中華民國第59屆中小學科學展覽會

作品說明書

高級中等學校組　數學科

050411

「球」破樓出

學校名稱：國立竹北高級中學

作者：	指導老師：
高二 楊長茂	黃建順
高二 傅詮恩	許博喻
高二 范家和	

關鍵詞：玻璃球測臨界點問題、Google 丟球問題、

Two Bowling Balls

摘要:

在本次的研究中，主要在探討 Google 面試問題。我們將題目的「快速」明確定義為平均次數最少，並用總樓層 10 為例推出通式，透過平均與隔層數之函數求出固定隔層數的最佳解。再透過觀察圖形表格，移動表格後建立數格圖的概念，尋找更佳結果，找出更理想的解答方法並與 Google 解答比較。之後，將題目的兩顆球延伸至三顆球，利用之前推導次數的概念，將二維數格圖擴增至三維立體數格圖，並找到適合所有樓層的最佳解法。

壹、研究動機

當初同學間聊天時提到了這個問題，並說這是 Google 的一題面試題目。同學們提出各自的想法討論後，提問者告訴我們 Google 那邊的參考答案，但是我們覺得沒有那麼簡單且答案描述有些簡略，於是對這個問題產生興趣，在定義快速的概念後，找了老師開始深度探討這個題目。

貳、研究目的

本研究之目的為，在我們定義的題目架構下，去探討 100 層樓時較好的解決方法並與原題目的參考答案做比較。再由 100 層為例尋找任意層的解決方法。之後將兩顆球的測法延伸至條件為三顆球時，尋找任意樓層的最佳結果。

參、研究設備及器材

本研究一開始先用紙筆推導丟球過程並將其歸納，再把得到的數據與公式利用 desmos 協助畫圖與計算判斷極值產生的地方；當考慮多顆球的問題時，使用 sketch up 繪製成立體模型，幫助具體的建立移動規則。

肆、研究過程或方法

一、題目:

(一)原始題目[1]:

有一個100層高的大樓，你手中有兩個相同的保齡球。從這個大樓的某層丟下來一定會破，用你手中的這兩個保齡球，找出次數最少的策略，來得知那個最低會破的樓層。

(二)重新定義題目：

現在有 100 層樓，有兩顆一樣的球，這兩顆球在一定的樓高以上往下丟一定會破，未達會破的那一層怎麼丟都不會稱此層為臨界層（球會破的最低樓層）；臨界層可能在 1 到 100 之間，若 100 層樓內皆不破，此時定義臨界層稱為 101，我們假設臨界層出現在任何樓層（包含不破）的機率是相同的。試以平均次數較少的方法找到臨界層?

二、比較方法:

定義得比較快的方法，是平均丟的次數最少者。

例如：現在用某方法列出當臨界樓層在一樓到 100 樓時，所需的各自次數，將所有次數相加除以所有可能（101），即為平均。

三、間隔固定樓層測試

先探討的方法是：如果沒破，就每次固定隔 u 層樓丟下。譬如 u=10，固定隔 10 層，也就是第一次在十樓丟，如果沒破就在二十樓丟，在沒破就在三十樓丟，那如果破了，就丟前一次丟不會破的上一層，沒破就再往上一層丟。

原始題目[1]：
原始題目為同學討論時的題目，網路搜尋的原始英文題目如下：
You are given two bowling balls, and told that they will break when dropped from some certain height (and presumably suffer no damage if dropped from below that height). You’re then taken to a 100 story building, and asked to find the lowest floor that bowling ball will break. You're graded on your algorithm's worst-case running time.
Extra info

- You must find the correct floor (not a possible range)
- The bowling balls are both guaranteed to break at the same floor
- Assume it takes zero time for you to change floors - only the number of bowling balls drop counts
- Assume the correct floor is randomly distributed in the building

(一)低樓層情況:

假設樓層為 k，以 k=10 為例觀察並推導通式。

1.當 u=1

每次都隔一層，第一次在一樓丟，沒破就依序檢測到 10 樓。如果在某層破，臨界層就是在某層樓；若 10 樓都不破，代表臨界層為 11。

分別列出每層為臨界層時，在該層樓時要丟的次數

1F	2F	3F	4F	5F	6F	7F	8F	9F	10F
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$$S=\sum_{a_1=1}^{10} a_1$$

平均即為$\left(\frac{S}{k+1}\right)=5$ 可知若總樓層為任意 k 時,每次都隔一層的平均即為$\frac{\sum_{a_1=1}^{k} a_1}{k+1}$

2.當 u=2

沒破就二層二層往上檢測。第一次在二樓丟，如果二樓破了，就丟一樓，一樓破臨界層為 1；沒破臨界層為就是 2，如果二樓沒破，就在四樓丟。如果四樓破了，就在三樓丟，破了臨界層為就是 3；沒破臨界層為就是 4，如果四樓沒破，就在六樓丟，依此規律檢測直至十樓。若十樓裡都不破臨界層為 11。

分別列出每層為臨界層時，在該層樓時要丟的次數

	1+1		2+1		3+1		4+1		5+1
2		3		4		5		6	

$$\mathrm{S}=\sum_{a_1=1}^{\frac{10}{2}}(a_1+1)$$

$$+\sum_{a_2=2}^{\frac{10}{2}+1} a_2$$

平均即為$\left(\frac{S}{k+1}\right)=3.636$，可知若總樓層為任意 k 時,每次都隔二的平均即為

$$\frac{\sum_{a_1=1}^{\frac{k}{2}}(a_1+1)+\sum_{a_2=2}^{\frac{k}{2}+1} a_2}{k+1}$$

其中第一列總合之內$(\mathrm{a}+1)$中的+1，是因為每一次在 u 的倍數層丟之後，如果破了就要往回檢查一次，因此次數就要+1。

3.當 u=3

沒破就三層三層往上檢測。第一次先在三樓丟，如果三樓破了，第二顆就依序由一樓開始丟，在哪層破臨界層為就是哪層，一二樓沒破臨界層為就是 3。如果三樓沒破，就在六樓丟，如果六樓破了，第二顆就依序由四樓開始丟，在哪層破臨界層為就是哪層，四五樓沒破臨界層為即為六樓。如果六樓沒破，就在九樓丟，如果九樓沒破，因為有一個餘數層也就是$10 \div 3$所剩下的 1 層，只要遇到有餘數的剩餘層，就直接變成一層一層往上檢測，因此直接在十樓丟，破了臨界層為就是 10，沒破則臨界層為 11。

		1+2			2+2			3+2	
2			3			4			
	3			4			5		
									3+1

$$S=\sum_{a_1=1}^{\left\lfloor \frac{10}{3}\right\rfloor}(a_1+2)+\sum_{a_2=2}^{\left\lfloor \frac{10}{3}\right\rfloor+1}a_2+\sum_{a_3=3}^{\left\lfloor \frac{10}{3}\right\rfloor+2}a_3+(3+1)$$

其中第一列總合之內$(a+2)$中的+2，是因為每一次丟 u 的倍數層之後，如果破了就要往回檢查兩次，那就次數就要+2。而Σ的上標利用下高斯符號，也就是無條件捨去($\left\lfloor\frac{10}{3}\right\rfloor=3$)，在最後會另外把餘數項拉出來討論。最後一項$(3+1)$中的 3，是$\left\lfloor\frac{10}{3}\right\rfloor$的結果，因為第一次在三樓，第二次在六樓，第三次在九樓，因此會有前面的三，而後面的 1 ，是剩下一層樓，依序往上檢測的結果。

平均即為$\left(\frac{S}{k+1}\right)=3.515$ 可知若總樓層為任意 k 時,餘數為$r=k-u\left\lfloor\frac{k}{u}\right\rfloor$

隔三的平均即為

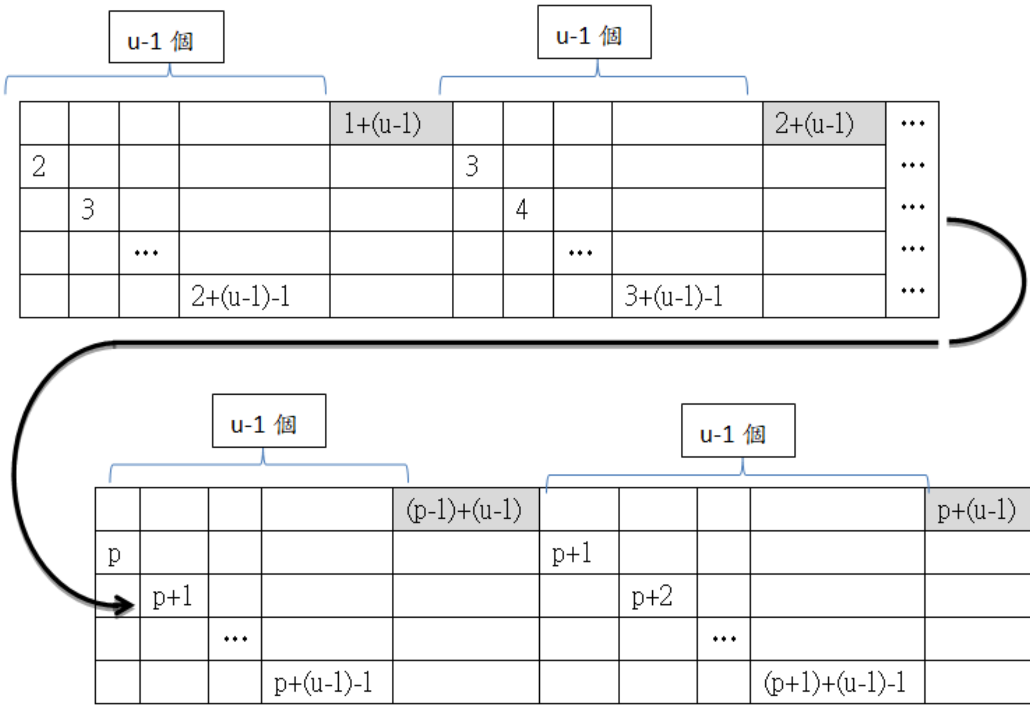
$$\frac{\sum_{a_1=1}^{\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor}(a_1+2)+\sum_{a_2=2}^{\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor+1}a_2+\sum_{a_3=3}^{\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor+2}a_3\ +(\left\lfloor\frac{k}{3}\right\rfloor+r)}{k+1}$$

命名 u 的倍數層為主樓層，u 層的倍數往回檢查 i 層為第 i 副樓層。

(二)對任意 k 層樓隔 u 層的公式推導:

因為 $\frac{k}{u}$ 不一定為整數，故定義$p=\left\lfloor\frac{k}{u}\right\rfloor$。剩下的餘數樓層就定義 r

$$k=\left\lfloor\frac{k}{u}\right\rfloor u+r=pu+r$$



1.通式

$$\sum_{a_0=1}^{p}\left(a_0+(u-1)\right)+\sum_{a_1=2}^{p+1}a_1+\sum_{a_2=3}^{p+2}a_2+\cdots+\sum_{a_{u-1}=u}^{p+(u-1)}a_u \qquad \text{(整數部分)}$$

$$+\sum_{e=1}^{r}(p+e) \qquad \text{(餘數部分)}$$

整數部分為上圖中的總和，即為k ÷ u為整數時的總和，餘數部分為餘數層之總和。整數部分裡每個∑ 為每一列之總和，總共有 u 個∑ 。而第一個∑ 裡，有一個(u-1)，那是主樓層（u 的倍數層）丟了之後如果破了要往回檢查的樓層數。餘數部分即為餘數層，因為丟到整除的最後一個需要 p 次，因此每往上檢查一層就要+1。

(1)討論整數部分:

$$\sum_{a_1=1}^{p}\left(a_1+(u-1)\right)+\sum_{a_2=2}^{p+1}a_2+\sum_{a_3=3}^{p+2}a_3+\cdots+\sum_{a_u=u}^{p+(u-1)}a_u$$

$$= \mathrm{p(u-1)} + \sum_{a_1=1}^{p} a_1 + \sum_{a_2=1}^{p} a_2 + \sum_{a_3=1}^{p} a_3 + \cdots + \sum_{a_u=1}^{p} a_u + 1\mathrm{p} + 2\mathrm{p} + 3\mathrm{p} + \cdots + (\mathrm{u}-1)\mathrm{p}$$

$$= \mathrm{p(u-1)} + \mathrm{u}\sum_{a=1}^{p} a + \mathrm{p}\big(1+2+3+\cdots+(\mathrm{u}-1)\big)\text{可化簡為}\frac{\mathrm{p^2u} + pu^2 + 2pu - 2p}{2}$$

(2)討論餘數部分:

$$\sum_{e=1}^{r}(p+e) = \frac{r^2 + r + 2rp}{2} \quad (\text{其中}r = (k - pu))$$

(3)整數部分加餘數部分:

$$\mathrm{s} = \frac{\mathrm{p^2u} + pu^2 + 2pu - 2p}{2} + \frac{r^2 + r + 2rp}{2}$$

2.平均

平均即為

$$s_{av} = \left(\frac{s}{k+1}\right)$$

3.平均與隔層

為了解當樓層k為一個給定常數時，平均$\mathrm{s_{av}}$和隔的樓u層之間的關係。將 u 設成參數，而$\mathrm{s_{av}(u)}$表成函數 y，即為

$$s_{av}(x) = \frac{1}{k+1}\left(\frac{\mathrm{p^2u} + pu^2 + 2pu - 2p}{2} + \frac{r^2 + r + 2rp}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{k+1}\left(\frac{\left\lfloor \frac{k}{x} \right\rfloor^2 \mathrm{x} + \left\lfloor \frac{k}{x} \right\rfloor x^2 + 2\left\lfloor \frac{k}{x} \right\rfloor x - 2\left\lfloor \frac{k}{x} \right\rfloor}{2} + \frac{r^2 + r + 2r\left\lfloor \frac{k}{x} \right\rfloor}{2}\right)$$

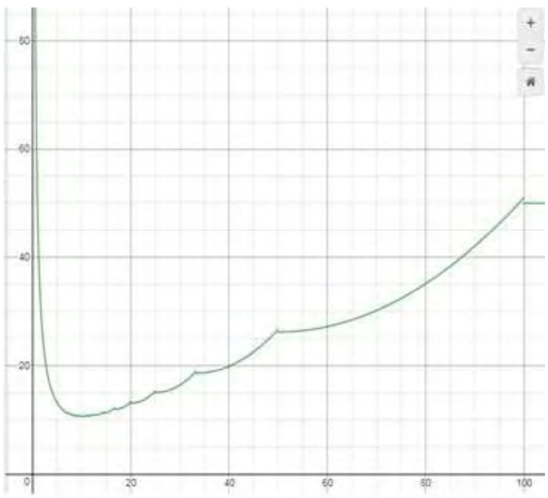
利用數學程式 desmos 將函數圖形畫出

$\mathrm{k} = 100$

$\mathrm{r} = \mathrm{k} - \mathrm{floor}(\frac{k}{x})\mathrm{x}$

$\mathrm{p} = \mathrm{floor}(\frac{k}{x})$

$$y = \frac{\mathrm{p^2u} + pu^2 + 2pu - 2p}{2} + \frac{r^2 + r + 2rp}{2}$$



由圖形可知對於 x（隔層 u），在特定值時，平均$s_{av}(u)$會有最小值。

因此想得知對於 k 給定時，隔多少會平均有最小值。

$\mathrm{s_{av}}$（u） $=\frac{1}{\mathrm{k}+1}\left(\frac{\mathrm{p^2u+pu^2+2pu-2p}}{2}+\frac{\mathrm{r^2+r+2rp}}{2}\right)$經過整理 u 的多項式

$$s_{av}(u)=\frac{1}{2(k+1)}\left[\frac{(\mathrm{k^2-r^2-2k+2r})}{\mathrm{u}}+(\mathrm{k-r})\mathrm{u}+(2\mathrm{k}+\mathrm{r^2-r})\right]$$

其中$\mathrm{k=pu+r}$, $\quad\mathrm{pu=k-r}$, $\quad\mathrm{p}=\frac{\mathrm{k-r}}{\mathrm{u}}$

利用算幾不等式知道

$$\frac{\frac{(\mathrm{k^2-r^2-2k+2r})}{\mathrm{u}}+(\mathrm{k-r})\mathrm{u}}{2}\geq\sqrt{\left(\frac{(\mathrm{k^2-r^2-2k+2r})}{\mathrm{u}}\right)\left((\mathrm{k-r})\mathrm{u}\right)}$$

而當左式有最小值時，

$$\frac{(\mathrm{k^2-r^2-2k+2r})}{\mathrm{u}}=(\mathrm{k-r})\mathrm{u}\text{ 經化簡為}$$

$$\mathrm{u}=\sqrt{\mathrm{k+r-2}}$$

因為結果為帶有餘數 r 的值，因此利用 r 的範圍，求 u 的範圍。

(因為餘數介在除數和 0 之間，所以 $0\leq\mathrm{r}<u$)

$$\sqrt{\mathrm{k-2}}\leq\mathrm{u}<\sqrt{\mathrm{k+u-2}}\ldots\ldots(1)$$

考慮右側不等式

$$u<\sqrt{\mathrm{k+u-2}}$$
$$u^2<k+u-2$$
$$u^2-u-(k-2)<0$$
$$(\mathrm{u}-\left(\frac{1+\sqrt{4k-7}}{2}\right))(\mathrm{u}-\left(\frac{1-\sqrt{4k-7}}{2}\right))<0$$
$$\frac{1-\sqrt{4k-7}}{2}<u<\frac{1+\sqrt{4k-7}}{2}\ldots(2)$$

由式(1)和式(2)取交集知道

$$\sqrt{k-2}\leq u<\frac{1+\sqrt{4k-7}}{2}$$

因此知道當 u 在此範圍時平均會有最小值的範圍，所以可以得到定理一。

定理一:

對於樓層 k，若方法為固定樓層，則取 $\sqrt{k-2} \le u < \frac{1+\sqrt{4k-7}}{2}$ ，固定格 u，平均將為最小。

4.以 k=100 為例

$$\sqrt{100-2} \le u < \frac{1+\sqrt{4\times 100-7}}{2}$$
$$9.899 \le u < 10.412$$

將 u 帶入 10

$$\mathrm{p} = \left\lfloor \frac{k}{u} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10$$
$$\mathrm{r} = \mathrm{k} - \mathrm{pu}$$
$$= 100 - 10 \times 10 = 0$$

$$s_{av} = \frac{1}{k+1}\left(\frac{\mathrm{p}^2\mathrm{u} + pu^2 + 2pu - 2p}{2} + \frac{r^2 + r + 2rp}{2}\right)$$

$$= \frac{1090}{100+1}$$
$$\approx 10.792$$

列出當臨界層在某層時，所需的次數。

臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數
1	2	11	3	21	4	31	5	41	6	51	7	61	8	71	9	81	10	91	11
2	3	12	4	22	5	32	6	42	7	52	8	62	9	72	10	82	11	92	12
3	4	13	5	23	6	33	7	43	8	53	9	63	10	73	11	83	12	93	13
4	5	14	6	24	7	34	8	44	9	54	10	64	11	74	12	84	13	94	14
5	6	15	7	25	8	35	9	45	10	55	11	65	12	75	13	85	14	95	15
6	7	16	8	26	9	36	10	46	11	56	12	66	13	76	14	86	15	96	16
7	8	17	9	27	10	37	11	47	12	57	13	67	14	77	15	87	16	97	17
8	9	18	10	28	11	38	12	48	13	58	14	68	15	78	16	88	17	98	18
9	10	19	11	29	12	39	13	49	14	59	15	69	16	79	17	89	18	99	19
10	10	20	11	30	12	40	13	50	14	60	15	70	16	80	17	90	18	100	19

四、考慮間隔不固定

(一)根據規律移動表格

觀察此表格，發現到在檢查 k=100 的公式時，次數格子會有整列+1 的狀況，於是試著將每一行都移動對齊左邊的數字。

臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數
1	2	11	3	21	4	31	5	41	6	51	7	61	8	71	9	81	10	91	11
2	3	12	4	22	5	32	6	42	7	52	8	62	9	72	10	82	11	92	12
3	4	13	5	23	6	33	7	43	8	53	9	63	10	73	11	83	12	93	13
4	5	14	6	24	7	34	8	44	9	54	10	64	11	74	12	84	13	94	14
5	6	15	7	25	8	35	9	45	10	55	11	65	12	75	13	85	14	95	15
6	7	16	8	26	9	36	10	46	11	56	12	66	13	76	14	86	15	96	16
7	8	17	9	27	10	37	11	47	12	57	13	67	14	77	15	87	16	97	17
8	9	18	10	28	11	38	12	48	13	58	14	68	15	78	16	88	17	98	18
9	10	19	11	29	12	39	13	49	14	59	15	69	16	79	17	89	18	99	19
10	10	20	11	30	12	40	13	50	14	60	15	70	16	80	17	90	18	100	19

即為

臨界層	次數																		
1	2	臨界層	次數																
2	3	11	3	臨界層	次數														
3	4	12	4	21	4	臨界層	次數												
4	5	13	5	22	5	31	5	臨界層	次數										
5	6	14	6	23	6	32	6	41	6	臨界層	次數								
6	7	15	7	24	7	33	7	42	7	51	7	臨界層	次數						
7	8	16	8	25	8	34	8	43	8	52	8	61	8	臨界層	次數				
8	9	17	9	26	9	35	9	44	9	53	9	62	9	71	9	臨界層	次數		
9	10	18	10	27	10	36	10	45	10	54	10	63	10	72	10	81	10	臨界層	次數
10	10	19	11	28	11	37	11	46	11	55	11	64	11	73	11	82	11	91	11
		20	11	29	12	38	12	47	12	56	12	65	12	74	12	83	12	92	12
				30	12	39	13	48	13	57	13	66	13	75	13	84	13	93	13
						40	13	49	14	58	14	67	14	76	14	85	14	94	14
								50	14	59	15	68	15	77	15	86	15	95	15
										60	15	69	16	78	16	87	16	96	16
												70	16	79	17	88	17	97	17
														80	17	89	18	98	18
																90	18	99	19
																		100	19

(二)數格圖

將圖中黃色部分命為數格圖(次數表格圖)。要列一個數格圖，需要先知道有幾層樓(k 層)，然後要有一個數列(為每一次隔幾層)，數列的總和為 k，數列的項數將決定數格圖有幾行。

圖中每格的數字填法為：對第 n 行的第 m 個，當 m 不為最後一個時填入 n+m；當 m 為最後一個時填入 n+m-1，則一行中最後的倒數兩個數字會一樣，且遇到一行當中只有一個數時，該數也要減一。列完之後將每一行的第一個數，與左邊一行的第二個對齊。

以 100 層固定隔 10 為例。

按此規則將格子排出。

1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1	10+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2	10+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3	10+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4	10+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5	10+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6	10+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7	10+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8	10+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9	10+9
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9	10+9

再將每行的第一個數字向左邊對齊。

2									
3	3								
4	4	4							
5	5	5	5						
6	6	6	6	6					
7	7	7	7	7	7				
8	8	8	8	8	8	8			
9	9	9	9	9	9	9	9		
10	10	10	10	10	10	10	10	10	
10	11	11	11	11	11	11	11	11	11
	11	12	12	12	12	12	12	12	12
		12	13	13	13	13	13	13	13
			13	14	14	14	14	14	14
				14	15	15	15	15	15
					15	16	16	16	16
						16	17	17	17
							17	18	18
								18	19
									19

經過觀察發現，右下方的數字較大。因此試著把圖形的右下區一格一格的拼到左下數字較小的區域。而這樣移動的涵義是減少後面層數的間隔，增加前面的間隔。

(三)數格圖移動(以 100 層為例)

1.第一次移動：

2									
3	3								
4	4	4							
5	5	5	5						
6	6	6	6	6					
7	7	7	7	7	7				
8	8	8	8	8	8	8			
9	9	9	9	9	9	9	9		
10	10	10	10	10	10	10	10	10	
10→11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
11	11	12	12	12	12	12	12	12	12
		12	13	13	13	13	13	13	13
			13	14	14	14	14	14	14
				14	15	15	15	15	15
					15	16	16	16	16
						16	17	17	17
							17	18	18
								18	19→18
									19

總和　=1082

移動這格，左上增加 1，右下減少 1，恰抵消，移動減少 8，恰為相差層數。移動後，第一次間隔加 1 變成隔 11 層樓，最後一次間隔減 1 變成隔 9 層樓。其意義為第一次檢測 11 樓，接著每次間隔 10 層至第 91 樓，沒破就丟 91+9 樓。

2.後續依照規律移動得到下圖

2									
3	3								
4	4	4							
5	5	5	5						
6	6	6	6	6					
7	7	7	7	7	7				
8	8	8	8	8	8	8			
9	9	9	9	9	9	9	9		
10	10	10	10	10	10	10	10	10	
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
14	14	14	14	14	15	15	15	15	15
					15	15	15	15	15

總和：1050

3.建立新的隔層。

經觀察最底下一排的數字還是較大，試著將最下面那一列移到右邊，建立新的隔層。

2										
3	3									
4	4	4								
5	5	5	5							
6	6	6	6	6						
7	7	7	7	7	7					
8	8	8	8	8	8	8				
9	9	9	9	9	9	9	9			
10	10	10	10	10	10	10	10	10		
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	11
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	
14	14	14	14	14	15→14	15	15	15	15	
					15	15	15	15	15	

總和:1045

移一個時，最右一行符合一行只有一個的情況，要減少一。移走的下面要減一，因為向上移動了四格所以，因此總和共減少了 4+1=5。此時在數格圖右側加隔一層的一行，原本被移走的那行即為隔 10 減 1，隔 9 層。

4.照第三點的規律移動

移動的格子移了一列，所以要減一，而左邊移走的下面要減一，移過去之後最下面要加一，因此總和共減少了 1+1-1=1。此時在數格圖最右側那行加 1 成隔 4 層樓，而原本被移走的那行即為隔 7 減 1，隔 6 層樓，得到下圖。

2										
3	3									
4	4	4								
5	5	5	5							
6	6	6	6	6						
7	7	7	7	7	7					
8	8	8	8	8	8	8				
9	9	9	9	9	9	9	9			
10	10	10	10	10	10	10	10	10		
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
14	14	14	14	14	14	14	14	15→14	15	14
								15	15	

總和:1039

再移動一個，因為經過移動中的觀察，只要是獨立的，數字會減一，因此就不增加最後一行的格數，而是再增加一行，讓最後一個數字獨立。而移動的格子移了三列,所以要減三,而左邊移走的下面要減一,因此總和共減少了 3+1=4。此時在數格圖右側加隔一層的一行，而原本被移走的那行即為隔 6 減 1，隔 5 層樓，得到下圖。

2											
3	3										
4	4	4									
5	5	5	5								
6	6	6	6	6							
7	7	7	7	7	7						
8	8	8	8	8	8	8					
9	9	9	9	9	9	9	9				
10	10	10	10	10	10	10	10	10			
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11		
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	12
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	
14	14	14	14	14	14	14	14	14	15→14	14	
									15		

總和:1035

(四) 移動至平均最好方法(以 100 層為例)

因為最下排的格子，還可以繼續向右上方填補。於是將格子不斷地上移，直到最下排的格子不能在向上移動。

2											
3	3										
4	4	4									
5	5	5	5								
6	6	6	6	6							
7	7	7	7	7	7						
8	8	8	8	8	8	8					
9	9	9	9	9	9	9	9				
10	10	10	10	10	10	10	10	10			
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11		
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
13	14→13	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14

依照規律最後會得到此數格圖，得到的每一排格子數數列將為最好的隔法之一，也就是最好的平均結果之一。總合為 1031，平均約為 10.208 次。如下圖

2													
3	3												
4	4	4											
5	5	5	5										
6	6	6	6	6									
7	7	7	7	7	7								
8	8	8	8	8	8	8							
9	9	9	9	9	9	9	9						
10	10	10	10	10	10	10	10	10					
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11				
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12			
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13		
13	13	13	13	14→13	14	14	14	14	14	14	14	14	
				14	14	14	14	14	14	14	14	14	14

(五)數格圖移動法則

經過觀察，移動的意義為改變一直都沒破時，隔樓層的數字。

因為每一行最上面的格子會向左對齊，因此移動最上面格子的話，樹格圖排列的規則將會將最上面再次對齊，因此只能移動最下面的格子。

數格圖移動法則：

1.只能移動數格圖每一行最下面的格子。

2.移動後，只能移動到每一行的最下層，或是最右邊。

3.向上移動了 i 排，格內數字就會減少 i；向下移動了 i 排，格內數字就會增加 i。

而移動完將每一行的格子數量列成一數列，第一行有a_1個，第二行行有a_2個，⋯，第 n 行有第一行有a_n個，數列為$\{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$，而所有數總和為 k，也就是 k 層樓，一數列意義為，第一次檢測a_1樓，沒破就檢測$a_1 + a_2$樓，沒破就檢測$a_1 + a_2 + a_3$樓，⋯，如果一直沒破，最後一次檢測為$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \mathrm{k}$樓。

伍、研究結果

一、定理

(一)定理二: 對於所有的三角形數$k=\frac{n(n+1)}{2}$，將 k 用數列$\{n,n-1,n-2,\dots,2,1\}$排成數格圖表示，則數格內的數字總和將為最小，且此最小結果唯一。

證明:

根據移動規則，只能移動最後一列，而如果把三角形數$k=\frac{n(n+1)}{2}$用數列$\{n,n-1,n-2,\dots,2,1\}$排成數格圖，只要移動格子必會往下移，總和就會增加，故此狀態為總和最小且答案唯一。 ■

1.舉例:

用 k=105 為例:

2													
3	3												
4	4	4											
5	5	5	5										
6	6	6	6	6									
7	7	7	7	7	7								
8	8	8	8	8	8	8							
9	9	9	9	9	9	9	9						
10	10	10	10	10	10	10	10	10					
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11				
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12			
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13		
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14

不能將格子移動到灰色格子部分，如果要移動只能將其中一行最下面的格子拉到另一行的最下面，則總和就會變大，沒有格子可以上移，因此將數格圖按照等差從大到小排列成數格圖(三角形數格圖)，此圖的總和將為最小且唯一。

(二)定理三:

給定樓層k，$\mathrm{k} \in \mathbb{N}$，且$\mathrm{k}$不是三角形數時，取$\mathrm{m} = \left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+8\mathrm{k}}}{2} \right\rceil$，先將$\frac{\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)}{2}$用數列$\{\mathrm{m}, \mathrm{m}-1, \mathrm{m}-2, \ldots, 2, 1\}$排成數格圖表示，將最下面一列，除了最右邊的獨立格子之外，任意選取$\frac{\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)}{2} - \mathrm{k}$個格子將其刪除之後，其總和將為最小，而對於數列來說只要不要刪掉最後一項的 1，選取其他$\frac{\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)}{2} - \mathrm{k}$個項，每項扣 1，就可以代表數格圖每一行格子的數量。

證明:

對於 k 不屬於三角形數。要知道

$$\frac{m(m+1)}{2} > k > \frac{(\mathrm{m}-1)\mathrm{m}}{2}$$

$$m^2 + m - 2k > 0 > m^2 - m - 2k$$

$$\left(m - \frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}\right)\left(m - \frac{-1-\sqrt{1+8k}}{2}\right) > 0$$

$$\text{且}(m - \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2})(m - \frac{1-\sqrt{1+8k}}{2}) < 0$$

$$m < \frac{-1-\sqrt{1+8k}}{2} \vee m > \frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}$$

$$\text{且}\frac{1-\sqrt{1+8k}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{1+8k}}{2}$$

$$\frac{1+\sqrt{1+8k}}{2} > m > \frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}$$

$$\text{取}m = \left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2} \right\rceil$$

此時先將$\frac{\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)}{2}$用數列$\{\mathrm{m}, \mathrm{m}-1, \mathrm{m}-2, \ldots, 2, 1\}$排成數格圖。最後一列中，因為最右邊的獨立格子上面沒有格子，因此若把它去掉減少的只有去掉格子內的數，但除了最右邊的格子外，其餘的格子只要去掉，上面的數都會減一。因此將除最右邊的格子外，去除$\frac{\mathrm{m}(\mathrm{m}+1)}{2} - \mathrm{k}$ 個格子，此時總和將為最小。 ■

1.舉例:

當 k=100，取 $m = \left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+8\times 100}}{2} \right\rceil = 14$，就先排出$\frac{14(14+1)}{2} = 105$的數格圖。

2													
3	3												
4	4	4											
5	5	5	5										
6	6	6	6	6									
7	7	7	7	7	7								
8	8	8	8	8	8	8							
9	9	9	9	9	9	9	9						
10	10	10	10	10	10	10	10	10					
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11				
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12			
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13		
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14

而要刪掉$\frac{(m+1)}{2}-k=105-100=5$個格子，如果要去掉也是去掉整行最下面的數，觀察刪掉最下面那一行的時候，觀察總和的變化，如果將淺灰色的去掉，除了刪掉的格子，刪掉的格子上面將會減一，但看到深灰色格子的上面，如果將深灰色格子刪掉，減少的只有刪掉的格子。因此只要刪掉的格子不是最後一個，總和都為將最小之一

(1)去掉最左邊的五個多的。

2													
3	3												
4	4	4											
5	5	5	5										
6	6	6	6	6									
7	7	7	7	7	7								
8	8	8	8	8	8	8							
9	9	9	9	9	9	9	9						
10	10	10	10	10	10	10	10	10					
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11				
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12			
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13		
13	13	13	13	13	14	14	14	14	14	14	14	14	
					14	14	14	14	14	14	14	14	14

總合為:1031

此結果最好之一。而去掉之後的方法間隔依序為{13,12,11,10,9,9,8,7,6,5,4,3,2,1}

(2)去除 1、3、5、7、9 行最後一個

2													
3	3												
4	4	4											
5	5	5	5										
6	6	6	6	6									
7	7	7	7	7	7								
8	8	8	8	8	8	8							
9	9	9	9	9	9	9	9						
10	10	10	10	10	10	10	10	10					
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11				
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12			
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13		
14→13	14	14→13	14	14→13	14	14→13	14	14→13	14	14	14	14	
	14		14		14		14		14	14	14	14	14

總合為:1031

此結果也為最好之一。

而去掉之後的方法間隔依序為{13,13,11,11,9,9,7,7,5,5,4,3,2,1}

引理(一)：對 k 層樓的一般丟法

第一步：

取$m=\left\lceil\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}\right\rceil$，可以得到一數列$\{U_n\}$，$U_n=\{(m+1)-n, 1\le n\le m\}$，此時若$\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}$為正整數則總樓層 k 為三角形數；若$\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}$不為正整數則總樓層不為三角形數。

第二步：

狀況一：

總樓層 k 為三角形數時，數列$\{U_n\}$即為第一顆球每次要丟的間隔。在球都沒破的情況下，第一顆球丟的樓層依次為 m、$2m-1$、…、$\frac{m(m+1)}{2}$。若第一顆球破了，則此時第二顆球就從已知最高不破樓層的下一層開始一層一層向上檢測。

狀況二：

總樓層不為三角形數時，計算$h=\frac{m(m+1)}{2}-k$，將數列$U_n=\{(m+1)-n, 1\le n\le m\}$ 的前 50 項皆減 1，得到新數列$\{S_n\}$，$S_n=\begin{cases} m-n,\ 1\le n\le h \\ (m+1)-n，h+1\le n\le m \end{cases}$，$\{S_n\}$即為第一球每次要丟的間隔。在球都沒破的情況下，第一顆球丟的第 n 次為$\begin{cases} \frac{n(2m-n-1)}{2}, 1\le n\le h \\ \frac{n(2m-n+1)}{2}-h, h+1\le n\le m \end{cases}$層。若第一顆球破了，則此時第二顆球就從已知最高不破樓層的下一層開始一層一層向上檢測。

1.舉例:

例子一:樓層為 120 層。

則$k=120$

取$M=\frac{-1+\sqrt{1+8\times120}}{2}=15$，然後可以得到數列$\{U_n\}$,$U_n=\{16-n, 1\le n\le 15\}$，數列$U_n$即為第一球每次要丟的間隔，在球都沒破的情況下，第一顆球丟的樓層依次為 15，29，42，54，65，75，84，92，99，105，110，114，117，119，120

例子二:樓層 k 為 5000 層。

則 $k = 5000$

取$M = \left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+8\times5000}}{2} \right\rceil \doteqdot \lceil 99.5 \rceil = 100$，計算 100 加到 1 的總和與 5000 的差距為 50，對數列$\{U_n\}, U_n = \{101 - n\,, 1 \le n \le 100\}$對$U_n$的前 50 項皆減 1，得到數列 $\{S_n\}$，$S_n = \begin{cases} 101 - n\,, 51 \le n \le 100 \\ 100 - n\,,\ 1 \le n \le 50 \end{cases}$

數列S_n即為第一球每次要丟的間隔，在球都沒破的情況下，第一顆球丟的第 n 次為$\begin{cases} \frac{-n^2+199n}{2}, 1 \le n \le 50 \\ \frac{n^2-201n+10100}{2}, 51 \le n \le 100 \end{cases}$層。 ■

> 引理(二)：最壞情況的證明。
>
> 對任意 k 層樓，使用引理(一)可得平均最佳解，而此平均最佳解亦為最糟情況(worst case)最少的解法之一。

證明：

狀況一：

總樓層 k 為三角形數，取 m 使得$k = \frac{m(m+1)}{2}$，運用引理(一)可以得平均最佳的解法其最糟情況為 m。設存在一種丟法其最糟情況是$(m-1)$，由數格圖的圖形概念可知，丟 2 次的最多 1 個、丟 3 次的最多 2 個……丟$(m-2)$次的最多$(m-3)$個、丟$(m-1)$次的最多$(2m-3)$個。

故在此情況下能丟的總樓層數最多為$\{1 + 2 + 3 + \cdots + (m-3) + (2m-3)\}$，其總和為$\frac{m^2-m}{2}$，發現$\frac{m^2-m}{2}$小於總樓層$\frac{m(m+1)}{2}$，即最糟情況為$(m-1)$時無法測定 k 層樓，故最糟情況至少為 m，但已有最糟情況為 m 的解法，所以此方法亦為最糟情況最少的方法之一。

狀況二：

總樓層 k 不為三角形數，取$m = \left\lceil \frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2} \right\rceil$，運用引理(一)可以得到最糟情況為 m。設存在一種丟法其最糟情況是$(m-1)$，由數格圖的圖形概念可知，丟 2

次的最多 1 個、丟 3 次的最多 2 個……丟$(m-2)$次的最多$(m-3)$個、丟$(m-1)$次的最多$(2m-3)$個。故在此情況下能丟的總樓層數最多為$\{1+2+3+\cdots+(m-3)+(2m-3)\}$，其總和為$\frac{m^2-m}{2}$，又因為$\frac{m(m+1)}{2}>k>\frac{m(m-1)}{2}$，故最糟情況為$(m-1)$時無法測定 k 層樓，所以最糟情況至少為 m，但已有最糟情況為 m 的解法，故此方法亦為最糟情況最少的方法之一。

引理(三):給定 k 樓層，取$m=\left\lceil\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}\right\rceil$，兩顆球丟的最佳解的次數總和為:

$$G_2(k)=\frac{m(m^2+3m-1)}{3}-\left[\frac{m(m+1)}{2}-k\right](m+1)$$

證明:

當給定樓層 k，由定理二可以得到一數列，只要檢測沒破，就按照此數列一路隔到 k 層樓。而這解法將為最好結果，推導此解法的平均結果如下:

發現在 k 為三角形數時，只要一列中有幾行，整列的數字便會是行數加一，只有最後兩列的數字會一樣，所以最後一列的數字就是行數，因此可以得知以下總和公式。

$$1\times2+2\times3+3\times4+4\times5\ldots\ldots\ldots\ldots+(m-1)\times m+m\times m$$

再列成希格瑪開始化簡

$$=\sum_{k=1}^{m-1}k(k+1)+m^2=\sum_{k=1}^{m-1}k^2+k+m^2=\sum_{k=1}^{m-1}k^2+\sum_{k=1}^{m-1}k+m^2$$

將其展開

$$=\frac{m\times(m-1)\times(2m-1)}{6}+\frac{(m-1)m}{2}+m^2=\frac{m(m^2+3m-1)}{3}$$

但若 k 不是三角形數時，得扣掉多餘的樓層和其造成的變化，可得知下列總和公式

$$\frac{m(m^2+3m-1)}{3}-\left[\frac{m(m+1)}{2}-k\right]\times m-\left[\frac{m(m+1)}{2}-k\right]\times 1$$
$$=\frac{m(m^2+3m-1)}{3}-\left[\frac{m(m+1)}{2}-k\right](m+1)$$

二、延伸至三顆球

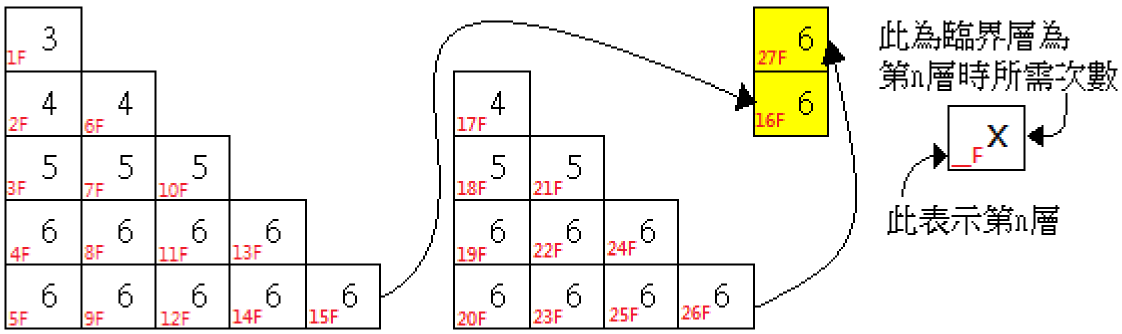
如果有三顆球，則可以用和兩顆球類似的概念，第一顆球先找到一個範圍，第二顆球再從這個範圍中再找到更小的範圍，最後一顆則找到在哪一層。

為了減少變數，第一顆球先將總樓層分成兩大段討論。經過觀察的結果，整理出立體的數格圖填法與移動。

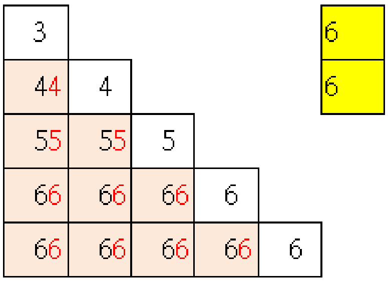
(一)立體數格圖填法:

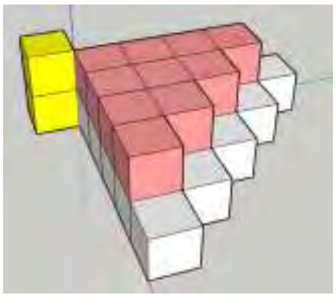
1. 第一顆球預計要丟的樓層會將總樓層分成數段，每一段就稱為一階，丟的樓層不算入階內，階的次序由丟的順序由先到後記為第一階到第 n 階。
2. 每一階按照平面數格圖的規則列出數格圖；數格圖填入的數字依照平面數格圖的填法再根據第 i 階每個數字加 i。
3. 第一顆球預計要丟的樓層的格子內的數字，依照每階數格圖的最後一行填數，如果那一行當中只有一個，則填入與最後一個格子相同的數字；如果超過一個，則填入最後一個格子內的數字扣超過的格數。

例如:有 27 層樓，分成兩大階，第一顆球預定丟 16 層與 27 層，將 27 層分成兩階，另外拉出第一顆球要丟的格子，則第一階 15 格，第二階 10 格。分別用平面數格圖列出，且第一階裡每一格數字皆加一，第二階裡每一格數字皆加二。



觀察此數格圖發現，在每一階除另外拉出的格子，只要是三角形數時，每一階會是前一階把每一行的第一個格子去掉。因此規定立體數格圖排法為:把每一階第 I 行第一個格子，對齊前一階第 i 行第二個格子。即將每階的數格圖疊在一起，形成立體的數格圖。





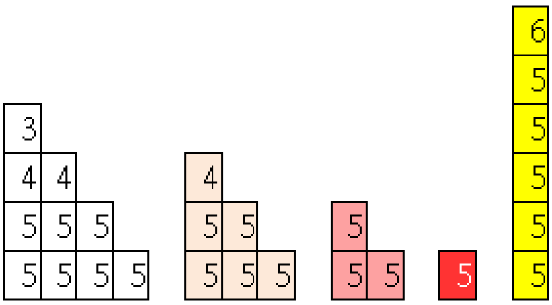
將(左圖)疊上去的格子用淺紅塗起來，上層的格子內數字則用紅色。右圖為立體數格圖的示意圖。

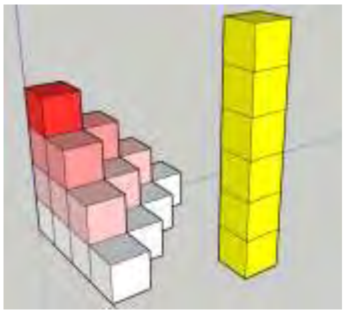
接著，將數格圖的格子進行移動觀察，得到了下列的規則:

(二) 立體數格圖的移動:

1. 同階移動時，移動後的變化與平面數格圖移動變化相同。格子向下移動 i 排，總和就會增 i；格子向上移動 i 排，總和就會減少 i。
2. 不同階移動時，與同階相同，只要移動的格子相對於原本的位置是往下移動，移動 i 排，總和就會增 i；若是往上移動 i 排，總和就會減少 i。
3. 若是要增加新的階層，第一個要增加的就是另外拉出來的格子，裡面的數字就是前一階另外拉出的格子，格內數字加一。再繼續增加就照立體數格圖填法完成。

接著以 26 層樓為例。利用立體數格圖移動後發現





此時，只要移動格子，總和就會變大，可知只要樓層 k 可以變成 n 階四面體數加上(n+2)時，對三顆球來說會有唯一的最佳解。即為當樓層數 k 符合

$k=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+(n+2)\{n\in\mathbb{N}\}$時，k 對三顆球會有一的最佳解。

(三) 對任意 k 層樓找一個最佳解法

$k=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+(n+2)$可化成$n^3+3n^2+8n+(12-6k)=0$

利用卡丹公式(推導過程如附件(一)所示)解出當

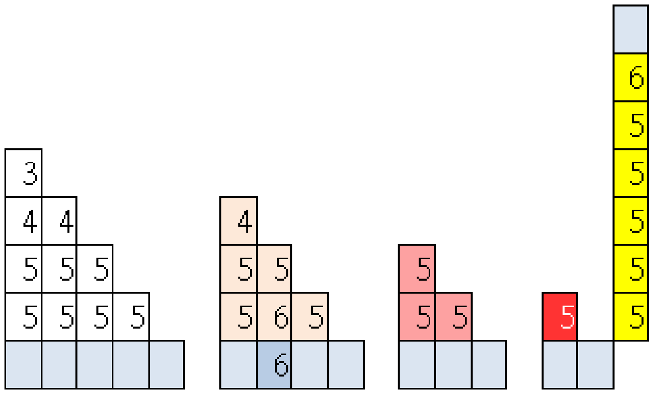
$n=\sqrt[3]{\frac{(6k-6)+\sqrt{36k^2-72k+\frac{1472}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{(6k-6)-\sqrt{36k^2-72k+\frac{1472}{27}}}{2}}-1$時有最佳的唯一解，為了得到整數，取下高斯得到符合總數比 k 小，最接近 k 的四面體數加上(n+2)

$$m_3(k)=\mathrm{floor}\left(\sqrt[3]{\frac{(6k-6)+\sqrt{36k^2-72k+\frac{1472}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{(6k-6)-\sqrt{36k^2-72k+\frac{1472}{27}}}{2}}-1\right)$$

此時給定 k 帶入得到結果列出一個m_3階四面體加m_3+2，而格子可以加在四面體的每一階當中。

舉例 27 層樓:

$k=27$，帶入 $m_3(27)=4$，列出圖形



則少算之格子數為$k-\left(\frac{m_3(m_3+1)(m_3+2)}{6}+(m_3+2)\right)=27-\frac{4(5)(6)}{6}+(4+2)=1$

試著將其加入立體數格圖當中，經過觀察發現此格子可以加入每一階的最後一列當中，或是加入旁邊(m_3+2)格子之上，使得總和不會因為格子再移動而變小。

例如:

其中藍色部分，若格子超出皆可填入格子。利用此方法可以得到，任意 k 樓層對三顆球的最佳解之一。如果移動格子不變的話，會有多組解。

任意 k 層三顆球的丟法:

對任意樓層 k，取

$$m_3=\left\lfloor \sqrt[3]{\frac{(6k-6)+\sqrt{36k^2-72k+\frac{1472}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{(6k-6)-\sqrt{36k^2-72k+\frac{1472}{27}}}{2}}-1\right\rfloor$$

$$\mathrm{h}=\mathrm{k}-\left(\frac{m_3(m_3+1)(m_3+2)}{6}+(m_3+2)\right)\text{、}\mathrm{p}=\left\lfloor\frac{(2m_3+3)-\sqrt{(2m_3+3)^2-8h}}{2}\right\rfloor$$

可得第一顆球要丟的數列$\{a_n\}$

$$a_n=\begin{cases}\frac{(m_3+1)(m_3+2)(m_3+3)}{6}-\frac{(m_3-n)(m_3-n+1)(m_3-n+2)}{6}+n, p\geq 1\wedge 1\leq n\leq p\\ \frac{m_3(m_3+1)(m_3+2)}{6}-\frac{(m_3-n)(m_3-n+1)(m_3-n+2)}{6}+n+h\,, p+1\leq n\leq m_3\\ \frac{m_3(m_3+1)(m_3+2)}{6}+n+h\,, m_3+1\leq n\leq m_3+2\end{cases}$$

當第一顆球在a_i破的時候時，第二顆就依$\{\mathrm{b_n}\}$丟球，取

$$\mathrm{m_2}=\left\lceil\frac{-1+\sqrt{1+8(a_i-a_{i-1}+1)}}{2}\right\rceil\text{、}\mathrm{q}=\mathrm{h}-\frac{2\mathrm{p}(m_3+2)-\mathrm{p}(\mathrm{p}+1)}{2}$$

得到

$$b_n=\begin{cases}a_{i-1}+\frac{n(2\mathrm{m_2}-n+1)}{2}\,, n\leq q\\ a_{i-1}+\frac{n(2\mathrm{m_2}-n+1)}{2}-\mathrm{q}\,, \mathrm{q}+1\leq \mathrm{n}\leq \mathrm{m_2}\end{cases}$$

最後當第二顆球破掉時，第三顆球就照上一個沒破的樓層一層一層往上丟。

陸、討論

一、兩顆球的討論

(一) 與 Google 的參考解答比較

Google 的參考解答:

1. 從 14 樓開始檢測保齡球，如果沒有破的話，就每次往上增加 13、12、11⋯個樓層，一直到 99 樓為止。這中間丟保齡球的樓層為 14、27、39、50、60、69、77、84、90、95、99。
2. 假設到了 99 樓還是沒破，那就要往上到 100 樓丟，不管保齡球有沒有破，都表示總共要丟 12 次。
3. 如果在上述樓層的其中一層讓保齡球破了，例如是 50 樓，那就要到 40 樓繼續丟(因為 39 樓時還是沒破)，每次往上增加一樓，直到保齡球破了為止，最多需要 14 次。
4. 以此類推。不管是在「14、27、39、50、60、69、77、84、90、95、99」樓那一層破了，就回到低樓層去逐樓實驗。

對於此 Google 題目的 100 層，使用到引理(一)後，得到的結果，套用在兩個不同定義的快速下，以平均做比較，此結果比參考答案好；以最糟情況做比較的，此結果與參考答案一樣。

(二) 第二顆球的最佳結果與丟法

如果將題目的樓層推廣到 k 層樓，可以利用引理(一)的結果，找到最好的方法。當給定樓層 k，利用引理(一)得到對 k 層樓的一般丟法。引理(二)可以告訴我們此方法也是最糟情況最好的方法之一。而利用引理(三)可以讓我們計算需要的總次數。

二、三顆球的討論

當把球數推廣到三顆球的時候，利用兩顆球時丟球的概念、數格圖及引理(三)擴增成立體數格圖，用來說明哪一種樓層會有唯一最佳解，並由這些樓層推廣至其他樓層的最佳解法。最後給出了任意 k 層三顆球的丟法。

柒、結論與未來展望

對於此丟球問題，此研究已經完美解決了兩顆球的情況，也延伸探討了三顆球的狀況，在三顆球時雖然沒有給出一個很嚴謹的證明，但透過推廣出來的立體數格圖與丟法，我們相信已經完備了三顆球問題。

對於丟球問題的未來展望:

一、如果考慮球會有耐摔度的問題，那是否也能推出解答的方法。

二、是否在現實生活中，有可以應用的例子。例如:車撞實驗，防撞玻璃耐摔實驗等…。

三、探討如果繼續增加能丟的球的個數，是否會有類似於剖半演算法的形式。

四、現在分成各樓層是一個離散型的問題，是否可探討將樓層改為高度變成連續型的問題。

捌、參考資料及其他

一、參考資料

(一) 維基百科-三角形數:https://zh.wikipedia.org/wiki/三角形數

(二) 翻譯題目: https://zhuanlan.zhihu.com/p/32927336

(三) 原文題目: https://stackoverflow.com/questions/6547/two-marbles-and-a-100-story-building

(四) 國高中數學課本

(五) 卡丹公式 http://euler.tn.edu.tw/20121007

二、附件

(一) 卡丹公式推導過程:

$n^3+3n^2+8n+(12-6k)=0$ 可以利用卡丹公式解出 n。

設$n=y-1$ 帶入上式化簡，得到 $y^3+5y+(6-6k)=0$

觀察乘法公式 $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

與係數比對，設$y=\alpha+\beta$

$\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=(6-6k)\\ 3\alpha\beta=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha^3+\beta^3=(6-6k)\\ \alpha^3\beta^3=-\frac{125}{27}\end{cases}$，設$\alpha^3$與$\beta^3$之解為 x

得到$x^2+(6k-6)x-\frac{125}{27}=0$

公式解得 $x=\frac{(6k-6)+\sqrt{(6k-6)^2+\frac{500}{27}}}{2} \vee \frac{(6k-6)-\sqrt{(6k-6)^2+\frac{500}{27}}}{2}$

設兩解為x_1, x_2，帶入前面假設得 $\alpha^3=x_1, \beta^3=x_2$

$\alpha=\sqrt[3]{x_1}, \sqrt[3]{x_1}\omega\sqrt[3]{x_1}\omega^2$，$\beta=\sqrt[3]{x_2}, \sqrt[3]{x_2}\omega\sqrt[3]{x_2}\omega^2$

$y=\alpha+\beta$(只求實數部分)$\mathrm{Re}(y)=\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}$

則 $\mathrm{Re}(n)=\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}-1$，帶入x 化簡之解得到

$$\mathrm{Re}(n)=\sqrt[3]{\frac{(6k-6)+\sqrt{36k^2-72k+\frac{1472}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{(6k-6)-\sqrt{36k^2-72k+\frac{1472}{27}}}{2}}-1$$ 。

【評語】050411

本作品已經在歷屆科展重複多次;除了原google面試題之外，還包括出現在2016年的丘成桐高中數學獎佳作、2017年的全國科展國中組佳作。之前所有作品(包括原題)都是求「最佳之最糟情況」策略，而且可以求出所有的最佳策略(因為不只一種)。而本作品是在求「最佳之平均策略」。另外作者在推廣至三顆球或更多球時，應該是比較新穎的部分，但目前似乎只找到一種策略，其最佳策略的驗證數學上並不嚴謹，這個部分是未來可以延續努力的研究課題。

作品海報

壹、摘要

本次的研究中，主要在探討Google面試問題。我們將題目的「快速」明確定義為平均次數最少，並用總樓層10為例推出通式，透過平均與隔層數之函數求出固定隔層數的最佳解。再透過觀察圖形表格，移動表格後運用數格圖的概念尋找更佳結果，找出更理想的解答方法並與Google解答比較。之後，將題目的兩顆球延伸至三顆球，利用之前推導次數的概念，將二維數格圖擴增至三維立體數格圖，並找到適合所有樓層的最佳解法。

貳、研究目的

本研究之目的為:在我們定義的題目架構下，探討100層樓時較好的解決方法並與原題目的參考答案做比較。再由100層為例尋找任意層的解決方法。之後將兩顆球的測法延伸至條件為三顆球時，尋找任意樓層的最佳結果。

參、研究設備

本研究一開始先用紙筆推導丟球過程並將其歸納，再把得到的數據與公式利用desmos協助畫圖與計算，判斷極值產生的地方；當考慮多顆球的問題時，使用sketch up繪製成立體模型，幫助具體地建立移動規則。

肆、研究過程

一、題目

原始題目

有一棟 100層高的大樓，你手中有兩個相同的保齡球。從這棟大樓的某層丟下來一定會破，用你手中的這兩個保齡球，找出次數最少的策略，來得知那個最低會破的樓層。

明確定義題目

現在有100層樓，有兩顆一樣的球，這兩顆球在一定的樓高以上往下丟一定會破，未達會破的那一層怎麼丟都不會破，此時稱此層為臨界層（球會破的最低樓層）；臨界層可能在1到100之間，若 100層樓內皆不破，此時定義臨界層稱為101層，我們假設臨界層出現在任何樓層（包含不破）的機率是相同的。試以平均次數較少的方法找到臨界層?

二、比較方法

明確定義中比較快的方法，是平均丟的次數最少者。例如：現在用某方法列出當臨界樓層在一樓到100樓時，所需的各自次數，將所有次數相加除以所有可能（101），即為平均。

三、間隔固定樓層測試

先探討的方法是：如果沒破，就每次固定隔u層樓丟下。譬如 u=10固定隔10層，也就是第一次在十樓丟，如果沒破就在二十樓丟，再沒破就在三十樓丟，那如果破了，就丟前一次丟過不會破的上一層，沒破就再往上一層丟。

(一)低樓層情況:

假設樓層為k，以k=10為例觀察並推導通式。

(二)對任意k層樓隔u層的公式推導:

因為 $\frac{k}{u}$ 不一定為整數故定義$p=\left\lfloor\frac{k}{u}\right\rfloor$。剩下的餘數樓層就定義r

$$k=\left\lfloor\frac{k}{u}\right\rfloor u+r=pu+r$$

1. 通式

$$\sum_{a_0=1}^{p}(a_0+(u-1))+\sum_{a_1=2}^{p+1}a_1+\sum_{a_2=3}^{p+2}a_2+\cdots$$

$$+\sum_{a_{u-1}=u}^{p+(u-1)}a_u\ (\text{整數部分})+\sum_{e=1}^{r}(p+e)\ (\text{餘數部分})$$

$$s_{av}(x)=\frac{1}{k+1}\left(\frac{\left\lfloor\frac{k}{x}\right\rfloor^2 x+\left\lfloor\frac{k}{x}\right\rfloor x^2+2\left\lfloor\frac{k}{x}\right\rfloor x-2\left\lfloor\frac{k}{x}\right\rfloor}{2}+\frac{r^2+r+2r\left\lfloor\frac{k}{x}\right\rfloor}{2}\right)$$

$$s_{av}(u)=\frac{1}{2(k+1)}\left[\frac{(k^2-r^2-2k+2r)}{u}+(k-r)u+(2k+r^2-r)\right]$$

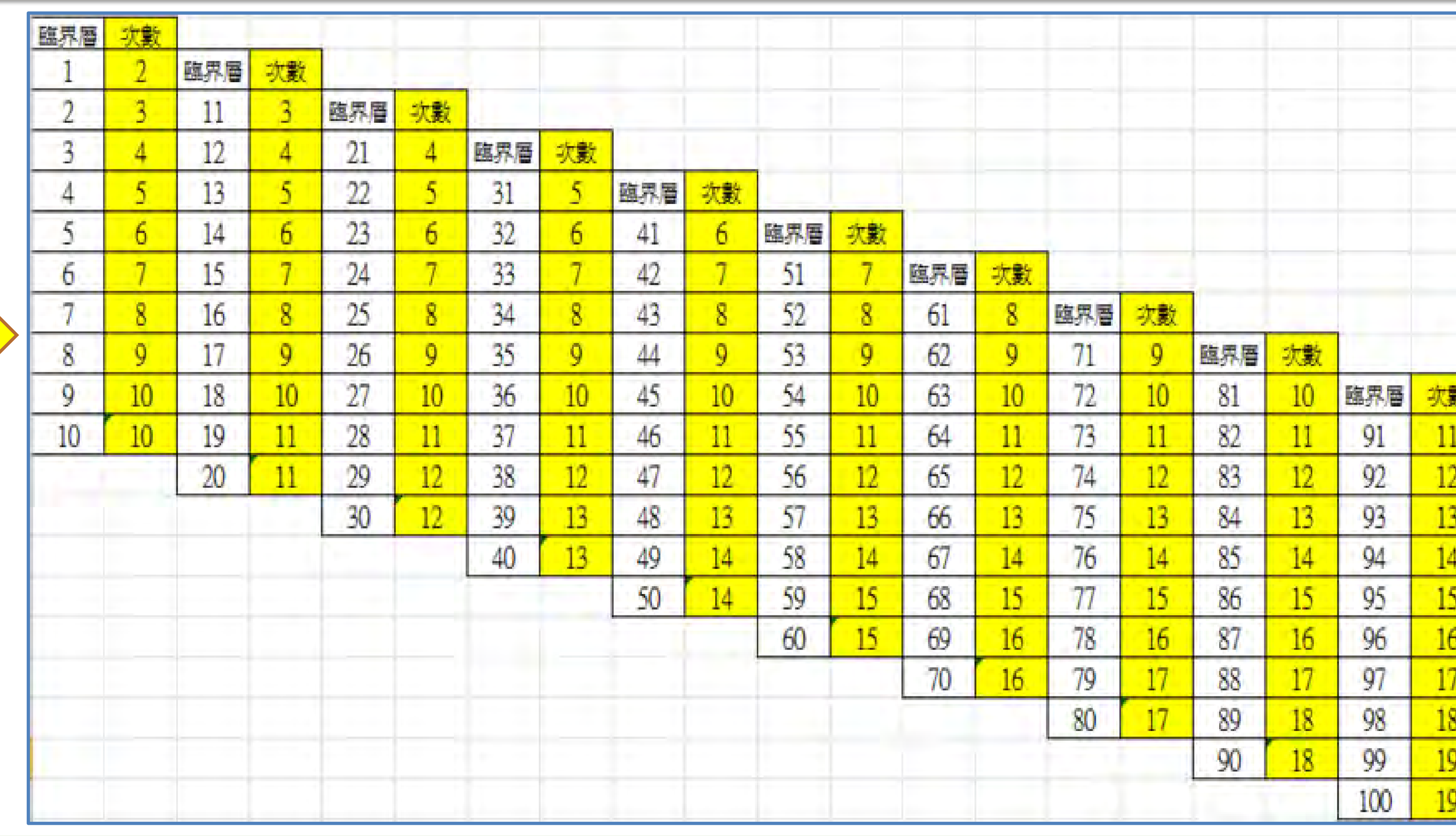
最後利用算幾不等式得知:

$\sqrt{k-2}\le u<\frac{1+\sqrt{4k-7}}{2}$ **u在此範圍內會有最小平均**

將總樓層k=100代入，得到每次隔u=10平均會有最小，列出當臨界層在每層時，所需的次數。

臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數	臨界層	次數
1	2	11	3	21	4	31	5	41	6	51	7	61	8	71	9	81	10	91	11
2	3	12	4	22	5	32	6	42	7	52	8	62	9	72	10	82	11	92	12
3	4	13	5	23	6	33	7	43	8	53	9	63	10	73	11	83	12	93	13
4	5	14	6	24	7	34	8	44	9	54	10	64	11	74	12	84	13	94	14
5	6	15	7	25	8	35	9	45	10	55	11	65	12	75	13	85	14	95	15
6	7	16	8	26	9	36	10	46	11	56	12	66	13	76	14	86	15	96	16
7	8	17	9	27	10	37	11	47	12	57	13	67	14	77	15	87	16	97	17
8	9	18	10	28	11	38	12	48	13	58	14	68	15	78	16	88	17	98	18
9	10	19	11	29	12	39	13	49	14	59	15	69	16	79	17	89	18	99	19
10	10	20	11	30	12	40	13	50	14	60	15	70	16	80	17	90	18	100	19

觀察此表格，檢查k=100的公式時，次數格子會有整列+1的狀況，將每一行都移動對齊左邊的數字。



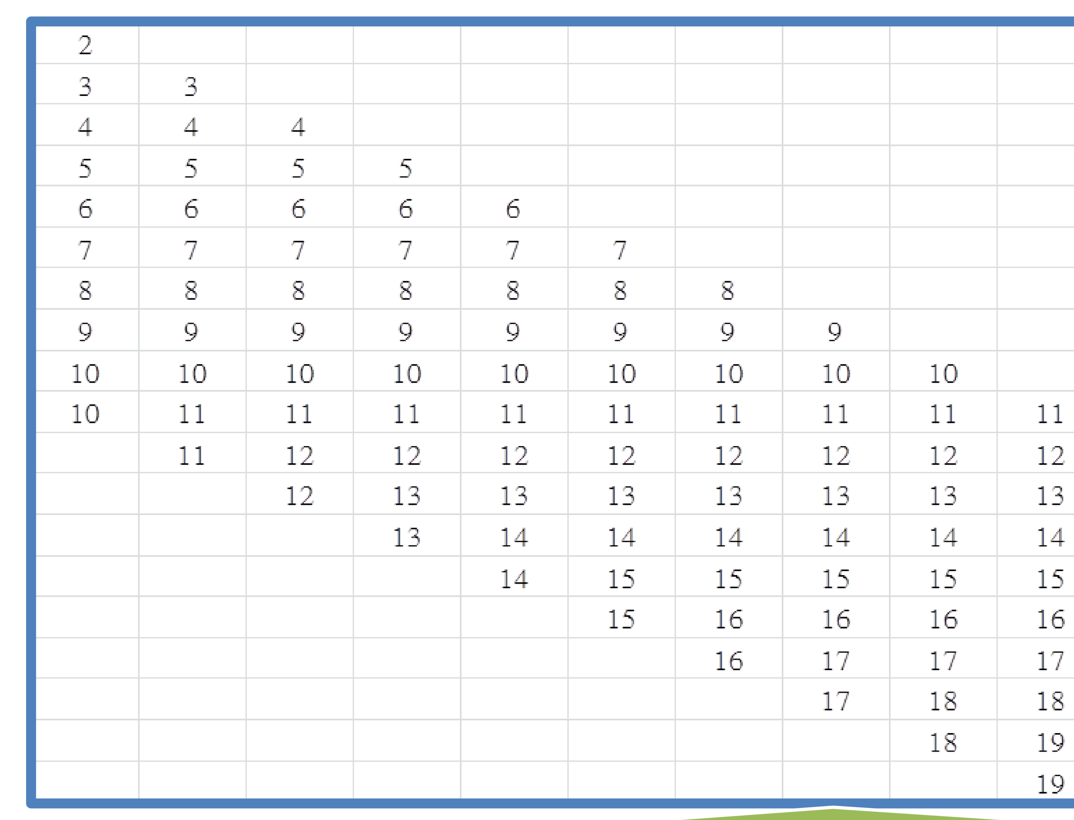
四、數格圖

圖中黃色部分稱為數格圖(次數表格圖)。要列一個數格圖，首先要知道總層樓(k層)，再來要知道一個總合為k數列，數列每個元素的數字為每一次隔幾層，數列的項數將決定數格圖有幾行。

圖中每格的數字填法為：對第n行的第m個，當m不為最後一個時填入n+m；當m為最後一個時填入n+m-1，一行中最後的倒數兩個數字會一樣，且遇到一行當中只有一個數時，該數也要減一。列完之後將每一行的第一個數，與左邊一行的第二個對齊。

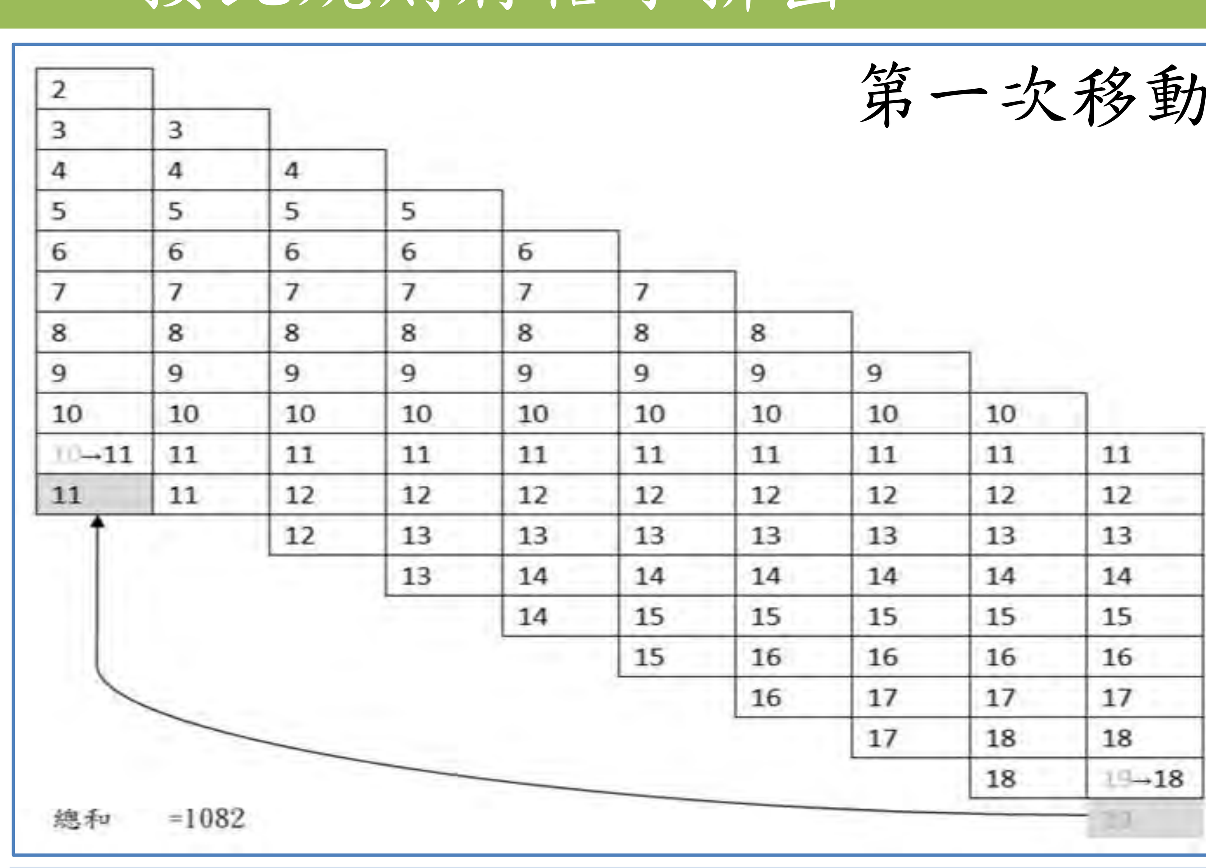
1+1	2+1	3+1	4+1	5+1	6+1	7+1	8+1	9+1	10+1
1+2	2+2	3+2	4+2	5+2	6+2	7+2	8+2	9+2	10+2
1+3	2+3	3+3	4+3	5+3	6+3	7+3	8+3	9+3	10+3
1+4	2+4	3+4	4+4	5+4	6+4	7+4	8+4	9+4	10+4
1+5	2+5	3+5	4+5	5+5	6+5	7+5	8+5	9+5	10+5
1+6	2+6	3+6	4+6	5+6	6+6	7+6	8+6	9+6	10+6
1+7	2+7	3+7	4+7	5+7	6+7	7+7	8+7	9+7	10+7
1+8	2+8	3+8	4+8	5+8	6+8	7+8	8+8	9+8	10+8
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9	10+9
1+9	2+9	3+9	4+9	5+9	6+9	7+9	8+9	9+9	10+9

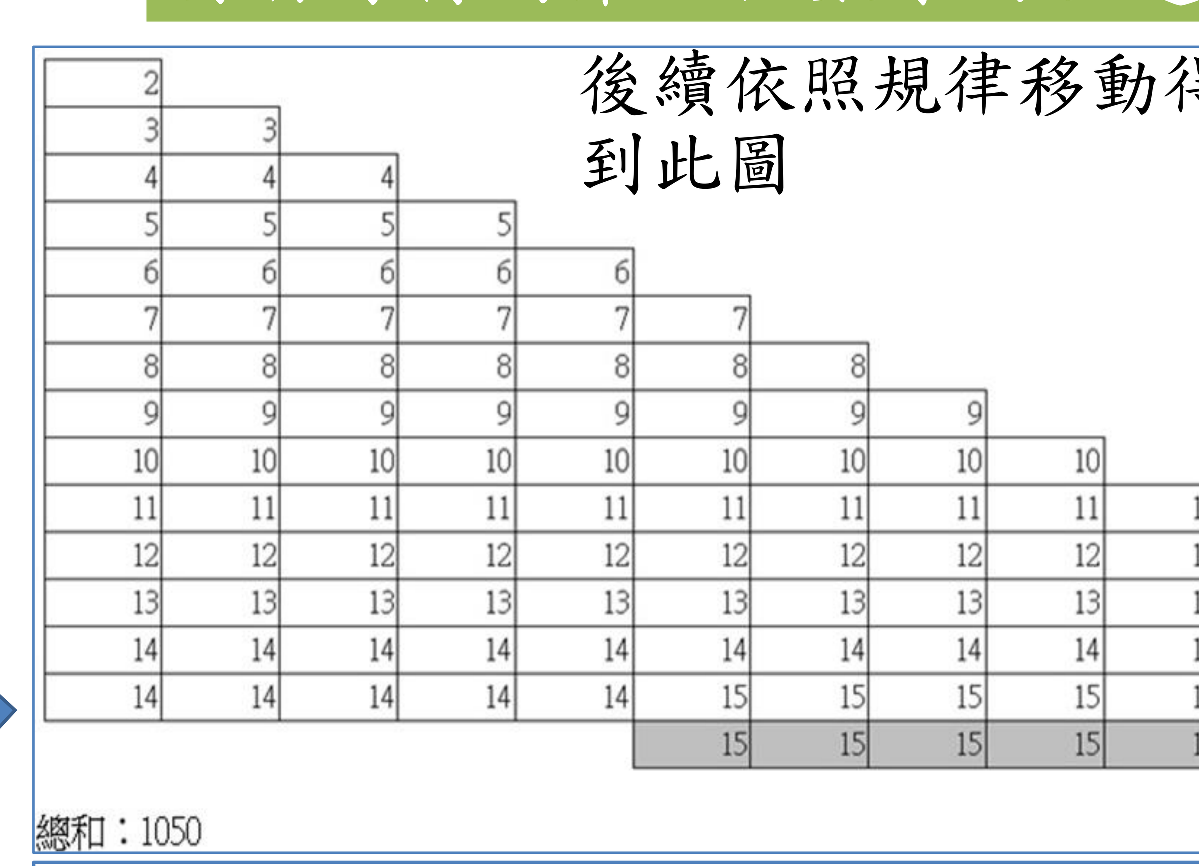
按此規則將格子排出。

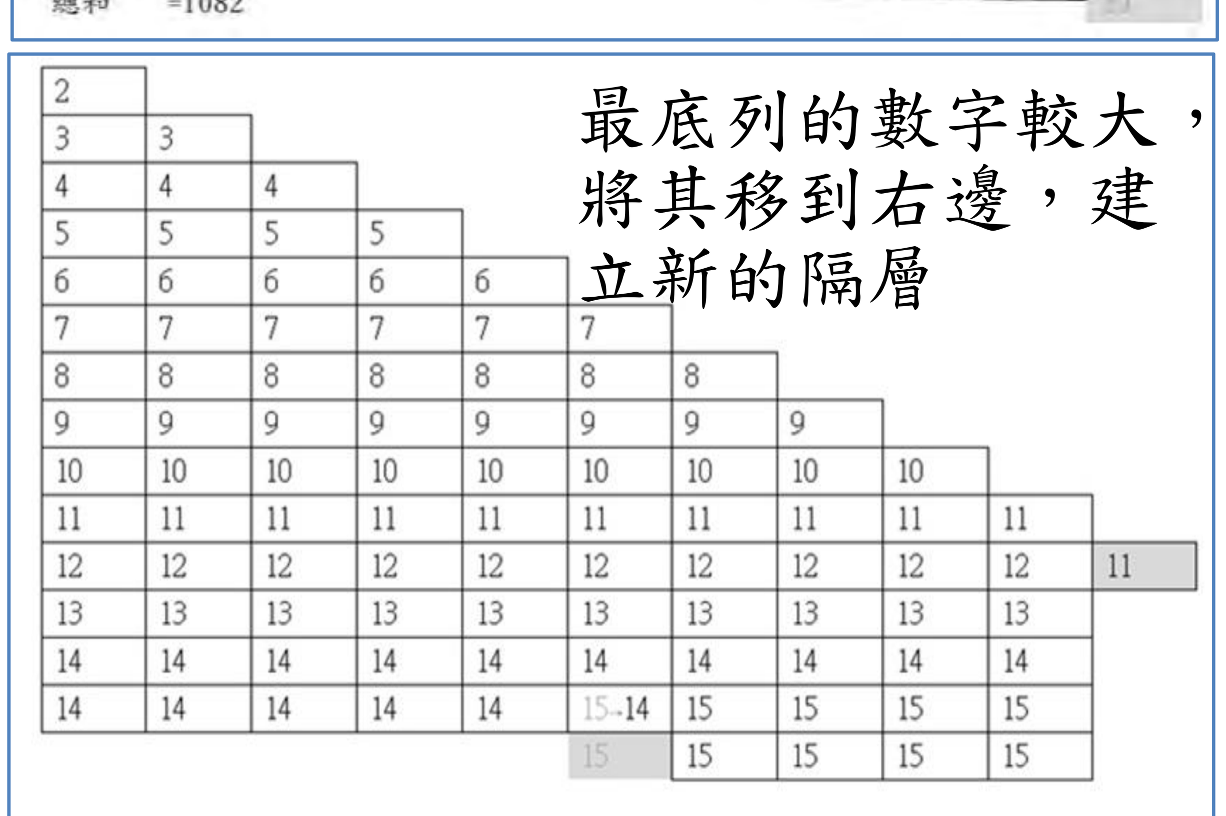


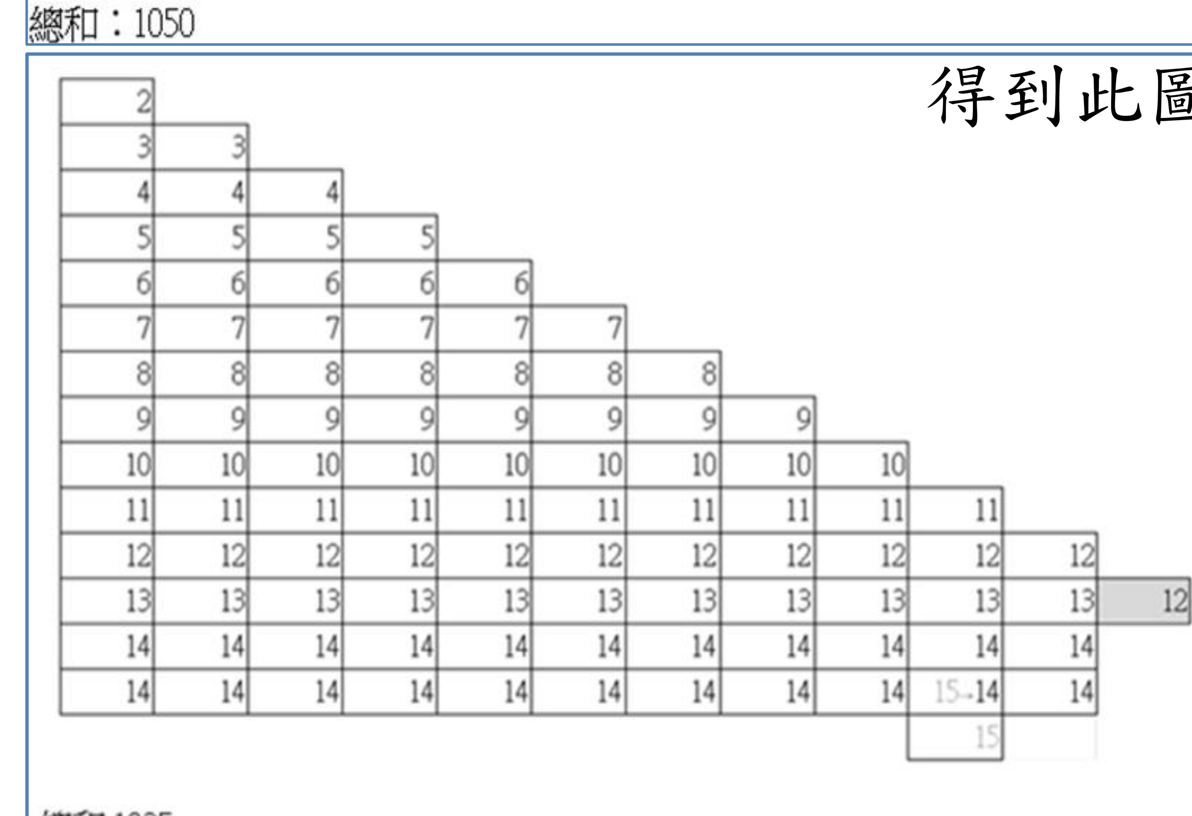
再將每行的第一個數字向左邊對齊。

照規律移動





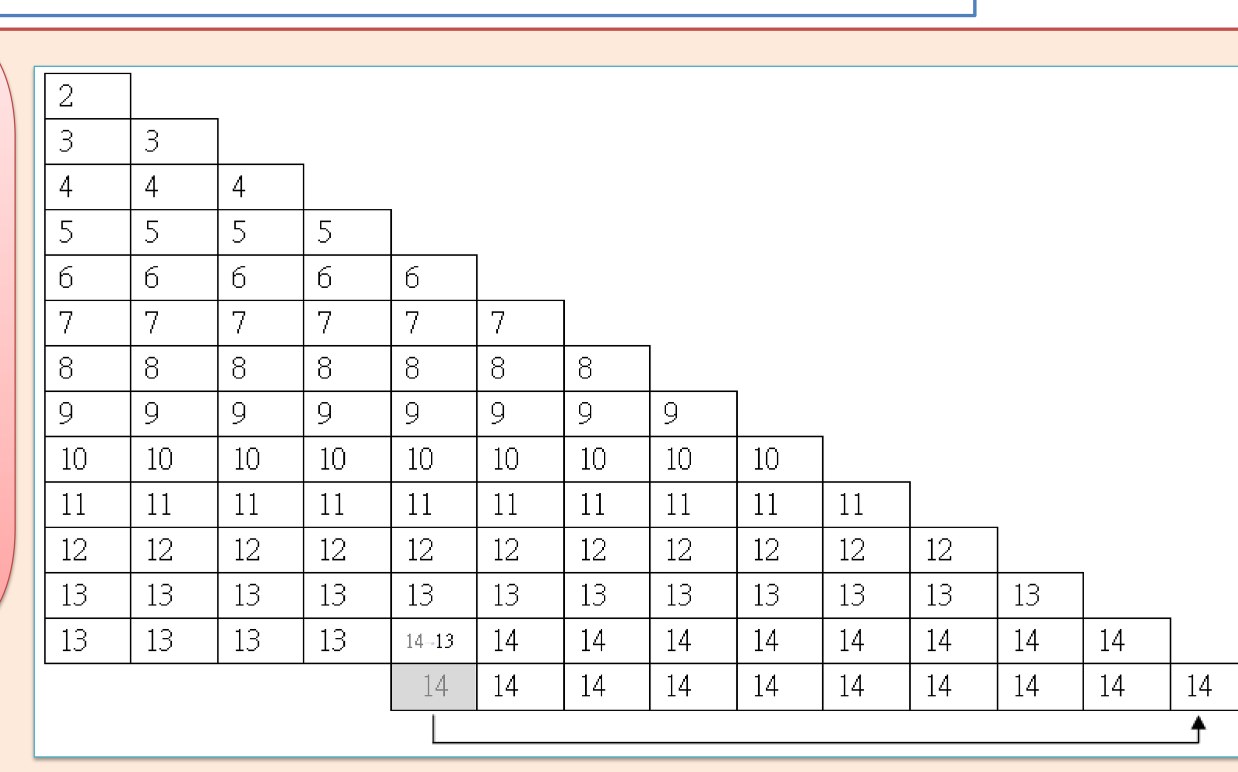




結果

數格圖移動法則：

1. 只能移動數格圖每一行最下面的格子。
2. 移動後，只能移動到每一行的最下層，或是最右邊。
3. 左右移動，格內數字不會增加。
4. 向上移動i排，格內數字就會減少i；向下移動i排，格內數字就會增加i。



依照規律最後會得到如右數格圖，得到的每一排格子數數列將為最好的隔法之一，也就是最好的平均結果之一。總合為1031，平均約為10.208次。

而移動完將每一行的格子數排成一數列，第一行有a_1個，第二行有a_2個，⋯，第n行有a_n個，數列為$\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$，而所有數的總和為k，也就是k層樓。數列的意義為，第一次檢測樓層a_1，沒破就檢測樓層a_1+a_2，沒破就檢測樓層$a_1+a_2+a_3$，如果一直沒破，最後一次檢測即為$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=$k樓。

伍、研究結果

定理一

- 對於樓層k，若方法為固定樓層，則取$\sqrt{k-2} \le u < \frac{1+\sqrt{4k-7}}{2}$，固定格u，平均將為最小。

定理二

- 對於所有的三角形數$k=\frac{n(n+1)}{2}$，將k用數列$\{n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1\}$排成數格圖表示，則數格內的數字總和將為最小，且此最小結果唯一。

定理三

- 給定樓層k，$k \in \mathbb{N}$，且k不是三角形數時，取$m=\left\lceil\frac{-1+\sqrt{1+8k}}{2}\right\rceil$，先將$\frac{m(m+1)}{2}$用數列$\{m, m-1, m-2, \ldots, 2, 1\}$排成數格圖表示，將最下面一列，除了最右邊的獨立格子之外，任意選取$\frac{m(m+1)}{2}-k$個格子將其刪除之後，其總和將為最小，而對於數列來說只要不要刪掉最後一項的1，選取其他$\frac{m(m+1)}{2}-k$個項，每項扣1，就可以代表數格圖每一行格子的數量。

引理一

- 對任意樓層的最佳解。

引理二

- 平均最佳解亦為最糟情況(worst case)最少的解法之一。

引理三

- 對任意樓層最佳解的次數總和。

延伸至三顆球

當樓層數k符合
$k=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}+(n+2)\{n \in \mathbb{N}\}$時，三顆球會有唯一的最佳解

對任意樓層k，取$m_3=\left\lfloor\sqrt[3]{\frac{(6k-6)+\sqrt{36k^2-72k+\frac{1472}{27}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{(6k-6)-\sqrt{36k^2-72k+\frac{1472}{27}}}{2}}-1\right\rfloor$

$$h=k-\left(\frac{m_3(m_3+1)(m_3+2)}{6}+(m_3+2)\right), p=\left\lfloor\frac{(2m_3+3)-\sqrt{(2m_3+3)^2-8h}}{2}\right\rfloor$$

得第一顆球要丟的數列$\{a_n\}$為

$$\begin{cases} \frac{(m_3+1)(m_3+2)(m_3+3)}{6}-\frac{(m_3-n)(m_3-n+1)(m_3-n+2)}{6}+n, p \ge 1 \wedge 1 \le n \le p \\ \frac{m_3(m_3+1)(m_3+2)}{6}-\frac{(m_3-n)(m_3-n+1)(m_3-n+2)}{6}+n+h, p+1 \le n \le m_3 \\ \frac{m_3(m_3+1)(m_3+2)}{6}+n+h, m_3+1 \le n \le m_3+2 \end{cases}$$

當第一顆球在a_i破的時候時，第二顆就依$\{b_n\}$丟球，取

$$m_2=\left\lceil\frac{-1+\sqrt{1+8(a_i-a_{i-1}+1)}}{2}\right\rceil、q=h-\frac{2p(m_3+2)-p(p+1)}{2}$$

得到$b_n=\begin{cases} a_{i-1}+\frac{n(2m_2-n+1)}{2}, n \le q \\ a_{i-1}+\frac{n(2m_2-n+1)}{2}-q, q+1 \le n \le m_2 \end{cases}$

最後當第二顆球破掉時，第三顆球就照上一個沒破的樓層一層一層往上丟。

陸、討論

兩顆球的討論:與Google的參考解答比較，對於100層，使用引理(一)得到的結果，套用在兩個不同定義的快速下，平均情況結果比參考答案好；最糟情況結果與參考答案一樣。

推廣到k層樓:利用引理(一)的結果，找到最好的方法。引理(二)能告訴我們此方法也是最糟情況最好的方法之一。引理(三)可以讓我們計算需要的總次數。

三顆球的討論:當把球數推廣到三顆球的時候，利用兩顆球時丟球的概念、數格圖及引理(三)擴增成立體數格圖，說明哪一種樓層會有唯一最佳解，並由這些樓層推廣至其他樓層的最佳解法。最後給出任意k層三顆球的丟法。

柒、結論與未來展望

對於此丟球問題，此研究已經完美解決了兩顆球的情況，也延伸探討了三顆球的狀況，在三顆球時雖然沒有給出一個很嚴謹的證明，但透過推廣出來的立體數格圖與丟法，我們相信已經完備了三顆球問題。