍保有雙心六圓之性質。

◆ 雙心$2n+1$圓

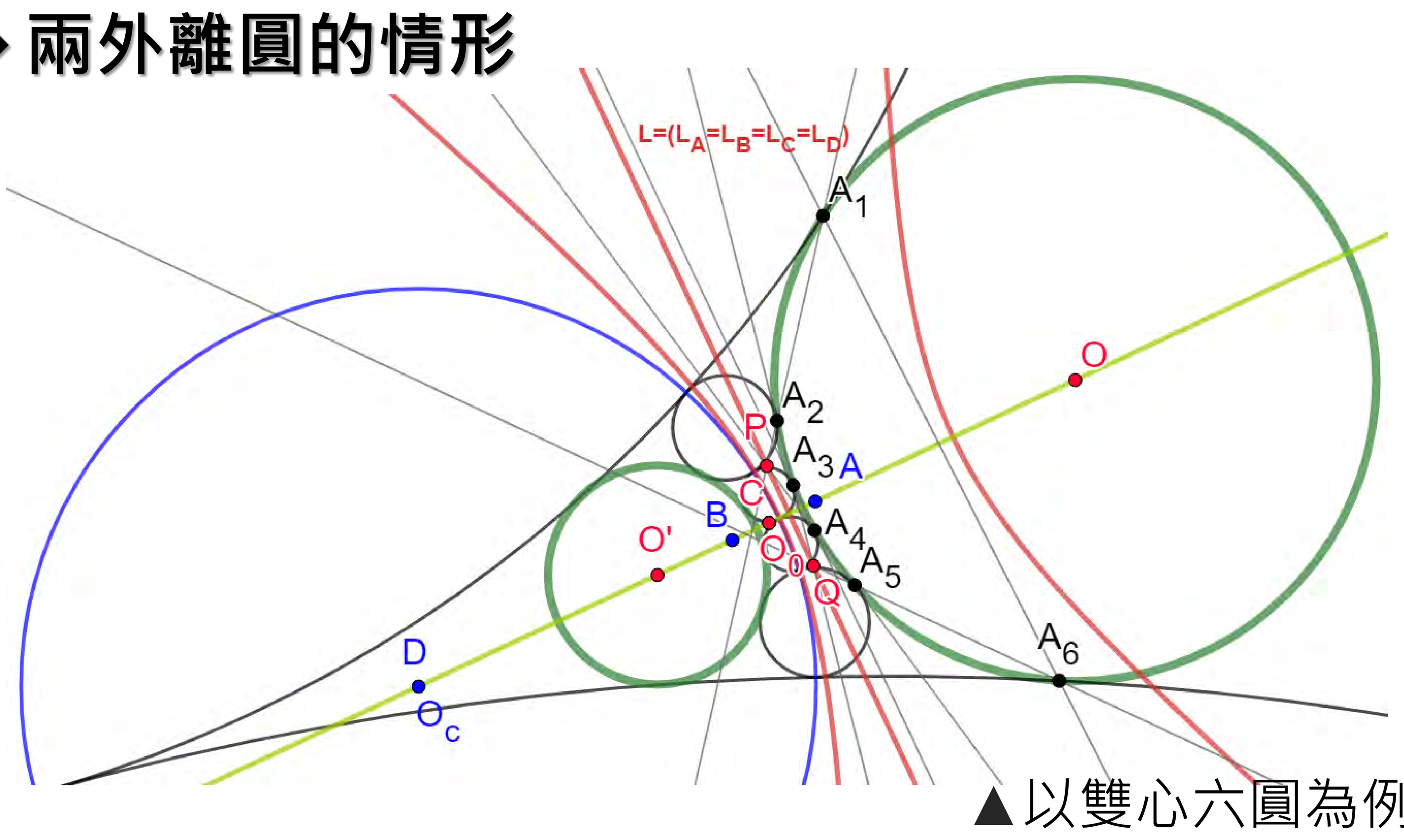
若偶數情形考慮同類型對應兩點連線；奇數情形則考慮異類型對應兩點連線。



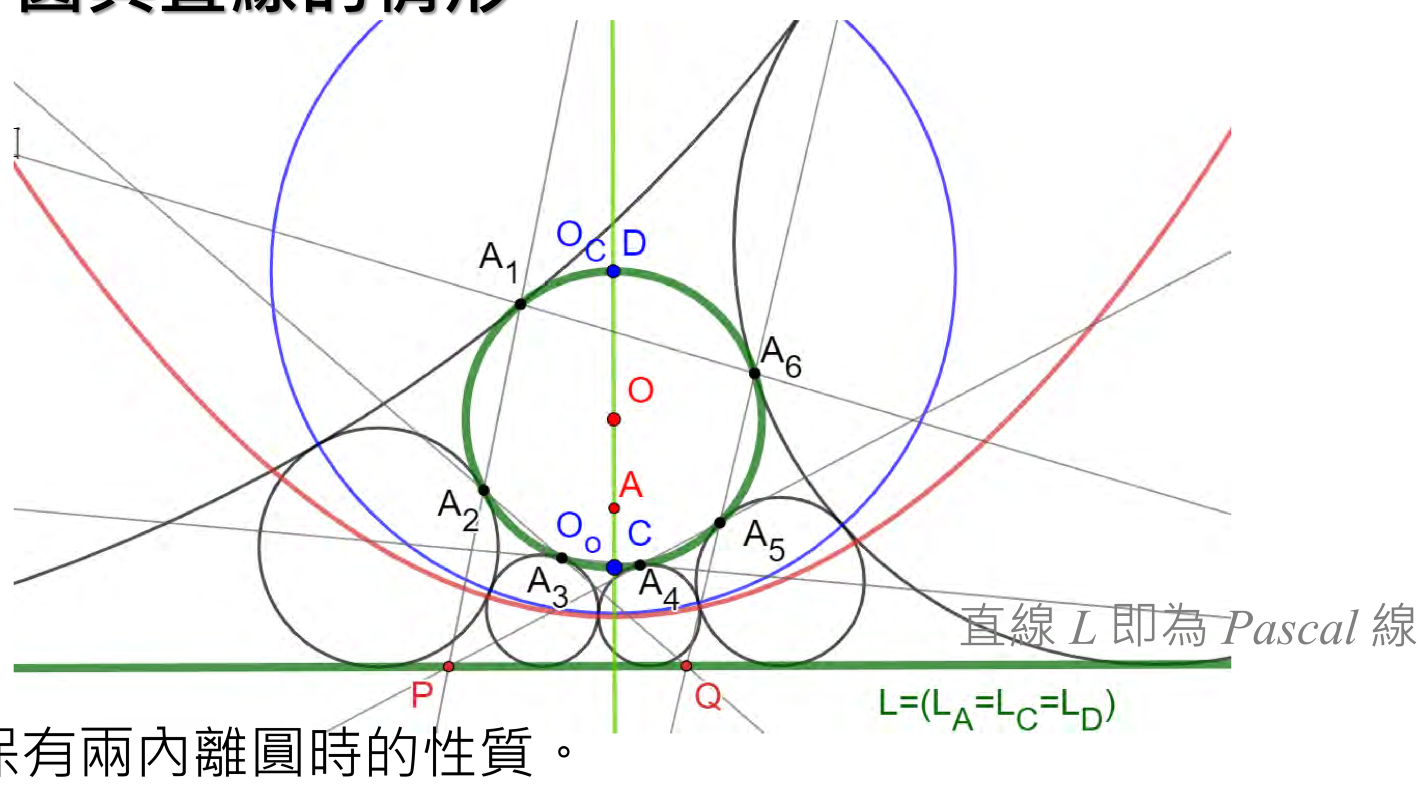
▲以雙心七圓為例，仍保有雙心$2n$圓之類似性質。

四、雙心多圓在兩外離圓及圓與直線的推廣

◆ 兩外離圓的情形

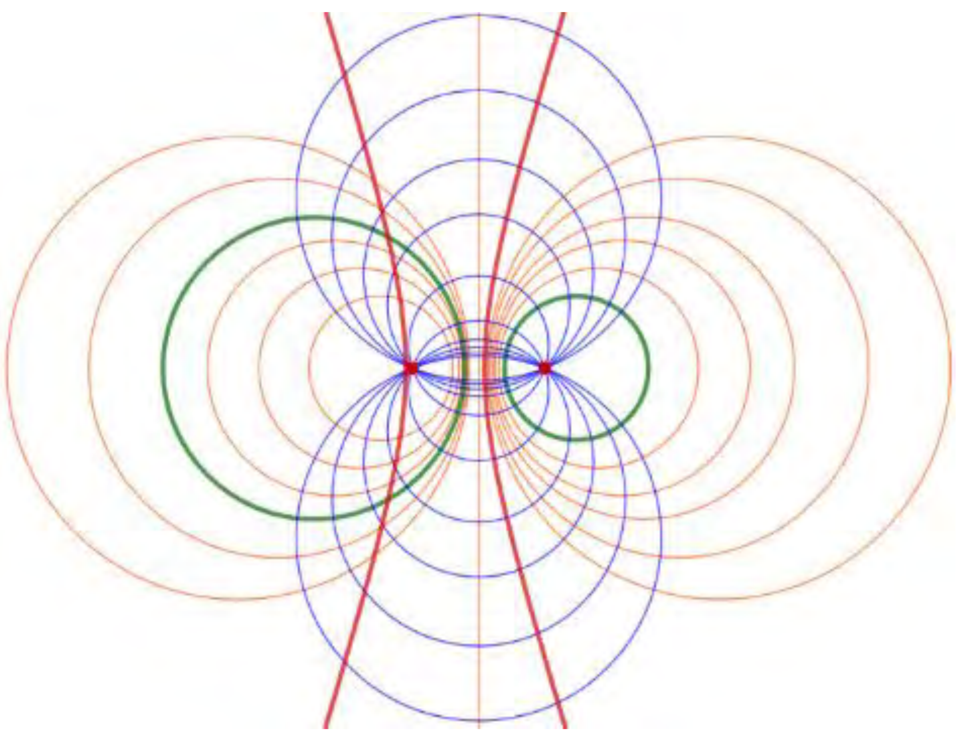


◆ 圓與直線的情形



▲以雙心六圓為例，仍保有兩內離圓時的性質。

◆ *Apollonius*圓族中的雙心多圓



▲以兩外離圓情形為例

◆ 雙心六圓的構成條件與共錐、共圓及共線方程式

類型	構成條件	環切圓的**圓心共錐**	/ **鄰切點共圓**	**共*Pascal*線**
兩內離圓 $O(0,0)$ $O'(d,0)$ $d=\overline{OO'}$	$r=\dfrac{5R-\sqrt{16R^2+9d^2}}{3}$ $0\le d<R-r$	$\dfrac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{\frac{(R+r)^2}{4}}+\dfrac{y^2}{\frac{(R+r)^2-d^2}{4}}=1$	$\left(x-\dfrac{Rd}{R+r}\right)^2+y^2=\dfrac{Rrd^2}{(R+r)^2}$	$x=\dfrac{d^2+R^2-r^2}{2d}$
兩外離圓 $O(0,0)$ $O'(d,0)$ $d=\overline{OO'}$	$r=\dfrac{-5R+\sqrt{16R^2+9d^2}}{3}$ $d>R+r$	$\dfrac{\left(x-\frac{d}{2}\right)^2}{\frac{(R-r)^2}{4}}-\dfrac{y^2}{\frac{d^2-(R-r)^2}{4}}=1$	$\left(x-\dfrac{Rd}{R-r}\right)^2+y^2=Rr\left(\dfrac{d^2}{(R-r)^2}-1\right)$	$x=\dfrac{d^2+R^2-r^2}{2d}$
圓與直線 $O(0,0)$ $d=d(O,L)$	$r=\frac{3d}{5}$，$d>r$	$y^2=-2(d+R)\left(x-\frac{d+R}{2}\right)$	$(x+R)^2+y^2=2R(d+R)$	$x=d$

伍、研究結論

正如本研究作品名稱 “**渾「圓」有「定」**” ，從七圓定理一堆渾圓中，其對應內切點連線共點的現象，推廣至兩內離圓、兩外離圓及圓與直線等情形的雙心六圓，發現諸多共點、共線、共圓、共錐，且有定點、定線之不變性，以至雙心多圓也成立。茲將重要結論摘列如下：

一、相鄰外切的六個小圓內切或外切於大圓的七圓定理，對應切點連線共交一點，稱之為*Stanley*點，就是*Brianchon*點，與*Pascal*線互為極點極線。

二、藉由極限點推導構成條件，作出兩圓(內離、外離)或圓與直線等情形的雙心n圓，有下列性質：

（一）環切圓的圓心共錐(橢圓、雙曲線、拋物線)，鄰切點共圓，且均固定不動。

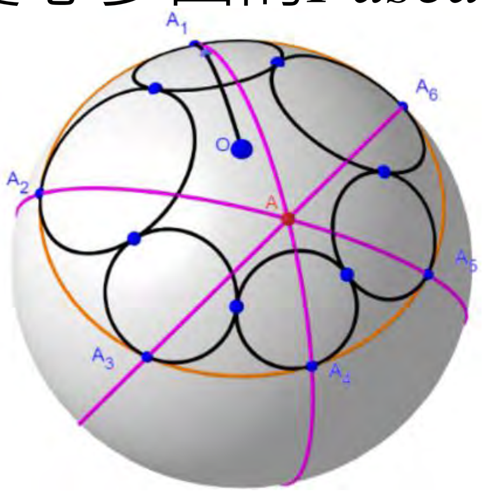
（二）任一個環切圓與兩定圓(或圓與直線)的切點連線共點，且恰為鄰切點共圓的圓心。

（三）任兩個環切圓的內切點、外切點與鄰切點中，任選兩種對應切點均分別四點共圓。

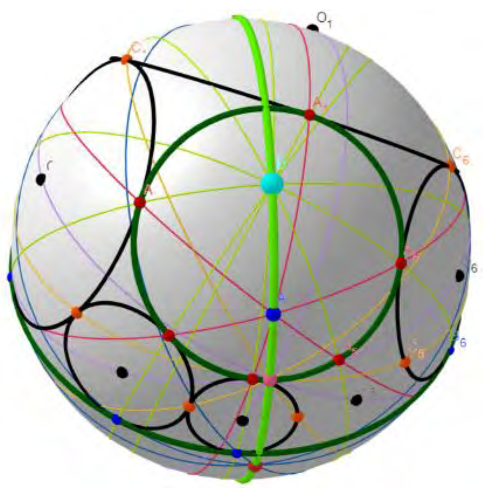
（四）若 n 為偶數，則對應內切點、對應外切點、對應鄰切點、對應環切圓圓心均分別連線共點；若 n 為奇數，則上述各點均分別與對應的鄰切點連線共點。

（五）上述共點，即分別為其所構成的**不同雙心*n*邊形的*Brianchon*點**，在連心線上形成*Brianchon*線；但其卻**共同一條*Pascal*線**。當環切圓轉動時，這些共點、共線均保持不動，**恆為定點、定線**。

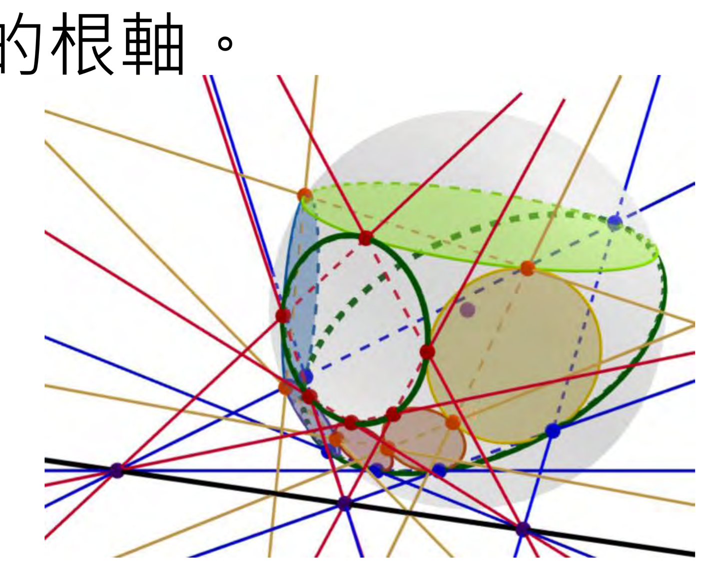
三、雙心多圓的*Pascal*線同時為其在***Apollonius***圓族中的根軸。



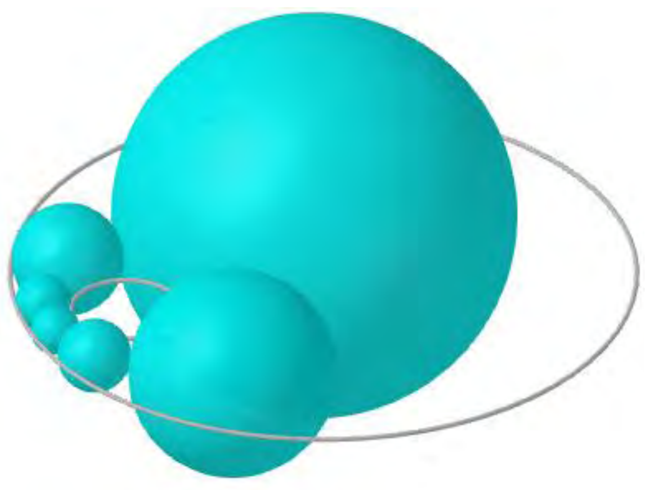
▲球面上的七圓定理



▲球面上的雙心六圓之共點情形



▲球面上的雙心六圓之共線情形



▲球心在同一平面上的 七圓定理

陸、未來展望

若將本研究推廣至空間中的球面或球體，則諸點共線、諸線共點及諸點共圓的性質能否成立？或有更令人意想不到的發現？若將環切圓想像是一個系統運轉的星體，從上述可發現縱使在**渾圓的系統**中運作，也必存在諸多「**共定點、定線、定圓或定圓錐曲線**」之不變性，透過幾何量關係的描述，或許有機會勾勒出一些天體運行所蘊藏的機制，諸如熱門的黑洞議題，值得日後進一步的探討。

柒、參考文獻

[1] 張霈萱(2016)。層出不窮的彩蛋有「心」「跡」—圓內接與外切多邊形及其遞延圖形性質探討；2016年臺灣國際科展作品。
[2] 趙文敏(1993)。幾何學概論。台北市：九章出版社。
[3] Limiting Point -- from Wolfram MathWorld　http://mathworld.wolfram.com/LimitingPoint.html
[4] Stanley Rabinowitz(1987) 。The Seven Circles Theorem, with a proof based on Ceva's,Reprinted from the Pi Mu Epsilon Journal, 8(1987)441–449.