

# 中華民國第 59 屆中小學科學展覽會 作品說明書

---

高級中等學校組 數學科

050412

逐鹿中原

學校名稱：國立花蓮高級中學

作者： 高二 董少鈞 高二 王力得	指導老師： 邱培杰
-------------------------	--------------

關鍵詞：最佳路徑

## 摘要

此次研究我們主要針對史坦因豪斯於 1963 年出版書中所提到的馬戲團問題進行研究，書中敘述如下：

小孩在草地邊玩耍時，小丑沿著高速公路從森林中向草地前進，小孩希望跑到高速公路來盡可能接近小丑，所有小孩皆以等速前進且小丑速度比他們快。問題如下:(a)畫線來分隔可以碰到小丑者與不能碰到小丑者的區域(b)給予恰可以碰到小丑者跑動路徑來碰到小丑(c) 給予不能碰到小丑者跑動路徑來盡可能接近小丑。

## 壹、研究動機

今年春節時，美國正在舉辦一年一度的美式足球超級盃，美式足球不外乎就是接球員要想盡辦法衝進達陣區而防守者則要盡力阻止接球員，因此我們想要探討防守者該如何跑位才能捉住接球員。我們在尋找文獻時剛好在期刊上看到早在 1963 年 H. Steinhaus 便在著作 100 Problems in Elementary Mathematics 中提到了類似的問題，當時他並未解答，因此本次研究主要便依循著他的問題做延伸，尋求解答。

## 貳、研究目的

一、找出作者在原文中所提問題之解答並延伸子題

(一) draw the line separating the part of the meadow from which is possible to reach the clown from the remaining part and give the course of running for the children standing on the line.

(二)小孩能碰到小丑時:

- 1.於何時碰到?
- 2.於何點碰到?
- 3.是否存在其他點使得小孩碰到小丑?

(三)小孩不能碰到小丑時:

1.小孩走一直線時最接近的時刻為?

2.指定某一時刻，小孩一開始選擇哪一條直線於此時最接近小丑?

3.運用前面兩點，求出小孩走某線時於某時刻能最接近小丑。

二、探討小丑走圓路徑時，小丑和小孩的相遇情形。

三、在兩者碰不到的前提下，若使小孩走一直線，則兩者所連線所掃過面積為何?  
並且面積輪廓為何種曲線?

## 參、研究設備與器材

一、電腦

二、Geodebra 數學軟體

三、紙、筆

四、Dev C++

## 肆、研究過程

一、名詞定義:

(一)可碰區與不可碰區:

從此區域出發，能碰到小丑的區域稱為「可碰區」，反之稱為「不可碰區」。

(二)可碰線

區分可碰區與不可碰區的邊界稱為可碰線，其中，可碰區包含可碰線。

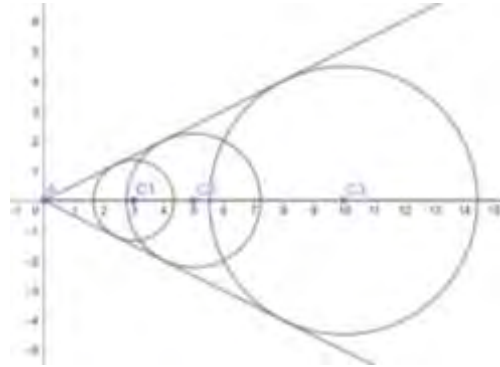
二、通設

(一)在此次研究中，小丑座標皆為 A，小孩座標皆為 B，以下簡稱為 A 點及 B 點

(二) 在此次研究中，小丑速度皆以  $v$  表示，小孩速度皆以  $\mu$  表示，並且  $v > \mu$

三、 過程想法與證明:

(一)小孩能碰到小丑時



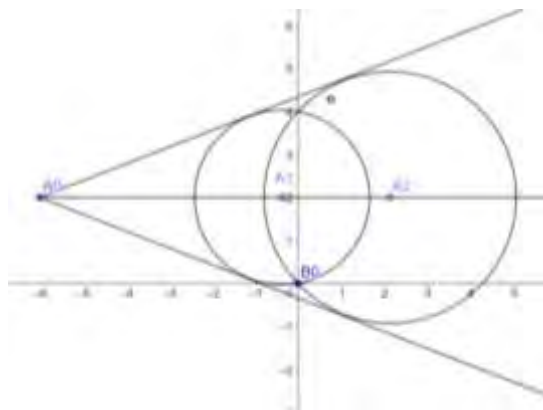
圖(一):

1.概念:

如圖(一)，若當 A 沿射線走到  $C_1$  點耗時  $t_1$ ，則  $\overline{AC_1} = vt_1$ ，則以  $C_1$  為圓心， $\mu t_1$  為半徑的圓周上，若 B 點以此圓周上一點為出發點，皆可於  $C_1$  點碰到 A，同理於此射線上其他的任意點  $C_i$ ，則  $U(X|X \text{ 位於圓 } C_i \text{ 內或圓 } C_i \text{ 上})$  即為可碰區，另外這些圓的包絡線為兩相交直線即為可碰線。

2.證明:.

如圖(二)，假設 B 由  $(0,0)$  出發，A 由  $(x_0, k)$  (其中  $x_0 < 0$ ) 沿著  $y = k$  的  $+x$  方向出發，假設 A、B 於  $(x_1, k)$  相遇，



圖(二)

則我們可以得到①、②兩式

$$vt = x_1 - x_0 \dots \dots \textcircled{1}$$

$$\mu t = \sqrt{x_1^2 + k^2} \dots \dots \textcircled{2}$$

由①、②可得

$$t = \frac{x_1 - x_0}{v} = \frac{\sqrt{x_1^2 + k^2}}{\mu} \dots \dots \textcircled{3}$$

由③兩邊平方整理得到

$$(v^2 - \mu^2)x_1^2 + (2\mu^2x_0)x_1 + (k^2v^2 - \mu^2x_0^2) = 0$$

因此

$$x_1 = \frac{-(2\mu^2x_0) \pm \sqrt{(2\mu^2x_0)^2 - 4(v^2 - \mu^2)(k^2v^2 - \mu^2x_0^2)}}{2(v^2 - \mu^2)} \dots \dots \textcircled{4}$$

再由

$$t = \frac{x_1 - x_0}{v}$$

可求出

$$t = \frac{\frac{-(2\mu^2x_0) \pm \sqrt{(2\mu^2x_0)^2 - 4(v^2 - \mu^2)(k^2v^2 - \mu^2x_0^2)}}{2(v^2 - \mu^2)} - x_0}{v} \dots \dots \textcircled{5}$$

由④、⑤兩式可知:

- (1)若判別式大於0，小孩位於可碰區內，有兩個可碰點。
- (2)若判別式小於0，小孩位於可碰區外，沒有可碰點。
- (3)若判別式等於0，小孩位於可碰區內，有一個可碰點。

於此證明完問題一之(二)

此外，因為可碰區

$$\rightarrow \text{判別式 } D \geq 0 \rightarrow (2\mu^2x_0)^2 - 4(v^2 - \mu^2)(k^2v^2 - \mu^2x_0^2) \geq 0$$

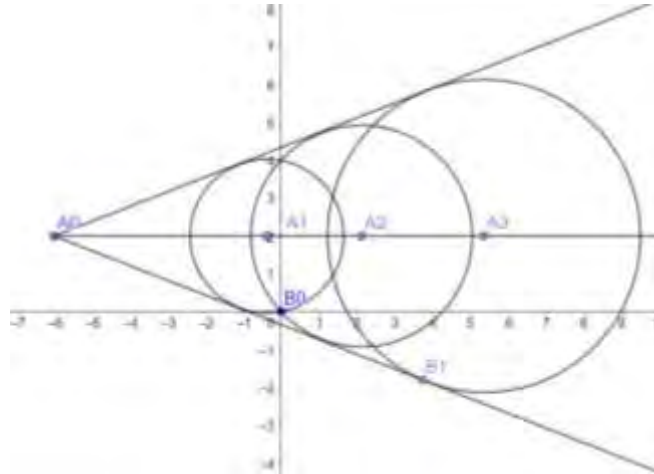
化簡得到

$$\frac{\mu}{v} \geq \frac{k}{\sqrt{x_0^2 + k^2}} = \sin \theta$$

於此求得可碰線為兩條自 A 點發射兩條斜率為  $\pm \frac{\mu}{\sqrt{v^2 - \mu^2}}$  的射線，

並且在可碰線上的小孩應走切圓的半徑來碰到小丑。

於此問題一之(一)證畢



圖(三)

於此證完問題一之(一)

(二)小孩不能碰到小丑時

1.小孩走一直線時最接近的時刻

由題意設  $A(vt, 0)$

$$B(a + \mu \cos \theta t, b + \mu \sin \theta t)$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(v^2 + \mu^2 - 2v\mu \cos \theta)t^2 + 2(b\mu \sin \theta - av)t + (a^2 + b^2)}$$

令

$$\frac{d\overline{AB}}{dt} = \frac{\frac{1}{2}[2(v^2 + \mu^2 - 2v\mu \cos \theta)t + 2(b\mu \sin \theta - av)]}{\sqrt{(v^2 + \mu^2 - 2v\mu \cos \theta)t^2 + 2(b\mu \sin \theta - av)t + (a^2 + b^2)}} = 0$$

其中，因為小孩不能碰到小丑， $\overline{AB} > 0$ ，

上式可改寫為

$$(v^2 + \mu^2 - 2v\mu \cos \theta)t + (b\mu \sin \theta - av) = 0$$

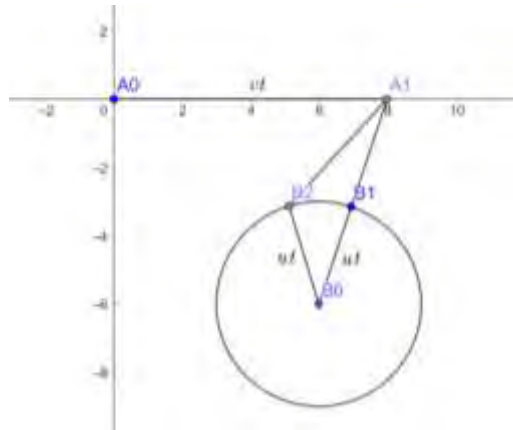
則

$$t = \frac{av - b\mu \sin \theta}{(v^2 + \mu^2 - 2v\mu \cos \theta)}$$

2. 指定某一時刻，小孩一開始選擇哪一條直線於此時最接近小丑

(1) 概念

如圖(四)，小丑由 $A_0$ 出發經過  $t$  時到達 $A_1$ ，同一時間 B 由 $B_0$ 出發經過 $t$ 時，則 B 可能位於以 $B_0$ 為圓心， $\mu t$ 為半徑的圓周上，則 $\overline{B_0A_1}$ 為在 $t$ 時所求最小距離的路徑，像這樣的直線往後稱為 $L_b$ 。



圖(四)

(2) 證明

設 A 由 $A_0$ 出發經過  $t$  時到達 $A_1$ ，同一時間 B 由 $B_0$ 出發經過 $t$ 時

則 B 可能位於以 $B_0$ 為圓心， $\mu t$ 為半徑的圓周上

連 $\overline{B_0A_1}$ 交圓 $B_0$ 於 $B_1$ ，在圓上任取另外一點 $B_2$ ，則由三角形三邊長關係  
可得知

$$\begin{aligned} \overline{B_0B_2} + \overline{B_2A_1} &> \overline{B_0A_1} \\ \rightarrow \mu t + \overline{B_2A_1} &> \mu t + \overline{B_1A_1} \\ \rightarrow \overline{B_2A_1} &> \overline{B_1A_1} \end{aligned}$$

因此 $B_1$ 在 $t$ 時比其他點更接近 $A_1$ ，即 $\overline{B_0A_1}$ 為在 $t$ 時所求最小距離的路徑。

3. 運用前面兩點，求出小孩走某路線時於某時刻能最接近小丑。

為了得到解答，我們嘗試從前面兩點切入。一開始由第 1 點切入時想法為由求出的最近時刻  $t$  帶入其距離  $d$  求最小值，但後來發現函數過於複雜，並不好求，於是轉而嘗試以第 2 點解決問題，並輔以一些證明。

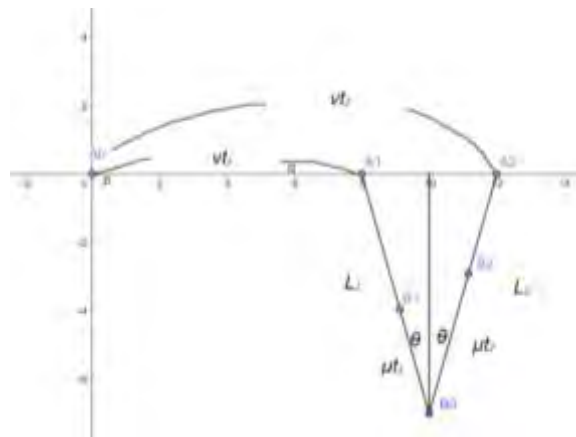
(1) 設第 3 點所要找的這條直線稱之為  $L_{goal}$ ，最短距離為  $d_{goal}$ ，

則易知  $L_{goal}$  必為指定某時刻的最佳路徑

(2)  $L_{goal}$  的斜率  $m \geq 0$

證明:

如圖(五)，設  $L_1$  為  $t_1$  時的  $L_b$ ，斜率  $m_1 < 0$ ，且  $L_1$  為  $L_{goal}$ ，



圖(五)

則作  $L_2$  為  $L_1$  對過 B 點 X 軸垂線的對應線，且  $L_2$  交 X 軸於  $A_2$

$$\text{設 } \overline{B_0A_1} = \overline{B_0A_2} = q$$

依據第 2.- (2) 證明且  $L_1$  為  $L_{goal}$  之假設，當  $t = t_1$ ，A 位於  $A_1$  時，B 位於  $B_1$ ，

$$\text{此時 } d_{goal} = \overline{B_1A_1} = q - \mu t_1$$



而當  $t = t_2$ ，A 位於  $A_2$  時，B 位於  $B_2$ ， $\overline{B_2A_2} = q - \mu t_2$

$$\because t_2 > t_1$$

$$\therefore \overline{B_1A_1} > \overline{B_2A_2}$$

$\rightarrow L_1$  不是  $L_{goal}$

$L_{goal}$  的斜率  $m \geq 0$  得證

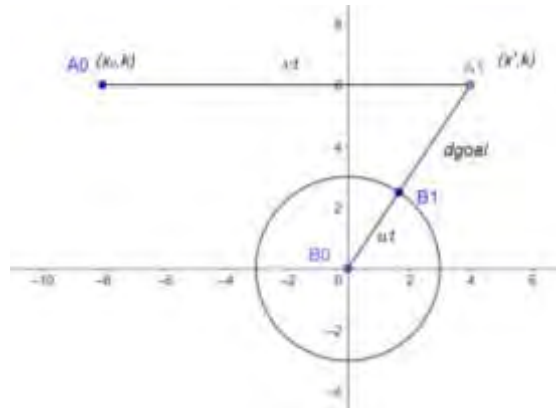
(3) 求出  $L_{goal}$  及  $d_{goal}$

如圖(六)，設當 A 由出發點  $(x_0, k)$  跑至  $A_1(x', k)$  時有  $d_{goal}$ ，依據第 2.- (2)

證明， $L_{goal}$  為  $A_1$  和  $B_0$  之連線，

並設此時 B 由  $(0, 0)$  已跑至  $B_1$ 。可知  $\overline{A_1A} = x' - x_0$ ， $\overline{A_1B_0} = \sqrt{x'^2 + k^2}$

求出 A 跑至  $A_1$  之所花時間  $t = \frac{x' - x_0}{v}$



圖(六)

則有  $d_{goal}$  時， $d_{goal} = \overline{A_1B_1} = \sqrt{x'^2 + k^2} - \frac{\mu(x' - x_0)}{v}$

我們欲求出  $d_{goal}$  之最小值，於是考慮對  $x'$  微分令其為 0 可得極值。

$$\overline{A_1B_1} = \sqrt{x'^2 + k^2} - \frac{\mu(x' - x_0)}{v}$$

$$\frac{d\overline{A_1B_1}}{dx'} = \frac{2x'}{2\sqrt{x'^2 + k^2}} - \frac{\mu}{v} = 0$$

移項後兩邊平方

$$\frac{x'^2}{x'^2 + k^2} = \frac{\mu^2}{v^2}$$

整理後求得  $x' = \pm \mu k \sqrt{\frac{1}{v^2 - \mu^2}}$

代入  $\frac{2x'}{2\sqrt{x'^2 + k^2}} - \frac{\mu}{v} = 0$  可知負不合，為增根

$\therefore x' = \mu k \sqrt{\frac{1}{v^2 - \mu^2}}$  時有極值

為求出此點為最大值亦或最小值，對函數二次微分為  $\frac{k^2}{(x'^2 + k^2)^{3/2}}$ ，

代入  $x' = \mu k \sqrt{\frac{1}{v^2 - \mu^2}}$  得到二次微分在此點大於 0，因此此點為最小值。

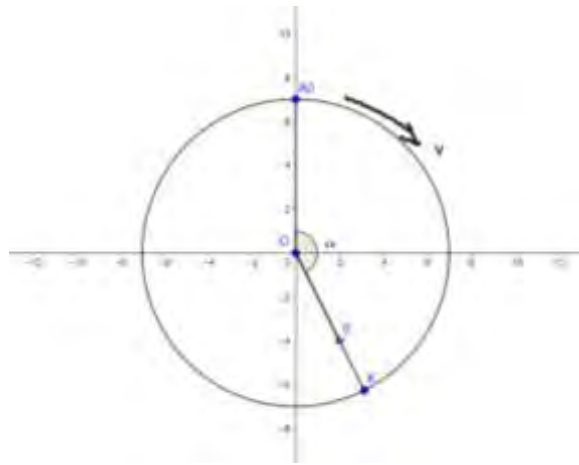
此也符合  $L_{goal}$  的斜率  $m \geq 0$  之證明

於此，我們也能輕易表示  $L_{goal}$ 、 $t$ 、 $d_{goal}$

令我們意外的是， $d_{goal}$  發生時  $x'$  之值和  $x_0$  毫無關係，也就是說 A 點的起始  $x$  座標並不造成  $d_{goal}$  數值影響。

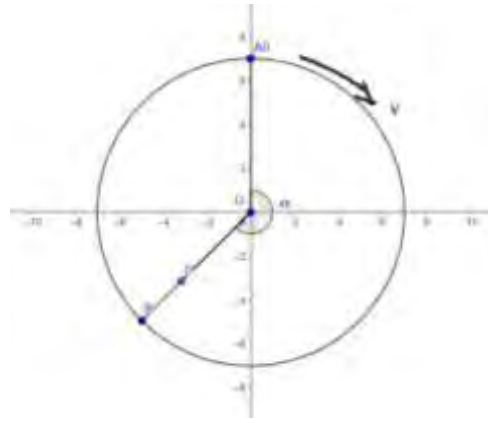
(三) 探討 A 走圓路徑時，A 和 B 的相遇情形

### 1. 總述



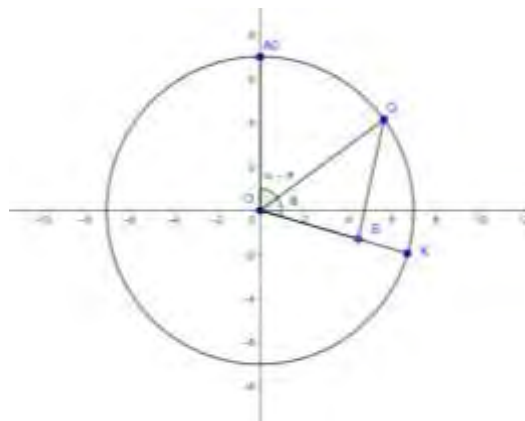
圖(七)

如圖(七)，為方便研究，設 A 起始位置為  $A_0$ ，沿一半徑為  $r$  之圓以  $v$  速順時鐘等速移動，而 B 點的起始位置距離圓心 O 的距離為  $b$ ，且 B 沿一直線以  $\mu$  等速移動，在此我們一樣假設  $v > \mu$ 。 $\overrightarrow{OB}$  和圓 O 交於 K 點，而設 A 延圓周運動碰到 K 點時所走的角徑(rad)為  $\alpha$ 。在  $\alpha < \pi$  時， $\overrightarrow{OA}$  和  $\overrightarrow{OB}$  的夾角會等於  $\alpha$ 。



圖(八)

但當 $\alpha > \pi$ 時， $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的夾角就是 $2\pi - \alpha$ 了(如圖(八))，為避免謬誤，我們將 $\alpha$ 嚴謹定義，假設 A 和 B 在 Q 點可以相碰，則設此時 $\overrightarrow{OQ}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的夾角為 $\theta$ (如圖(九))，



圖(九)

時間為  $t$ ，可以寫出以下方程式：

$$\mu t = \sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta} = f(\theta)$$

$$vt = (\alpha + \theta)r = g(\theta)$$

兩式相除將  $t$  消掉可得

$$\frac{\mu}{v} = \frac{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}}{(\alpha + \theta)r}$$

發現 $\theta$ 並不好解，且用三角函數也不好表示，於是轉而研究其性質。

我們發現 $\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}$ 對 $\theta$ 作微分後可得

$$f'(\theta) = \frac{d(\mu t)}{d\theta} = \frac{br \sin \theta}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}}$$

其中  $f'(0) = f'(\pi) = 0 (a \neq r)$ ，將其他任意  $\theta$  代入可知  $f(0)$  為最小值， $f(\theta)$  為最大值

再將  $f'(\theta)$  微分得

$$f''(\theta) = \frac{f'(\theta)}{d\theta} = \frac{br \cos \theta \sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta} - \frac{(br \sin \theta)^2}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}}}{b^2 + r^2 - 2br \cos \theta}$$

發現  $f''(\theta) = 0$  時， $\cos \theta = \frac{r}{b}$  或  $\frac{b}{r}$ ，視  $b$  和  $r$  的大小關係，只會有一值合理，意味著當  $0 \leq \theta \leq \pi$  或  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$  時， $d(\mu t)$  會有一極值(將其他  $\cos \theta$  代入可知此為最大值)，意即當  $\theta$  由 0 開始增大時， $d(\mu t)$  會先遞增，當  $\cos \theta =$  極值時， $d(\mu t)$  則開始遞減，並且

$$f'(0) = f'(\pi) = 0 (b \neq r), f'(\cos^{-1} \frac{r}{b}) = r, f'(\cos^{-1} \frac{b}{r}) = b$$

再來看  $g'(\theta) = \frac{d(vt)}{d\theta} = r$ ，明顯是定值，不隨  $\theta$  改變，則  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)} = \frac{\frac{d(\mu t)}{d\theta}}{\frac{d(vt)}{d\theta}}$  最大值為

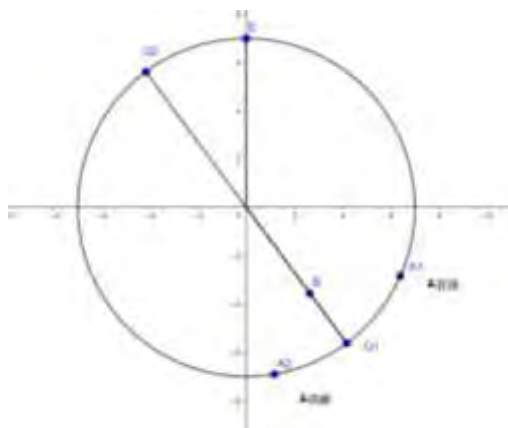
$$1 (r \leq b) \text{ 或 } \frac{b}{r} (b \leq r)$$

依此性質，我們可以做下列討論：

## 2 討論

### (1) 定義：

- (i) A 在 B 後：在圓周上定某一點 R，A、B 從起始位置開始向 R 移動時，當 B 走至 R 時，A 點在順著移動方向移動到  $A_0$  前能碰到 R 的話，就定義在此點 R 時 A 在 B 後 (B 在 A 前)，反之則定義為 A 在 B 前 (B 在 A 後)(如圖(十))。



圖(十)

(ii)、 $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  上升/下降區間： $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  遞增的角度範圍稱為上升區間，常簡記為  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)} \uparrow$ ； $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  遞減的角度範圍稱為下降區間，常簡記為  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)} \downarrow$ 。

(iii)、 $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  發生轉變：當  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  由遞增變為遞減，或由遞減變為遞增時，定義此時  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  發生轉變。

(iv)、A、B 位置發生轉變：A、B 的前後位置發生互換時，即定義為 AB 位置發生轉變。若 A、B 位置發生兩次轉變，則視沒發生轉變。

(2) 當  $d(\mu t)$  增加時， $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  也跟著增加 ( $\because d(vt)$  不變)，表示在每一個微小的  $\theta$  內 B 點要走的距離相較 A 點來說越來越長，所以當  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)} \geq \frac{\mu}{v}$  且  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  遞增時，隨著  $\theta$  增大，B 離在前面的 A 越來越遠 (或是會漸漸被在後面的 A 追上)。同理也能說明  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)} \leq \frac{\mu}{v}$  且  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  遞減的情況。因此，當 A 和 B 有機會碰到時，假如在碰到的前  $\Delta\theta$  角度 A 在 B 前面，那此時的  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  應  $\geq \frac{\mu}{v}$ ；相對地，假如在碰到的前  $\Delta\theta$  角度 A 在 B 後面，那此時的  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  應  $\leq \frac{\mu}{v}$ 。以此討論，可得出下列表。其中第一行以及第一列表目前狀態，而表格內箭頭表  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  在上升或下降，表格內的數字即是在  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  發生轉變前 A、B 可能的可碰點數量：

	$\frac{d(\mu t)}{d(vt)} > \frac{\mu}{v}$	$\frac{d(\mu t)}{d(vt)} < \frac{\mu}{v}$
A 在 B 前	0 $\uparrow$	$\leq 2$ $\uparrow$
	$\leq 1$ $\downarrow$	$\leq 1$ $\downarrow$
A 在 B 後	$\leq 1$ $\uparrow$	$\leq 1$ $\uparrow$
	$\leq 2$ $\downarrow$	0 $\downarrow$

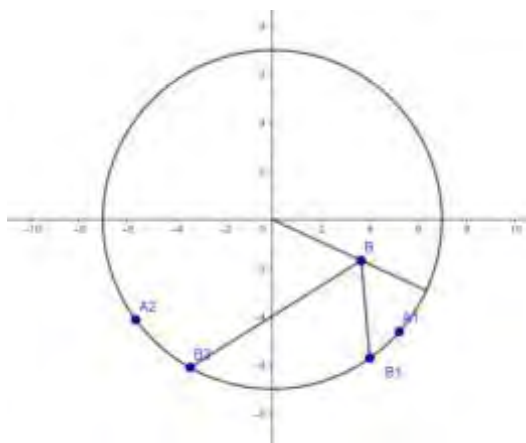
表格(1)

值得注意的是，儘管移動過程中可能 A、B 位置會發生轉變或  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  和  $\frac{\mu}{v}$  的大小關係會發生變化，

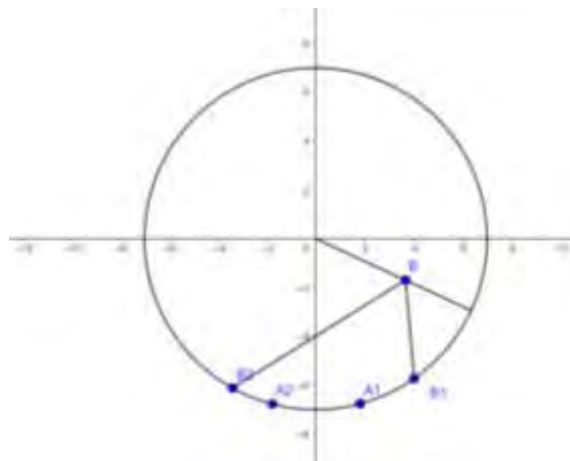
在  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  發生轉變前皆不需再慮新的狀態。只有在  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  發生轉變時才須重新判斷表格條件。

(3)易知當 A、B 在  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  上升/下降區間有 1 個可碰點的話，那 A、B 位置會發生轉變，反之若有 0 或 2 個可碰點，則 A、B 位置不發生轉變。

(4)當 B 走至圓周上兩點  $B_1$ 、 $B_2$  時，只要 A 分別在 B 的前面及後面，那 A、B 在  $B_1$ 、 $B_2$  間有可碰點(如圖(十一)、圖(十二))。我們後面會大量運用此處的討論(引理)



圖(十一)



圖(十二)

### 3.開始研究

我們發現，將 A 和 B 的相對位置分類來討論比較恰當，我們將其 2 種性質參數分類，分別為.1. 在圓內、圓外或圓周上(意即  $\overline{OB}$  和  $r$  的大小關係)2.  $\alpha$  角跟  $\pi$  的大小關係，我們先只就最簡單的狀況討論:

(1)  $\overline{OB} < r$  ,  $\alpha < \pi$

我們再將圓分為 3 個區塊(如圖(十三))，



圖(十三)

$S_1$  角度為  $\alpha$ ， $S_2$  角度為  $\pi$ ，而  $S_3$  的角度為  $\pi - \alpha$ ，而三區塊在圓周上分界點分別為  $Q_1$ 、 $Q_2$ 、 $Q_3$  ( $\overline{OQ_1}$ 、 $\overline{OQ_2}$ 、 $\overline{OQ_3} \notin \{S_1, S_2, S_3\}$ )。以此討論 A、B 在個別區塊的相碰情形：

(i)  $S_1$  區

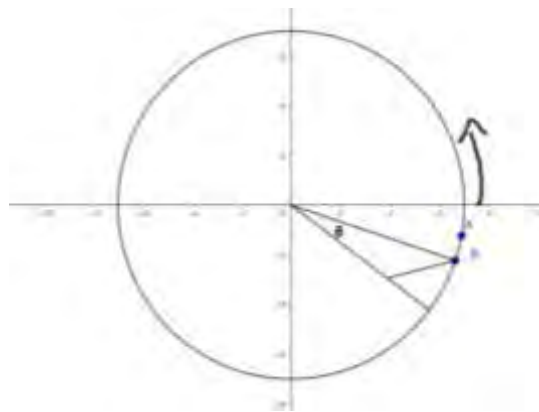
易知  $\overline{Bq_1}$  為 B 到圓周之最短距離，因此 A、B 於  $S_1$  區有可碰點的條件為

$$\frac{r-b}{\mu} < \frac{\alpha r}{V}$$

當  $\frac{r-b}{\mu} > \frac{\alpha r}{V}$  時，代表 B 沿  $\overline{OQ_1}$  移動走至  $Q_1$  時，A 點已經走超過  $\alpha r$  的距離了。而 B 走  $S_1$  內任一直線交圓於 K， $\overline{OK} > r - b$  且  $\widehat{IK} < \alpha r$ ，又  $\mu < V$ ，所以  $S_1$  內無可碰點。

當  $\frac{r-b}{\mu} = \frac{\alpha r}{V}$  時，A、B 恰會在  $q_1$  相碰，而又和上面說明相同，A、B 在  $S_1$  區無可碰點。

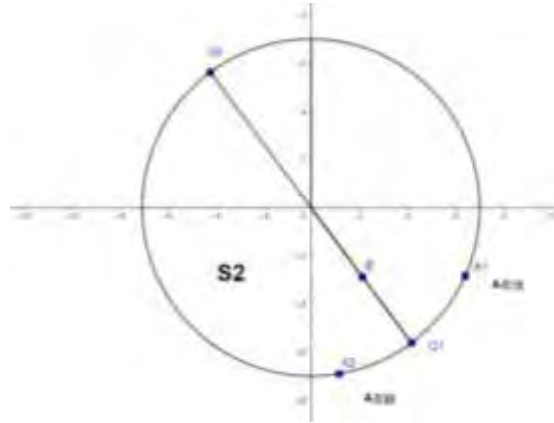
當  $\frac{r-b}{\mu} < \frac{\alpha r}{V}$  時，B 所走的距離隨  $\theta$  變長，而 A 則變短，又  $V > \mu$ ，所以至多有一個可碰點。



圖(十四)

(ii)  $S_2$  區

此時的  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)} < \frac{\mu}{v}$  且在  $\cos \theta = \frac{b}{r}$  時  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)} \uparrow$ ，假設 A 在後的話，則至多有 1 可碰點；若 A 在前，則至多有 2 可碰點(如圖(十五))。



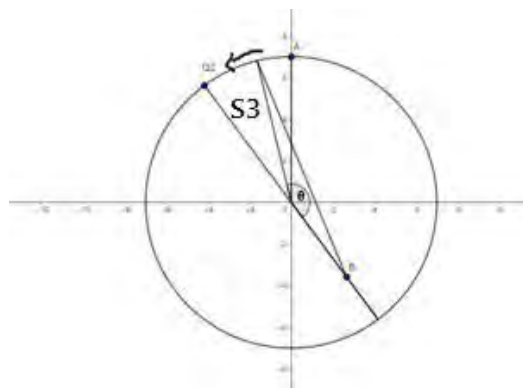
圖(十五)

當  $\cos \theta > \frac{b}{r}$  時，依  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  和  $\frac{b}{r}$  的大小比較關係，參考表格(1)之  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  下降區間，可得 A、B 之可碰點在不同條件下有 0~2 個之間

而依據  $\cos \theta < \frac{b}{r}$  時 A、B 位置前後情況以及 A、B 位置發生轉變與否，可在  $S_2$  得到最多 3 個可碰點，最少條件為  $Q_1$  點時 A 在 B 前，不論  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  是否  $> \frac{b}{r}$  都有可能 3 個可碰點。

(iii)、 $S_3$  區

此區的  $\theta$  會隨順時針逐漸減小，我們視為  $\overline{BA_0}$  為起始線，而 A 逆時鐘運動，並視  $Q_2$  為 A 之移動終點(如圖(十六))。



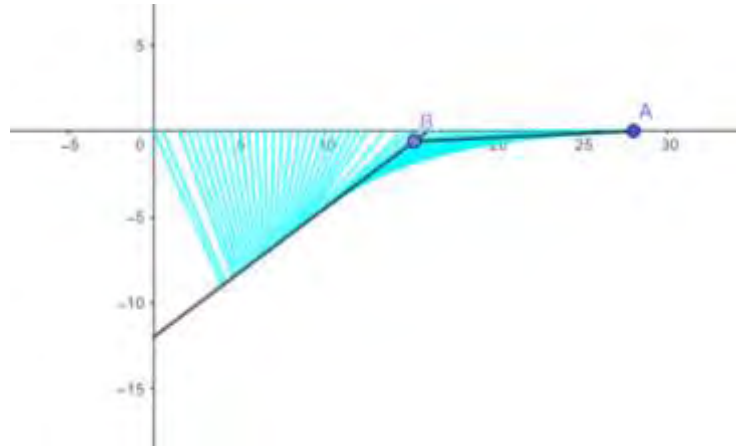
圖(十六)

假設  $\cos \alpha > \frac{a}{r}$ ，則只存在  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  下降區間，觀察表格(1)，可得最多有 2 可碰點。假設  $\cos \alpha < \frac{a}{r}$ ，則存在  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  上升區間及下降區間，最多有 3 個可碰點。



(四)若使小孩走一直線，則兩者所連線所掃過面積為何?並且面積輪廓為何種曲線?

由於小孩在跑動過程當中，有可能與其他小孩相互影響，即跑動過程中對於小丑的視線被其他小孩擋住，因此，若能將視線掃過範圍縮小，受到影響的機率便降低了。



圖(十七)

由題意令  $A(vt, 0)$ ,  $B(a + \mu t \cos \theta, \mu t \sin \theta - b)$

計算當A通過B路徑延長線與x軸交點時，兩者座標為何?

$$\frac{b - \mu t_1 \sin \theta}{vt_1 - a - \mu t_1 \cos \theta} = \tan \theta$$

$$t_1 = \frac{b + a \tan \theta}{v \tan \theta}$$

由上圖知掃過面積由兩斜線段及一曲線與x軸所圍成，定義 *Area of the envelope* 為曲線之線下面積。

顯而易見地，掃過面積為關於  $\theta$  的函數，掃過面積可表示為  $\text{Area}(\theta)$

$$\text{Area}(\theta) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu a \sin \theta + \mu b \cos \theta}{v \tan \theta} \right) \left[ 2b - \mu \sin \theta \frac{(a \tan \theta + b)}{v \tan \theta} \right] + \text{Area of the envelope}$$

令掃過面積表示為  $\text{Area}(t, \theta)$

為了計算 *Area of the envelope*，我們先算出  $\overrightarrow{AB}$  的方程式

$$\frac{x - vt}{vt - a - \mu t \cos \theta} = \frac{y}{b - \mu t \sin \theta}$$

整理成關於  $t$  的方程式

$$v\mu \sin \theta t^2 - (bv + \mu x \sin \theta + vy - \mu y \cos \theta)t + (bx + ay) = 0$$

由於 *envelope* 本身即為  $\overrightarrow{AB}$  的包絡線，若  $(x, y)$  使  $t$  只有一解即表示  $(x, y)$  為此時  $\overrightarrow{AB}$  的切點，

使所有(x, y)集合成一連續軌跡即為包絡線，因此連續軌跡 $f(x, y) = 0$ 即為 $\overline{AB}$ 的判別式為0，

$$(bv + \mu x \sin \theta + vy - \mu y \cos \theta)^2 - 4v\mu \sin \theta (bx + ay) = 0$$

整理後為下式

$$\begin{aligned} \mu^2 \sin^2 \theta x^2 + 2(\mu v \sin \theta - \mu^2 \sin \theta \cos \theta)xy + (v - \mu \cos \theta)^2 y^2 - 2b\mu v \sin \theta x \\ + 2(bv^2 - bv\mu \cos \theta - 2av\mu \sin \theta)y + b^2 v^2 = 0 \end{aligned}$$

由此可知曲線為一橢圓，

將方程式改寫成

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

則

$$y = \frac{-Bx - E + \sqrt{(Bx + E)^2 - 4C(Ax^2 + Dx + F)}}{2C}$$

其中因為 $B^2 = 4AC$

$$y = \frac{-Bx - E + \sqrt{(2BE - 4CD)x + E^2 - 4CF}}{2C}$$

對x做積分

$$\int y \cdot dx = \frac{-B}{4C} x^2 - \frac{E}{2C} x + \frac{1}{3C} \cdot \frac{[(2BE - 4CD)x + E^2 - 4CF]^{\frac{3}{2}}}{(2BE - 4CD)}$$

上界為B點y座標為0時， $x = a + b \cot \theta$

下界為A通過B路徑延長線與x軸交點時， $x = a + \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta}$

代入方程式中

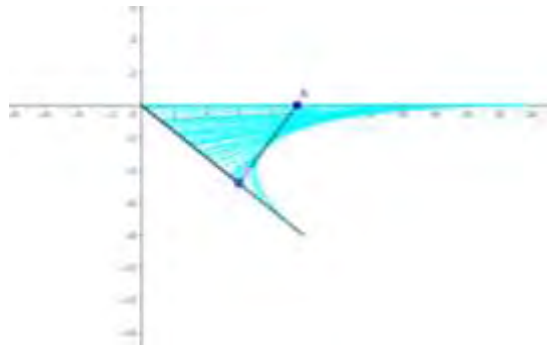
Area of the envelope

$$\begin{aligned} &= \frac{B}{4C} \left[ (a + b \cot \theta)^2 - \left( a + \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right)^2 \right] + \frac{E}{2C} \left( b \cot \theta - \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right) \\ &- \frac{[(2BE - 4CD)(a + b \cot \theta) + E^2 - 4CF]^{\frac{3}{2}} - [(2BE - 4CD)(a + \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta}) + E^2 - 4CF]^{\frac{3}{2}}}{3C(2BE - 4CD)} \end{aligned}$$

Area( $\theta$ )

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu a \sin \theta + \mu b \cos \theta}{v \tan \theta} \right) \left[ 2b - \mu \sin \theta \frac{(a \tan \theta + b)}{v \tan \theta} \right] \\
 &+ \frac{B}{4C} \left[ (a + b \cot \theta)^2 - \left( a + \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right)^2 \right] + \frac{E}{2C} \left( b \cot \theta - \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right) \\
 &- \frac{[(2BE - 4CD)(a + b \cot \theta) + E^2 - 4CF]^{\frac{3}{2}} - [(2BE - 4CD)(a + \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta}) + E^2 - 4CF]^{\frac{3}{2}}}{3C(2BE - 4CD)}
 \end{aligned}$$

在此我們討論一種特殊情形(如圖(十八))



圖(十八)

由題意令 $A(vt, 0)$ ,  $B(a - \mu t \cos \theta, \mu t \sin \theta - b)$ , 這裡的 $\theta$ 為斜線與 $x$ 軸負向夾角。

設掃過面積為Area( $\theta$ ), 為了方便計算Area( $\theta$ ), 計算圖(十八)中曲線的方程式,

$$\frac{x - vt}{vt - a + \mu t \cos \theta} = \frac{y}{b - \mu t \sin \theta}$$

$$\mu v \sin \theta t^2 - (bv + \mu x \sin \theta + vy + \mu y \cos \theta)t + (bx + ay) = 0$$

由於envelope本身即為 $\overline{AB}$ 的包絡線, 若 $(x, y)$ 使 $t$ 只有一解即表示 $(x, y)$ 為此時 $\overline{AB}$ 的切點, 使所有 $(x, y)$ 集合成一連續軌跡即為包絡線, 因此連續軌跡 $f(x, y) = 0$ 即為 $\overline{AB}$ 的判別式為0,

$$(bv + \mu x \sin \theta + vy + \mu y \cos \theta)^2 - 4v\mu \sin \theta (bx + ay) = 0$$

在此, 只有當

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

曲線會通過 $B(a, -b)$

整理後為下式

$$\begin{aligned} & \mu^2 \sin^2 \theta x^2 + 2(\mu v \sin \theta + \mu^2 \sin \theta \cos \theta)xy + (v + \mu \cos \theta)^2 y^2 - 2b\mu v \sin \theta x \\ & + 2(bv^2 + bv\mu \cos \theta - 2av\mu \sin \theta)y + b^2v^2 = 0 \end{aligned}$$

由此可知曲線為一橢圓，

我們將坐標軸逆時鐘旋轉 90 度，新方程式可寫為

$$\begin{aligned} & \mu^2 \sin^2 \theta y^2 - 2(\mu v \sin \theta + \mu^2 \sin \theta \cos \theta)xy + (v + \mu \cos \theta)^2 x^2 - 2b\mu v \sin \theta y \\ & - 2(bv^2 + bv\mu \cos \theta - 2av\mu \sin \theta)x + b^2v^2 = 0 \end{aligned}$$

將方程式改寫成

$$Px^2 + Qxy + Ry^2 + Sx + My + N = 0$$

則

$$y = \frac{-Qx - M + \sqrt{(Qx + M)^2 - 4R(Px^2 + Sx + N)}}{2R}$$

其中因為  $Q^2 = 4PR$

$$y = \frac{-Qx - M + \sqrt{(2QM - 4RS)x + M^2 - 4RN}}{2R}$$

對  $x$  做積分

$$\int y \cdot dx = \frac{-Q}{4R}x^2 - \frac{M}{2R}x + \frac{1}{3R} \cdot \frac{[(2QM - 4RS)x + M^2 - 4RN]^{\frac{3}{2}}}{(2QM - 4RS)}$$

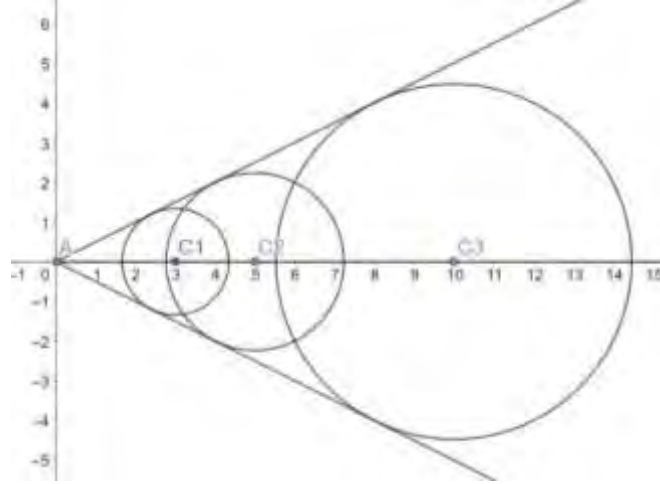
其中上界為  $b$ ，下界為  $0$ ，

$$\text{Area}(\theta) = \frac{-Q}{4R}b^2 - \frac{M}{2R}b + \frac{1}{3R} \cdot \frac{[(2QM - 4RS)b + M^2 - 4RN]^{\frac{3}{2}}}{(2QM - 4RS)} - \frac{1}{2}ab$$

## 伍、結論

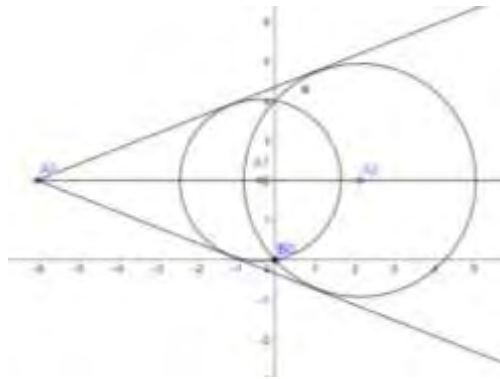
一、作者在原文中所提問題之解答

(一) 在原問題中，可碰線為自 A 點發射兩條斜率為  $\pm \frac{\mu}{\sqrt{v^2 - \mu^2}}$  的射線



而對於在可碰線上的小孩，則沿著可碰線以小孩出發點為切點的公切圓半徑走到兩可碰線的角平分線為唯一碰到小丑之方法。

二、子題結果



(一) 小孩能碰到小丑時

$$t = \frac{\frac{-(2\mu^2 x_0) \pm \sqrt{(2\mu^2 x_0)^2 - 4(v^2 - \mu^2)(k^2 v^2 - \mu^2 x_0^2)}}{2(v^2 - \mu^2)} - x_0}{v}$$

$$x_1 = \frac{-(2\mu^2 x_0) \pm \sqrt{(2\mu^2 x_0)^2 - 4(v^2 - \mu^2)(k^2 v^2 - \mu^2 x_0^2)}}{2(v^2 - \mu^2)}$$

其中當小孩初始位置在可碰線上時， $D = 0$ ，

$$x_1 = \frac{-(2\mu^2 x_0)}{2(v^2 - \mu^2)}$$

由

$$x_1 = \frac{-(2\mu^2 x_0) \pm \sqrt{(2\mu^2 x_0)^2 - 4(v^2 - \mu^2)(k^2 v^2 - \mu^2 x_0^2)}}{2(v^2 - \mu^2)}$$

可知，當小孩初始位置在可碰區時，有兩點可使小孩碰到小丑

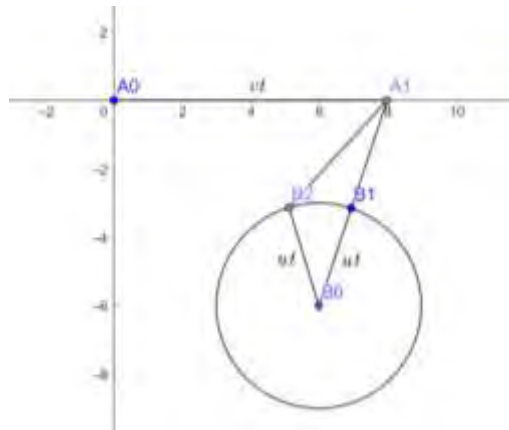
當小孩初始位置在可碰線上時，僅一點可使小孩碰到小丑

(二)小孩不能碰到小丑時

1.小孩走一直線時最接近的時刻為

$$t = \frac{av - b\mu \sin \theta}{(v^2 + \mu^2 - 2v\mu \cos \theta)}$$

2.指定某一時刻，小孩一開始選擇直線為出發點與小丑於此時的位置連線，於則此時最



接近小丑。

3.當 A 點走至  $A_1(\mu k \sqrt{\frac{1}{v^2 - \mu^2}}, k)$  時，此時 AB 間距離即為  $d_{goal}$ 。A 點的起始 x 座標並不影響  $A_1$ 。

(三)探討 A 走圓路徑時，A 和 B 的相遇情形

在  $v > \mu$ ， $OB < r$ ， $\alpha < \pi$  的條件下:

1.  $S_1$  區

有可碰點的充要條件為

$$\frac{r-a}{\mu} < \frac{\alpha r}{V}$$

在 S1 區之中，至多會有 1 可碰點

### 2.S<sub>2</sub>區

依據  $\cos \theta < \frac{a}{r}$  時 A、B 位置前後情況以及 A、B 位置發生轉變與否，可在 S<sub>2</sub> 得到最多 3 個可碰點，最少條件為 q<sub>1</sub> 點時 A 在 B 前，不論  $\frac{d(\mu t)}{d(vt)}$  是否  $> \frac{a}{r}$  都有可能 3 個可碰點。

### 3.S<sub>3</sub>區

假設  $\cos \alpha > \frac{a}{r}$ ，可得最多有 2 可碰點。假設  $\cos \alpha < \frac{a}{r}$ ，最多有 3 個可碰點。

(四)若使小孩走一直線，則面積輪廓出現的曲線為橢圓，

Area( $\theta$ )

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2} \left( \frac{\mu a \sin \theta + \mu b \cos \theta}{v \tan \theta} \right) \left[ 2b - \mu \sin \theta \frac{(a \tan \theta + b)}{v \tan \theta} \right] \\ &+ \frac{B}{4C} \left[ (a + b \cot \theta)^2 - \left( a + \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right)^2 \right] + \frac{E}{2C} \left( b \cot \theta - \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right) \\ &- \frac{[(2BE - 4CD)(a + b \cot \theta) + E^2 - 4CF]^{\frac{3}{2}} - [(2BE - 4CD) \left( a + \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right) + E^2 - 4CF]^{\frac{3}{2}}}{3C(2BE - 4CD)} \end{aligned}$$

另外，當

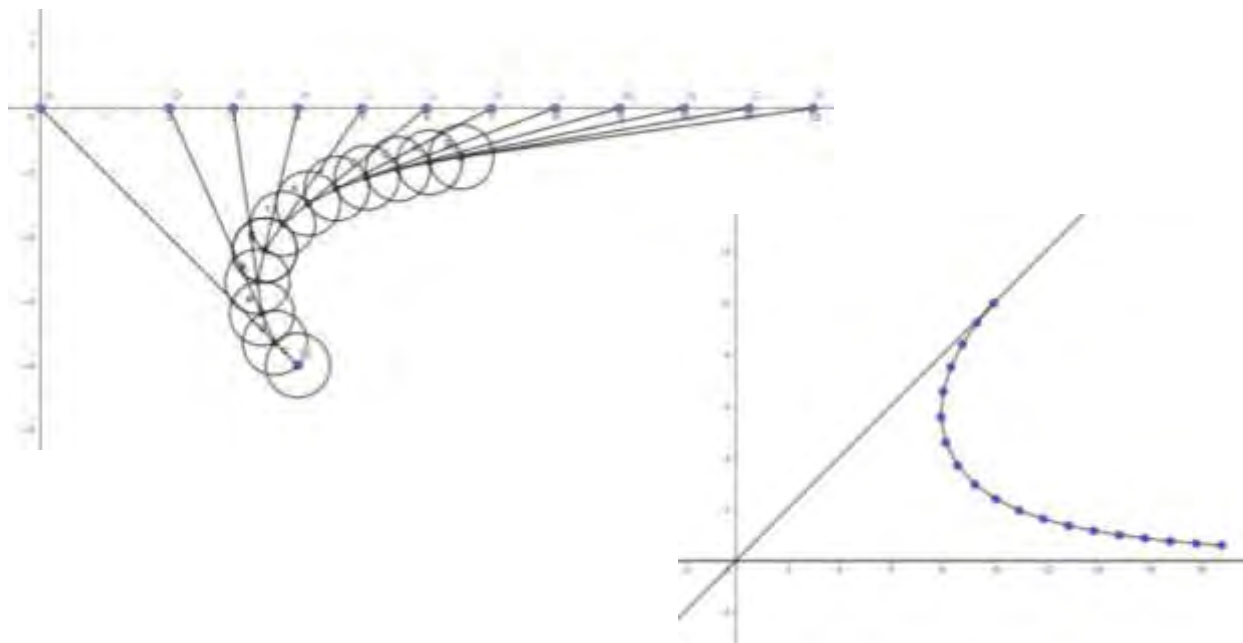
$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

$$\text{Area}(\theta) = \frac{-Q}{4R} b^2 - \frac{M}{2R} b + \frac{1}{3R} \cdot \frac{[(2QM - 4RS)b + M^2 - 4RN]^{\frac{3}{2}}}{(2QM - 4RS)} - \frac{1}{2} ab$$

## 陸、討論

### 一、未來展望

1.若小孩沿著每瞬間最佳路徑走，則其軌跡為何，我們試著處理這個問題，得到如下的



兩張圖，其中上圖為作圖法所得到的，下圖為利用 Dev C++跑出來的圖形(見附錄一)。

2.在問題 5 中，我們並未討論當 $\theta$ 值為何時， $\text{Area}(\theta)$ 有最小值，我們嘗試微分求解(見附錄二)，但方程式過於繁雜，並不好解。

## 柒、參考資料與其他

### 一、中文部分

#### 【期刊】

張鎮華(2007)·steinhaus 三角形——數學實驗的一個案例·數學學科中心電子報精選輯，95.8~96.12，178。

### 二、英文部分

#### 【書中的一篇文章】

H. Steinhaus(1963).the circus is coming ,100 Problems in Elementary Mathematics(pp.59-60).



## 捌、附錄

### 一、C++程式碼

```
1 #include <bits/stdc++.h>
2 #define PI 3.14159265358979
3 using namespace std;
4
5
6 double dis(double a_x, double a_y, double b_x)
7 {
8     return sqrt((b_x-a_x)*(b_x-a_x) + a_y*a_y);
9 }
10
11 int main()
12 {
13     freopen("out.txt", "w", stdout); // output answer to a txt file named 'out.txt'
14     double clock = 0.1; // check direction every 'clock' seconds
15     int tick = 2000; // give you 'tick' coordinates
16     double clown_speed = clock *1.5; // length clown goes every second
17     double henry_speed = clock *1.0; // length henry goes every second
18     double henry_x = 10.0; // initializes henry's x coordinate
19     double henry_y = 10.0; // initializes henry's y coordinate
20     double clown_x = 0.0; // initializes clown's x coordinate
21     printf("%.7lf,%.7lf,%.7lf\n", henry_x, henry_y, dis( henry_x, henry_y, clown_x));
22     while ( tick-- ) // do 'tick' times
23     {
24         clown_x += clown_speed;
25         if ( dis( henry_x, henry_y, clown_x) <= henry_speed )
26         {
27             henry_x = clown_x;
28             henry_y = 0;
29             printf("%.7lf,%.7lf,%.7lf\n", henry_x, henry_y, dis( henry_x, henry_y, clown_x));
30         }
31         else
32         {
33             double angle = atan2( henry_y, clown_x-henry_x); // the angle henry face
34             henry_x += henry_speed *cos(angle); // henry moves 'henry_x' toward +x direction
35             henry_y -= henry_speed *sin(angle); // henry moves 'henry_y' toward +y direction
36             printf("%.7lf,%.7lf,%.7lf\n", henry_x, henry_y, dis( henry_x, henry_y, clown_x));
37         }
38     }
39     return 0;
40 }
```

### 二、斜率大於 0 的微分

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4C^2} \cdot \left\{ C \cdot \left[ (2\mu v \cos \theta - 2\mu^2 \cos 2\theta) \cdot \left( (a + b \cot \theta)^2 - \left( a + \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right)^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + B \left[ 2(a + b \cot \theta) \cdot (-b \csc^2 \theta) - 2 \left( a + \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right) \left( \frac{-a\mu}{v} \sin \theta + \frac{b\mu}{v} \left( a + \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right) \right) \right] \right] \right. \\
& \quad \left. - B \left( (a + b \cot \theta)^2 - \left( a + \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right)^2 \right) \cdot 2(v - \mu \cos \theta) \cdot \mu \sin \theta \right\} + \frac{1}{2C^2} \\
& \quad \cdot \left\{ C \cdot \left[ 2(bv\mu \sin \theta - 2av\mu \cos \theta) \left( b \cot \theta - \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right) + E \left( -b \csc^2 \theta - \frac{a\mu}{v} \sin \theta + \frac{\mu b(-\sin \theta \tan \theta - \cos \theta)}{v \tan^2 \theta} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. - E \left( b \cot \theta - \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right) \cdot 2(v - \mu \cos \theta) \cdot \mu \sin \theta \right\} - \frac{1}{3C^2(2BE - 4CD)^2} \\
& \quad \cdot \left\{ C(2BE - 4CD) \right. \\
& \quad \cdot \left[ \frac{3}{2}((2BE - 4CD)(a + b \cot \theta) + E^2 - 4CF)^{\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \cdot [(a + b \cot \theta)[2(2\mu v \cos \theta - 2\mu^2 \cos 2\theta)E + B \cdot 2(bv\mu \sin \theta - 2av\mu \cos \theta) - 4[(v - \mu \cos \theta)\mu \sin \theta \cdot D + C(2bv\mu \cos \theta)]] \\
& \quad \left. \left. + (2BE - 4CD)(-b \csc^2 \theta) + 2E \cdot 2(bv\mu \sin \theta - 2av\mu \cos \theta) - 4F \cdot 2(v - \mu \cos \theta)\mu \sin \theta \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{3}{2} \left( (2BE - 4CD) \left( a + \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right) + E^2 - 4CF \right)^{\frac{1}{2}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[ \left( a + \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right) [2(2\mu v \cos \theta - 2\mu^2 \cos 2\theta)E + B \cdot 2(bv\mu \sin \theta - 2av\mu \cos \theta) \right. \\
& - 4[2(v - \mu \cos \theta)\mu \sin \theta \cdot D + C(2bv\mu \cos \theta)]] + (2BE - 4CD) \left( -\frac{a\mu}{v} \sin \theta + \frac{\mu b}{v} \left( \frac{-\sin \theta \tan \theta - \sec \theta}{\tan^2 \theta} \right) \right) + 2E \\
& \cdot 2(bv\mu \sin \theta - 2av\mu \cos \theta) - 4F \cdot 2(v - \mu \cos \theta)\mu \sin \theta \left. \right] \\
& - \left[ [(2BE - 4CD)(a + b \cot \theta) + E^2 - 4CF]^{\frac{3}{2}} - [(2BE - 4CD) \left( a + \frac{\mu b \cos \theta + \mu a \sin \theta}{v \tan \theta} \right) + E^2 - 4CF]^{\frac{3}{2}} \right] (C \\
& \cdot (2(2\mu v \cos \theta - 2\mu^2 \cos 2\theta)E + B \cdot 2(bv\mu \sin \theta - 2av\mu \cos \theta) - 4[2(v - \mu \cos \theta)\mu \sin \theta \cdot D + C(2bv\mu \cos \theta)]) + (2BE - 4CD) \\
& \cdot 2(v - \mu \cos \theta) \cdot \mu \sin \theta \left. \right\} \\
& + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\mu a \sin \theta + \mu b \cos \theta}{v \tan \theta} \right) \left( \frac{a\mu \cos \theta + \mu b \sin \theta}{-v} \right) + \left( 2b - \mu \sin \theta \frac{(a \tan \theta + b)}{v \tan \theta} \right) \left( \frac{-\mu}{v} \right) (a \cos \theta + b \sin \theta) \right] = 0
\end{aligned}$$

## 【評語】 050412

本研究延伸原作者的結果，殊屬不易，但須做文獻探討，說明研究方向或所採取之方法是否有支持點。研究之設定為小丑(A)>小孩(B)的速度，且行走的路線以直線、圓為主，此限制性頗大，亦不符合一般情境，難以得到合理的最佳路徑。作品使用微積分的工具處理問題，於計算上的書寫需要更加嚴謹，並且確實知道微分或積分之意義。

## 摘要

此次研究我們主要針對H. Steinhaus 於1963年出版書

*One Hundred Problems in Elementary Mathematics*中所提到的馬戲團問題(the circus is coming)進行研究，書中原文敘述如下：

Children are playing in a meadow near the highway. Suddenly they see, at the place where the highway comes out of the forest, a clown riding a horse--there is a circus coming. The children wish to run to the highway in order to have a closer look at the clown. The children standing further away won't reach him, but they wish to see him from a distance as short as possible. All the children are running with equal speed, but the clown is riding faster.

The reader is asked to

(a) draw the line separating the part of the meadow from which it's possible to reach the clown from the remaining part.

(b) give the course of running for the children standing on the line.

(c) give courses for those children who won't reach the highway before the clown passes them.

## 研究動機

今年春節時，美國正在舉辦一年一度的美式足球超級盃，美式足球不外乎就是接球員要想盡辦法衝進達陣區而防守者則要盡力阻止接球員，因此我們想要探討防守者該如何跑位才能捉住接球員。我們在尋找文獻時剛好在期刊上看到早在1963年H.Steinhaus便在著作*One Hundred Problems in Elementary Mathematics*中提到了類似的問題，當時他並未解答，因此本次研究主要便依循著他的問題做延伸，尋求解答。

## 研究目的

一、找出作者在原文中所提問題之解答並延伸子題

(一) draw the line separating the part of the meadow from which is possible to reach the clown from the remaining part and give the course of running for the children standing on the line.

(二) 小孩能碰到小丑時:

1. 於何時碰到?
2. 於何點碰到?
3. 是否存在其他點使得小孩碰到小丑?

(三) 小孩不能碰到小丑時:

1. 小孩走一直線時最接近的時刻為?
2. 指定某一時刻，小孩一開始選擇哪一條直線於此時最接近小丑?
3. 運用前面兩點，求出小孩走某線時於某時刻能最接近小丑。

二、探討小丑走圓路徑時，小丑和小孩的相遇情形。

三、在兩者碰不到的前提下，若使小孩走一直線，則兩者所連線所掃過面積為何？並且面積輪廓為何種曲線？

## 研究過程

一、名詞定義:

(一) 可碰區與不可碰區:

從此區域出發，能碰到小丑的區域稱為「可碰區」，反之稱為「不可碰區」。

(二) 可碰線

區分可碰區與不可碰區的邊界稱為可碰線，其中，可碰區包含可碰線。

二、通設

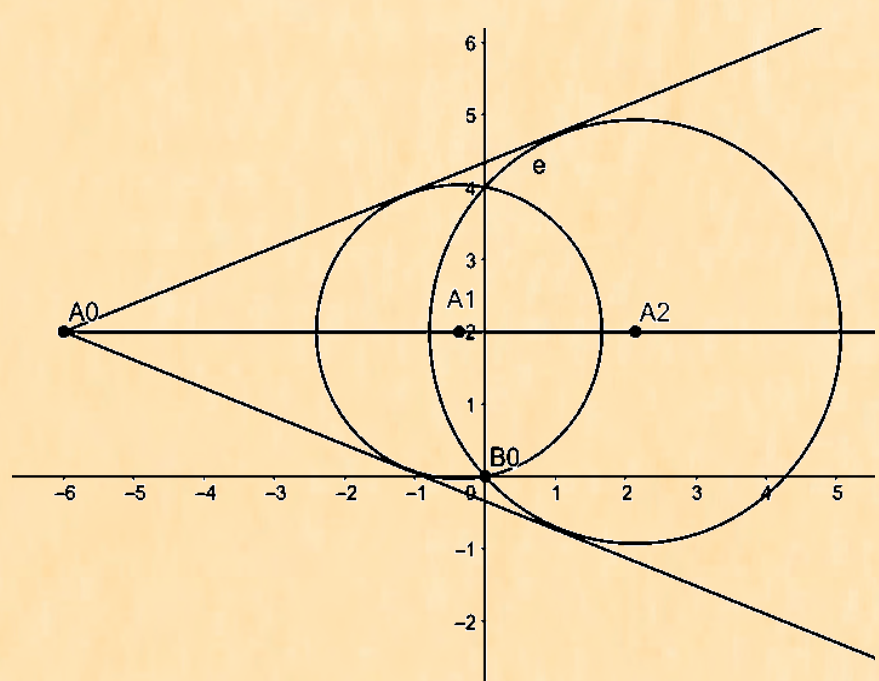
(一) 在此次研究中，小丑座標皆為A，小孩座標皆為B，以下簡稱為A點及B點，小丑速度皆以v表示，小孩速度皆以μ表示。

三、過程想法與證明:

(一) 小孩能碰到小丑時

證明:

如圖(一)，假設B由(0,0)出發，A由(x<sub>0</sub>, k) (其中x<sub>0</sub> < 0) 沿著y = k的+x方向出發，假設A、B於(x<sub>1</sub>, k)相遇，



圖(一)

$$vt = x_1 - x_0; \mu t = \sqrt{x_1^2 + k^2} \rightarrow t = \frac{x_1 - x_0}{v} = \frac{\sqrt{x_1^2 + k^2}}{\mu}$$

後式兩邊平方整理得到

$$(v^2 - \mu^2)x_1^2 + (2\mu^2x_0)x_1 + (k^2v^2 - \mu^2x_0^2) = 0$$

$$x_1 = \frac{-(2\mu^2x_0) \pm \sqrt{(2\mu^2x_0)^2 - 4(v^2 - \mu^2)(k^2v^2 - \mu^2x_0^2)}}{2(v^2 - \mu^2)}$$

$$t = \frac{-(2\mu^2x_0) \pm \sqrt{(2\mu^2x_0)^2 - 4(v^2 - \mu^2)(k^2v^2 - \mu^2x_0^2)}}{2(v^2 - \mu^2)} - x_0$$

此外，以x<sub>1</sub>之解可以證明可碰區

因為可碰區 → 判別式D ≥ 0 → (2μ<sup>2</sup>x<sub>0</sub>)<sup>2</sup> - 4(v<sup>2</sup> - μ<sup>2</sup>)(k<sup>2</sup>v<sup>2</sup> - μ<sup>2</sup>x<sub>0</sub><sup>2</sup>) ≥

0

化簡得到

$$\frac{\mu}{v} \geq \frac{k}{\sqrt{x_0^2 + k^2}} = \sin \theta$$

當B在可碰線上時D = 0，

$$x = \frac{-(2\mu^2x_0)}{2(v^2 - \mu^2)}$$

(二) 小孩不能碰到小丑時

1. 小孩走一直線時最接近的時刻

由題意設A(vt, 0); B(a + μ cos θ t, b + μ sin θ t)

$$\overline{AB} = \sqrt{(v^2 + \mu^2 - 2v\mu \cos \theta)t^2 + 2(b\mu \sin \theta - av)t + (a^2 + b^2)}$$

令

$$\frac{d\overline{AB}}{dt} = \frac{\frac{1}{2}[2(v^2 + \mu^2 - 2v\mu \cos \theta)t + 2(b\mu \sin \theta - av)]}{\sqrt{(v^2 + \mu^2 - 2v\mu \cos \theta)t^2 + 2(b\mu \sin \theta - av)t + (a^2 + b^2)}} = 0$$

其中，因為小孩不能碰到小丑， $\overline{AB} > 0$ ，

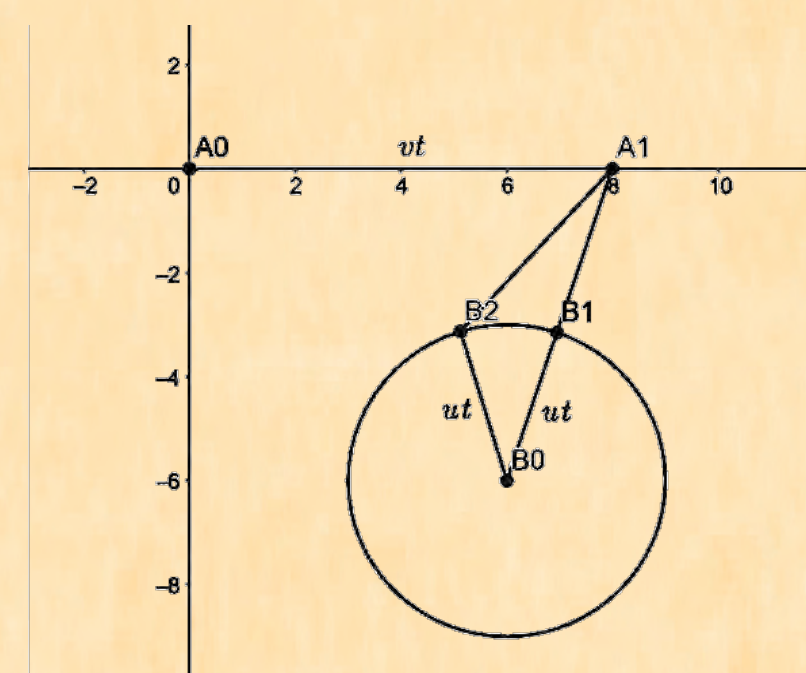
上式可改寫為

$$(v^2 + \mu^2 - 2v\mu \cos \theta)t + (b\mu \sin \theta - av) = 0$$

則

$$t = \frac{av - b\mu \sin \theta}{(v^2 + \mu^2 - 2v\mu \cos \theta)}$$

2. 指定某一時刻，小孩一開始選擇哪一條直線於此時最接近小丑



圖(二)

設A由A<sub>0</sub>出發經過 t 時到達A<sub>1</sub>，同一時間B由B<sub>0</sub>出發經過 t 時

則B可能位於以B<sub>0</sub>為圓心，μt為半徑的圓周上。

連B<sub>0</sub>A<sub>1</sub>交圓B<sub>0</sub>於B<sub>1</sub>，在圓上任取另外一點B<sub>2</sub>，則由三角形三邊長關係可得知

$$\begin{aligned}\overline{B_0B_2} + \overline{B_2A_1} &> \overline{B_0A_1} \\ \rightarrow \mu t + \overline{B_2A_1} &> \mu t + \overline{B_1A_1} \\ \rightarrow \overline{B_2A_1} &> \overline{B_1A_1}\end{aligned}$$

因此B<sub>1</sub>在t時比其他點更接近A<sub>1</sub>，即B<sub>0</sub>A<sub>1</sub>為在t時所求最小距離的路徑，像這樣的直線往後稱為L<sub>b</sub>。

3. 運用前面兩點，求出小孩走某路線時於某時刻能最接近小丑。

(1) 設第3點所要找的這條直線稱之為L<sub>goal</sub>，最短距離為d<sub>goal</sub>，則易知L<sub>goal</sub>必為指定某時刻的最佳路徑。

(2) L<sub>goal</sub>的斜率m ≥ 0

證明:

如圖(三)，設L<sub>1</sub>為t<sub>1</sub>時的L<sub>b</sub>，斜率m<sub>1</sub> < 0，且L<sub>1</sub>為L<sub>goal</sub>，

則作L<sub>2</sub>為L<sub>1</sub>對過B點X軸垂線的對應線，且L<sub>2</sub>交X軸於A<sub>2</sub>

設B<sub>0</sub>A<sub>1</sub> = B<sub>0</sub>A<sub>2</sub> = q

依據第2.(2)證明且L<sub>1</sub>為L<sub>goal</sub>之假設，

當t = t<sub>1</sub>，A位於A<sub>1</sub>時，B位於B<sub>1</sub>，此時d<sub>goal</sub> = B<sub>1</sub>A<sub>1</sub> = q - μt<sub>1</sub>

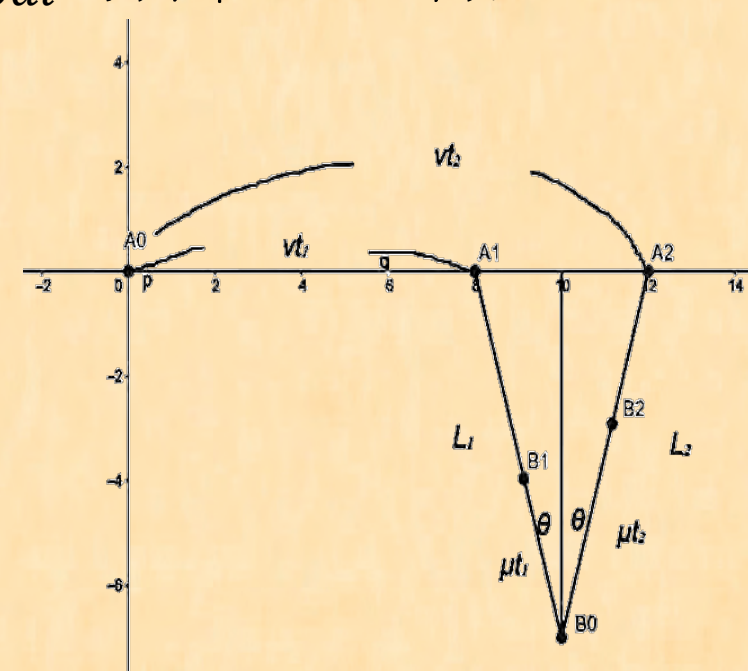
而當t = t<sub>2</sub>，A位於A<sub>2</sub>時，B位於B<sub>2</sub>，B<sub>2</sub>A<sub>2</sub> = q - μt<sub>2</sub>

$$\because t_2 > t_1$$

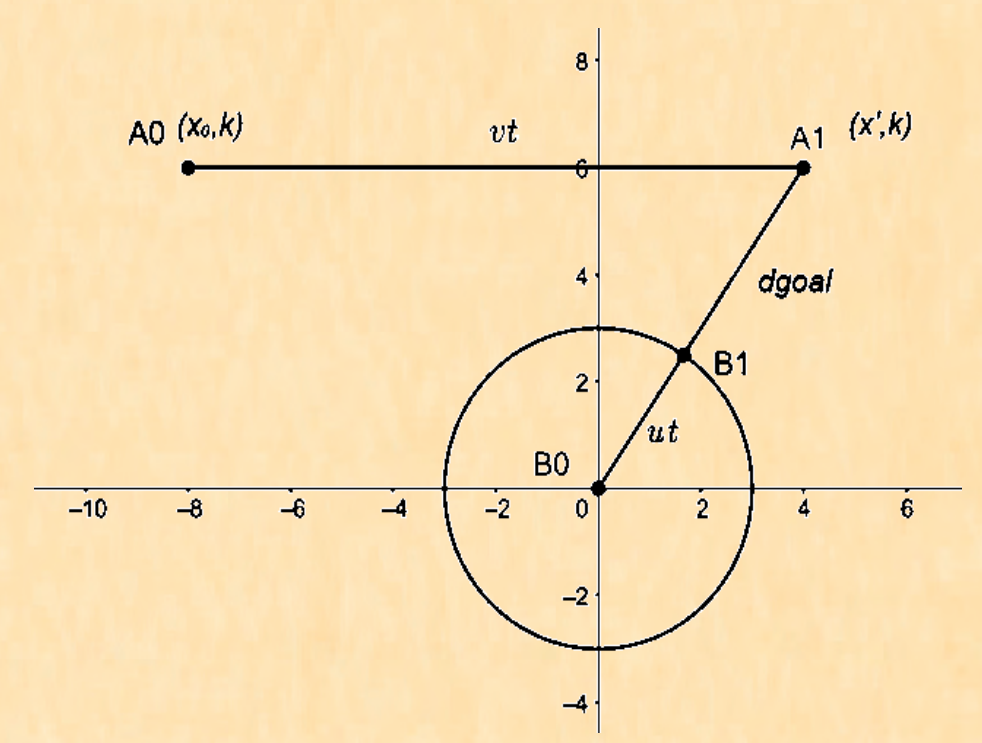
$$\therefore \overline{B_1A_1} > \overline{B_2A_2}$$

$$\rightarrow L_1 \text{ 不是 } L_{goal}$$

L<sub>goal</sub>的斜率m ≥ 0得證



圖(三)



圖(四)

(3) 求出L<sub>goal</sub>及d<sub>goal</sub>

如圖(四)，設當A由出發點(x<sub>0</sub>, k)跑至A<sub>1</sub>(x', k)時有d<sub>goal</sub>，依據第2.(2)證明，L<sub>goal</sub>為A<sub>1</sub>和B<sub>0</sub>之連線，並設此時B由(0, 0)已跑至B<sub>1</sub>。可知

$$\overline{A_1A} = x' - x_0, \overline{A_1B_0} = \sqrt{x'^2 + k^2}$$

求出A跑至A<sub>1</sub>之所花時間t =  $\frac{x' - x_0}{v}$

則有d<sub>goal</sub>時，d<sub>goal</sub> =  $\overline{A_1B_1} = \sqrt{x'^2 + k^2} - \frac{\mu(x' - x_0)}{v}$

我們欲求出d<sub>goal</sub>之最小值，於是考慮對x'微分令其為0可得極值。

$$\overline{A_1B_1} = \sqrt{x'^2 + k^2} - \frac{\mu(x' - x_0)}{v}$$

$$\frac{d\overline{A_1B_1}}{dx'} = \frac{2x'}{2\sqrt{x'^2 + k^2}} - \frac{\mu}{v} = 0$$



