中華民國第59屆中小學科學展覽會
作品說明書

高級中等學校組　數學科

第三名

050410

擇你一個命中註定—談經典相親問題與其延伸解

學校名稱：新北市私立格致高級中學

作者：	指導老師：
高二 郭政軒	黃俊誠
高二 藍貽聖	
高二 許翔竣	

關鍵詞：相親問題、秘書問題、最佳停止解

摘要

本文首先就經典相親問題的歷史背景進行介紹，並在其後對現今相親問題的主要論文做一次文獻探討，一方面提供以中文書寫的統整性文章，另一方面用來區分我們的研究與他人研究之差異之處。接著，我們根據我們設定的兩種相親問題變種，分別來對相親問題求取不一樣的結果。其分別展現於定理 5 至定理 9，我們試圖改變的變因為(I)使我方能在一定的條件下，依照遞減機率來對先前一度拒絕過的候選人重新選取，以及(II)維持能夠對先前拒絕過的候選人再次選取之條件，但使候選人最開始願意接受我們的機率不再為 1。求出以上兩種的最佳策略後，我們利用程式碼配合最佳策略，實際演練了數種設定下的相親問題，提供數據於末。

壹、研究動機

第一次知道有關相親問題的內容，是在去年的春天的時候。當時寒假剛過一半，正在拜讀賴以威教授的「超展開數學教室」，其以約翰・馮・諾伊曼的名言「人們以為數學很困難，那是因為他們不知道生活有多複雜」為標語，致力於使數學能夠變得有趣又實用。除了對賴以威教授的信念感到欽佩之餘，也注意到了裡面一個有趣的單元「找到人生價值的最大可能機率：37%」。裡面的故事主角雲方老師在與學生提及未來志願時，討論到一個「如何才使自己能選中最適合自己的工作的機率最大化」的問題，這樣一個稍加複雜的概念，在賴以威教授的妙筆下自然生花，津津有味，且悄悄地，在我的內心中埋下了一顆種子。

種子的發芽是在去年年中近尾，我跟幾位朋友閒聊之際談到了賴以威教授的這本書，提到了裡面 37%這個有趣的數字，一位朋友告訴我，這是自然常數e的倒數，而且這類問題不僅有「相親問題」、「秘書問題」、「止步問題」等多種名字，甚至還被不少人視作一個領域來研究。出於興奮，我當晚就在電腦桌前搜尋有關此類問題的相關論文，其中李宗元教授的「海外相親學人記」及莊孟霏先生的碩士學位論文「秘書問題與其新型推廣」又分別替我在這條路上指引良久，兩文思路清晰、論證明確，算得上我半個啟蒙導師，無奈自己資質駑鈍、數學水平有限，所以讀是讀了，有沒有吸收進腦子裡去，似乎又得稱上另外一回事。

然而再幸運不過的是，我能有上一群與我以數學會友的朋友，每當我在論文中的關鍵處僵持不下時，他們總能夠從旁予我協助，幫助我整頓思緒，最後與我特別要好的兩人，更是決定與我一同瘋狂，三個人一起投入這個領域東翻西找，看能不能自己發現一些有趣的東西。於是冒險開始了，三個一無所有的笨蛋，用著愚昧和頑固為武器，期待從未知的荒野挖出黃金，我想我們會有那種不知天高地厚的勇氣，始終賴於這條研究路上各位前輩、教授的奠基，他讓我們第一次有了如此渴望完成某件事情的決心。最後我們想要說明，在人生這條道路上，

我們無可避免地會遇上許多有關「選擇」的問題：容易為了選 A 放棄了 B，為了得到 C 拋開了 D，就這樣依照自己的想法做出了一個個的選擇，在獲得些甚麼的同時也失去些甚麼，然而，這卻不代表我們就能夠選中那個日後能讓自己心滿意足的選擇。所以數學家們努力對此展開研究，期望使我們做出最佳選擇的機率最優化，因此有了相親問題這類研究。而此時此刻的我們，儘管水平有限，仍有動機投入至此，會去渴望對這主題展開研究，那便是因為我們始終相信在人生這條道路上，在我們 17 歲的青春年華，投注心力在這一次研究，就是我們這輩子的$\frac{1}{e}$，我們生命中的最佳解！

貳、研究目的

我們希望能夠先對目前為止較具代表意義的相親問題變種進行一次統整探討，這部分的各自文獻將列於參考文獻處。接著我們親自對相親問題修改了部分變因，期望使相親問題之數學模型更符合現實應用，並給出我們修改變因下的最佳策略為何，並依照此最佳策略，實際以 C#程式碼對情境進行推演，而此部分的程式碼將公開於 https://github.com/AllForMath/ScienceFair，可作為對數據的驗證。

參、研究設備及器材

一、硬體：

紙、筆、電腦。

二、軟體：

Desmos、Geogebra、Mathtype、Word、Visual Studio 2019、C#。

肆、研究過程或方法

一、研究過程

(一) 形成問題

(二) 論文探討

(三) 延伸思考

(四) 完成論文

二、研究方法

(一) 現有文獻的蒐集與探討

(二) 對不完善、可改變的因素進行研究

(三) 思考此改變因素對問題本身的影響

(四) 觀察與計算操縱變因對問題結論的改變

(五) 以程式語言模擬實際情況，求得數據

伍、研究結果

一、歷史背景：

若要論起相親問題最早的雛型，基本可溯源到 1611 年歷史上發生的一件趣事。當時遠近馳名的天文學家克卜勒 (Kepler) ，在一次傷寒的意外中失去了他摯愛的妻子，隨著妻子的離去，獨留下來的克卜勒為了照顧孩子、打理家務，打算再娶一位新的老婆來幫忙。那時他一共找了 11 位候選人來當他的對象，希望在這裡面能遇到符合他期待的女子，接下來他要做的就是一一與他們會面，並且從中找出他最對上眼的。

於是他開始逐次與這些女子相處，身為一個科學家，他也不免俗嚴謹地將對女子的評價一一記錄下來，當他相處到第四位女子時，他覺得自己已經找到了真愛，可以停止繼續會面下一個對象了。雖然他到最後還是決定跟剩下的女子再約過一輪會，並且選中其中的第五位女子，但他這種情境的問題，到了二十世紀中葉，開始廣泛為人討論。

此問題首次揭示在眾人目光之中，是在 1960 年 2 月的科學人 (Scientific American) 雜誌的專欄中，並於隔月的 3 月號由 Moser 和 Pounder 給出了解答，特別的是，當時相親問題被另外一種封皮包裝了起來，人們用「雇主」去代替了相親問題中的「自己」，再用「秘書」去代替相親問題中的「相親對象」，並用「秘書問題 (The Secretary Problem) 」去形容這種數學模型，當然，兩者所探討的概念是相通的，以下說明秘書問題的情境（這同時也是經典相親問題）：

想像現在有一位正在尋找秘書替他工作的雇主，他願意付出高薪，相對地，他希望能找出一位無比優秀的人選。在他貼出求職單後，總共有 N 個人回應了他的招募，前來應徵面試。很快地，面試就要開始了，但這場面試有些特別，首先，與每位候選人的會面是逐次的，每個候選人會以隨機的順序一個個與雇主面談，以及，雇主在每次面試完一位候選人的當下，就必須做出是否錄取他的決定。如果雇主選擇不採用他的話，該候選人就會直接離開；若是雇主錄取了他的話，該候選人就會作為秘書正式為雇主工作。在這樣的條件下，雇主希望能

選中這 N 之中人最為優秀的人選，那麼他該採取怎麼樣的策略，才能達到他的目的？

以上就是秘書問題的內容，在那之後，這個問題又衍生出了許多名稱，舉凡「見好就收問題」、「止步問題」、「蘇丹的嫁妝問題」都是，這些雖然稱呼不同，但探討的概念都是相同，旨在研究總共 N 次的逐次選擇中，每一次分別可以選擇接受和拒絕，且只能採取一次接受，而在對第 p 次選擇中採取接受後能夠獲得的是值為 X_p 的利益，為使 X_p 之值達 $X_1, X_2, \dots X_{N-1}, X_N$ 中的最大值，能夠採取的最佳策略，便是此類問題所探討的核心。

此外，關於此類相親問題其實還有許多有趣的故事背景，如果有興趣的話不妨參考看看 Ferguson(1989)所著的"Who Solved the Secretary Problem?"，由國際數理統計學會(Institute of Mathematical Statistics)所發行，其由淺入深，旁徵博引，值得一看。

二、文獻探討：

因為相親問題此領域的研究已發展半個世紀之久，各式假設情境如雨後春筍、層出不窮，因此在這個小節，我們會先對現有的相親問題變種進行介紹，以區別各種情況的相親問題。而一般來說，我們會將相親問題分類為無情報型問題、完全情報型問題還有部分情報型問題，以下將以此為分水線，逐一說明有關相親問題的延伸。

(一) 無情報型問題

首先，我們先給出經典相親問題的主要特性（前提），來幫助我們對接下來的無情報型問題有個快速的理解：

1. 所有候選人的總人數 N 為我方已知條件
2. 從所有候選人中所能選取的對象僅有一人，也就是說我方僅能進行一次選取
3. 候選人將以隨機順序逐一與我方進行會面，因此總共會有 $N!$ 種的可能會面順序發生
4. 我方有能力對所有會面過的候選人給予相對評價，藉此得出他們之間的相對排名
5. 依據這個相對排名，來判斷選取或拒絕當下之候選人
6. 過去一度拒絕的對象無法再次回頭選取
7. 在這種情況下，期望最大化選中所有候選人中最優秀的第一名，其最佳策略為？

以上便是經典相親問題的主要內容，而無情報型問題往往是建基在此之上的。也就是說，此類問題便是以經典相親問題的假設背景為基礎，再多少修改些特質所延伸出的一大類。由於對問題整個模型沒有給出額外訊息，所以被稱為無情報型問題。其中最受學者關注的分別有兩類，我們可從機率來區分：

首先，從整個相親問題模型來看。使我們會面到第 r 位候選人、其與先前會面過的

候選人相對排名為 s 的情況用 (r,s) 來表示，則可知 (r,s) 情況下第 r 位候選人實際排名為 i 的機率為

$$p_i(r,s)=\frac{C(i-1,s-1)\times C(N-i,r-s)}{C(N,r)} \tag{1}$$

接著使採用實際排名為 i 的候選人後所產生的損失設為 $U(i)$ ，則此問題可被精簡化為如何才能使我方的損失期望值 $v(r,s)$ 達到最小，而此 $v(r,s)$ 將會滿足以下的最佳方程。

$$v(r,s)=min\left\{\sum_{i=s}^{n+s-r}U(i)p_i(r,s),\ \frac{1}{r+1}\sum_{t=1}^{r+1}v(r+1,t)\right\},\quad v(n,s)=U(s) \tag{2}$$

有了(2)式，我們就可以正式對無情報型問題進行分類。

1. 最佳選擇問題：$U(1)=0,\ U(i)\equiv 1,\ i\in[2,N]$
2. 錄取者名次最小化問題：$U(i)=i,\ i\in[1,N]$

可看出第 1.類最佳選擇問題(best-choice problem)便是以獲取所有候選人中的第一名為唯一目的，期許使選中實際第一的機率達到最大化的相親問題。而第 2.類錄取者名次最小化問題(rank minimization problem)則是比起選中候選人中的實際第一，更希望能讓採用者名次盡可能向前的相親問題。對於這兩類問題，兩者的最佳策略解各為：

定理 1 (Gilbert and Mosteller[5])（最佳選擇問題）：

令 $A_r=\frac{1}{r}+\frac{1}{r+1}+\dots+\frac{1}{N-1},\quad 1\le r<N$

並定義 $r_N=min\{1\le r<N \mid a_r\le 1\}$ ，則此時的最佳解應是拒絕在此閥值 r_N 之前的前 r_N-1 位候選人，並在 r_N 之後有任一新的最佳候選人出現時即進行選取。此時的成功機率為 $\phi_N=(r_N-1)a_{r_N-1}/N$ 。此外，當 $N\to\infty$ 時成功機率會以漸進形式符合

$$\lim_{N\to\infty}\phi_N=\lim_{N\to\infty}\frac{r_N}{N}=e^{-1}\approx 0.3679 \tag{3}$$

定理 2(Chow[6], Robbins[7])（錄取者名次最小化問題）：

存在一隨 r 遞增而遞增之函數 $s^*(r)$ ，則最佳策略便是僅在 (r,s) 狀態下 $s\le s^*(r)$ 時選取該候選人，而當總人數 $N\to\infty$ 時，錄取者取得名次的期望值會約等於

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{j+2}{j}\right)^{1/(j+1)}\approx 3.8695 \tag{4}$$

同時 Krieger[8]給出了一個名次期望值約 3.928，但實行可能性大幅提高的解法。

另外，若是我們使總人數 N 為未知（但是 N 的分布機率函數為已知），特別在 N 是

$(1,n)$ 上的均勻分布時，有

最佳選擇問題：$N\to\infty$時，成功機率為 $2e^{-2}\approx 0.2727$ (Presman[9])。

錄取者名次最小化問題：$N\to\infty$時名次期望值為無限大(Gianini-Pettitt [10])

(二) 完全情報型問題

若是我們使第 r 位候選人之評價值以 X_r 來表示，則當 $X_1,X_2,...,X_N$ 為遵守獨立同分布且分布函數 F 為已知的數列時，我們會稱此類問題為完全情報型問題。因為對候選人的能力分布有了更多一步的訊息，能夠藉此提高選中實際第一的機率。

在此情況下，我們能夠使分布函數 F 呈在 $(0,1)$ 區間上的均勻分布而不失一般性，在此條件下得出的結果有以下

定理 3(Gnedin[11])（最佳選擇問題）:

將會面到第 r 位候選人，其觀測值為 x，且 $X_r=max\{X_1,X_2,...,X_r\}$ 的情形用元組 (r,x) 來表示。數列 s_r 定義為 r 分別等於 $1,2,...$ 時 $\sum_{j=1}^{r}(x^{-j}-1)/j=1$ 的 x 的解，則最佳策略應是在情況 (r,x) 符合 $x\geq s_{n-r}$ 時選擇第 r 位的候選人，此時的成功機率為下式

$$v_n=\left[1+\sum_{r=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{r}s_r^{n-j}/(n-j)\right]/n \tag{5}$$

且在總人數 $N\to\infty$時，成功機率 $\lim_{n\to\infty}v_n\approx 0.5802$ 。

至於在完全情報下的名次最小化問題，論文(Bruss and Ferguson[12])、(Bruss and Sawn[13])兩者給出了詳細說明，但仍存在部分問題無法解決。問題的癥結點在於此情況的最佳策略會決定在所有先前會面過的候選人的觀測值。也就是說，對於第 r 位候選人的採取與否，並不取決於 X_r 之值，而是取決於 $X_1,X_2,...,X_{r-1}$ ，但我們還是可以得知以下結果：

定理 4(Bruss and Ferguson[12], Bruss and Sawn[13])（平均名次最小化問題）:

設數列 $\{a_i\}_{i=1}^{n}$ 為一在 $[0,1]$ 區間上遞增的函數，即 $0\leq a_1\leq a_2\leq...\leq a_n\leq 1$，則會有一閥值 $t_n=min\{r|X_r\leq a_r\}$ 作為最佳策略下的停止點，而此處的 t_n 是拿來與當時的評價值 X_r 做比較，這與無情報型的閥值有所不同，是值得注意的一點。根據此最佳策略後我們能達到的名次平均值為

$$g_n(t_n)=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\prod_{i=1}^{k-1}(1-a_i))\left[(n-k)a_k^2+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{(a_k-a_j)^2}{1-a_j}\right] \tag{6}$$

(三) 部分情報型問題

此類問題為完全情報型問題中，使累積分布函數 F 為未知所衍伸出的問題，由於此類問題與本文研究方向相異在此不多加著筆，僅列出可參考之文獻。

主要有 Stewart[17]、以及 Petruccelli[15]兩篇，除此之外的相關論文可以用”Secretary problem with partial information”為關鍵字找出。

三、研究主軸（第一種假設）

為避免研究重複，我們在前章節對現有相親問題之主要變種進行了一次探討，接著我們思考，若是在原給定條件下，加入「可回頭尋找一度拒絕的候選人」之因素，對問題會造成什麼樣的影響？一般相親問題考慮的研究點在於如何讓選中實際第一的機率最大化，我們沿用這部分的慣例，然而相親問題中一度拒絕過的候選人便無法回頭尋找這點，在現實中就顯得格格不入。因為即使在現實生活中出現相親問題這種連續性的 A/R(Accept/Reject)決策，並不代表我們就無法回頭尋找曾經拒絕的選項。繼續用相親問題來做比喻的話，就是考量到我方可能曾經拒絕過一位對象，但在額外過上一段時間後漸漸理解到對方的優點，因而選擇請求復合的情形。如果將這種情形納入考量的話，我們認為多少也能讓相親問題更加符合現實情況一些。

然而實際對此問題進行研究的話，我們就需要考慮到一點，因為這次的選擇權由「我方來裁斷 A/R」轉為「對方來決定 A/R」，被拒絕的機率應該是存在的（實際上也該必然存在，差別僅在於是多是少），而且被拒絕的機率又該是隨著時間增加的，因為拖得越久機會越容易流失，所以在回頭的選擇中要納入被拒絕的可能性，然而人心是最複雜的、情況又總是多變的，要直接給出一個候選人從必然接受我們（我方 A/R）到他有一定機率接受我們的接受機率變化是困難的，所以只能想出盡量有彈性的方法來解決多數情況，在這裡我們將以 q 來表示回頭時候選人願意接受我們的機率，而 q 應該是一個隨時間經過遞減的函數，而相親問題中最適合描述時間關係的便是候選人的會面到第幾位（至此，儘管我們的題目假設看起來有些類似(Smith[17])，但該論文以 $q(r)=1,\ 0\le r\le m$ 及 $q(r)=0,\ r>m$ 為前提，與我們以時間來遞減的方式兩者相異）。假設我們當前為止會面到第七位，而我們認為現在最好的候選人是第四位，我們可以形容從與他會面後「又過上三個人的時間了」，因此成功機率 q 可簡短定義為

$q(s)=1-s\delta$，其中 s 為與該候選人會面後又與多少人會面了，而 δ 為每次多會面一個對象，該候選人接受我們的機率降低的一個常數。用上方例子來說明的話，便是當我們會面到第七位人選時，第四位人選答應我們的機率就會是 $q(3)=1-3\delta$，用這種方法來設定候選人答應機率有一定的好處與方便性，因為對於在現實生活中若一候選人答應我們的機率為 p，我們可以藉由單純使 $\delta=\dfrac{1-p}{s}$ 來使該情境能夠套入我們的研究成果。舉例來說，在一現實中的相親問題發生情境，一候選人在一週期後我們推估其願意接受我們二度尋找之機率為 0.9，然第二週期時該機率驟降至 0.4，則我們可以簡單假設 δ 為 0.3，其能夠符合此週期之背景條件，來代入後面的研究成果。接著，我們將對這種假設下的定義以更加完整的方式重述。

給定一數列 $X_1, X_2, ...X_N$ 為符合獨立同分布的一連串隨機變數，其由一未知的連續分布而來且 N 為已知。此數列的變數將以編號 1 到編號 N 的順序依序出現在觀測者面前，觀測者每次觀測到一個變數，就必須決定是否要選取該變數，若觀測者不選取該變數，那麼他有兩個選項，其一是在 N 個變數沒有全被觀測完的情況下繼續觀測下一個變數，其二是在遵從一機率下回去選擇先前沒選取的變數，該遵從機率為 $q(s)$ 且符合 $q(s)=1-s\delta$，而 s 為回去尋找之變數與當前觀測之變數的編號差，則在怎樣策略下，才能使觀測者選中該數列中數值最大的數的機率最大化，便是此種選擇問題的追求解。

以上說明完了我們假設的情境，接著我們開始說明此將使用到的符號：我們使用 (r,s) 來形容觀察到第 r 個變數，其與當前為止觀測到的最佳解相距 s 的情形，也就是說令 $X_k = max\{X_1, X_2, ..., X_r\}$，則 $s=r-k$，而我們之所以僅記錄最佳解的相距 s，是因為對於期望選中最佳解的前提，不必要保留非可能最佳解的變數訊息，而對當前觀測到 $X_1, X_2, ...X_r$ 而言，有機會成為最佳解的只有先前定義的 X_k，連前 r 個變數中都不是最大值的變數，自然不可能會是整個數列裡的最大值。繼續剛才定義的 (r,s) 元組，可知對於任意一個 (r,s) 情況，當下選擇目前最優選，能夠成功選中的機率為 $q(s)=1-s\delta$，且明顯地 $q(0)\equiv 1$，藉由以上條件，我們可以開始定義 $P(r,s)$ 為在最佳策略下，(r,s) 的情況中能夠選中實際第一的機率，$P_f(r,s)$ 和 $P_b(r,s)$ 則分別說明 (r,s) 情況下繼續觀測下一變數後和選擇當前最大變數能夠成功達到遊戲目的的機率，$P(r,\infty)=P_f(r,\infty)$ 拿來描述在 (r,s) 狀況下回去尋找先前變數但失敗的情況的遊戲成功機率，因為被拒絕不代表遊戲失敗，真正失敗應是在選中非最佳的解後才算失敗，所以才會使用 (r,∞) 來形容這種絕對無法回頭的情況，而我們的研究目的便是從收集所有遊戲策略的集合 Ω 中，找出一個最佳策略 $\psi\in\Omega$，能夠使遊戲的最初始狀態 $(1,0)$ 下符合

$P^{\Psi}(1,0) = max\left\{P^{\Phi}(1,0),\ \forall\Phi \in \Omega\right\}$。

接著根據以上說明，我們分別得到以下：

$$P(r,s) = \max\{P_f(r,s), P_b(r,s)\} \tag{7}$$

$$P_f(r,s) = \frac{1}{r+1}P(r+1,0) + \frac{r}{r+1}P(r+1,s+1) \tag{8}$$

$$P_b(r,s) = \frac{r}{N}\times q(s) + (1-q(s))P(r,\infty) \tag{9}$$

$$P(N,s) = q(s) \tag{10}$$

(7)式是顯然的，既然 $P(r,s)$ 是遵從最佳策略的機率，自然是看向前繼續觀測下一變數達成遊戲目的機率高還是直接選擇當前最優解達成遊戲目的機率高。而(8)式則對觀測下一變數的成功機率進行了描述，對於任一觀測的下個變數，其皆有 $\frac{1}{r+1}$ 的機率會成為最新的最大值，使得與最優解的相距 s 能夠刷新為 0 ，而剩下的 $\frac{r}{r+1}$ 的機率則會維持當前最大值不變，使最優解與觀測位置相距 s 增加 1。接著的(9)式則對 P_b 給予了值，因為 P_b 應為 (選擇之變數為最大值的機率 $\times$ 能夠成功選中該變數之機率 $+$ 沒能成功選中該變數之機率 $\times$ 沒能選中該變數後能夠使遊戲成功的機率) ，而該選擇變數為最大值的機率可由條件機率

$P(\text{該變數為數列中最大}|\text{該變數為前}r\text{個變數中最大}) = \dfrac{\frac{1}{N}}{\frac{1}{r}} = \dfrac{r}{N}$ 得出，至此也對(7)式給予了充分的說明。而(10)式是直觀的，當觀測到最後一個變數時，此遊戲的成功機率自然是能夠選中當時最大變數的機率。

接著對 $q(s)$ 來給出完整定義，設 τ 為符合 $max\left\{k\,|\,q(k)>0\right\}$ 的唯一整數，則

$$q(s) = 1 - s\delta \quad if \;\; s \le \tau \tag{11}$$

$$q(s) = 0 \; if \;\; s > \tau \tag{12}$$

這是為了避免相距位 s 過大導致回頭機率為負值的弊病，除此之外，τ 值還可以幫助我們在後面的定理做適當的解。

接著，我們想要再對 $P(r,\infty)$ 進行進一步的展開

$$P(r,\infty) = \frac{1}{r+1}P(r+1,0) + \frac{r}{r+1}P(r+1,\infty)$$

$$=\frac{1}{r+1}P(r+1,0)+\frac{r}{r+1}\left[\frac{1}{r+2}P(r+2,0)+\frac{r+1}{r+2}P(r+2,\infty)\right]$$

$$=\frac{1}{r+1}P(r+1,0)+\frac{r}{(r+1)(r+2)}P(r+2,0)+\frac{r}{r+2}P(r+2,\infty)$$

$$=\frac{1}{r+1}P(r+1,0)+\frac{r}{(r+1)(r+2)}P(r+2,0)+\frac{r}{(r+2)(r+3)}P(r+3,0)+$$

$$\cdots+\frac{r}{(N-1)N}P(N,0)+\frac{r}{N}P(N,\infty)$$

而 $P(N,\infty)=0$，化簡可得 $P(r,\infty)=\sum_{j=r+1}^{N}\frac{r}{j(j-1)}P(j,0)$。 (13)

有了以上算式後，我們就可以正式得出定理 5。

$\boxed{\text{定理 5}}$：

定義 r^* 為符合以下關係式的唯一正整數，則在第 r^* 個變數前不做任何選取動作。

$$r^*=max\left\{k\left|\sum_{j=k}^{N}\frac{1}{j-1}\geq 1\right.\right\} \tag{14}$$

證明：

首先，令 $D(r,s)=P(r,s)-P_b(r,s)$ ，那麼對 $s\neq\infty$ ，有

$$P_f(r-1,s)-P_b(r-1,s)$$

$$=\frac{1}{r}P(r,0)+\frac{r-1}{r}P(r,s+1)-\frac{r-1}{N}\times q(s)-(1-q(s))P(r-1,\infty)$$

$$=\frac{r-1}{r}[D(r,s+1)+P_b(r,s+1)]-\frac{r-1}{N}\times q(s)-(1-q(s))\sum_{j=r}^{N}\frac{r-1}{j(j-1)}(j,0)+\frac{1}{r}P(r,0)$$

逐步化簡後，可得到

$$P_f(r-1,s)-P_b(r-1,s)$$

$$=\frac{r-1}{r}D(r,s+1)+(r-1)[q(s+1)(\frac{1}{N}-\sum_{j=r+1}^{N}\frac{1}{j(j-1)}P(j,0))-q(s)(\frac{1}{N}-\sum_{j=r}^{N}\frac{1}{j(j-1)}P(j,0))]$$

接著令 $a(r)=\frac{1}{N}-\sum_{j=r}^{N}\frac{1}{j(j-1)}P(j,0)$ ，同時設 σ 為滿足 $a(\sigma)\leq 0<a(\sigma+1)$ 的唯一正整數，則

$$P_f(r-1,s)-P_b(r-1,s)$$

$$=\frac{r-1}{r}D(r,s+1)+(r-1)[q(s+1)a(r+1)-q(s)a(r)] \tag{15}$$

而 $D(r,s+1)$ 恆大於等於零，$q(s+1)a(r+1)-q(s)a(r)$ 在 $r\le\sigma$ 時恆正。可知在第 σ 位對象出現前，不進行任何選取動作。又因為 $P(j,0)\ge P_b(j,0)=\dfrac{j}{N}$，從 $a(r)$ 的算式可知 $r^*\le\sigma$。本定理至此即證明完而 $D(r,s+1)$ 恆大於等於零，$q(s+1)a(r+1)-q(s)a(r)$ 在 $r\le\sigma$ 時恆正。可知在第 σ 位對象出現前，不進行任何選取動作。又因為 $P(j,0)\ge P_b(j,0)=\dfrac{j}{N}$，從 $a(r)$ 的算式可知 $r^*\le\sigma$。本定理至此即證明完成。

定理 6：

若 $\tau\ge 2N-3$，則最佳策略應為在觀測完所有變數前不做任何選擇，直到 N 個變數都觀測完後，才去選擇此時的最大值。這種情況下能夠選中實際第一的機率是 $\sum_{j=0}^{N-1}\dfrac{q(j)}{N}$。

證明：

我們需要證明的是，對任意的合法 (r,s) 序組，$P_f(r,s)\ge P_b(r,s)$ 此式永遠都會成立，也就是指不管在何種 (r,s) 情況下，繼續觀測下一變數的遊戲成功機率永遠比選擇當下最優解的遊戲成功機率還要來得高，因此在 A/R 選擇中我們永遠都會選取 A(Accept)。，要證明這件事，我們可以利用逆向歸納法：

先是證明對 $r=N-1$，能夠符合 $P(N-1,s)=P_f(N-1,s)$，並在假設 $P(r,s)=P_f(r,s)$ 成立，$\forall r\in[k+1,N-2]$ 的情況下，$P(k,s)=P_f(k,s)$ 也會成立。以下將就這兩部分進行推導：

首先，若 $P_f(N-1,s)-P_b(N-1,s)$ 大於零，則

$$
\begin{aligned}
&P_f(N-1,s)-P_b(N-1,s)\\
&=\frac{1}{N}P(N,0)+\frac{N-1}{N}P(N,s+1)-\frac{N-1}{N}\times q(s)-(1-q(s))P(N-1,\infty)\\
&=\frac{1}{N}+\frac{N-1}{N}\times q(s+1)-\frac{N-1}{N}\times q(s)-\frac{1}{N}+\frac{1}{N}\times q(s)\ge 0
\end{aligned}
$$

這個式子等價於 $\dfrac{q(s+1)}{q(s)}\ge\dfrac{N-2}{N-1}$。

因為 $\dfrac{q(s+1)}{q(s)}$ 是個假分數且 $q(s+1)>0$ 的情況下其值恆大於零，所以它會隨著 s 的遞增一同增加，且在合法 s 的情況下 $s=N-2$ 會得到其最小值，只要其最小值符合條件，就可以說明 $P_f(N-1,s)-P_b(N-1,s)$ 在任意 s 的情況下都會大於零。

所以我們可以進一步得到$\frac{q(N-1)}{q(N-2)} \ge \frac{N-2}{N-1}$, $\frac{1-(N-1)\delta}{1-(N-2)\delta} = 1-\frac{\delta}{1-(N-2)\delta} \ge 1-\frac{1}{N-1}$

則$\frac{1}{N-1} \ge \frac{\delta}{1-(N-2)\delta}$，$(N-1)\delta \le 1-(N-2)\delta$，$(2N-3)\delta \le 1$，$1-(2N-3)\delta \ge 0$。由$q(s)$定義可知，$\tau \ge 2N-3$時便會符合以上條件。

至此逆向歸納法的第一步完成。接下來則對$P(r,s) = P_f(r,s)$，$\forall r \in [k+1, N-2]$的情況下，$P(k,s) = P_f(k,s)$也會成立此點進行證明。因為$P_b(k,0) \ge P_b(k,s)$，所以若$P_f(k,s) \ge P_b(k,0)$為真，$P_f(k,s) \ge P_b(k,s)$自然會成立。

而$P_f(k,s) = \frac{1}{k+1}P(k+1,0) + \frac{k}{k+1}P(k+1,s+1)$

$$= \frac{1}{k+1}P(k+1,0) + \frac{k}{(k+2)(k+1)}P(k+2,0) + \frac{k}{k+2}P(k+2,s+2)$$

$$= \frac{1}{k+1}P(k+1,0) + \frac{k}{(k+2)(k+1)}P(r+2,0) + \frac{k}{(k+3)(k+2)}P(k+3,0) + \frac{k}{k+3}P(k+3,s+3)$$

$$= \sum_{j=k+1}^{N} \frac{k}{j(j-1)}P(j,0) + \frac{k}{N}P(N,s+N-k) \tag{16}$$

而$P_b(k,0) = \frac{k}{N}$，則$P_f(k,s) \ge P_b(k,s)$代表$f(k) = \sum_{j=k+1}^{N} \frac{N}{j(j-1)}P(j,0) + P(N,s+N-k) - 1 \ge 0$，藉由簡單的運算，可知

$$f(k+1) - f(k) = \delta - \frac{N}{k(k+1)}P(k+1,0) \tag{17}$$

而因為$\frac{N}{k(k+1)}P(k+1,0) \ge \frac{1}{k}$，可知$f(k+1) - f(k) \le \delta - \frac{1}{k}$。

當$\delta - \frac{1}{k} < 0$時，$\delta k < 1$，進一步推出$q(k) > 0$。而當$q(2N-3) > 0$時，$q(k) > 0$自然成立，滿足以上條件後，從$f(k+1) - f(k) < 0$且$P_f(N-1,s) - P_b(N-1,s)$大於零這兩點可知，對任意的(r,s)序組，只要$\tau \ge 2N-3$，$P_f(r,s) \ge P_b(r,s)$永遠成立。至此，定理 6 證明完成。

定理 7：

對於此類能夠回去尋找先前所觀測過之變數，且能成功回去尋找之機率會隨著觀測位置移動以一固定機率遞減之最佳停止問題，最佳策略應是在觀測完一「決定數字」(Decision Number)個變數後，選取當時的最大值（如果需要的話會直接回頭），倘若本次選取失敗被拒

絕，則繼續觀測下一數字，且在觀測到任一新的最大值後便直接選取該數字。

而此決定數字 r_0 會是滿足以下算式的唯一整數。

$r_0 = min\left\{ r \middle| r(1-\sum_{j=r+2}^{N}\frac{1}{j-1}) - \frac{1}{\delta} + s > 0 \right\}$ ，其中若 $s > \tau$ ，則此式 s 將被替換為 τ 。

也就是說，我們會將前 $r_0 - 1$ 個變數直接忽略，並在觀測第 r_0 個變數時選取當時的最大值，若是失敗，則繼續向前觀測後面的變數，並在出現任一新的最大值時採取選取動作。至於符合定理 6 的 δ 與 N ，決定數字 r_0 則單純 $r_0 \geq N$ ，因此定理 6 與定理 7 並不衝突。而依此最佳策略，我們的遊戲成功機率則為

$$P^{\Psi}(1,0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{r_0-1}(q(k)\times(1-\sum_{j=r_0+1}^{N}\frac{1}{j-1})) + \frac{r_0}{N}\sum_{j=r_0+1}^{N}\frac{1}{j-1} \tag{18}$$

證明：

我們是可從 15 式中知道，若要使 $P_f(r,s) - P_b(r,s) < 0$ 成立， $D(r,s) = 0$ 及 $a(r+2)q(s+1) - a(r+1)q(s) < 0$ 兩點即可滿足。

藉由這點，我們可以推導出以下：

$$\frac{q(s+1)}{q(s)} = \frac{1-(s+1)\delta}{1-s\delta} = 1 - \frac{\delta}{1-s\delta} < \frac{a(r+1)}{a(r+2)} = \frac{1-\sum_{j=r+1}^{N}\frac{1}{j-1}}{1-\sum_{j=r+2}^{N}\frac{1}{j-1}} = 1 - \frac{1}{r(1-\sum_{j=r+2}^{N}\frac{1}{j-1})}$$

$$\frac{\delta}{1-s\delta} > \frac{1}{r(1-\sum_{j=r+2}^{N}\frac{1}{j-1})} \quad , \quad r(1-\sum_{j=r+2}^{N}\frac{1}{j-1}) > \frac{1-s\delta}{\delta} = \frac{1}{\delta} - s$$

最後整理可得 $r(1-\sum_{j=r+2}^{N}\frac{1}{j-1}) - \frac{1}{\delta} + s > 0$ 。

也就是說在 (r,s) 的情況下，若是帶入數字能使上式成立，便可得知 $P_f(r,s) - P_b(r,s) < 0$ 在該情況下成立，那麼我們在該情況的最佳解便是選取當下所觀測到的最大變數，而此策略將能使我們成功選中實際最大值的機率達到最大。

至於實際選中最大值的機率，我們可以藉由 $P(1,0)$ 來進行推導。我們經由 7 式及 8 式的連續運用，可知

$$P(r,0) = \frac{1}{r+1}P(r+1,0) + \frac{r}{r+1}P(r+1,1)$$

$$= \frac{1}{(r+2)(r+1)}P(r+2,0) + \frac{1}{r+2}P(r+2,1) + \frac{r}{(r+2)(r+1)}P(r+2,0) + \frac{r}{r+2}P(r+2,2)$$

$$=\frac{1}{r+2}P(r+2,0)+\frac{1}{r+2}P(r+2,1)+\frac{r}{r+2}P(r+2,2)$$

$$=\ldots$$

$$=\sum_{k=0}^{r_0-r-1}\frac{1}{r_0}P(r_0,k)+\frac{r}{r_0}P(r_0,r_0-r) \tag{19}$$

而初始狀態 $P(1,0)$ 則為

$$P(1,0)=\sum_{k=0}^{r_0-1}\frac{1}{r_0}P(r_0,k)$$

$$=\sum_{k=0}^{r_0-1}\left(\frac{q(k)}{N}+\frac{1}{r_0}(1-q(k))P(r_0,\infty)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{r_0-1}(q(k)\times(1-\sum_{j=r_0+1}^{N}\frac{1}{j-1}))+\frac{r_0}{N}\sum_{j=r_0+1}^{N}\frac{1}{j-1}\right. \tag{20}$$

至此，定理 7 證明完成。

接著，我們欲給出依照此最佳策略，對各種 N,δ 為前提的相親問題給出相關數據，但在此之前，我們先將經典相親問題的已知數據(莊孟霏[3])呈現，來做相對的比較：

N	r^*	P
10	4	0.39869
50	19	0.37427
100	38	0.37104
200	74	0.36946
500	185	0.36851

可觀察到隨著總人數 N 的增加，$\frac{r^*}{N}$ 的比值會以漸進型式朝 $\frac{1}{e}$ 前進，其中 e 為自然常數（尤拉數），而此時成功機率 P 也逐漸往 $\frac{1}{e}\approx 0.3679$ 靠近。

接著，給予可回頭情況下，依此最佳策略所得到的模擬數據：

$\delta \setminus N$	10	50	100	200	500
1	0.39821	0.37479	0.37133	0.36992	0.36934
0.5	0.40609	0.37459	0.37393	0.36764	0.36988
0.3	0.43488	0.37601	0.37498	0.36853	0.36932
0.1	0.59545	0.38396	0.37436	0.37097	0.36744
0.01	0.95511	0.75630	0.56261	0.43767	0.37979
0.001	0.99584	0.97451	0.95135	0.90151	0.75123
0.0005	0.99766	0.98757	0.97576	0.94946	0.87544

可以從上表中可以看出，隨著總人數 N 的增大，相同 δ 對 N 的影響力就越小，這點也相當符合直覺，當總人數趨近於無限時，非趨近於零的 δ 對結果的影響力自然就會減弱，雖然因為是模擬情況下得出的數據,與理論數據有些出入,但還是可以看出在 N 到達一定程度後，成功選中第一的機率又會漸歸於 $\frac{1}{e} \approx 0.368$ 。

此外，我們還可以發現當該假設之 $\tau \ge 2N-3$ 時，成功機率約為 $\sum_{j=0}^{N-1} \frac{q(j)}{N}$ ，此與我們在定理 6 的結論相符，可作為對該定理的佐證。

四、研究主軸（第二種假設）

接下來我們思考到第二種情形，一般而言我們往往假定最開始候選人便會無條件接受我們的對他的 Accept，也就是說我們使 A/R 權判予我方，然而現實生活中，卻往往有落花有意流水無情，我方對他有心，他卻不一定與我們有欲的無奈情形發生，若將這種情況納入我們的相親問題，就是在說明 $q(0) \le 1$，即我們第一次與他會面時，他就存在會拒絕掉我們的可能性。有了我們前小節中對第一種假設的作業後，第二種假設的性質是明顯而易操作的。

我們根據我們的情況假設，則 7 至 10 的式可沿用，差別在於將 11 與 12 式修改為

$$q(0) = q,\ q \le 1 \tag{21}$$

$$q(s) = q - s\delta \quad if\ \ s \le \tau \tag{22}$$

$$q(s) = 0\ if\ \ s > \tau \tag{23}$$

同樣的， τ 定義為 $max\{k \mid q(k) > 0\}$ ，藉此，我們可以有

$\boxed{\text{定理 8}}$：

若遞減差 δ 能符合 $\delta \le \frac{q^2}{N+Nq-2q-1}$ ，則最佳策略為觀測完所有變數前，不做任何選擇動作，直到 N 個變數都觀測結束後，才去選擇當時的最大值。依此策略，能夠成功選中實際最大值的機率是 $\sum_{j=0}^{N-1} \frac{q(j)}{N}$ 。

證明：

此處的證明手法與定理(..)的證明手法幾無相異，一樣利用逆向歸納法來推出。

首先，當以上條件能成立時，藉由單純計算，可知 $P_f(N-1,s) \ge P_b(N-1,s)$ 必然成立：

其是由展開後的 $q(s)q(0) \ge (N-1)\delta$ ，代入 s 最大合法值 $N-2$ 來得出，在此僅文字說明，

不予數字推導。

接著，我們藉由證明當 $P_f(r,s) \ge P_b(r,s),\ \forall r \in [k+1, N-2]$ 成立時， $P_f(k,s) > P_b(k,s)$ 亦會成立這點，來推得對任意合法 (r,s) 元組 $P_f(r,s) \ge P_b(r,s)$ 永遠成立。

首先，對此情況下的 $P_f(r,s)$ 與 $P_b(r,s)$ 進行連續展開，有

$$P_f(r,s) = \sum_{j=r+1}^{N} \frac{r}{j(j-1)} P(j,0) + \frac{r}{N} q(s+N-r) \tag{24}$$

$$\begin{aligned} P_b(r,s) &= \frac{r}{N} q(s) + (1-q(s)) P(r,\infty) \\ &= \frac{r}{N} q(s) + (1-q(s)) \sum_{j=r+1}^{N} \frac{r}{j(j-1)} P(j,0) \end{aligned} \tag{25}$$

則欲證明 $P_f(k,s) \ge P_b(k,s)$ 只要證明下式成立即可。

$$\sum_{j=k+1}^{N} \frac{1}{j(j-1)} P(j,0) \ge \frac{q(s) - q(s+N-k)}{nq(s)} \tag{26}$$

而由 $P_f(k+1,s) \ge P_b(k+1,s)$ 的前提可知

$$\sum_{j=k+2}^{N} \frac{1}{j(j-1)} P(j,0) \ge \frac{q(s) - q(s+N-k-1)}{nq(s)} \tag{27}$$

則我們可知若 28 式滿足，則 26 式成立

$$\frac{P(k+1,0)}{k(k+1)} \ge \frac{q(s+N-k-1) - q(s+N-k)}{Nq(s)} \tag{28}$$

而對 $P(k+1,0)$ ，根據此定理的假設， $\dfrac{q(s+1)}{q(0)} \ge \dfrac{N-1-q(0)}{N-1}$ ，有

$$\begin{aligned} P(k+1,0) &= \frac{1}{N}\left(\sum_{j=0}^{N-k-2} q(j) + (k+1) q(N-k-1)\right) \\ &\ge q(N-k-1) \ge \frac{q(0)(N-1-q(0))}{N-1} \\ &\ge \frac{q(0)\times k}{N-1} > \frac{q(0)\times k(k+1)}{N(N-1)} \end{aligned}$$

可得 $\dfrac{P(k+1,0)}{k(k+1)} > \dfrac{q(0)}{N(N-1)} \ge \dfrac{\delta}{Nq(s)} \ge \dfrac{q(s+N-k-1) - q(s+N-k)}{Nq(s)}$

而以上所得便可成功對此定理給予證明。

$\boxed{\text{定理 9}}$：

在此類 $q(0)=q$ ， $q(s)=q-s\delta$ 的問題中，存在一決定數字 r_0 為滿足以下列式的唯一整數

$$r_0 = min\left\{ r \middle| r(1-\sum_{j=r+2}^{N}\frac{1}{j-1})-\frac{q}{\delta}+s>0 \right\}$$

此時最佳策略應是在前 r_0-1 次中進行無條件的放棄，並在觀測到第 r_0 個變數後回頭尋找當時的最大值，此定理的證明方法與定理 7 相同，此處不再予以贅述。

陸、討論

在以上的數個定理中，我們先是對現有的相關文獻進行了一次探討，接著我們進一步思考當我們能夠回頭尋找先前候選人，會對整個相親問題產生怎麼樣的改變，我們分別從「**至少**」、「**必然**」以及「**最完整解**」三個觀點來對此展開研究，其中定理 5 對應至「**至少**」，反應出我們的假設不會讓我們的決定數字比經典相親問題還要來得少，接著找出在何種情況下會直接忽視所有候選人，直接會面到最後一位的這般「**必然**」，以上兩種分別用於簡化我們的問題，給予我們的假設情況一個即使不知完整解，仍能採取部分推斷的優化手段；最後，我們對何種情形該選取候選人的「**最完整解**」給出了公式，此公式將隨著遊戲推演，給定該情況下的最佳策略，此策略能最大化我們在此模型中取中最優解的機率，幫助我們在此類問題上的抉擇。

柒、結論與未來展望

至此我們已經對一個可回頭的遞減相親問題給予最佳解，期許此研究能夠更優化我們對此類問題的抉擇，比起其他種解題切入點，這種方法只需中學數學程度而且簡潔有力。至於對未來的進一步發展，我們可以考慮往以下方面研究：

(1)候選人能力於 $[0,1]$ 區間上均勻分布的可回頭問題

我們知道當我們對候選人的訊息增加時，往往能夠提升我們選中最優解的機率，因此我們想要知道在這種情況下，回頭能對最佳策略帶來甚麼樣的改變。此未來發展也是我們至今一直期望能夠有所斬獲的領域，然能力有限，難以得出具體成果，僅盼自己能在未來對數學能有更加成熟的理解後，給出相對答案。

(2)候選人人數為 $[1,n]$ 區間上的離散均勻隨機變數，且候選人能力分布累積函數已知，此情況下能夠回頭尋找候選人之問題

如果單純給定一未知總數 N 人之候選人，可回頭這點就顯得有些雞肋；然而若是能提供候選人的能力分布情報，可回頭這點是否會對答案造成改變？

(3)更加簡易而易實行的方法來求出近似最佳解的策略

在**楊城[4]**的論文中，提出了一種以三分決策法為名的近似最佳解之策略，其能達到正常最佳策略的 95%效率。此處我們思考對於可回頭的相親問題，是否也能有一種利用推估的方式求出最佳解近似值，來達到盡可能簡單而又高效率的方法。

捌、參考資料及其他

[1] 賴以威 (2015), **超展開數學教室**

[2] 李宗元 (1978)，**海外學人相親記**，http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/mm/mm_02_3_12/index.html

[3] 莊孟霏 (2016), **秘書問題與其新型推廣**，國立清華大學碩士學位論文

[4] 楊城 (2012), 秘書問題中聘用雙方策略研究，計算機工程第 38 卷第 3 期

[5] Gilbert, J. P., & Mosteller, F. (1966). Recognizing the Maximum of a Sequence. Journal of the American Statistical Association

[6] Chow, Y. S., Moriguti, S., Robbins, H., & Samuels, S. M. (1964). Optimal selection based on relative rank (the “secretary problem”). Israel Journal of Mathematics

[7] Robbins, H. (1991). Remarks on the Secretary Problem. American Journal of Mathematical and Management Sciences

[8] Krieger, A. M., & Samuel-Cahn, E. (2009). The secretary problem of minimizing the expected rank: a simple suboptimal approach with generalizations.

[9] Presman, E. L., & Sonin, I. M. (1973). The Best Choice Problem for a Random Number of Objects. Theory of Probability & Its Applications

[10] Gianini-Pettitt, J. (1979). Optimal selection based on relative ranks with a random number of individuals. Advances in Applied Probability

[11] Gnedin, A. V. (1996). On the full information best-choice problem. Journal of Applied Probability

[12] Bruss, F. T., & Ferguson, T. S. (1993). Minimizing the expected rank with full information. Journal of Applied Probability

[13] Bruss, F. T., & Swan, Y. C. (2009). A Continuous-Time Approach to Robbins’ Problem of Minimizing the Expected Rank. Journal of Applied Probability

[14] Mark, C. K. Yang (1974). Recognizing the Maximum of a Random Sequence Based on

Relative Rank with Backward Solicitation
[15] Joseph, D. Petruccelli (1981). Best-Choice Problems Involving Uncertainty of Selection and Recall of Observations
[16] Smith, M. H. (1975). A secretary problem with uncertain employment. Journal of Applied Probability
[17] Stewart, T. J., Optimal selection from a random sequence with learning of the underlying distribution, J. Amer. Statist. Assoc.

【評語】050410

本作品將傳統相親問題模式修改成為可以「後悔」重新去考慮以前拒絕過的候選人。但是考慮越早被拒絕的人，對方接受機率越低，接受機率成等差級數遞減。但是為了避免相距過大導致回頭機率為負值，所以還要有額外的限制式。如果這個模式可以修正成接受機率等比級數遞減，就可以避免掉這個問題使得模式變簡潔。本作品加入這個可以「後悔」的因素後，作品變得豐富。但是這個model 與原來的 model，以及所接下來的數學差異相比，建議加以說明清楚。而且，在可以後悔的 model，如果被拒絕的機率均為 1，理論上必須能夠得到古典相親問題的最佳策略才對。其次，最關鍵的最佳策略定義，使得遊戲的最初始狀態(1,0)之機率值最大，應該定義清楚，若能更精確會更好。本作品在呈現上，如果能夠多舉幾個例子，也會讓作品更生動。

作品海報

摘要

在最佳停止解問題中，相親問題作為一個經典例子已經被研究了半個世紀之久，在這期間各式假設情境被學者提出且廣泛討論。本研究便期望探討在有一隨時間遞減的成功機率可以去回頭尋找先前候選人的情況下，對於問題最佳停止點與成功機率的影響為何，並給出極端條件下兩種推測最佳停止點之方案。

研究動機

本研究內容發想於賴以威教授的著作「超展開數學教室」，其以約翰・馮・諾伊曼的名言「人們以為數學很困難，那是因為他們不知道生活有多複雜」為標語，致力於使數學能夠變得有趣又實用。除了對賴以威教授的信念感到欽佩之餘，也注意到了裡面一個有趣的單元「找到人生價值的最大可能機率：37%」，內容以輕鬆有趣的方式探討一個「如何才使自己能選中最適合自己的工作的機率最大化」的問題，這樣一個稍加複雜的概念，在賴以威教授的妙筆下自然生花。受其吸引，我們開始了此主題的研究。

研究目的

我們希望能夠先對目前為止較具代表意義的相親問題變種進行一次統整探討，這部分的各自文獻將列於參考文獻處。接著我們親自對相親問題修改了部分變因，期望使相親問題之數學模型更符合現實應用，並給出我們修改變因下的最佳策略為何，並依照此最佳策略，我們實際撰寫C#程式碼來對情境進行推演，而此部分的程式碼將公開於https://github.com/AllForMath/ScienceFair，可作為對數據的驗證。

研究過程或方法

研究過程

一、形成問題

二、文獻研究

三、延伸思考

四、論文完成

研究方法

一、現有文獻的蒐集與探討

二、對不完善、可改變的因素進行研究

三、思考改變因素對問題之影響

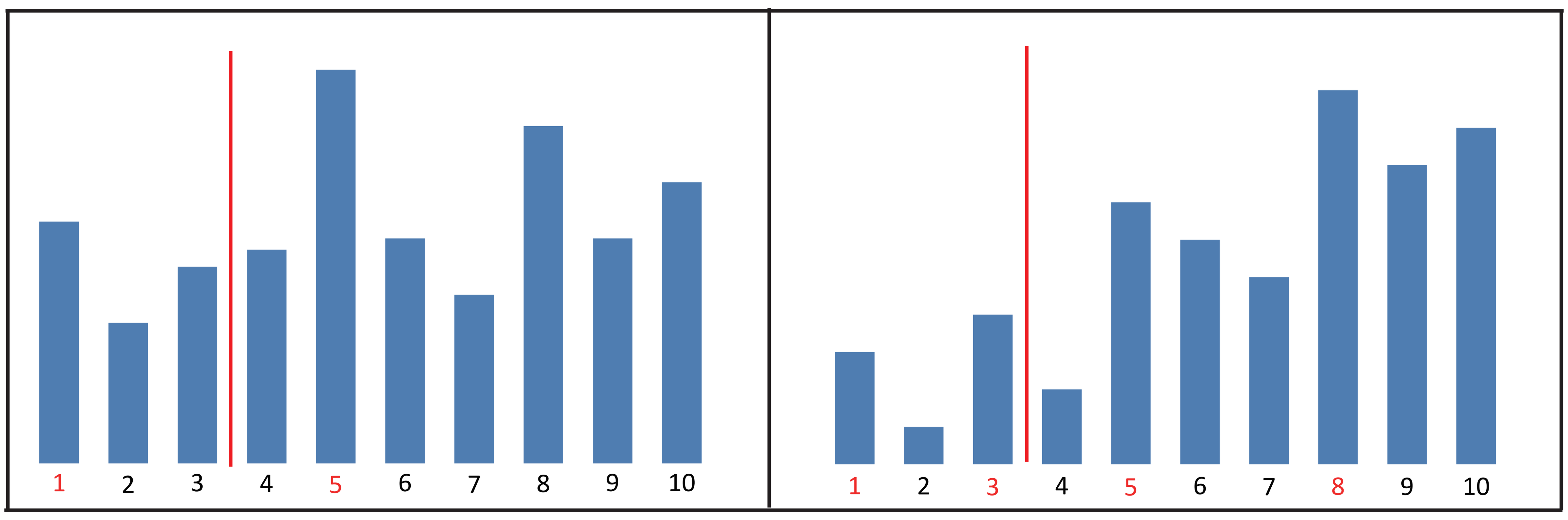
四、觀察與計算操縱變因帶來之改變

五、以程式語言模擬情境、比較成果

名詞釋義

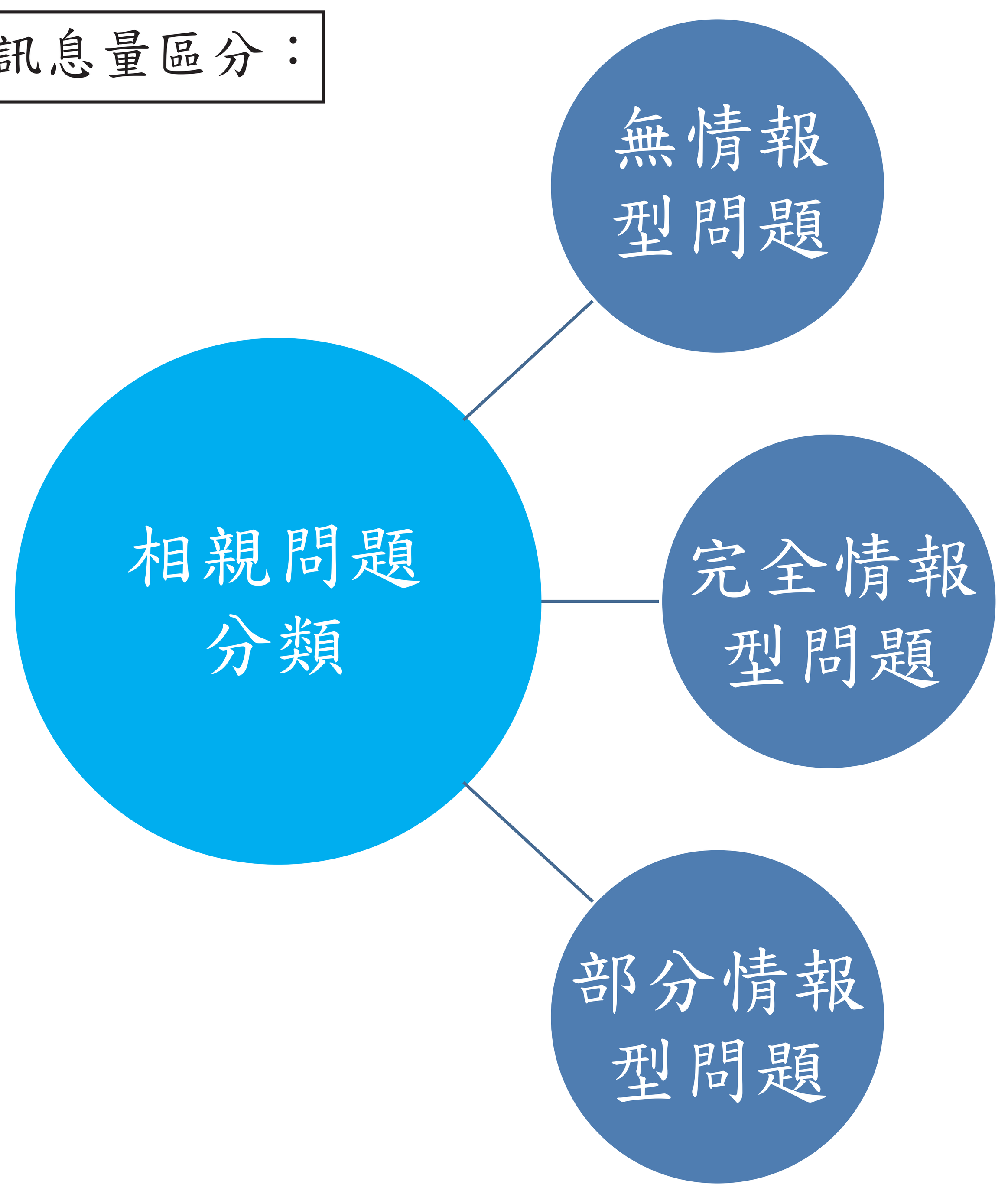
一、最佳停止問題：一類以尋找何時該採取某特定動作，來使預期成果最大化或所需花費最小化的問題。

二、最佳停止點：在相親問題中，最佳停止點代表從該點起，出現新的相對第一時，當下選取該對象之遊戲成功機率大於不去選取該對象。

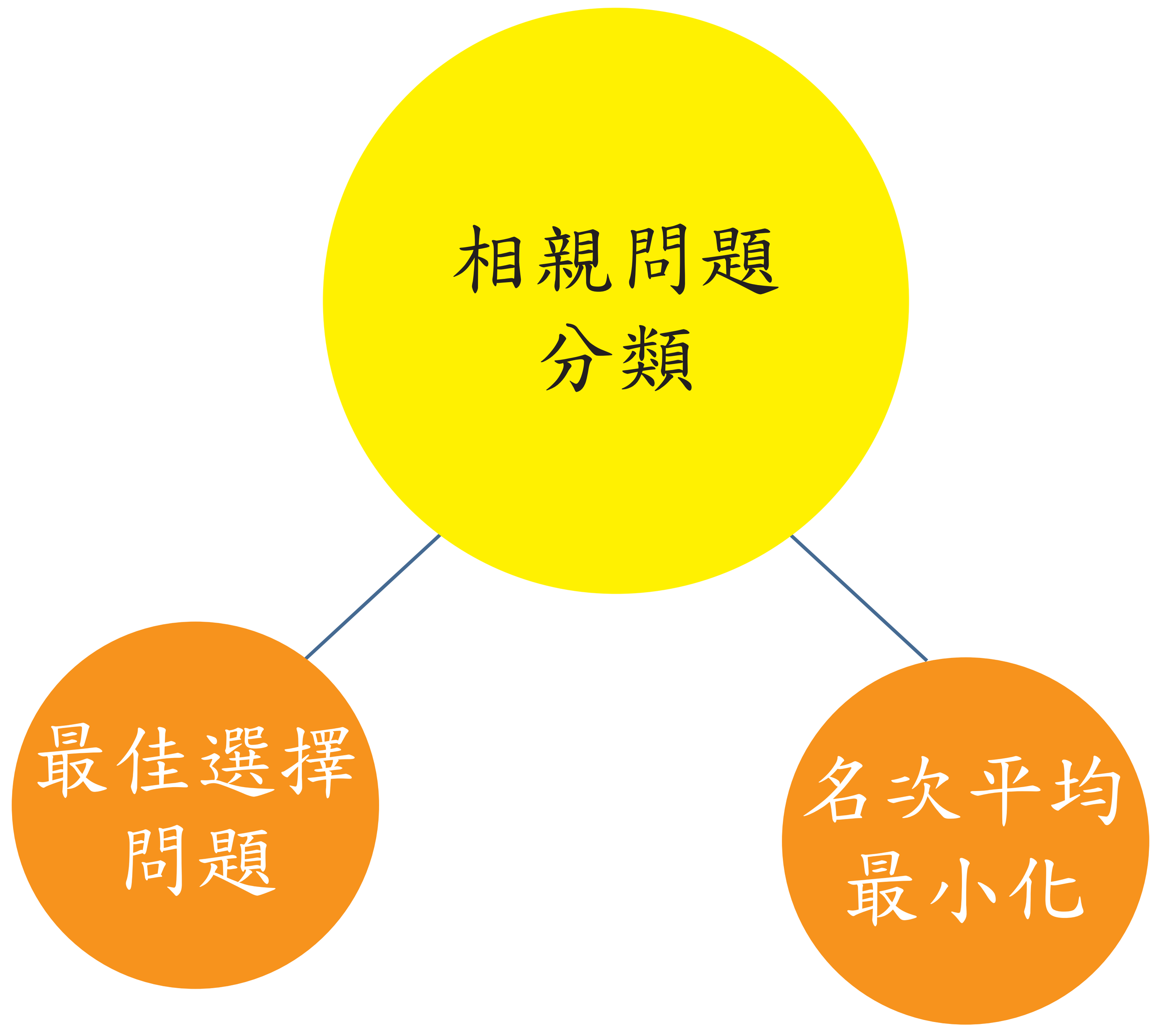


文獻探討

由訊息量區分：

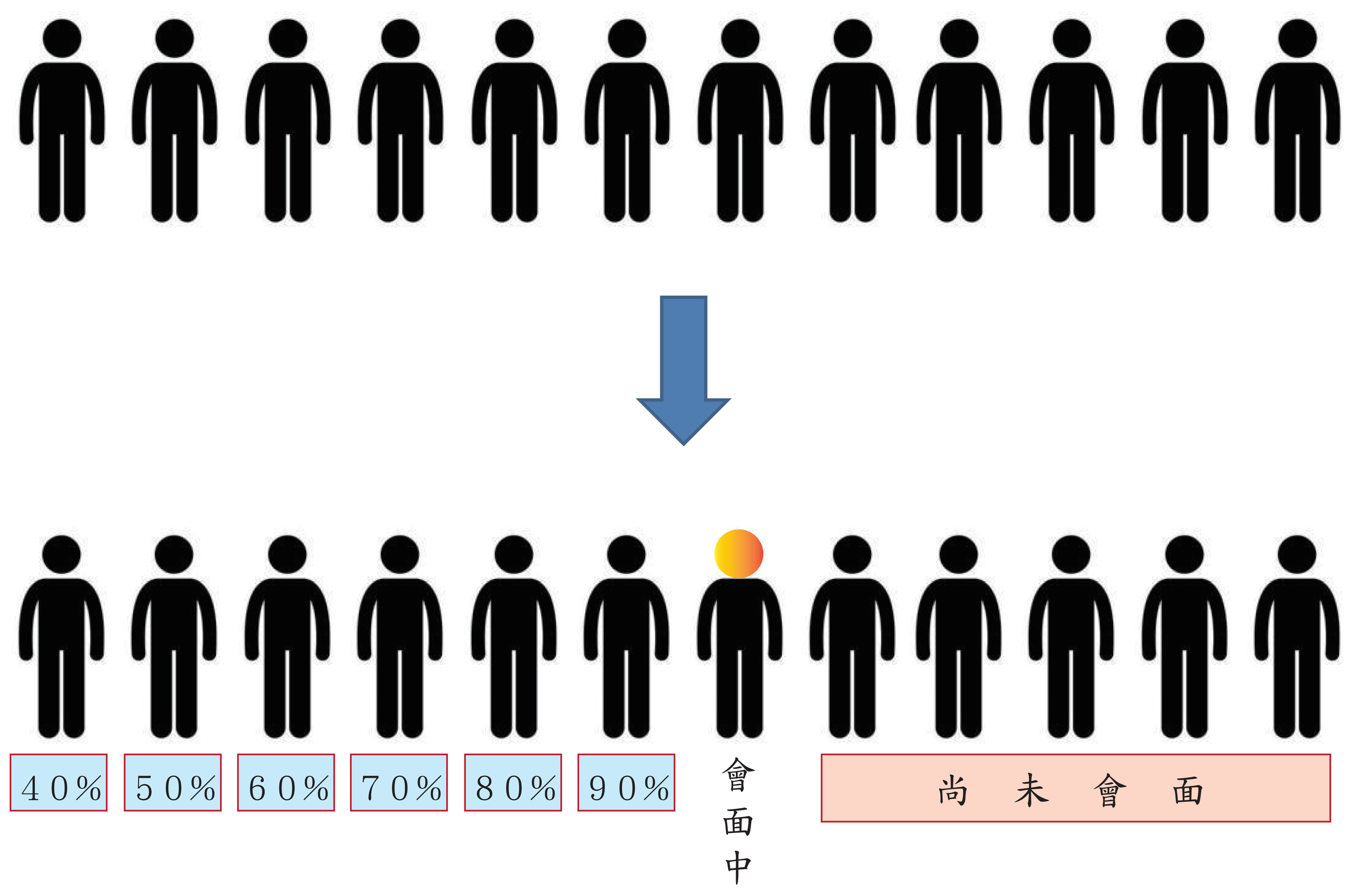


由所求解區分：



研究結果

情境假設：總數12人，遞減值為0.1



1. 所有候選人的總人數 N 為我方已知條件
2. 從所有候選人中所能選取的對象僅有一人，也就是說我方僅能進行一次選取
3. 候選人將以隨機順序逐一與我方進行會面，因此總共會$N!$種的可能會面順序發生
4. 我方有能力對所有會面過的候選人給予相對評價，藉此得出他們之間的相對排名
5. 依據這個相對排名，來判斷選取或拒絕當下之候選人
6. ~~過去一度拒絕的對象無法再次回頭選取~~
7. 在這種情況下，期望最大化選中所有候選人中最優秀的第一名，其最佳策略為？

6. 能夠遵從某已知機率，回頭選取一度拒絕過的對象。該機率隨時間(額外會面人數)遞增而遞減，每次遞減之值固定，如左圖。

符號定義

我們定義 (r,s) 序組為會面到第 r 位候選人，相對第一距離目前候選人位置為 s 的情形。
並使用 $P_f(r,s)$ 、$P_b(r,s)$ 來分別表示 (r,s) 情況下繼續會面下一位對象與選擇當前對象的遊戲成功機率。
最後各自得出及定義如下：

$$P_f(r,s)=\frac{1}{r+1}P(r+1,0)+\frac{r}{r+1}P(r+1,s+1)\text{。}\quad P_b(r,s)=\frac{r}{N}\times q(s)+(1-q(s))P(r,\infty)\text{。}$$

$$q(s)=1-s\delta \ \ if\ \ s\le\tau\text{。}\quad q(s)=0\ if\ \ s>\tau\text{。}\quad \tau=max\left\{k\,\middle|\,q(k)>0\right\}\text{。}$$

定理5（將此情況下最佳停止點時機與經典相親問題相比，只會相對延後或同時，絕不提前）

定義r^*為符合以下關係式的唯一正整數，我們可得在前 r^* 位候選人中絕不進行選取動作。

$$r^*=max\left\{k\,\middle|\,\sum_{j=k}^{N}\frac{1}{j-1}\ge 1\right\}$$ 。此外，我們可知此 r^* 同時也是經典相親問題之最佳停止點。

定理6（單次遞減值與總人數相比足夠小時之最佳策略）

若 $\delta\le\frac{1}{2N-3}$，則最佳策略應為在會面完所有對象前不做任何選擇，直到N位候選人都會面完後，才去選取此時的最優人選。這種情況下能夠選中實際第一的機率是 $\sum_{j=0}^{N-1}\frac{q(j)}{N}$。

定理7（對各時機下最佳停止點以及成功機率之求法給出公式）

對於此類能夠回去尋找先前所會面過之候選人，且能成功回去尋找之機率會隨著觀測位置移動以一固定機率遞減之最佳停止問題，最佳策略應是在觀測完一「決定數字」(Decision Number)位候選人後，選取當時的最優人選（如果需要的話會直接回頭），倘若本次選取失敗被拒絕，則繼續與下一位候選人會面，並在會面到任一新的最優人選後便直接選取該候選人。

而此決定數字r_0會是滿足以下算式的唯一整數。

$$r_0=min\left\{r\,\middle|\,r(1-\sum_{j=r+2}^{N}\frac{1}{j-1})-\frac{1}{\delta}+s>0\right\}$$，其中若 $s>\tau$，則此式s將被替換為τ。

也就是說，我們會將前r_0-1位候選人直接忽略，並在觀測第 位候選人時選取當時的最優人選，若是失敗，則繼續觀測會面下一位候選人，並在出現任一新的最優人選時採取選取動作。至於符合定理6的δ與N，則會使決定數字符合 $r_0\ge N$，因此定理6與定理7並不衝突。而依此最佳策略，我們的遊戲成功機率則為

$$P^{\Psi}(1,0)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{r_0-1}(q(k)\times(1-\sum_{j=r_0+1}^{N}\frac{1}{j-1}))+\frac{r_0}{N}\sum_{j=r_0+1}^{N}\frac{1}{j-1}$$

定理8（當初始成功機率不為1時，單次遞減值與總人數相比足夠小時之最佳策略）

若遞減值δ 能符合 $\delta\le\frac{q^2}{N+Nq-2q-1}$，則最佳策略為會面完所有候選人前，不做任何選擇動作，直到N 位候選人數都觀測結束後，才去選擇當時的最優人選。依此策略，能夠成功選中實際最大值的機率是 $\sum_{j=0}^{N-1}\frac{q(j)}{N}$ 。

定理9（當初始成功機率不為1時，各時機下最佳停止點）

在此類 $q(0)=q$ ，$q(s)=q-s\delta$ 的問題中，存在一決定數字r_0 為滿足以下列式的唯一整數

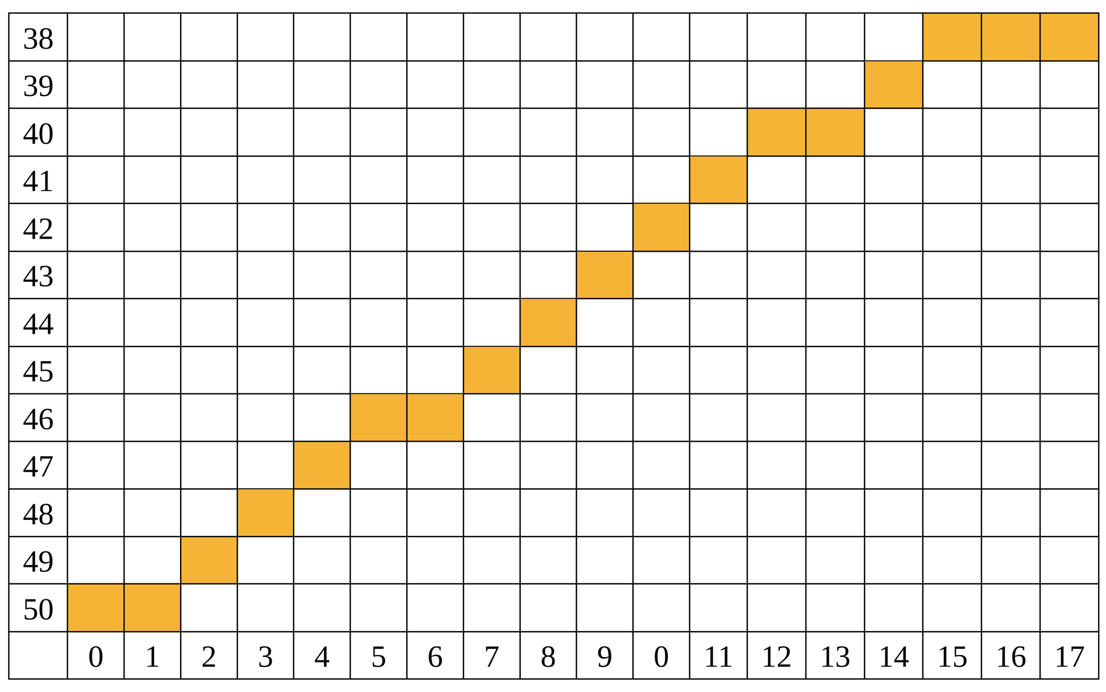
$$r_0=min\left\{r\,\middle|\,r(1-\sum_{j=r+2}^{N}\frac{1}{j-1})-\frac{q}{\delta}+s>0\right\}$$

所謂最佳策略便是在前r_0-1次中進行無條件的放棄，並在會面到第 r_0 位候選人時即刻尋找當時的最優人選。

數據表格

表一、經典相親問題實際成功機率

N	r^*	P
10	4	0.39869
50	19	0.37427
100	38	0.37104
200	74	0.36946
500	185	0.36851



圖一、最佳停止點變化圖（初始機率0.8，遞減機率0.05，總人數100人）

橫軸：相對第一距離當前候選人之編號差
當前候選人之編號差
縱軸：最佳停止點

表二、實際模擬成功機率(初始機率1)

δ \ N	10	50	100	200	500
1	0.39821	0.37479	0.37133	0.36992	0.36934
0.5	0.40609	0.37459	0.37393	0.36764	0.36988
0.3	0.43488	0.37601	0.37498	0.36853	0.36932
0.1	0.59545	0.38396	0.37436	0.37097	0.36744
0.01	0.95511	0.75630	0.56261	0.43767	0.37979
0.001	0.99584	0.97451	0.95135	0.90151	0.75123
0.0005	0.99766	0.98757	0.97576	0.94946	0.87544

表三、實際模擬成功機率(初始機率0.8)

δ \ N	10	50	100	200	500
0.8	0.35314	0.32389	0.32362	0.31904	0.31860
0.5	0.35821	0.32566	0.31868	0.32015	0.31773
0.3	0.37166	0.32166	0.32200	0.31992	0.31653
0.1	0.45684	0.33133	0.32556	0.32301	0.31938
0.01	0.75502	0.55911	0.43740	0.36329	0.32929
0.001	0.79529	0.77595	0.75173	0.70027	0.55364
0.0005	0.79747	0.79001	0.77631	0.75014	0.67416

表四、實際模擬成功機率(初始機率0.5)

δ \ N	10	50	100	200	500
0.5	0.25629	0.23288	0.22864	0.22867	0.22678
0.3	0.25928	0.23482	0.23116	0.22988	0.22864
0.1	0.28761	0.23931	0.23131	0.22943	0.22921
0.01	0.45319	0.31414	0.27414	0.24649	0.23497
0.001	0.49926	0.47640	0.44953	0.39768	0.31115
0.0005	0.49564	0.48874	0.47663	0.45104	0.37471
0.0002	0.49889	0.49635	0.48942	0.48260	0.45042

表五、實際模擬成功機率(初始機率0.3)

δ \ N	10	50	100	200	500
0.3	0.17415	0.15472	0.15298	0.15382	0.15230
0.1	0.18102	0.15717	0.15443	0.15606	0.15339
0.01	0.25515	0.18593	0.16870	0.16001	0.15595
0.001	0.29561	0.27511	0.25117	0.20486	0.18522
0.0005	0.29823	0.28918	0.27504	0.24918	0.19734
0.0002	0.29924	0.29392	0.28784	0.27921	0.25086
0.0001	0.29984	0.29783	0.29631	0.29079	0.27585

討論

在以上的數個定理中，我們先是對現有的相關文獻進行了一次探討，接著我們進一步思考當我們能夠回頭尋找先前候選人，會對整個相親問題產生怎麼樣的改變，並分別從以下三個觀點來對此展開研究。

(一)至少：此對應至定理5，說明在我們的假設下，此相親問題的最佳停止點相較於經典相親問題不會提前，也就是說，至少會會面完經典相親問題中的停止點前的對象。

(二)必然：此對應至定理6與定理8，我們尋找出在怎麼樣的情況下，會發生最佳停止點於所有候選人之外，使得我們必然會會面完所有對象後，再去選取當時的最優人選。

(三)最完整解：此對應至定理7與定理9，說明在各個假設下的最佳停止點，也就是決定數字的最完整求得公式，利用此決定數字來進行遊戲，將能夠使遊戲成功機率最大化。

結論與未來展望

至此我們已經對一個可回頭的遞減相親問題給予最佳解，期許此研究能夠優化我們對此類問題的抉擇，比起其他種解題切入點，這種方法只需中學數學程度而且簡潔有力。至於對未來的進一步發展，我們可以考慮往以下方面研究：

(1)候選人能力於(0,1)區間上均勻分布的可回頭問題

我們知道當我們對候選人的訊息增加時，往往能夠提升我們選中最優解的機率，因此我們開始思考在這情況下，回頭能對最佳策略帶來甚麼樣的改變。本未來發展已是我們至今一直期望能夠有所斬獲的領域，然能力有限，難以得出具體成果，僅盼自己能在未來對數學能有更加成熟的理解後，得出答案。

(2)更加簡易而易實行的方法來求出近似最佳解的策略

在楊城的論文中，提出了一種以三分決策法為名的近似最佳解之策略，其能達到正常最佳策略的95%效率。此處我們思考對於可回頭的相親問題，是否也能有一種利用推估的方式求出最佳解近似值，來達到盡可能簡單而又高效率的方法。

參考文獻

[1] 莊孟霏（2016）。**秘書問題與其新型推廣**。國立清華大學碩士學位論文。

[2] 賴以威（2015）。**超展開數學教室**。台灣：臉譜出版社。

[3] Gilbert, J. P., & Mosteller, F. (1966). Recognizing the Maximum of a Sequence. Journal of the American Statisticsal Association, 11(3), 504~512.

[4] Robbins, H. (1991). Remarks on the Secretary Problem. American Journal of Mathematical and Management Sciences, 11(1-2), 25–37.